LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$

....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = B$$

i. Denklemlerin Matrisler Yardımıyla Çözümü

Gauss-Jordan Yöntemi

$$(A \,\vdots\, B) = \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

için

a) $r_A \neq r_{[A \,\vdots\, B]}$ için çözüm yoktur.

b) $r_A = r_{[A \,\vdots\, B]}$ için çözüm vardır.

c) m=n için $r_A = r_{[A \,\vdots\, B]}$ ve $r_A = n$ çözüm tek (m=n için)

d) m=n için $r_A = r_{[A \,\vdots\, B]}$ ve $r_A < n$ çözüm sonsuz ve $(n - r_A)$ adet parametreye bağlıdır.

Örnek: Aşağıdaki denklem sisteminin çözümü var mıdır? Neden? Çözümü bulunuz.

$$-2x_1 + x_2 + 5x_3 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$
$$3x_1 + 2x_3 = 1$$

Denklem sistemi için artırılmış matrisi ele alalım ve belirli elementer satır işlemleri (örneğin, $H_{12}, H_{21}(2), H_{31}(-2), \ldots$) sonucunda,

$$\left(A \;\vdots\; B\right)=\left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 35/215 \\ 0 & 1 & 0 & 10/215 \\ 0 & 0 & 1 & 11/43 \end{array}\right)$$

bulunur ve $r_A = r_{[A \,\vdots\, B]} = 3$ olduğu için çözüm var ve tektir. Son matristen çözüm,

$$x_3 = 0.2558,\ x_2 = 0.0465,\ x_1 = 0.1628$$

bulunur.

Örnek: Aşağıdaki denklem sisteminin çözümü var mıdır? Neden?

$$3x_1 + 2x_2 = 7$$
$$17x_1 + x_2 = 0$$
$$6x_1 + 4x_2 = 3$$

için $r_A = 2 \neq r_{[A \,\vdots\, B]} = 3$ olduğundan çözüm yoktur.

Örnek: Aşağıdaki denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$
$$2x_2 + 7x_3 = 4$$
$$3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 3$$

Denklem sistemi için artırılmış matrisi ele alalım ve belirli elementer satır işlemleri sonucunda,

$$\left(A \;\vdots\; B\right)=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

bulunur ve $r_A = r_{[A \,\vdots\, B]} = 2 < 3$ olduğu için 1 (=3-2) parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır.

ii. Lineer Homojen denklem Sistemleri

Ax=B denklem sisteminde eğer $B = 0$ olmasıdır. Ax=0 denklem sisteminin her zaman çözümü vardır; çözüm bazen tek bazen de sonsuzdur.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0$$

……………

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = 0$$

için

a. $r_A = n$ ise çözüm tektir ve sadece $x = 0$ aşikar çözüm vardır.

b. $r_A < n$ ise aşikar çözüm dışında çözüm vardır ve parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır.

c. $\det(A) = |A| \neq 0$ ise çözüm tektir ve aşikar çözüm vardır.

d. $\det(A) = |A| = 0$ ise çözüm sonsuzdur yani, aşikar çözüm dışında çözümler vardır.

iii. Cramer Yöntemi

Ax=B denklem sistemi n bilinmeyen, n denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi verilmiş olsun. A_i, A matrisinin i. sütün elemanları yerine B matris elemanlarının konulmasıyla elde edilen matris ile $\Delta_i = |A_i|$ ve $\Delta = |A|$ ise,

$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ olarak bulunur.

iv. İnvers Yöntemi

Ax=B denklem sistemi n bilinmeyen, n denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi verilmiş olsun.

$$A^{-1}Ax = A^{-1}B \Rightarrow x = A^{-1}B$$

olarak belirlenir. Burada $A^{-1}\left(= AdjA/|A|\right)$, A matrisinin inversi'dir.

v. Gauss Eliminasyon Yöntemi

Verilen denklem sistemin matrisyel formundan artırılmış matris belirlenerek, elementer satır işlemleri yardımıyla bu artırılmış matrise ait satırca indirgenmiş eşelon form veya normal form elde edilir. Bulunan denk matris yardımıyla çözüm kolayca belirlenir.

a. Birinci denklemin ilk elemanı "1"

b. "1" in sütünü ve "1"in altında kalan diğer elemanlar sıfırdır.

c. 2. Satırın ilk elemanı sıfır, sıfırdan farklı ilk elemanı "1" ve bulunduğu sütun numarası 2 veya daha büyüktür.

d. 1" in bulunduğu sütundaki diğer sütun elemanları sıfırdır.

e. Sonra gelen her satır için sıfırdan farklı ilk eleman "1" ve bulunduğu sütün numarası, bir üstündeki satırdaki "1" elemanının bulunduğu sütun numarasından büyüktür.

f. 1" in bulunduğu sütundaki diğer sütun elemanları sıfırdır.

g. Bu kurallar diğer tüm satırlar içinde geçerlidir.

vi. Jacobi-İterasyon Yöntemi

Verilen lineer denklem sistemi,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \qquad x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - ... - a_{1n}x_n\right)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - ... - a_{2n}x_n\right)$$

…………… ……………

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n$$

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 + ... + a_{n(n-1)}x_{(n-1)}\right)$$

için ardışık iterasyonlar ile belirlenir. İterasyona başlamak için kullanılan ilk değerler x_{i0} alınırsa, sonraki iterasyon için değişkenlerin değerleri

$$x_{11} = \frac{1}{a_{11}}\left(-a_{12}x_{20} - ... - a_{1n}x_{n0}\right)$$

$$x_{21} = \frac{1}{a_{22}}\left(-a_{21}x_{10} - ... - a_{2n}x_{n0}\right)$$

……………

$$x_{n1} = \frac{1}{a_{nn}}\left(-a_{n1}x_{10} - a_{n2}x_{20} + ... + a_{n(n-1)}x_{(n-1)0}\right)$$

den belirlenir. Dolayısıyla sonraki iterasyondaki değişkenlerin değeri (yukarıdaki eşitliğin sol tarafı), bir önceki iterasyonda bulunan değerlerin eşitliğin sağ tarafında yerine yazılmasıyla belirlenir. Yani,

$$x^{(0)} = \begin{Bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ ... \\ x_{n0} \end{Bmatrix}, \; x^{(1)} = \begin{Bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ ... \\ x_{n1} \end{Bmatrix}, \ldots, \; x^{(n)} = \begin{Bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ ... \\ x_{nn} \end{Bmatrix}, \ldots$$

veya kısaca,

$$x^{(k)} = B - Ax^{(k-1)}$$

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} a_{ij}x_i^{(k-1)}\right), \text{ k=1,2,..}$$

dir. Burada k iterasyon numarası, n kare matrisin boyutudur. Bu iterasyonların sayısı, belirlenen x_i değerlerinin istenen yaklaşıklığa ulaşmasına kadar sürdürülür; iterasyon sonlandırma koşulu $\left\| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right\| < \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1$ verilen değer) dir. Ancak bu yöntemde yaklaşım hızı düşüktür ve çok sayıda iterasyon yapılmasını gerektirmektedir.

vii. Gauss-Seidel İterasyon Yöntemi

Bu yöntem Jacobi iterasyon yönteminin geliştirilmesi olarak düşünülebilir. Bu yöntemde üst satırda bulunan yeni değer sonraki satırlarda yerine yazılarak, iterasyon sayısı ve yaklaşım hızı artırılmaktadır. Buna göre,

$$x_{11} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_{20} - \ldots - a_{1n}x_{n0}\right)$$

$$x_{21} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_{11} - \ldots - a_{2n}x_{n0}\right)$$

$$x_{31} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_{11} - a_{32}x_{21} - a_{34}x_{40} - \ldots - a_{3n}x_{n0}\right)$$

....

$$x_{n1} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_{11} - a_{n2}x_{21} - \ldots - a_{n(n-1)}x_{(n-1)1}\right)$$

şeklinde belirlenir.

Örnek: Aşağıdaki denklem sisteminin çözümünü $\left| x_k^{(i+1)} - x_k^{(i)} \right| < \varepsilon = 10^{-4}$ yaklaşıklıkla Jacobi iterasyon ve Gauss-Seidel Yöntemlerini kullanarak bulunuz.

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 4x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + x_3 + 4x_4 &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4}\left(1 - x_2 - x_3\right) \\ x_2 &= \frac{1}{4}\left(2 - x_1 - x_4\right) \\ x_3 &= \frac{1}{4}\left(-x_1 - x_4\right) \\ x_4 &= \frac{1}{4}\left(1 - x_2 - x_3\right) \end{aligned}$$

Jacobi İterasyon Yöntemi ile elde edilen çözümler

İter. No	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0
1	0,25	0,5	0	0,25
2	0,125	0,375	-0,125	0,125
3	0,1875	0,4375	-0,0625	0,1875
…	….	…..	…..	….
12	0,1666	0,4166	-0,0834	0,1666
13	0,1667	0,4167	-0,0833	0,1667

Gauss-Seidel Yöntemi ile elde edilen çözümler

İter. No	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	0
1	0,25	0,4375	-0,625	0,1563
2	0,1563	0,4219	-0,781	0,1641
3	0,1641	0,4180	-0,0820	0,1660
4	0,1660	0,4170	-0,0830	0,1665
5	0,1665	0,4167	-0,0833	0,1667
Kesin Çöz.	0,1667	0,4167	-0,0833	0,1667

Kötü Şartlılık (Koşulluluk)

Bazı denklem sistemlerinin çözümünde en iyi algoritmalar için bile, yuvarlatma hataları çözümü çok etkileyebilir.

Örneğin,

$$\begin{aligned}7x_1+10x_2&=1\\5x_1+7x_2&=0,7\end{aligned}$$ için çözüm $x_1=0,\ x_2=0,1$ dir.

Bu sistem için sağ taraf değerlerinde yapılacak küçük bir değişiklik ile sistem,

$$\begin{aligned}7x_1+10x_2&=1,01\\5x_1+7x_2&=0,69\end{aligned}$$ için çözüm $x_1=-0,17,\ x_2=0,22$ bulunur.

Dolayısıyla, sistemin sağ tarafında yapılan küçük bir değişme nazaran çözümdeki bağıl değişim çok büyüktür.

Ax=B şeklindeki lineer denklem sistemini düşünürsek, sağ taraf matrisi değerlerindeki küçük bir değişime karşılık gelen bağıl değişim çözümde çok büyük değişikliğe neden oluyorsa, bu sisteme “**kötü şartlı**” denir. Ölçüsü ise **şart sayısı (Cond)** ile tanımlanır.

$Cond(A) = \|A\| \times \|A^{-1}\|$ değeri “1” den ne kadar büyük olursa, o kadar kötü şartlıdır denir.

Yani, $Cond(A) \to 1$ için A matrisi kötü şartlı değildir. Buna göre yukarıdaki matrisin şart sayısına bakalım.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \; ve \; A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = \max(17,12) = 17$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max(17,12) = 17$$

$Cond(A) = \|A\| \times \|A^{-1}\| = 17*17 = 289 \gg 1$ dır.

Örnek: Aşağıda verilen matrisin şart sayısını bulunuz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ için } A^{-1} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 23 & 6 & 7 \\ -16 & 8 & 0 \\ -1 & -10 & 7 \end{pmatrix}$$

a. Sonsuz normu için

$$\|A\|_\infty = \max(4,7,12) = 12$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max\left(\frac{36}{56}, \frac{24}{56}, \frac{18}{56}\right) = \frac{36}{56} = \frac{9}{14}$$

$Cond(A) = \|A\| \times \|A^{-1}\| = 12\frac{9}{14} = \frac{54}{14} \gg 1$ dır.

b. Sütun normu kullanılırsa,

$$\|A\|_1 = \max(6,9,8) = 9$$

$$\|A^{-1}\|_1 = \max\left(\frac{40}{56}, \frac{24}{56}, \frac{14}{56}\right) = \frac{5}{7}$$

$Cond(A) = \|A\| \times \|A^{-1}\| = 9\frac{5}{7} = \frac{45}{7} \gg 1$ dır.

VEKTÖR VE MATRİS NORMLARI

Tanım: vektör normları $\mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}$ 'e tanımlı ve $\|\bullet\|$ ile gösterilen bir fonksiyon olup aşağıda verilen özelliklere sahiptir.

i. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ \|\vec{x}\| \geq 0$

ii. $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = (0,0,...,0)^T \equiv \vec{0}$ dır.

iii. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ve $\vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ \|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\|$

iv. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ve $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

$\mathbb{R}^n$ deki vektörler sütun vektörleri olduğundan bu vektörleri türünden ifade ederken notasyon gereği sütun vektörlerin transpozesi kullanılmıştır.

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^T$ şeklinde yazılmıştır.

Bir $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ vektörü için en sık kullanılan normlar:

a. p normu $I_p = \|\vec{x}\|_p = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right]^{1/p}$

b. mutlak norm $\ell_1 = \|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

c. Öklid normu $\ell_2 = \|\vec{x}\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{1/2}$

d. Maksimum norm $\ell_\infty = \|\vec{x}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$

Bir $A_{n\times n} = \left[a_{ij}\right]$ matrisi için en sık kullanılan normlar:

a. Sütun normu

$$\|A\|_1 = \max_{0\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} \left|a_{ij}\right|$$

b. Satır normu

$$\|A\|_\infty = \max_{0\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|$$

c. Spektral normu,

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

d. Euclid normu

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2} = \sqrt{tr(A^T A)} = \sqrt{tr(AA^T)}$$

e. ℓ_p normu

$$\|A\|_p = \left(\sum_{j,j} |a_{ij}|^p \right)^{1/p}, \ 1 \le p < \infty$$

Matrisin şartlılığı (condition):

Ax=b sisteminde b matrisindeki Δb ufak değişikliğin x çözümünde yaratacağı Δx araştıralım. Yani,

$A(x+\Delta x) = b + \Delta b$ için $Ax + A\Delta x = b + \Delta b$ veya $A\Delta x = \Delta b$ olur. Buradan $\Delta x = A^{-1}\Delta b$ olur.

$$\left\|A^{-1}\Delta b\right\| \le \left\|A^{-1}\right\| \|\Delta b\| \Rightarrow \|\Delta x\| \le \left\|A^{-1}\right\| \|\Delta b\|$$

Diğer taraftan,

$\|Ax\| \le \|A\| \|x\| \Rightarrow \|b\| \le \|A\| \|x\|$ dir. Son iki eşitsizliği ele alırsak,

$\dfrac{\|\Delta x\|}{\|A\| \|x\|} \le \dfrac{\left\|A^{-1}\right\| \|\Delta b\|}{\|b\|}$ sağlanır. Buradan,

$\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \underbrace{\|A\| \left\|A^{-1}\right\|}_{Cond(A)} \dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = Cond(A) \dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \Rightarrow \dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le Cond(A) \dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$ bulunur. Yani Cond (A) ne kadar küçük olursa b vektöründeki değişim, çözümde daha küçük değişime neden olur (iyi şartlılık) ama Cond(A) çok büyük olursa, b vektöründeki değişim küçük olsa bile, çözümde çok büyük değişimler olacağını gösterir.

Diğer taraftan katsayılar matrisindeki ufak değişikler $(A + \Delta A)$ için çözüm $(x + \Delta x)$ de değişecektir. Bu durumda $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$ için yukarıda yapılan benzeri işlemler ile,

$\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \le Cond(A) \dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ bulunur.

$1 = \|I\| = \left\|AA^{-1}\right\| \le \|A\| \left\|A^{-1}\right\| = Cond(A)$ için $Cond(A) \ge 1$ olacağı görülür.