Logaritma Fonksiyonu

Pozitif bir r reel sayısının doğal logaritmasını reel değişkenli fonk.lar teorisinde tanımlandığı gibi Komplex analizin logaritmik fonku $\mathrm{Log}\, r$ ile gösterelim.

$$\boxed{\log z := \mathrm{Log}\, r + i.\theta}$$

denklemi ile tanımlanır. Burada $r = |z|$ ve $\theta = \arg z$ dir.

Bu fonksiyon sıfırdan farklı tüm $z \in \mathbb{C}$ sayıları için tanımlı olan $\boxed{\text{çok değerli}}$ bir fonk.dur.

Eğer ϕ ile $\arg z$ nin esas değerini gösterirsek $(-\pi < \phi \leq \pi)$ o zaman $\theta = \phi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ olacağından

$$\boxed{\log z = \ln r + i.(\phi + 2n\pi)}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

şeklini alacaktır. Bu tanımdan görüldüğü gibi tanım kümesindeki herhangi z için $\log z$ nin değerleri, reel kısımları aynı ve sanal kısımları 2π nin tam katları kadar farklıdır.

$\log z$ nin esas değeri yukarıdaki formülden $n=0$ için elde edilen değerdir. Bu değer $\mathrm{Log}\, z$ ile gösterilir ve

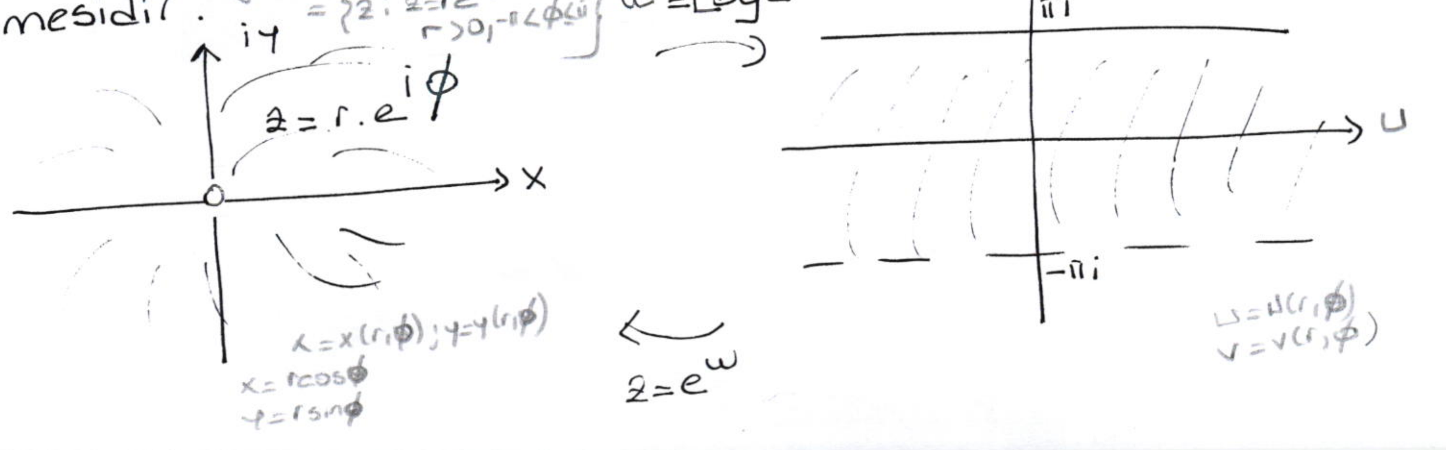
$$\boxed{\mathrm{Log}\, z := \ln r + i\phi}, \quad r > 0, \quad -\pi < \phi \leq \pi$$

denklemi ile verilir.

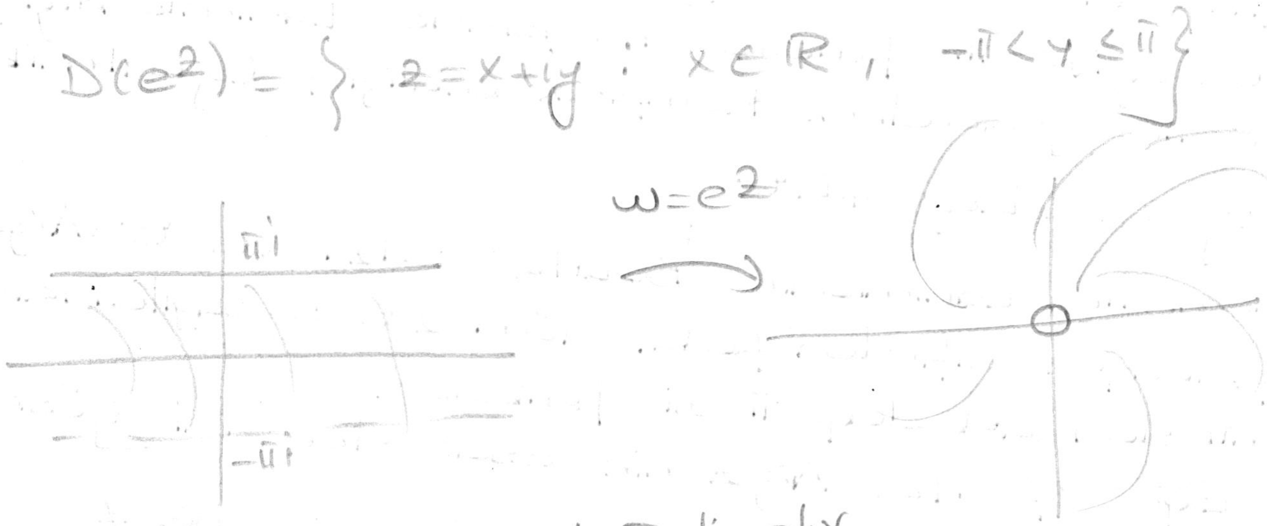
Bu durumda $w = \mathrm{Log}\, z$ dönüşümü (1-1) tek değerli ve tanım kümesi sıfırdan farklı tüm komplex sayıların kümesidir.

$D(\mathrm{Log}\, z) = \{z \neq 0, z \in \mathbb{C}\} = \{z : z = re^{i\phi},\ r > 0, -\pi < \phi \leq \pi\}$

$R(\mathrm{Log}\, z) = \{w = u + iv : u = \ln r,\ v = \phi\}$



$D(e^z) = \{ z = x+iy : x \in \mathbb{R},\ -\pi < y \leq \pi \}$

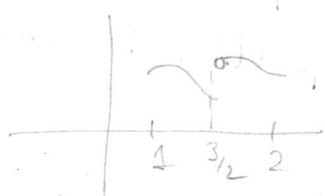


Dön. 1–1 ve tek değerli olur.

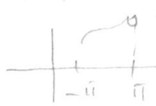
$-\pi < \phi \leq \pi$ ve $v = \phi$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} -\pi < v \leq \pi \text{ olur.} \\ u = \ln r \end{cases}$

$u = \ln r$

Örneğin $f(x)$



$f(x)$, $[1,2]$ tanımlı.
$x = 3/2$ de sür. değildir.



(3) Eğer $\mathrm{Log}\,z$ in tanım kümesi ve reel eksene kısıtlanırsa, tek reel değişkenli fonk teorisinden bilinen doğal logaritmaya indirgenir:

$z = r \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow |z| = r$ ve $\phi = 0°$ olacağından

$\mathrm{Log}\,z = \mathrm{Log}\,r = \ln r + i.(0) = \ln r$ olacaktır. Daha önce üstel fonk. bölümünde, $z = e^w$ denkleminin, z-düzlemindeki sıfırdan farklı noktalarla, w-düzleminin $-\pi < \mathrm{Im}\,w \leq \pi$ şeridindeki noktalar arasında 1-1 eşleme sağladığını görmüştük. z-düzlemindeki $z = r.e^{i\phi}$ noktası ($w = \mathrm{Log}\,z$ dönüşümü altında) w-düzlemindeki $w = \ln r + i\phi$ noktasına karşılık gelir.

O halde e^w fonk.nun tanım kümesi, $-\pi < \mathrm{Im}\,w \leq \pi$ şeridine kısıtlandığı zaman onun tersi esas logaritma fonk.u $\mathrm{Log}\,z$ dir. Yani

$$w = \mathrm{Log}\,z \iff z = e^w, \quad -\pi < \mathrm{Im}\,w \leq \pi$$

$z = e^w$ tasviri z-düzlemindeki sıfırdan farklı nok.lar ile w-düzlemindeki $(2k-1)\pi < \mathrm{Im}\,w \leq (2k+1)\pi$ (k sbt. bir tamsayı) şeridinde kalan nok.lar arasında 1-1 eşleme sağlanır. e^w fonk.nun tanım kümesi bu şeride kısıtlandığında ters fonk., $\log z = \ln r + i.(\phi + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$ formülünde $n = k$ yazarak elde edilir.

Log z nin Dalları

$\mathrm{Log}\,z = \ln r + i\phi$, $r > 0$, $-\pi < \phi \leq \pi$ fonksiyonu $r > 0$, $-\pi < \phi < \pi$ bölgesinde süreklidir. Bu ise $u(r,\phi) = \ln r$, $v(r,\phi) = \phi$ bileşen fonksiyonları göz önüne alınarak görülebilir.