Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar

Tanım (Üstel Fonksiyon) : $a>0$ o.ü $f(x)=a^x$ şeklindeki fonksiyona üstel fonk. denir. Üstel fonk. a^x tamsayılar ve rasyonel sayılar için aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$x=0$ ise $a^0=1$

$x=n\in\mathbb{N}$ ise $a^n=\underbrace{a.a\ldots a}_{n \text{ çarpan}}$

$x=-n$, $n\in\mathbb{N}$ ise $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

$x=\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ $(n\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{Z})$ ise $a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}$

Not: x in irrasyonel sayı olması durumunda a^x üstel fonksiyonu rasyonel kuvvetler için yapılan tanımı kullanarak, şimdilik,

$$a^x=\lim_{\substack{r\to x\\ (r \text{ rasyonel})}} a^r$$

şeklinde tanımlayabiliriz. ($\lim\limits_{r\to x}$ sembolü burada x e giderek yaklaşan r rasyonel sayılarının alınacağını gösterir.)

Örnek: $\pi=3,14159265359\ldots$, irrasyonel sayısına rasyonel sayıların

$r_1=3$, $r_2=3,1$, $r_3=3,14$, $r_4=3,141$, $r_5=3,1415, \ldots$

$\ldots$ şeklinde oluşturulmuş dizisiyle yaklaşabileceğimizden

2^{π} sayısını bu diziyi kullanarak yaklaşık olarak hesaplaya biliriz:

$$2^3 = 8 \;,\quad 2^{3.1} = 8,5741877\ldots \;,\quad 2^{3.14} = 8.8152409\ldots$$

Buradan

$$2^{\pi} = \lim_{n \to \infty} 2^{r_n} = 8.824977827\ldots$$

olarak yazabiliriz.

Özellikler: Eğer $a>0$, $b>0$ ve $x, y \in \mathbb{R}$ ise o zaman

i) $a^0 = 1$

ii) $a^{x+y} = a^x a^y$

iii) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

iv) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

v) $(a^x)^y = a^{xy}$

vi) $(ab)^x = a^x b^x$

Tanım (Logaritma Fonksiyonu): $a>0$ ve $a \neq 1$ olması koşuluyla $f(x) = a^x$ fonksiyonu 1-1 bir fonksiyondur. Böylece f'in bir tersi vardır. Buna logaritma fonksiyonu diyeceğiz, ve bu fonksiyonu $\log_a x$ ile göstereceğiz. Sembolik olarak bu ilişkiyi

$$y = \log_a x \iff x = a^y \qquad (a>0,\ a \neq 1)$$

şeklinde ifade ederiz. Burada a'ya logaritmanın tabanı denir.

a^x in tanım kümesi $(-\infty,\infty)$ olduğundan $\log_a x$ 'in değer bölgesi $(-\infty,\infty)$, a^x'in değer bölgesi $(0,\infty)$ olduğundan $\log_a x$ 'in tanım bölgesi $(0,\infty)$ dır.

Özellikler : Eğer $a>0$, $b>0$, $x>0$, $y>0$, $a\neq 1$, $b\neq 1$ ise ;

i) $\log_a 1 = 0$

ii) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

iii) $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$

iv) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

v) $\log_a (x^y) = y \log_a x$

Not! Sadece pozitif sayıların logaritması vardır. Dolayısıyla tanım kümesi $(0,\infty)$ aralığıdır.

Logaritma fonksiyonu $a>1$ için artan, $0<a<1$ için azalan fonksiyondur.

Örnek: Aşağıdaki ifadeleri basitleştiriniz.

a) $\log_2 10 + \log_2 12 - \log_2 15$

b) $\log_{a^2} a^3$

c) $3^{\log_9 4}$

Çözüm : a) $= \log_2 10.12 - \log_2 15 = \log_2 \frac{\overset{2}{\cancel{10}}.\overset{4}{\cancel{12}}}{\cancel{15}} = \log_2 8 = 3$

b) $\log_{a^2} a^3 = \frac{3}{2} \log_a a = \frac{3}{2}$

c) $3^{\log_{3^2} 2^2} = 3^{\log_3 2} = 2$