T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAYIF ASAL ALT MODÜLLER

Yasemin ŞİMŞEK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Haziran, 2023

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAYIF ASAL ALT MODÜLLER

Yasemin ŞİMŞEK tarafından hazırlanan tez çalışması 14.06.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Erdoğan Mehmet ÖZKAN, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Ünsal TEKİR, Üye
Marmara Üniversitesi _____

Danışmanım Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Zayıf Asal Alt Modüller başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Yasemin ŞİMŞEK

Bu çalışma, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Proje Koordinatörlüğü'nün FYL-2022-5165 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

Sevdiklerime

TEŞEKKÜR

Öncelikle lisans eğitimimden bu yana üzerimde emeği olan, her türlü soru ve sorunumda içtenlikle çözüm önerisi sunan, yoluma ışık tutan; bu tez çalışmasının da hazırlanmasında beni yönlendiren ve çalışmamın daha anlaşılır hale gelmesi için yardımlarını esirgemeyen, ömrüm boyunca kendisine minnet duyacağım değerli hocam Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT'a çok teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim süresince bana burs desteği vererek finansal anlamda yanımda olan, bilimin ve bilim insanının destekçisi TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunmak isterim.

Son olarak bana her konuda güvenen ve yanımda olan arkadaşlarıma teşekkür eder ve en zor zamanlarımda beni sarıp sarmalayan, bana güç veren aileme en içten duygularımla sevgi ve saygılarımı sunarım.

Yasemin ŞİMŞEK

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ **vii**

ÖZET **viii**

ABSTRACT **ix**

1 GİRİŞ **1**

1.1 Literatür Özeti 1

1.2 Tezin Amacı 2

1.3 Hipotez 2

2 ÖN BİLGİLER **3**

2.1 Halkalar ve İdealler 3

2.2 Halka Homomorfizmaları 6

2.3 Maksimal, Asal ve Asalımsı İdealler 7

2.4 Asal ve Zayıf Asal İdeallerin Özellikleri 11

2.5 Modüller ve Alt Modüller 17

3 ASAL ALT MODÜLLER **23**

4 ZAYIF ASAL ALT MODÜLLER **28**

5 SONUÇ **40**

KAYNAKÇA **41**

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR **43**

SİMGE LİSTESİ

$A \setminus B$	A da olup B de olmayan elemanların kümesi (A fark B)
$\emptyset$	Boş Küme
R/I	Bölüm Halkası
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$boy_F M$	F cismi üzerindeki M vektör uzayının boyutu
Çek$f$	f fonksiyonunun çekirdeği
$Rad(I)$	I idealinin radikali
$\sqrt{I}$	I idealinin radikali
$Var(I)$	I idealinin varyetesi
Ω	İndis Kümesi
$Ann(J)$	J idealinin annihilatörü (sıfırlayıcısı)
$(N : a)$	Kolon alt modül
$(I : J)$	Kolon ideal
$Ann(M)$	M modülünün annihilatörü (sıfırlayıcısı)
$\tau(M)$	M nin burulmalı alt modülü
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$dim(R)$	R halkasının Krull boyutu
$\sqrt{0}$	R halkasının nilradikali
$Spec(R)$	R halkasının spektrumu
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi

ÖZET

Zayıf Asal Alt Modüller

Yasemin ŞİMŞEK

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır. Bu tez boyunca bahsi geçen tüm R halkaları, aksi belirtilmedikçe birimli ve değişmelidir.
Bu tezin GİRİŞ bölümünde literatür özeti, tezin amacı ve hipotez ortaya koyulmuştur. İkinci bölüm olan ÖN BİLGİLER kısmında çalışmanın anlaşılabilirliği için gerekli temel cebir bilgileri sırasıyla: Halkalar ve idealler; Halka Homomorfizmaları; Maksimal, Asal ve Asalımsı İdealler; Asal ve Zayıf Asal İdeallerin Özellikleri; Modüller ve Alt Modüller alt başlıkları altında verilmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünde asal alt modüller, temel tanım ve özellikleri ile incelenmiştir. Tezin ana bölümü olan dördüncü bölümde ise zayıf asal alt modül kavramı verilip, asal ve zayıf asal alt modüller arasındaki benzer ve farklı özelliklere ve çarpımsal modüllerin zayıf asal alt modüllerinin özelliklerine değinilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Asal, asal alt modüller, zayıf asal alt modüller.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

Weakly Prime Submodules

Yasemin ŞİMŞEK

Department of Mathematics
Master of Science Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Gürsel YEŞİLOT

This thesis consists of 5 chapters. Throughout this thesis, all R rings mentioned, unless otherwise stated, are assumed to be unitary and commutative.
In the introduction of this thesis, the summary of the literature review, the purpose of the thesis and the hypothesis are presented. In the second chapter, which is the preliminaries section, the necessary basic algebraic knowledge for the comprehensibility of the study is given under the subheadings: Rings and Ideals; Ring Homomorphisms; Maximal, Prime and Primary Ideals; Properties of Prime and Weakly Prime Ideals; Modules and Submodules. In the third chapter of the study, prime submodules are examined with their basic definitions and properties. The main chapter of the thesis, the fourth chapter, introduces the concept of weakly prime submodules and discusses the similarities and differences between prime and weakly prime submodules, as well as the properties of weakly prime submodules of multiplication modules.

Keywords: Prime, prime submodules, weakly prime submodules.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Modüller Teorisi, cebirin pek çok alt alanı ile yakından ilişkilidir. Modül kavramının "vektör uzayı" tanımının bir genişlemesi olarak ortaya çıktığı düşünülürse lineer cebir teorisinde önemli bir rolü olması kaçınılmazdır. Bununla birlikte grup teorisi ve halka teorisinin ileri düzeyi için büyük öneme sahiptir ve graf teori, kategori teorisi, homolojik cebir, cebirsel geometri gibi alanlar için de bir temel niteliğindedir.

Zayıf asal eleman kavramı Steven Galovich ve Michael Goldberg tarafından [1]'de tanımlanmış ve daha sonra Ahmet Göksel Ağargün, D. D. Anderson ve Silvia Valdes-Leon tarafından [2]'de zayıf asal ideal kavramı geliştirilmiştir. D. D. Anderson ve Eric Smith'in "$Weakly\ Prime\ Ideals$" başlıklı makalesi zayıf asal ideallerin karakterize edilmesi açısından literatürde önemli bir yer tutmaktadır [3]. Bu çalışmada asal ideallerde sağlanan bazı özellikleri, zayıf asal ideal yapısı için genellemek amaçlanmıştır. Bu çalışmadan yararlanarak S. E. Atani ve F. Farzalipour, 2005'te zayıf asalımsı ideal kavramı üzerinde çalışmış ve sonrasında da bu çalışmaları zayıf asalımsı alt modül kavramı üzerinde genişletmiştir [4]. Ayrıca bu ikili, 2007'deki "$On\ Weakly\ Prime\ Submodules$" [5] makalesinde de, zayıf asal idealler için daha önce [3]'te verilen bazı sonuçları, zayıf asal alt modüller için ispatlamayı amaçlamıştır. Atani ve Farzalipour bu makalede, aslında ilk olarak M. Behboodi ve H. Koohy tarafından [6]'da verilen "Zayıf Asal Alt Modül" tanımını kullanmak yerine, bu tanıma denk yeni bir zayıf asal alt modül tanımı sunmuşlardır. M. Behboodi ve H. Koohy'nin yaptığı tanıma benzer olarak A. Azizi de [7, 8] çalışmalarında denk tanımlar kullanmıştır ve bu çalışmalar zayıf asal alt modüllerin karakterizasyonu açısından önemli bir yere sahiptir.

A. Barnard tarafından [9]'da tanımı yapılan "Çarpımsal Modüller" üzerinde de [10–12] gibi bir çok çalışma yapılmıştır ve Reza Ameri'nin çarpımsal modüllerin asal alt modüllerini incelediği "$On\ the\ Prime\ Submodules\ of\ Multiplication$

$Modules$" makalesi de bu çalışmalardan biridir [13].

Modül teorisi çalışan bazı matematikçiler, zayıf asal alt modül yapısı veya bu yapıyı kullanarak oluşturulan yeni modül yapıları üzerinde çalışmalar yapmaya devam etmektedir. [14–16] gibi çalışmalar bu güncel çalışmalara örnek gösterilebilir.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmanın amacı zayıf asal alt modüller ile ilgili literatürde mevcut temel tanım ve sonuçları araştırmak ve eğer ispatı mevcut olmayan sonuçlar varsa ispatını ortaya koyarak literatüre katkıda bulunmaktır. Bunun yanı sıra zayıf asal alt modüllerin başta asal alt modüller olmak üzere, diğer alt modüller ile olan benzerlik ve farklılıklarını belirlemektir. Bu çalışma modüller teorisi veya cebirin ilgili alt alanlarında çalışacak araştırmacılara yardımcı olmayı amaçlamaktadır.

1.3 Hipotez

Zayıf asal alt modüllerin, asal alt modüllerin bir takım özelliklerini sağladığı öngörülmektedir.

2
ÖN BİLGİLER

Bu tez boyunca alınan tüm halkalar aksi belirtilmedikçe birimli ve değişmeli halka olarak kabul edilecektir.

2.1 Halkalar ve İdealler

Tanım 2.1.1. Bir R kümesinde; $+$, $\cdot$ ikili işlemler olsun. Öyleyse alttaki koşulları gerçekleyen $(R, +, \cdot)$ sıralı üçlüsüne halka(ring) denir [17].

$i)$ R, $+$ işlemi ile abelyen (değişmeli) gruptur.

$ii)$ Rde $\cdot$ bir birleşmeli işlemdir.

$iii)$ "$\cdot$", $+$ üzerine sağdan-soldan dağılma özelliğini sağlar, yani Rdeki her t_1, t_2, t_3 elemanları için,
$(t_1 + t_2).t_3 = t_1.t_3 + t_2.t_3$
$t_3.(t_1 + t_2) = t_3.t_1 + t_3.t_2$

Teorem 2.1.1. $(R, +, \cdot)$ halkasında alttakiler sağlanır [17].

$i)$ Her $t \in R$ için $t.0_R = 0_R = 0_R.t$

$ii)$ Her $t_1, t_2 \in R$ için $t_1.(-t_2) = -t_1.t_2 = (-t_1).t_2$

$iii)$ Her $t_1, t_2 \in R$ için $(-t_1).(-t_2) = t_1.t_2$

$iv)$ Her $t_1, t_2, t_3 \in R$ için $t_1.(t_2 - t_3) = t_1.t_2 - t_1.t_3$ ve $(t_2 - t_3).t_1 = t_2.t_1 - t_3.t_1$

Tanım 2.1.2. $(R, +, \cdot)$ halkasında,

$i)$ Rnin "$\cdot$" işleminde birimi varsa $(R, +, \cdot)$ halkasına birimli halka denir. Rnin birimini 1_R ile göstereceğiz.

ii) R bir birimli halka, $1_R \neq 0_R$ ve $0_R \neq c$ olsun. Eğer $c.d = d.c = 1_R$ olacak biçimde bir $d \in R$ elemanı mevcut ise d ye c nin çarpımsal tersi, c ye de terslenebilir(birimsel) bir eleman denir.

iii) Eğer "$\cdot$" değişmeliyse $(R, +, \cdot)$ halkasına bir değişmeli(commutative) halka denir.

iv) Eğer $0 \neq c \in R$ için $c.d = 0$ olacak şekilde $0 \neq d \in R$ elemanı mevcutsa $c \in R$ ye bir sıfır bölen denir. Rnin iki sıfırdan farklı elemanının çarpımı sıfır değil ise R ye sıfır bölensiz halka denir.

v) Birimli, $1_R \neq 0_R$, değişmeli, sıfır bölensiz bir R halkasına tamlık bölgesi denir.

vi) R birimli bir halka ve $1_R \neq 0_R$ olsun. Rde sıfırdan farklı her elemanın çarpımsal tersi mevcut ise Rye bölme(division) halkası denir.

vii) Bölme halkası değişmeliyse cisim(field) denir [17].

Örnek 2.1.1. c bir pozitif tam sayı olsun. Modülo $c$ye göre tüm kalan sınıflarının kümesi $\mathbb{Z}_c = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{c-1}\}$ üzerinde $\bigoplus$ ve $\bigodot$yı $\overline{c_1} \bigoplus \overline{c_2} = \overline{c_1 + c_2}$ ve $\overline{c_1} \bigodot \overline{c_2} = \overline{c_1 \cdot c_2}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $(\mathbb{Z}_c, \bigoplus, \bigodot)$ birimi $\overline{1}$ olan değişmeli, sonlu bir halkadır [17].

Örnek 2.1.2. $2\mathbb{Z}$ tüm çift tamsayıların kümesi ve $+$ ve $\cdot$ da tam sayılardakı toplama ve çarpmanın $2\mathbb{Z}$ye kısıtlanmışı olsun. Bu durumda $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ sıfır bölensiz, birimsiz bir halkadır. Daha genel olarak, her $1 < n \in \mathbb{Z}^+$ için $n\mathbb{Z}$ birimsiz bir halkadır [17].

Örnek 2.1.3. $\mathbb{R}$ reel sayı bileşenli n-inci $(n \geq 1)$ mertebeden tüm matrisler kümesi $M_n(\mathbb{R})$ ile gösterilsin. Matrislerde toplama ve çarpma işlemlerine göre, $n \geq 2$ için $M_n(\mathbb{R})$ sıfır bölenli ve değişmesiz bir halkadır [17].

Tanım 2.1.3. R halka, H de Rnin alt kümesi olsun. H de Rdeki işlemlere göre bir halka oluyorsa Hye Rnin alt halkası(subring) denir [17].

Teorem 2.1.2. R halka, $H \subset R$ olsun. H, Rnin alt halkasıdır ancak ve yalnız

i) $H \neq \emptyset$

ii) Her $h_1, h_2 \in H$ için $h_1 - h_2 \in H$

iii) Her $h_1, h_2 \in H$ için $h_1.h_2 \in H$ dır. [17].

Örnek 2.1.4. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$nun; $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$nin; $\mathbb{R}$ de $\mathbb{C}$nin alt halkasıdır [17].

Örnek 2.1.5. $2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ nin bir alt halkasıdır. Öyleyse, birimli halkanın alt halkası birimsiz olabilir [17].

Not : Bir halkanın birimi, alt halkasının birimi ile aynı olmak zorunda değildir. Gerçekten de $M_2(\mathbb{R})$ halkasının birimi $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ iken onun bir alt halkası olan $H = \left\{ \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : h \in \mathbb{R} \right\}$ nin birimi $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dır [17].

Teorem 2.1.3. $\left\{ H_i \right\}_{i \in I}$ de R halkasının boş olmayan alt halkalar ailesi olsun. Bu durumda $\bigcap_{i \in I} H_i$ kesişimi de R nin boş olmayan alt halkasıdır [17].

Tanım 2.1.4. R bir halka ve $H \subset R$ olsun. Rnin H yi içeren bütün alt halkalarının ara kesitine H ile üretilen alt halka denir, $< H >$ ile sembolize edilir. $H = \emptyset$ ise $< H >$ sıfır halkadır [17].

Tanım 2.1.5. R değişmeli halka, $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun.

$i)$ $\forall s_1, s_2 \in I$ için $s_1 - s_2 \in I$

$ii)$ $\forall s \in I$ ve $\forall t \in R$ için $t.s \in I$ ise Iya Rnin bir ideali denir [18].

Örnek 2.1.6. Herhangi bir R halkasında $\{0_R\}$ ve R, iki idealdir. Bunlara Rnin aşikar (trivial) idealleri denir ve bunlar dışındaki ideallerine öz (has) idealleri denir [17].

Örnek 2.1.7. Tam sayılar halkası $\mathbb{Z}$ nin idealleri toplamsal alt gruplarından ibarettir. Yani $\mathbb{Z}$ nin her ideali bir $n \in \mathbb{Z}$ için $n\mathbb{Z}$ şeklindedir [17].

Teorem 2.1.4. R halka, $\{I_i : i \in \Omega\}$ da Rnin boş olmayan ideallerinin bir ailesi olsun. Öyleyse $\bigcap_{i \in \Omega} I_i$ kesişimi Rnin ideailidir [17].

Tanım 2.1.6. R halka ve $I \subseteq R$ olsun. Rnin Iyı kapsayan tüm ideallerinin ara kesitine Iyla üretilen ideal denir ve (I) şeklinde gösterilir.
Eğer $I = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ ise $(I) = (\{t_1, t_2, ..., t_n\}) = (t_1, t_2, ..., t_n)$ ile gösterilir.
$I = \{t\}$ tek elemanlıysa (t) idealine t ile üretilen temel ideal denir. Tüm idealleri temel ideal olan tamlık bölgesine de temel ideal bölgesi (TİB) denir [17].

Örnek 2.1.8. $\mathbb{Z}$ bir temel ideal bölgesidir. Çünkü $\mathbb{Z}$ nin her ideali $I = n\mathbb{Z} =< n >$ şeklinde olup toplamsal devirli alt gruptur [17].

Teorem 2.1.5. R değişmeli halka, $\emptyset \neq X \subset R$ olsun.

$$i) \ (X) = \left\{ \sum_{i=1}^{s} r_i a_i + \sum_{j=1}^{t} n_j b_j : r_i \in R, \ n_j \in \mathbb{Z}, \ a_i, b_j \in X, \ s, t \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

$ii)$ R birimli ise, $(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{s} r_i c_i : r_i \in R,\ c_i \in X,\ s \in \mathbb{Z}^+ \right\}$ dır [17].

Tanım 2.1.7. R halka, J ve K de Rde iki ideal olsun. Öyleyse
$J + K = \left\{ c + d : c \in J, d \in K \right\}$ ye J ve K ideallerinin toplamı,
$JK = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i d_i : c_i \in J,\ d_i \in K \text{ ve } n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$ ye de bu ideallerin çarpımı denir [17].

Teorem 2.1.6. R halka, J ve K de Rde iki ideal olsun. O zaman $J + K$ ve JK, R nin idealleridir [17].

Tanım 2.1.8. K ve J, R değişmeli halkasının idealleri olmak üzere,
$(K : J) = \{t \in R : tJ \subseteq K\}$ kümesini tanımlayalım.
$(0 : J) = \{t \in R : tJ = 0\}$=$\{t \in R$: her $j \in J$ için $tj = 0\}$ kümesine J nin Rdeki sıfırlayıcısı (annihilatörü) denir, $Ann(J)$ veya $Ann_R(J)$ ile sembol edilir [19].

Tanım 2.1.9. Rnin her artan $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_k \subseteq \ldots$ ideal zinciri, herhangi bir k doğal sayısı için sabitleniyorsa R ye bir Noetherian halka denir. Daha açık bir ifadeyle R nin ideallerinin her artan $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_k \subseteq \ldots$ zinciri bir $k \in \mathbb{N}$ ve her $0 \leq c \in \mathbb{Z}^+$ için $I_k = I_{k+c}$ eşitliğini sağlıyorsa, R bir Noetherian halkadır [18].

Tanım 2.1.10. Rnin her azalan $\cdots \subseteq I_k \subseteq I_{k-1} \subseteq \cdots \subseteq I_1$ ideal zinciri, herhangi bir k doğal sayısı için sabitleniyorsa R ye bir Artinian halka denir. Daha açık bir ifadeyle R nin ideallerinin her azalan $\cdots \subseteq I_k \subseteq I_{k-1} \subseteq \cdots \subseteq I_1$ zinciri, bir $k \in \mathbb{N}$ ve her $0 \leq c \in \mathbb{Z}^+$ için $I_k = I_{k+c}$ eşitliğini sağlıyorsa, R bir Artinian halkadır [18].

2.2 Halka Homomorfizmaları

Tanım 2.2.1. $(R, +, \cdot)$ ve $(K, \oplus, \odot)$ halka, $\sigma : R \to K$ alttakileri sağlayan bir tasvir(function) olsun. Öyleyse σya halka homomorfizması ismi verilir.

$i)$ $\forall t_1, t_2 \in R$ için $\sigma(t_1 + t_2) = \sigma(t_1) \oplus \sigma(t_2)$

$ii)$ $\forall t_1, t_2 \in R$ için $\sigma(t_1.t_2) = \sigma(t_1) \odot \sigma(t_2)$

$\sigma : R \to K$ halka homomorfizması olsun. Eğer σ birebirse σ ya monomorfizma, örtense σya epimorfizma denir. Eğer σ birebir aynı zamanda örtense σya izomorfizma denir.
Bir halkanın kendi üzerinde homomorfizmasına endomorfizma, kendi üzerinde izomorfizmasına ise otomorfizma denir [17].

Tanım 2.2.2. R ve K halka olsunlar, $\theta : R \to K$ fonksiyonu,
$\forall t \in R$ için $\theta(t) = 0_K$ ile tanımlansın. θ bir halka homomorfizmasıdır ve bu homomorfizmaya sıfır homomorfizma denir [17].

Tanım 2.2.3. R ve K halka, $\sigma : R \to K$ da halka homomorfizması olsun.
$\sigma^{-1}(0_K) = \{t \in R : \sigma(t) = 0_K\}$ kümesi $(R, +)$nın bir alt grubudur. Bu alt gruba σnin çekirdeği denir ve Çekσ ile gösterilir [17].

Lemma 2.2.1. Çekσ, Rde bir idealdir [17].

Tanım 2.2.4. I, R halkasında ideal olsun. Rnin modülo Idaki kalan sınıflarının kümesi R/I üzerinde $+$ ve $\cdot$ işlemlerini $t_1, t_2 \in R$ olmak üzere sırasıyla $(t_1 + I) + (t_2 + I) = (t_1 + t_2) + I$ ve $(t_1 + I) \cdot (t_2 + I) = t_1 t_2 + I$ ile tanımlayalım. Bu durumda $(R/I, +, \cdot)$ bir halkadır. Eğer $\sigma : R \to R/I$ fonksiyonu $\forall t \in R$ için $\sigma(t) = t + I$ olarak tanımlanırsa σ epimorfizmadır ve Çek$\sigma = I$ dır. Bu biçimdeki σ doğal homomorfizma olarak isimlendirilir [17].

Halkalar için izomorfizma teoremleri şu biçimlerde verilebilir:

Teorem 2.2.1. (Birinci İzomorfizm)
$\phi : R \to K$ halka homomorfizması olsun. O halde $R/$Çek$\phi \cong \phi(R)$ dır [17].

Teorem 2.2.2. (İkinci İzomorfizm)
Eğer I, Rnin ideali ve H de alt halkasıysa $H + I$, Rnin alt halkası ve $H \cap I$ da Rnin idealidir. Ek olarak $(H + I)/I \cong H/(H \cap I)$ dır [17].

Teorem 2.2.3. (Üçüncü İzomorfizm)
I_1 ve I_2, Rde iki ideal; $I_1 \subseteq I_2$ olması durumunda I_2/I_1, R/I_1 in bir idealidir ve $(R/I_1)/(I_2/I_1) \cong R/I_2$ dir [17].

2.3 Maksimal, Asal ve Asalımsı İdealler

Tanım 2.3.1. R halka, L de ideali olsun. Aşağıdaki (i) ve (ii) koşulları sağlanırsa Lye Rnin maksimal ideali adı verilir [17].
(i) $L \neq R$
(ii) I, R nin $L \subset I \subset R$ sağlayan idealiyse $I = L$ ya da $I = R$ dir.

Teorem 2.3.1. R halka, $L \neq R$ de ideali olsun. L Rnin maksimal idealidir ancak ve ancak her $t \in R \setminus L$ için $L + \langle t \rangle = R$ dir [17].

Teorem 2.3.2. R halkasında $L \subset R$ maksimal idealdir ancak ve ancak R/L cisimdir [18].

Tanım 2.3.2. R değişmeli halka olsun. R'in biricik maksimal ideali mevcutsa, Rye quasi-yerel(local) halka adı verilir [19].

Örnek 2.3.1. F cisim olmak üzere, biricik maksimal ideali $\langle 0 \rangle$ dır. Dolayısıyla her cisim bir quasi-yerel adı verilir.

Teorem 2.3.3. Sıfır olmayan her halka en azından bir maksimal ideale sahiptir [18].

Sonuç 2.3.1. $J \subset R$ öz ideal olmak üzere, Jyi içeren en azından bir maksimal ideal mevcuttur [18].

Tanım 2.3.3. R değişmeli halkasındaki bütün maksimal ideallerin kesişimi Jacobson Radikali olarak adlandırılır, $Jac(R)$ ile sembolize edilir [19].

Örnek 2.3.2. $R = \mathbb{Z}_{18}$ alalım. $\mathbb{Z}_{18}$ in maksimal idealleri :
$I = \langle \overline{2} \rangle = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}\}$ ve $J = \langle \overline{3} \rangle = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{15}\}$ olup
$Jac(\mathbb{Z}_{18}) = I \cap J = \{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}\} = \langle \overline{6} \rangle$ dir.

Tanım 2.3.4. P, R halkasında öz ideal olsun. $\varkappa, y \in R$ için $\varkappa y \in P$ olunca $\varkappa \in P$ veya $y \in P$ olması gerekiyorsa Pye asal ideal adı verilir. Rnin bütün asal ideallerinin kümesi, $Spectrum(R)$ ile sembolize edilir [18].

Önerme 2.3.1. P, R halkasında öz ideal olsun. Öyleyse alttaki ifadeler birbirlerine eşdeğerdir [18].

(i) P asaldır.

(ii) R nin J, K ideallerine göre $JK \subseteq P$ ise $J \subseteq P$ veya $K \subseteq P$ dir.

(iii) $JK \subseteq P$ sağlayacak biçimde $I \supset P$ ve $K \supset P$ idealleri yoktur.

Önerme 2.3.2. P, Rde asal ideal ve $I_1, I_2, \ldots, I_k$ da Rnin bazı idealleri olsun. Öyleyse aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir [18].

(i) $\forall j \in \{1, \ldots, k\}$ için $I_j \subseteq P$ dir.

(ii) $\cap_{i=1}^{k} I_i \subseteq P$ dir.

(iii) $I_1 I_2 \ldots I_k \subseteq P$ dir.

Sonuç 2.3.2. P, Rnin asal bir ideali ve $I_1, I_2, \ldots, I_k$ da Rnin bazı idealleri olsun. $P = \cap_{i=1}^{k} I_i$ ise bir $l \in \{1, \ldots, k\}$ için $P = I_l$ dir [18].

Teorem 2.3.4. R halkasında P asal idealdir ancak ve ancak R/P tamlık bölgesidir [18].

Sonuç 2.3.3. Bütün maksimal idealler asaldır [18].

Not : Sonuç 2.3.3. nin karşıtı doğru değildir. Yani asal olan bir ideal maksimal olmak zorunda değildir. Örneğin, $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasında $\langle 0\rangle$ ideali asaldır fakat $\mathbb{Z}$ deki her ideal tarafından kapsandığından maksimal değildir.

Tanım 2.3.5. R değişmeli, I da Rnin ideali olsun.
Rnin I yı kapsayan bütün asal(prime) ideallerinin kümesi $Var(I) = \{P \in Spec(R) : I \subseteq P\}$ ile tanımlanır [19].

Tanım 2.3.6. R değişmeli ve I da Rde bir ideal olsun.
$\sqrt{I} = \{t \in R : c \in \mathbb{N} \text{ için } t^c \in I\}$ kümesi R nin Iyı içeren bir idealidir ve bu ideale I nın radikali(köklüsü) olarak adlandırılır [19].

Teorem 2.3.5. I, Rde ideal olsun. Inın radikali, bütün Iyı içeren asal ideallerin ara kesitidir. Buna göre $\sqrt{I} = \bigcap_{P\in Var(I)} P$dir [19].

Tanım 2.3.7. R değişmeli halkasında, (0) idealinin radikaline Rnin nilradikali denir ve $\sqrt{0} = \bigcap_{P\in Spec(R)} P$ şeklinde ifade edilir [19].

Tanım 2.3.8. R halkasında $t \in R$ için $t^c = 0$ olacak biçimde bir $c > 0$ tam sayısı bulunabilirse, $t \in R$ nilpotent eleman olarak adlandırılır. Rdeki bütün elemanlar nilpotent ise Rye nil halka ismi verilir. Bir $c \in \mathbb{N}$ için $R^c = 0$ ise Rye nilpotent halka ismi verilir [20].

Tanım 2.3.9. I_1 ve I_2, R halkasının iki ideali olsun. $I_1 + I_2 = R$ ise I_1 ve I_2 idealleri komaksimaldir (aralarında maksimal) denir [18].

Teorem 2.3.6. $c \geq 2$ tam sayı ve $I_1, I_2, \ldots, I_c$ ler R halkasının ikişerli olarak komaksimal idealleri olsun. O halde,
(i) $I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_{c-1}$ ile I_c de komaksimaldir.
(ii) $I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_c = I_1 I_2 \ldots I_c$ dir [18].

Teorem 2.3.7. (Çin Kalan Teoremi)
$c \geq 2$ tam sayı ve $I_1, I_2, \ldots, I_c$ ler Rnin ikişerli olarak komaksimal idealleri olsun.

(i) Verilen her $x_1, x_2, \ldots, x_c \in R$ için, $x \equiv x_j \pmod{I_j}$, $1 \leq j \leq c$ olacak biçimde bir $x \in R$ vardır.

(ii) Her $z \in R$ için, $f(z) = (z + I_1, z + I_2, \ldots, z + I_c)$ biçiminde verilen $f : R \to R/I_1 \times R/I_2 \times \cdots \times R/I_c$ tasviri(function) epimorfizmadır.

(iii) $R/I_1\cap I_2\cap\cdots\cap I_c \cong R/I_1 I_2 \ldots I_c \cong R/I_1 \times R/I_2 \times \cdots \times R/I_c$ izomorfturlar [18].

Tanım 2.3.10. Q, R halkasında öz ideal olsun. $\varkappa, y \in R$ için $\varkappa y \in Q$ ve $\varkappa \notin Q$ olması, bir $c > 0$ tam sayısına göre $y^c \in Q$ olmasını gerektiriyorsa Q ya Rnin bir asalımsı ideali denir. Yani $\forall \varkappa y \in Q$ için $\varkappa \in Q$ veya $y \in \sqrt{Q}$ sağlanıyorsa Q, Rnin bir asalımsı idealidir ve tanımdan her asal idealin asalımsı olması barizdir [19].

Örnek 2.3.3. Asalımsı idealin asal olması gerekmez. Örneğin; $R = \mathbb{Z}$ halkasında $I = 8\mathbb{Z}$ ideali bir asalımsı idealdir fakat $2.4 = 8 \in 8\mathbb{Z}$ olup $2, 4 \notin 8\mathbb{Z}$ dir, yani I asal değildir.

Teorem 2.3.8. (i) $I \subset R$ öz ideal olsun. I asalımsıdır ancak ve ancak R/I bölüm halkasındaki tüm elemanlar nilpotenttir [19].

(ii) R ve K halka, $f : R \to K$ de halka homomorfizması olsun. Q, Knin bir asalımsı idealiyse $f^{-1}(Q)$ da Rde asalımsıdır [19].

Teorem 2.3.9. Q, Rde bir asalımsı idealse $\sqrt{Q}$, asal idealdir [19].

Tanım 2.3.11. Q, Rde bir asalımsı ideal olsun. $\sqrt{Q}$ asal ideali $\sqrt{Q} = P$ ile temsil edilir ve bu durumda Q ya P-asalımsı ideal denir [19].

Teorem 2.3.10. Q, Rnin ideali ve $\sqrt{Q} = L$ de Rnin bir maksimal idealiyse Q bir asalımsı idealdir [19].

Lemma 2.3.1. P, Rde bir asal ideal ve $1 \leq c$ tam sayısı için $Q_1, Q_2, \ldots, Q_c$ ler de Rnin P-asalımsı idealleri olsun. Öyleyse $\bigcap_{i=1}^{c} Q_i$ de P-asalımsı idealdir [19].

Lemma 2.3.2. Q, R halkasının bir P-asalımsı ideali ve $x \in R$ verilsin.
(i) $\varkappa \in Q$ ise $(Q : \varkappa) = R$ dir.
(ii) $\varkappa \notin Q$ ise $(Q : \varkappa)$ bir P-asalımsı idealdir. Yani $\sqrt{(Q : \varkappa)} = P$ dir.
(iii) $\varkappa \notin P$ ise $(Q : \varkappa) = Q$ dur [19].

Tanım 2.3.12. I, Rde ideal ve her $1 \leq j \leq c$ tam sayısı için $Q_j ler$, P_j-asalımsı idealler olsun. Eğer $I = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_c$ biçiminde ifade edilebiliyorsa, bu ifadeye I nın bir asalımsı ayrışımı denir. Bu biçimde yazılabilen I idealine de ayrışabilir bir ideal denir. Aşağıdaki koşulları sağlayan ayrışıma da minimal asalımsı ayrışım denir [18]:

(i) $\forall 1 \leq i, j \leq c$ ve $i \neq j$ için $P_i \neq P_j$ birbirinden farklı asal ideallerdir.

(ii) $\forall 1 \leq j \leq c$ tam sayısı için, $\bigcap_{i=1, i\neq j}^{c} Q_i \nsubseteq Q_j$ dir.

(ii) deki ifade her $1 \leq j \leq c$ tam sayısı için $I \neq \bigcap_{i=1, i\neq j}^{c} Q_i$ olarak da ifade edilebilir. Yani hiçbir Q_j, $I = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_c$ minimal asalımsı ayrışımı için gereksiz değildir.

Teorem 2.3.11. R halka, I ideali olsun. I, bir asalımsı ayrışıma sahipse, minimal asalımsı ayrışıma da sahiptir [18].

2.4 Asal ve Zayıf Asal İdeallerin Özellikleri

Tanım 2.4.1. P; birimli, değişmeli R halkasında öz ideal olsun. $\varkappa, y \in R$ için $\varkappa y \in P$ olunca $\varkappa \in P$ veya $y \in P$ olması gerekiyorsa Pye asal ideal ismi verilir [18].

Tanım 2.4.2. $\emptyset \neq D \subseteq R$ olsun. $\varkappa \in R$ için $(D : \varkappa)$ kümesini şu biçimde tanımlayalım:

$$(D : \varkappa) = \{r \in R : r\varkappa \in D\}$$

Eğer D, Rde bir ideal ise, $(D : \varkappa)$ de idealdir [19].

Tanım 2.4.3. $\emptyset \neq C \subseteq R$ alt kümesinde her $\varkappa, y \in C$ için $\varkappa y \in C$ ise C ye Rnin çarpımsal kapalı alt kümesi ismi verilir [21].

P, Rde bir öz ideal olmak üzere, Pnin asal olmasına denk birçok koşul vardır. Bunlardan bazılarını bir teorem ile verelim.

Teorem 2.4.1. $P \subset R$ öz ideal iken alttaki koşullar eşdeğerdir [21].

(i) P asal idealdir.

(ii) Her $\varkappa \in R \setminus P$ için $(P : \varkappa) = P$ dir.

(iii) Eğer A ve B idealleri $AB \subseteq P$ oluşunu sağlıyorsa $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ dir.

(iv) R/P bölüm halkası bir tamlık bölgesidir.

(v) $R \setminus P$ bir çarpımsal kapalı kümedir.

ispat. $(i) \implies (ii)$
P bir ideal olduğundan, $\forall p \in P$ için $p\varkappa \in P$ olup $p \in (P : \varkappa)$ tir. Yani $P \subseteq (P : \varkappa)$ tir. Öte yandan $y \in (P : \varkappa)$ ve $\varkappa \notin P$ ise P asal olduğundan $y \in P$ olur. Dolayısıyla $(P : \varkappa) \subseteq P$ dir ve eşitlik görülür.
$(ii) \implies (i)$
$ab \in P$ olsun. $a \in P$ ya da $a \in R \setminus P$ dir. İlk durumda ispat biter, ikinci durumda $b \in (P : a)$ olup hipotezden $b \in P$ elde edilir. Yani P asaldır.
$(i) \implies (iii)$
A, B ideallerindeki $\varkappa \in A$, $y \in B$ için; $\varkappa y \in AB \subseteq P$ olsun. Pnin asal olması sebebiyle $a \in P$ veya $b \in P$ dir. Öyleyse $\varkappa \notin P$ için $y$nin keyfi seçimi sebebiyle $B \subseteq P$ elde edilir.

$(iii) \implies (i)$
$\varkappa y \in P$ olsun. O halde $(\varkappa y) \subseteq P$ ve $(\varkappa y) = (\varkappa)(y)$ olduğundan hipotez gereğince $(\varkappa) \subseteq P$ veya $(y) \subseteq P$ olur. Buradan $\varkappa \in P$ veya $y \in P$ dir, yani P asaldır.
$(i) \implies (iv)$
$\overline{R} = R/P$ olsun. $\overline{ab} = \overline{0}$ olacak biçimde $\overline{a}, \overline{b} \in P$ elemanlarını alalım. $ab \in P$ ve P asal olduğu için $a \in P$ veya $b \in P$ dir. Buradan da $\overline{a} = \overline{0}$ veya $\overline{b} = \overline{0}$ elde edilir. O halde R/P birimli, değişmeli, sıfır bölensiz olduğundan bir tamlık bölgesidir.
$(iv) \implies (i)$
$st \in P$ olan $s, t \in R$ elemanlarını alalım. $\overline{st} = 0$ olur ve R/P tamlık bölgesi olduğundan $\overline{s} = \overline{0}$ veya $\overline{t} = \overline{0}$ dır. Buradan $s \in P$ veya $t \in P$ dir, öyleyse P asaldır.
$(i) \iff (v)$
Asal ideal olma koşulunun karşıt tersi ile denkliğinden $a \in R \setminus P$ ve $b \in R \setminus P$ ise $ab \in R \setminus P$ dir.

Tanım 2.4.4. I; birimli, değişmeli R halkasında bir öz ideal olsun. $0 \neq ab \in I$ olacak biçimde $a, b \in R$ için $a \in I$ veya $b \in I$ olması gerekiyorsa Iya Rnin zayıf asal ideali adı verilir [3].

Yukarıdaki tanımdan anlaşılacağı üzere her asal ideal bir zayıf asal idealdir. Ancak bir zayıf asal idealin her zaman asal olması gerekmez. Buna örnek olarak (0) tüm halkalarda bir zayıf asal idealdir fakat (0) asaldır ancak ve ancak R tamlık bölgesidir.

Şimdi, asal olmayan zayıf asal ideal için aşikardan farklı bir örnek verelim.

Örnek 2.4.1. R, tek maksimal ideali M olan quasi-yerel halkasında $M^2 = 0$ olsun. Rdeki her ideal bir zayıf asal idealdir. Rdeki bir I ideali için $0 \neq ab \in I \subseteq M$ ise $ab \in M$ ve M maksimal, dolayısıyla da asal olduğundan $a \in M$ veya $b \in M$ dir. Burada a ve b aynı anda M nin elemanı olamaz, eğer $a, b \in M$ olsa idi $ab \in M^2 = 0$ olurdu ve $ab = 0$ elde edilirdi fakat bu $ab \neq 0$ olması ile çelişki oluşturur. O halde $a \notin M$ veya $b \notin M$ dir. R bir quasi-lokal halka olduğundan $Jac(R) = M$ dir. Öyleyse a veya b den biri M nin elemanı olmadığından $Jac(R)$ nin dışına düşer. Farzedelim ki $a \notin Jac(R)$, o zaman a birimseldir. Öyleyse $b = a^{-1}(ab) \in I$ bulur. Benzer olarak $b \notin Jac(R)$ durumunda da $a \in I$ bulunur. Yani R halkasının her I ideali, asal olmayan bir zayıf asal idealdir ve R nin biricik asal ideali M dir.

Teorem 2.4.2. P, Rde bir zayıf asal ideal olsun. P asal değilse, $P^2 = 0$ dır [3].

$ispat.$ $P^2 \neq 0$ olsun. Pnin asal olduğunu gösterelim.
$ab \in P$ olsun. $ab \neq 0$ ise, P zayıf asal olduğundan $a \in P$ veya $b \in P$ dir. Şimdi

$ab = 0$ olsun. $aP \neq 0$ kabul edelim. O halde $ap_0 \neq 0$ olacak biçimde $p_0 \in P$ vardır. $0 \neq ap_0 = a(b + p_0) \in P$ dir ve P zayıf asal olduğundan $a \in P$ veya $b + p_0 \in P$ dir. buradan $a \in P$ veya $b \in P$ olduğu görülür. Benzer şekilde $bP \neq 0$ için de P asaldır.
Şimdi $aP = 0$ ve $bP = 0$ kabul edelim. $P^2 \neq 0$ olduğundan $0 \neq p_0q_0 \in P$ olacak şekilde $p_0, q_0 \in P$ mevcuttur. $0 \neq p_0q_0 = (a + p_0)(b + q_0) \in P$ olup, P zayıf asal olduğundan $a + p_0 \in P$ veya $b + q_0 \in P$, yani $a \in P$ veya $b \in P$ olur. Buradan da Pnin asal olduğu görülür.

Not: Yukarıdaki teoremin tersi doğru değildir. Yani $I^2 = 0$ sağlayan idealin zayıf asal olmasında zorunluluk yoktur. Örneğin, $R = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ halkasında $I = 4\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ idealini düşünelim. Gerçekten $I^2 = 0$ dır. Ancak I zayıf asal değildir çünkü $\overline{0} \neq \overline{2}^2 \in I$ iken $\overline{2} \notin I$ dır. Benzer olarak $I \subseteq \sqrt{0}$ ve $I\sqrt{0} = 0$ olma durumları da I idealinin zayıf asal olmasını gerektirmez. Verilen örnek bu durumlar için de geçerlidir.

Sonuç 2.4.1. P, Rde bir zayıf asal ideal olsun. O halde $P \subseteq \sqrt{0}$ veya $\sqrt{0} \subseteq P$ dir [3].

$ispat.$ P, Rde bir zayıf asal ideal olsun. Eğer P asal değil ise, Teorem 2.4.2den $P^2 = 0$ olup $P \subseteq \sqrt{0}$ dır. Eğer P asal ise her $a \in \sqrt{0}$ için $a^c = 0 \in P$ olacak biçimde bir c pozitif tam sayısı var olduğundan $a \in P$ dir. Yani bu durumda $\sqrt{0} \subseteq P$ bulunur.

Lemma 2.4.1. R birimli-değişmeli halka, I, A ve B de herhangi idealleri olsun [18].
(i) $I \subseteq A \cup B$ ise $I \subseteq A$ veya $I \subseteq B$ dir.
(ii) Eğer $I = A \cup B$ ise $I = A$ veya $I = B$ dir.

$ispat.$ (i) $I \subseteq A \cup B$ olsun. $I \nsubseteq A$ ve $I \nsubseteq B$ kabul edelim. O halde $a \in I \setminus A$ ve $b \in I \setminus B$ oacak biçimde $a, b \in R$ elemanları mevcuttur. Bu durumda $a + b \in I \subseteq A \cup B$ dir ve $a + b \in A$ veya $a + b \in B$ olur.
$a + b \in A$ ise $b \in I \setminus B$ olduğundan $b \in A$ dır ve $a = (a + b) - b \in A$ çelişkisi oluşur. Benzer biçimde $a+b \in B$ için de $b \in B$ çelişkisi elde edilir. Öyleyse $I \subseteq A$ veya $I \subseteq B$ olmalıdır.
(ii) $I = A \cup B$ ise $A, B \subseteq A \cup B \subseteq I$ ve (i) den $I \subseteq A$ veya $I \subseteq B$ dir. Buradan da $I = A$ veya $I = B$ bulunur.

Teorem 2.4.3. I; birimli, değişmeli R halkasında öz ideal olsun. Alttaki koşullar eşdeğerdir [3].

(i) I zayıf asal idealdir.

(ii) $x \in R \setminus I$ için $(I : x) = I \cup (0 : x)$ dir.

(iii) $x \in R \setminus I$ için $(I : x) = I$ veya $(I : x) = (0 : x)$ dir.

(iv) $0 \neq AB \subseteq I$ olacak biçimdeki A, B idealleri için $A \subseteq I$ veya $B \subseteq I$ dir.

ispat. $(i) \implies (ii)$:
$y \in (I : x)$ ve $x \in R \setminus I$ olsun. Öyleyse $xy \notin I$ dır. Eğer $xy \neq 0$ ise I zayıf asal olduğundan $y \in I$ olur. Eğer $xy = 0$ ise $y \in (0 : x)$ dir. O halde $(I : x) \subseteq I \cup (0 : x)$. Ters kapsama her I ideali için sağlanır ve eşitlik elde edilmiş olur.
$(ii) \implies (iii)$:
Lemma 2.4.1. (ii) den iki idealin birleşimi de bir ideal ise birleşim, iki idealden birine eşittir.
$(iii) \implies (i)$:
$0 \neq xy \in I$ olsun. Öyleyse $y \in (I : x)$ dir. $(I : x) = I$ ise I nın zayıf asal ideal olduğu gerçeklenmiş olur. $(I : x) = (0 : x)$ olması durumu $xy = 0$ olmasını gerektirir. Yani $0 \neq xy$ için geçerli değildir dolayısıyla zayıf asal olmasını etkilemez.
$(i) \implies (iv)$:
I bir zayıf asal ideal iken A, B idealleri $0 \neq AB \subseteq I$, fakat $A \nsubseteq I$ ve $B \nsubseteq I$ şeklinde olsun. $a \in A \setminus I$ alalım. $aB \subseteq I$ dır, yani $B \subseteq (I : a)$ dır. $B \nsubseteq I$ olduğundan, $(i) \implies (iii)$ gereğince, $aB = 0$ dır. Şimdi $a \in A \cap B$ kabul edelim. $b \in B$ olsun. Eğer $b \in I$ ise Teorem 2.4.2. den $ab \in I^2 = 0$ dır. Benzer olarak $b \in B \setminus I$ için $Ab = 0$, dolayısıyla $ab = 0$ dır. Sonuç olarak $AB = 0$ dır.
$(iv) \implies (i)$
$0 \neq ab \in I$ olsun. Öyleyse $0 \neq (a)(b) \subseteq I$ dir. Hipotezden $(a) \subseteq I$ veya $(b) \subseteq I$ dır. Buradan da $a \in I$ veya $b \in I$ olup P zayıf asaldır.

Teorem 2.4.4. J; birimli, değişmeli R halkasında asal olmadan zayıf asal ideal olsun. Öyleyse $J\sqrt{0} = (0)$dır [3].

ispat. $x \in \sqrt{0}$ olsun. Eğer $x \in J$ ise, Teorem 2.4.2. kullanılarak $Jx = xJ \subseteq J^2 = 0$ yazılabilir. $x \notin J$ kabul edelim. Teorem 2.4.3. den $(J : x) = J$ veya $(J : x) = (0 : x)$ dir. $J \subseteq (J : x)$ olduğundan ikinci durumda $xJ = 0$ dır. Öyleyse $(J : x) = J$ kabul edelim. $x \in \sqrt{0}$ olduğundan $x^c = 0$ fakat $x^{c-1} \neq 0$ olacak biçimde bir c pozitif tam sayısı vardır ve bu c için $0 \neq x^{c-1} \in (J : x) = J$ dir. Buradan $x \in J$ çelişkisine ulaşılır. O halde $J\sqrt{0} = 0$dır.

Sonuç 2.4.2. I ve J, R halkasının zayıf asal olup asal olmayan idealleri olsun. Öyleyse $IJ = (0)$ dır [3].

$ispat.$ I ve J, R halkasının asal olmayan zayıf asal idealleri olsun. O halde Sonuç 2.4.1. den $I, J \subseteq \sqrt{0}$ dır. Teorem 2.4.4. gereğince $IJ \subseteq I\sqrt{0} = (0)$ elde edilir.

Tanım 2.4.5. R halka, $P_0, P_1, \ldots, P_c$ de Rde asal idealler olmak üzere,

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_c$$

R nin asal ideallerinin birbirini kesin kapsayan bir zinciridir. Burada c tam sayısına zincirin uzunluğu, P_0 a zincirin ilk terimi ve P_c ye de zincirin son terimi denir.
R nin farklı asal ideallerinden oluşan zincirlerinin uzunluklarının maksimumuna R nin Krull boyutu denir ve R halkasının Krull boyutu $dim(R)$ ile sembolize edilir [21].

Bir R halkasında $dim(R) = \infty$ veya $dim(R) = c \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ dir. $dim(R) = c$ olan bir R halkasında birbirini kesin kapsayan asal ideallerden oluşan bir zincirde en fazla $c + 1$ tane farklı asal ideal bulunur. Eğer F bir cisimse, tek asal ideali (0) olur ve $dim(F) = 0$ dır. Ayrıca R bir tamlık bölgesi ve $dim(R) = 0$ ise R bir cisimdir [21].

Sonuç 2.4.3. R tek maksimal ideali M ve $dim(R) = 0$ olan quasi-yerel halka iken; I, Rde bir zayıf asal idealse $I = M$ veya $MI = (0)$ dır [3].

$ispat.$ R tek maksimal ideali M ve $dim(R) = 0$ olan quasi-yerel halka olduğundan bir tek asal ideale sahiptir. I eğer asal ise M maksimal ideali de asal olduğundan $I = M$ olur. Eğer I asal olmayan bir zayıf asal idealse $\sqrt{0}$ nilradikali bir asal ideal olduğundan $M = \sqrt{0}$ olup Teorem 2.4.4. gereğince $MI = \sqrt{0}I = I\sqrt{0} = (0)$ olduğu sonucuna ulaşılır.

Tanım 2.4.6. Q, R halkasında öz ideal olsun. $\varkappa, y \in R$ için $0 \neq \varkappa y \in Q$ ve $\varkappa \notin Q$ olması, bir $c > 0$ tam sayısı için $y^c \in Q$ olmasını gerektiriyorsa Qya Rnin bir zayıf asalımsı ideali denir. Yani $0 \neq \varkappa y \in Q$ için $\varkappa \in Q$ veya $y \in \sqrt{Q}$ sağlanıyorsa Q, Rde bir zayıf asalımsı idealdir ve tanımdan her asalımsı idealin bir zayıf asalımsı ideal olduğu açıktır [22].

Örnek 2.4.2. (0) her zaman zayıf asalımsıdır, fakat asalımsı olması gerekmez. Örneğin; $R = M_2(\mathbb{R})$ halkasından $(0) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$ dir. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ için $A \cdot B = 0$ dır. Fakat herhangi bir $c, d > 0$ tam sayısı için $A^c = A \neq 0$ ve $B^d = B \neq 0$ dır, öyleyse (0) ideali asalımsı değildir.

Örnek 2.4.3. Bir ideal zayıf asalsa, zayıf asalımsıdır. Fakat idealin zayıf asalımsı olması zayıf asal olmasını gerektirmez. Örneğin $R = \mathbb{Z}_{12}$ de $(\overline{4})$ ideali zayıf asalımsıdır fakat $0 \neq \overline{2} \cdot \overline{2} \in (\overline{4})$ olup $\overline{2} \notin (\overline{4})$ dir, yani zayıf asal değildir.

2.5 Modüller ve Alt Modüller

Tanım 2.5.1. $(M,+)$ abelyen grup, R de birimli-değişmeli halka olsun. Mdeki elemanların, Rdeki elemanlarla çarpımı, $\bullet : R \times M \to M$, $\forall r \in R$, $\alpha \in M$ için $r \bullet \alpha = r\alpha$ biçiminde belirlenen $\bullet$ tasviri alttaki koşulları sağlıyorsa, Mye R üzerinde modül ya da R-modül denir [19].

(i) Her $r \in R$, $\alpha, \alpha' \in M$ için, $r \bullet (\alpha + \alpha') = r \bullet \alpha + r \bullet \alpha'$,

(ii) Her $r, r' \in R$, $\alpha \in M$ için, $(r + r') \bullet \alpha = r \bullet \alpha + r' \bullet \alpha$,

(iii) Her $r, r' \in R$, $\alpha \in M$ için, $(rr') \bullet \alpha = r \bullet (r' \bullet \alpha)$,

(iv) Her $\alpha \in M$ için, $1_R \bullet \alpha = \alpha$.

Uyarı 2.5.1. $r \bullet \alpha$ gösteriminde $\bullet$ ihmal edilerek rm olarak ifade edilecektir.

Örnek 2.5.1. (i) Her R halkası kendisi üzerinde R-modüldür.

(ii) V, F cismi üzerinde vektör uzayıysa V, F-modül olarak alınabilir .

(iii) R halkasının her I ideali, bir R-modüldür.

(iv) J, Rnin bir idealiyse $R \times R/J \to R/J$ skaler çarpımı , $(r, r' + J) \to rr' + J$ ile tanımlanırsa R/J, R-modül belirtir.

Tanım 2.5.2. R birimli-değişmeli; M de R-modül olmak üzere Nyi de boş olmayan alt küme olarak alalım. Kendi başına N de R-modülse Nye Mde bir alt modül adı verilir [18].

Örnek 2.5.2. M ile $\{0_M\} = 0$, Mnin birer alt modülleridir. Mnin kendi ve 0 haricindeki alt modüllerine öz alt modülü adı verilir [18].

Teorem 2.5.1. M, R-modül ve N boş olmayan alt kümesi olsun. N, Mnin alt modülüdür ancak ve ancak $\forall r, r' \in R$ ve $n, n' \in N$ için $rn + r'n' \in N$dir [18].

Örnek 2.5.3. R halkası, R-modül olduğu düşünülürse, Rnin alt modülleri Rdeki ideallerdir [18].

Tanım 2.5.3. M, R-modül; T de Mnin alt kümesi olsun. Ti içeren tüm alt modüllerin kesişimine Tin ürettiği alt modül ismi verilir, $\langle T \rangle$le sembolize edilir. Tanımdan anlaşılacağı üzere $\langle T \rangle$, T i kapsayan en küçük R-alt modüldür. Burada T kümesine üreteç sistemi denir [18].

Tanım 2.5.4. M, R-modül ve $\alpha \in M$ alalım. $\{\alpha\}$ın ürettiği alt modül,
$\langle\alpha\rangle = R\alpha = \{r\alpha : r \in R\}$ biçiminde tanımlanır, α ile üretilmiş alt modül adı verilir. $M = \langle\alpha\rangle$ biçiminde bir $\alpha \in M$ varsa, Mye devirli modül adı verilir. $T \subseteq M$ sonlu alt kümeyse ve $M = \langle T\rangle$ ise Mye sonlu üretilmiş modül olarak isimlendirilir.
$T = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_c\}$ bir sonlu kümeyse,
$\langle T\rangle = \{\sum_{l=1}^{c} r_l\alpha_l : r_l \in R$ ve $\alpha_l \in T, l = 1, 2, ..., c\} = R\alpha_1 + R\alpha_2 + ... + R\alpha_c$ dir [18].

Örnek 2.5.4. R halkası birimli olmak üzere $R = R1_R$ olduğundan, R-modül olarak devirlidir [18].

Tanım 2.5.5. M, R-modül, $Y = \{y_i\}_{i\in\Omega}$ de Mde üreteç sistemi olsun. Yani $\forall\alpha \in M, \alpha = \sum_{i\in\Omega} r_i y_i$ $(r_i \in R)$ biçiminde sonlu toplam olarak yazılabilir. Bu toplamda ancak sonlu sayıda $r_i \neq 0$ dır ve bu yazılış tek türlü olmayabilir.
M, R-modül, $S = \{y_i\}_{i\in\Omega}$ de Mde üreteç sistemi olsun.
Eğer $\forall\alpha \in M$ için $\alpha = \sum_{i\in\Omega} r_i y_i$ yazılışı tek türlü ise $S = \{y_i\}_{i\in\Omega}$ kümesine Mnin bir tabanı denir. Böyle olan M modülüne de bir serbest(free) modül adı verilir [18].

Örnek 2.5.5. (i) Her R halkasının, taban olarak $\{1_R\}$ alındığında, kendisi üzerinde serbest bir modül olduğu görülebilir.

(ii) Eğer R aşikar halka ise, yani $R = 0_R$, ise, tabanı $\emptyset$ olarak alındığında R bir serbest R-modüldür.

(iii) Her vektör uzayı bir tabana sahiptir, dolayısıyla her vektör uzayı bir serbest modüldür.

Teorem 2.5.2. (Modüler Kural)
M, R-modül; S, N ve T, Mnin alt modülleri ve $S \subseteq T$ olsun. Öyleyse, $S + (N \cap T) = (S + N) \cap T$ dir [18].

Teorem 2.5.3. R halka, K ideali, M de bir R-modül olsun.
$KM = \{\sum_{j=1}^{c} r_j m_j : r_j \in K$ ve $m_j \in M$, $j = 1, 2, ..., c \in \mathbb{N}\}$ ile gösterirsek aşağıdakiler doğrudur [18].

(i) KM, Mnin bir R-alt modülüdür.

(ii) I ve I', Rde ideal iseler $I(I'M) = (II')M$ dir.

(iii) $K = Ra$ temel idealse $KM = (Ra)M = \{am : m \in M\}$dir.

Teorem 2.5.4. M, R-modül; N onun bir alt modülü ve $0 \neq X \subseteq M$ alt kümesi olsun.
$(N : X) = \{r \in R : rX \subseteq N\}$ kümesini tanımlayalım. $(N : X)$ Rde idealdir [18].

$(0 : X) = \{r \in R : rX = 0\}$ idealine Xin sıfırlayıcısı adı verilir, $Ann(X)$le sembolize edilir.

Tanım 2.5.6. N, Mde R-alt modül olsun.
$(N : M) = \{r \in R : rM \subseteq N\}$ tanımını verelim.
$N = 0$ alarak oluşturulan $(0 : M) = \{r \in R : rM = 0\}$ye Mnin Rdeki sıfırlayıcısı denir, $Ann(M)$ ile sembolize edilir. Eğer $Ann(M) = 0$ ise M sadık (faithful) modül olarak isimlendirilir [18].

Önerme 2.5.1. M, R-modül; N, $\{N_j : j \in \Omega\}$ alt modülleri, $\emptyset \neq X \subseteq M$ de alt kümesi olsun. Aşağıdakiler sağlanır [18].

(i) $\Big(\bigcap_{j\in\Omega} N_j : X\Big) = \bigcap_{j\in\Omega}\Big(N_j : X\Big)$

(ii) $\Big(N : \sum_{j\in\Omega} N_j\Big) = \bigcap_{j\in\Omega}(N : N_j)$

(iii) T ve K alt modüllerine göre $Ann(T + K) = Ann(T) \cap Ann(K)$ dır.

Önerme 2.5.2. M, R-modül, N alt modülü olsun. $R \times M/N \to M/N$ çarpımı, $(r, m + N) \to rm + N$ olarak tanımlanarak M/N, R-modül yapılabilir [18].

Önerme 2.5.3. M, R-modül, J de Rnin $J \subseteq Ann(M)$ olacak biçimde ideali olsun. Bu durumda $R/J \times M \to M$ skaler çarpımını, $(r+J, m) \to rm$ olarak tanımlarsak M bir R/J-modül olur [18].

Sonuç 2.5.1. M, R-modül ve J de Rde ideal olsun. $J \subseteq Ann(M/JM)$ dir ve M/JM bir R/J-modüldür [19].

Tanım 2.5.7. M ve K R-modülleri için $f : M \to K$ tasviri alttakileri sağlıyorsa $f$ye modül homomorfizması adı verilir [18].

(i) $\forall\, \alpha, \alpha' \in M$ için $f(\alpha + \alpha') = f(\alpha) + f(\alpha')$

(ii) $\forall\, r \in R$ ve $\alpha \in M$ için $f(r\alpha) = rf(\alpha)$

Bir f modül homomorfizma; birebirse monomorfizma, örtense epimorfizma, birebir aynı zamanda örtense izomorfizma olarak isimlendirilir.

Önerme 2.5.4. M, K R-modüller; $f : M \to K$ de modül homomorfizma olsun [18].

(i) $f(0_M) = 0_K$ ve her $\alpha \in M$ için $f(-\alpha) = -f(\alpha)$ dir.

(ii) Çek$f$=$\{\alpha \in M : f(\alpha) = 0_N\}$ kümesi Mde bir alt modüldür.

(iii) Imf=$\{f(\alpha) \in K : \alpha \in M\} = f(M)$, Nnin bir alt modülüdür.

(iv) f birebirdir ancak ve ancak Çek$f = 0$dır.

Tanım 2.5.8. M, R-modül, K de alt modülü olsun. $\psi : M \to M/K$ tasvirini $\psi(\alpha) = \alpha + K$ biçiminde tanımlayalım. Bu tasvir örten homomorfizmadır ve buna doğal homomorfizma adı verilir [18].

Teorem 2.5.5. (Homomorfizma Teoremi)
M ve K, R-modül; $f : M \to K$ de modül homomorfizmasıysa $M/$Çek$f \cong$Im$f = f(M)$ dir [18].

Sonuç 2.5.2. M bir devirli R-modülse $R/Ann(M) \cong M$tir [19].

Tanım 2.5.9. M, R-modülü için M nin alt modüllerinin oluşturduğu her artan $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots \subseteq N_c \subseteq \ldots$ zinciri sonlu adımdan sonra sabitleniyorsa M modülüne Noetherian denir [18].

Tanım 2.5.10. M, R-modülü için Mnin alt modüllerinin oluşturduğu her azalan $\cdots \subseteq N_c \subseteq \cdots \subseteq N_2 \subseteq N_1$ zinciri sonlu adımdan sonra sabitleniyorsa M modülüne Artinian modül denir [18].

Önerme 2.5.5. M R-modülü için alttaki koşullar denktir [18].

(i) M Noetheriandır.

(ii) Mnin bütün alt modülleri sonlu üretilmiştir.

(iii) Mnin alt modüllerinin herhangi boş olmayan ailesinin bir maksimal elemanı vardır.

Önerme 2.5.6. M R-modül olsun. M Artinian modüldür ancak ve ancak Mnin alt modüllerinin herhangi boş olmayan ailesinin bir minimal elemanı vardır [18].

Lemma 2.5.1. (Nakayama Lemma)
R değişmeli, M sonlu üretilmiş R-modül, J de Rnin $J \subseteq Jac(R)$ sağlayan ideali olsun. Eğer $M = JM$ ise $M = 0$ dır [18].

Tanım 2.5.11. $0 \neq M$, R-modülü; 0 ve M haricinde alt modüle sahip değilse Mye bir basit modül denir [18].

Örnek 2.5.6. Cisimler kendi üzerinde basit modüldür [18].

Tanım 2.5.12. M, R-modül ve N de Mnin öz alt modülü olsun. Eğer Mnin Nyi içeren tek öz alt modülü N ise Nye bir maksimal alt modül denir [18].

Tanım 2.5.13. R tamlık bölgesi, M de R üzerinde bir modül olsun. Bir $m \in M$ için $rm = 0$ sağlayan bir $0 \neq r \in R$ elemanı bulunabiliyorsa $m$ye burulmalı eleman ve Mdeki bu biçimdeki elemanların oluşturduğu

$$\tau(M) = \left\{ m \in M : rm = 0 \text{ olacak biçimde } r \in R \setminus \{0\} \text{ mevcut} \right\}$$

alt modüle de Mnin burulmalı alt modülü denir [18].

$\tau(M) = M$ ise Mye bir burulmalı modül, $\tau(M) = 0$ ise Mye bir serbest burulmalı modül ismi verilir.

Uyarı 2.5.2. Eğer R tamlık bölgesi değilse $\tau(M)$, Mnin alt modülü olmak zorunda değildir. Örneğin; $\mathbb{Z}_{10}$-modül $\mathbb{Z}_{10}$ da $\overline{2}$ ve $\overline{5}$ elemanları birer burulmalı eleman olmalarına rağmen $\overline{2} + \overline{5} = \overline{7}$ elemanı burulmalı değildir.

Tanım 2.5.14. M, R-modül, N de Mnin, Rnin bir J ideali için $N = JM$ olacak biçimde bir alt modülü olsun. Öyleyse Jye Nnin bir temsil ideali denir, J=Pr (N) ile sembolize edilir. [13].

Tanım 2.5.15. R-modül Mnin her N alt modülü $N = JM$ sağlayan bir J temsil idealine sahipse Mye çarpımsal modül denir [13].

Örnek 2.5.7. R halkası, çarpımsal R-modüldür, çünkü tüm I idealleri için $I = IR$ yazılabilir.

Örnek 2.5.8. $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Q}$ çarpımsal değildir. Çünkü bir alt modülü olarak $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} = I\mathbb{Q}$ biçiminde yazılabilseydi; $I = 0$ için $\mathbb{Z} = 0$ ve $I \neq 0$ için $\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ çelişkisi olurdu.

Bir N alt modülü için bir temsil ideal mevcut olmayabilir. Örneğin; F cisim, M de F cismi üzerinde $boy_F M \geq 2$ olan bir vektör uzayı olsun. N, Mnin sıfırdan farklı bir öz alt uzayı olmak üzere Rnin $N = IM$ olacak şekilde bir I ideali yoktur. Diğer yandan, Mnin bütün alt modülleri bir temsil ideale sahiptir ancak ve ancak M bir çarpımsal modüldür [13].

Tanım 2.5.16. M, R-modül; N, K de Mnin temsil idealleri sırasıyla J_1 ve J_2 olan alt modülleri olsun. Yani $N = J_1M$, $K = J_2M$ olsun. Bu alt modüllerin çarpımı $NK = J_1J_2M$ biçiminde tanımlanır [13].

Teorem 2.5.6. M çarpımsal R-modül, D ve E de Rnin bazı I, J idealleri için $D = IM$, $E = JM$ olacak biçimde iki alt modülü olsun. Bunların çarpımı, D ve Enin temsil ideallerinden bağımsızdır [13].

$ispat.$ R nin I_1, I_2, J_1, J_2 idealleri için $D = I_1M = I_2M = S$ ve $E = J_1M = J_2M = T$ olsun. $abm \in DE = I_1J_1M$, $(a \in I_1, b \in J_1)$ alalım. $J_1M = J_2M$ olduğundan, $r_i \in J_2$ ve $m_i \in M$ için $bm = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i$ dir. O zaman $abm = \sum_{i=1}^{n} r_i(am_i)$ olur.
$am_i = \sum_{j=1}^{k} s_{ij}m'_{ij}$, $(s_{ij} \in I_2, m'_{ij} \in M)$ dir. Böylece $abm = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} r_i s_{ij} m'_{ij}$ yazılabilir. O halde $abm \in I_2J_2M$ ve dolayısıyla $I_1J_1M \subseteq I_2J_2M$ dir. Benzer olarak $I_2J_2M \subseteq I_1J_1M$ dir ve böylece eşitlik elde edilir.

Lemma 2.5.2. M çarpımsal R-modüldür $\iff$ $\forall \alpha \in M$ için $R\alpha = IM$ olacak biçimde bir I ideali mevcuttur [10].

Not: (i) Yukarıdaki lemmanın ifadesindeki Iya α nın bir temsil ideali denir.
(ii) $m_1, m_2 \in M$ için Rm_1 ve Rm_2 nin çarpımı m_1m_2 veya Rm_1m_2 ile gösterilecektir. I ve J nin temsil idealleri sırasıyla m_1 ve m_2 nin temsil idealleri ise $m_1m_2 = Rm_1Rm_2 = IJM$ dir.

Önerme 2.5.7. M çarpımsal R-modül, N, K ve N_i, $(i \in \Omega)$ ler de alt modülleri olsun. Her $r \in R$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ için aşağıdakiler sağlanır [13].

(i) $\text{Pr}\left(\sum_{i\in\Omega} N_i\right) = \sum_{i\in\Omega}\text{Pr}\,(N_i)$

(ii) $\text{Pr}\left(\bigcap_{i\in\Omega} N_i\right) = \left(\bigcap_{i\in\Omega}[\text{Pr}(N_i) + Ann(M)]\right)M$

(iii) $\text{Pr}\left(\sum_{i=1}^{k} m_i\right) \subseteq \sum_{i=1}^{k}\text{Pr}\,(m_i)$

(iv) $\text{Pr}\,(rm) = r\ \text{Pr}\,(m)$

(v) $\text{Pr}\,(NK) = \text{Pr}\,(N) \cdot \text{Pr}\,(K)$

(vi) $\text{Pr}\,(N^k) = (\text{Pr}(N))^k$

(vii) $\text{Pr}\,(m^k) = (\text{Pr}(m))^k$

Önerme 2.5.8. M, Rde çarpımsal modül ve N alt modülüyse; $N = (N : M)M$ dir [18].

$ispat.$ M çarpımsal modül olduğu için Rnin $N = JM$ olacak biçimde bir J ideali mevcuttur. Buradan $J \subseteq (N : M)$ dir ve $N = JM \subseteq (N : M)M \subseteq N$ olur ve istenildiği gibi $N = (N : M)M$ olduğu sonucuna ulaşılır.

Teorem 2.5.7. R birimli-değişmeli, M de çarpımsal R-modül olsun.
I_1, I_2 ve $K = Ann(M)$; Rnin idealleri olmak üzere, $I_1M \subseteq I_2M$dir ancak ve ancak $I_1 \subseteq I_2 + K$ veya $M = ((I_2 + K) : I_1)M$dir [11].

Sonuç 2.5.3. I_1 ve I_2, R nin idealleri; M de sonlu üretilmiş çarpımsal R-modül olsun. $I_1M \subseteq I_2M$dir ancak ve ancak $I_1 \subseteq I_2 + Ann(M)$dir [11].

3
ASAL ALT MODÜLLER

Tanım 3.1. R birimli-değişmeli halka ve $1_R \neq 0_R$ olsun. M, R-modül; N de Mnin öz alt modülü olsun. $r \in R$, $m \in M$ olmak üzere, eğer $rm \in N$ olunca $m \in N$ ya da $rM \subseteq N$ olması gerekiyorsa Nye M nin bir asal alt modülüdür denir [18].

Örnek 3.1. R birimli-değişmeli halka olsun. Rnin bütün asal idealleri R-modül Rnin bir asal alt modülüdür.

Örnek 3.2. Vektör uzayında her öz alt modül asaldır.

Örnek 3.3. R tamlık bölgesi, M de R-modül olsun. Mnin $\tau(M)$ burulmalı alt modülü, $\tau(M) \subset M$, öz alt modülse Mde asal alt modüldür. $0 \neq r \in R$ ve $m \in M$ için $rm \in \tau(M)$ ise $srm = 0$ olacak biçimde $0 \neq s \in R$ mevcuttur. R tamlık bölgesi olduğu için $sr \neq 0$ dır ve $m \in \tau(M)$ bulunur. Ayrıca $(\tau(M) : M) = (0)$ dır.

Örnek 3.4. I, J ve P, R halkasının idealleri olsun. Önerme 2.3.2. den P asal ve $I \cap J \subseteq P$ ise $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ olması gerektiğini biliyoruz. Bu özelliği asal alt modüller için genellemek doğru olmayacaktır. Mesela; $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$-modülünde $(0, 0)$ asal alt modüldür ve $(\mathbb{Z} \times 0) \cap (0 \times \mathbb{Z}) = (0, 0)$ dır. Fakat $(0, 0)$ ne $(\mathbb{Z} \times 0)$ı ne de $(0 \times \mathbb{Z})$yi kapsar.

Lemma 3.1. *R halka, M R-modül; K de Mnin öz alt modülü olsun. K asal olur ancak ve ancak $(K : M)$, Rnin asal idealidir ve M/K serbest burulmalı $R/(K : M)$-modüldür [18].*

$ispat.$ $(\Longrightarrow)$: Mnin R-alt modülü K asal olsun. $\varkappa, y \in R$ için, $\varkappa y \in (K : M)$ ve $y \notin (K : M)$ olsun. Buradan $\varkappa y M \subseteq K$ ve $yM \nsubseteq K$ dir. O zaman $\varkappa ys \in K$ ve $ys \notin K$ olacak biçimde $s \in M$ elemanı mevcuttur. K bir asal alt modül olduğundan $a \in (K : M)$ dir. Yani $(K : M)$, Rnin bir asal idealidir.
Şimdi M/Knin serbest burulmalı $R/(K : M)$-modül olduğunu görelim.
$\overline{0} \neq \overline{r} \in R/(K : M)$ ve $\overline{m} \in M/K$ olmak üzere $\overline{r}\,\overline{m} = \overline{0}$ olsun. Öyleyse $rm \in K$ ve $r \notin (K : M)$ dir. K asal alt modül olduğundan, $m \in K$ olup $\overline{m} = \overline{0}$ dır.

$(\Longleftarrow)$: M/K serbest burulmalı bir $R/(K : M)$-modül ve $(K : M)$ de Rde asal ideal olmak üzere, $r \in R$ ve $m \in M$ için $rm \in K$ ve $r \notin (K : M)$ olsun. Buradan $\overline{r}\ \overline{m} = \overline{0}$ ve $\overline{r} \neq \overline{0}$ dır. M/K nin bir serbest burulmalı $R/(K : M)$-modül olduğundan $\overline{m} = \overline{0}$, yani $m \in K$ bulunur. Böylece K, Mde asal alt modüldür.

Uyarı 3.1. Yukarıdaki Lemma 3.1. gereğince; eğer K, Mnin asal alt modülüyse $(K : M)$, Rnin asal idealidir. Ancak $(K : M)$nin Rnin bir asal ideali olması, Knin asal alt modül olmasını gerektirmez. Örneğin; $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$-modülünde $K = \mathbb{Z}(k, 0)$, $(k > 1)$, alt modülüne göre $(K : M) = (\mathbb{Z}(k, 0) : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = (0)$ olup $\mathbb{Z}$de bir asal idealdir ama K asal alt modül değildir.

Önerme 3.1. K; M R-modülünün öz alt modülü olsun. $(K : M)$, Rnin bir maksimal idealiyse K, Mnin asal alt modülüdür [18].

$ispat.$ $(K : M)$, Rnin bir maksimal ideali olsun. O halde $R/(K : M)$ bölüm halkası bir cisimdir. Böylece $R/(K : M)$-modül M/K vektör uzayıdır. Buradan M/K serbest burulmalı $R/(K : M)$-modüldür. Lemma 3.1. gereğince K, asal alt modüldür.

Teorem 3.1. *M, R-modül, N de Mde öz alt modül olsun. N asal R-alt modüldür ancak ve ancak Rnin bir I ideali, Mnin de bir K alt modülü için $IK \subseteq N$ iken $I \subseteq (N : M)$ veya $K \subseteq N$dir [18].*

$ispat.$ $\Longrightarrow$: N, Mde asal alt modül olsun. I, Rde bir ideal ve K de Mnin alt modülüyken, $IK \subseteq N$ fakat $K \nsubseteq N$ kabul edip $s \in I$ alalım. Buradan $st \in N$ ve $t \notin N$ olan bir $t \in M$ vardır. Nnin asal olması gereğiyle $s \in (N : M)$ olur. Yani $I \subseteq (N : M)$ bulunur.
$\Longleftarrow$: Rnin I ideali ve Mnin K alt modülü için $IK \subseteq N$ iken $I \subseteq (N : M)$ veya $K \subseteq N$ olduğunu kabul edelim. $r \in R$ ve $m \in M$ için, $rm \in N$ ve $m \notin N$ olsun. O zaman $(r)(m) \subseteq N$ ve $(m) = Rm \nsubseteq N$ olur. Kabulümüzden, $(r) \subseteq (N : M)$ olup $r \in (N : M)$ bulunur. Böylece N alt modülü asaldır.

Önerme 3.2. M, R- modül, N de Mdeki bir maksimal alt modülse N asaldır [18].

$ispat.$ Mnin N maksimal alt modülünü alalım. $\varkappa \in R$, $\alpha \in M$ için $\varkappa\alpha \in N$ ama $\alpha \notin N$ olsun. Buradan $N + R\alpha = M$dir. Öyleyse $\varkappa M = \varkappa N + R\varkappa\alpha \subseteq N$, yani $\varkappa \in (N : M)$ olup N asaldır.

Lemma 3.2. *M çarpımsal R-modül, K de Mde öz alt modül olsun. Öyleyse alttaki ifadeler eşdeğerdir [10].*

(i) *K, Mnin asal R-alt modülüdür.*

(ii) *$Ann(M/K)$, Rde asal idealdir.*

(iii) *$Ann(M) \subseteq I$ olacak biçimdeki bir I asal idealine göre $K = IM$ dır.*

Lemma 3.3. *M, Rde çarpımsal modül; K de Mnin öz alt modülü olsun. $I = Ann(M/K)$ ideali için $\sqrt{K} = \sqrt{I}M$ dir [13].*

Tanım 3.2. M, R-modül; Q da alt modülü olsun. $r \in R$, $m \in M$ için $rm \in Q$ ve $m \notin Q$ iken bir $c \in \mathbb{N}$ için $r^c M \subseteq Q$ ise Q ya bir asalımsı alt modül denir [21].

Örnek 3.5. Rdeki her asalımsı ideal, R-modül Rnin asalımsı alt modülüdür.

Örnek 3.6. Tanımdan anlaşılabileceği üzere her asal alt modül asalımsıdır. Ancak bir asalımsı alt modülün asal olması gerekmez. Örneğin, $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nin $Q = 8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ alt modülünü ele alalım. Q, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nin bir asalımsı alt modülüdür. Ancak $4.(2,1) = (8,4) \in Q$ iken $(2,1) \notin Q$ ve $4(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = 4\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z} \nsubseteq Q$ olup Q asal değildir.

Önerme 3.3. M, R-modül; K de Mde asalımsı alt modül olsun. $(K : M) = Ann(M/K)$, Rde asalımsı idealdir [18].

ispat. K, M nin asalımsı alt modülüyken, $\varkappa, y \in R$ olmak üzere, $\varkappa y \in (K : M)$ ve $y \notin (K : M)$ kabul edelim. Buradan $\varkappa y M \subseteq K$ ve $yM \nsubseteq K$ dir, yani en az bir $m \in M$ vardır ki $\varkappa ym \in K$ ve $ym \notin K$ dir. K asalımsı olduğundan $\varkappa^c M \subseteq K$ olacak biçimde bir c pozitif tam sayısı mevcuttur. Öyleyse $\varkappa^c \in (K : M)$ dir. Böylece $(K : M)$ bir asalımsı idealdir.

Sonuç 3.1. *M, R-modül; K de Mnin asalımsı alt modülü olsun. $\sqrt{(K : M)}$, Rde asal idealdir [18].*

Tanım 3.3. M, R-modül; K de alt modül olarak asalımsı olsun. $\sqrt{(K : M)} = P$ ise Kye P asal idealine ilişkin asalımsı (P-asalımsı) alt modül denir [18].

Önerme 3.4. M, R-modül; K de öz alt modülü olsun. Rnin bir P ideali alttaki koşulları sağlıyorsa, P asal ideal ve K de P-asalımsı alt modüldür [18].
(i) $r \in R$ ve $m \in M$ için $rm \in K$ ve $m \notin K \implies r \in P$dir.
(ii) $r \in P$ ise bir $c \in \mathbb{K}$ için $r^c M \subseteq K$ dir.

ispat. Bu koşullar sağlanıyorsa Knin bir asalımsı alt modül olduğu açıktır. Şimdi $\sqrt{(K : M)} = P$ olduğunu gösterelim. (ii) gereğince $P \subseteq \sqrt{(K : M)}$ olur.
Tersine: $r \in \sqrt{(K : M)}$ ise bir $s \in \mathbb{N}$ için $r^s \in (K : M)$ olup $r^s M \subseteq K$ dir.

s bunu sağlayan en küçük tam sayı olsun, yani $r^{s-1}M \nsubseteq K$ dir. Buradan $r^{s-1}m \notin K$ olacak biçimde bir $m \in M$ vardır. Böylece $r^s m = r.r^{s-1}m \in K$ ve $r^{s-1}m \notin K$ olduğundan, (i) gereğince, $r \in P$ dir. Yani $\sqrt{(K:M)} \subseteq P$ ile eşitlik elde edilmiş olur.

Tanım 3.4. M, R- modül; K de alt modülü olarak verilsin. Mnin I, J alt modüllerine göre $K = I \cap J$ iken $K = I$ veya $K = J$ oluyorsa Kye bir indirgenemez alt modül adı verilir [21].

Tanım 3.5. M, R-modül; K de öz alt modülü olsun. Mnin Ki kapsayan tüm asal alt modüllerinin kesişimine Knin radikali denir, $\sqrt{K}$ ile sembollendirilir [13].

Önerme 3.5. Eğer Q bir asalıması R-modülse $\sqrt{Q}$ radikali Rde asal idealidir [21].

ispat. $ab \in \sqrt{Q}$ olsun. O halde bir $n \in \mathbb{N}$ için $a^n b^n M = (ab)^n M \subseteq Q$ dur. Eğer $b \notin \sqrt{Q}$ ise $b^n m \notin Q$ olacak biçimde bir $m \in M$ elemanı vardır. Buradan $a^n b^n m \in Q$ ve $b^n m \notin Q$ olduğu için bir $c \in \mathbb{N}$, $a^{nc}M \subseteq Q$yu gerçekler. Yani $a \in \sqrt{Q}$ bulunur.

Teorem 3.2. *M çarpımsal R-modül, N de Mnin alt modülü olsun.*
Öyleyse $\sqrt{N} = \{m \in M : m^t = Rm^t \subseteq N, 0 \neq t \in \mathbb{Z}\}$ dir [13].

ispat. $D = \{m \in M : m^t \subseteq N, 0 < t \in \mathbb{Z}\}$ olsun. Önce Dnin Mde bir alt modül olduğunu gösterelim. $a, b \in D$ alalım ve I, J de sırasıyla Ra ve Rb nin temsil idealleri olsun. O zaman $Ra^s = I^s M \subseteq N$ ve $Rb^k = J^k M \subseteq N$ olacak biçimde s ve k pozitif tam sayıları vardır. $1 \leq q \leq s+k$ olmak üzere;
$(a+b)^{s+k} = a^{s+k} + \binom{s+k}{1} a^{s+k-1}b + \cdots + \binom{s+k}{q} a^{s+k-q}b^q + \cdots + b^{s+k} = a^s[a^k + \binom{s+k}{1} a^{k-1}b + \cdots + \binom{s+k}{k} b^k] + b^k[\binom{s+k}{k+1} a^{s-1}b + \cdots + b^s] \subseteq N$
olduğundan $a + b \in D$ dır.
Ayrıca $\forall a \in D$ ve $r \in R$ için $(ra)^s \subseteq N$ dir. Çünkü $Ra^s \subseteq N$ dir. O zaman D, Mnin bir alt modülüdür.
Şimdi bir $a \in D$ alalım, I da a nın temsil ideali olmak üzere, $1 \leq t \in \mathbb{Z}$ için $a^t = I^t M \subseteq N$ dir. Lemma 3.3. den $\sqrt{a^t} = \sqrt{I^k M} = \sqrt{I}M \subseteq \sqrt{N}$. Buradan $\sqrt{Ra} = \sqrt{IM} \subseteq \sqrt{N}$ olup $D \subseteq \sqrt{N}$ dir.
Karşıt olarak, $a \in \sqrt{N} = \sqrt{(N:M)}M$ alalım.
O zaman $a \in \sum_{i=1}^{n} r_i m_i$, $(r_i \in \sqrt{(N:M)}, m_i \in M)$ yazılabilir. Burada bir $n_i \geq 1$ için $r_i^{n_i} \in (N:M)$ dir. Yeterince büyük n için $a^n \subseteq (N:M)M = N$ (Eşitlik N çarpımsal olduğundan sağlanır). Dolayısıyla $a \in D$ elde edilir.

Şimdi çarpımsal modüllerin asal alt modülleri için önemli bir özelliği aşağıdaki teorem ile verelim.

Teorem 3.3. *M çarpımsal R-modül, P de öz alt modülü olarak verilsin. P asal alt modüldür ancak ve ancak Mnin herhangi U, V alt modülleri $UV \subseteq P$ oluşunu sağlıyorsa $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$dir [13].*

$ispat.$ P, Mde bir asal alt modül ve Mnin U, V alt modülleri için $UV \subseteq P$ olsun. $U \nsubseteq P$ ve $V \nsubseteq P$ kabul edelim. J_1 ve J_2 sırasıyla U ve Vnin tamsil idealleri olmak üzere, $UV = J_1J_2M \subseteq P$ olur. $a, b \in M$ olmak üzere bir $r \in J_1$ ve $s \in J_2$ için $ra \in U \setminus P$ ve $sb \in V \setminus P$ alabiliriz. Böylece $rsb \in J_1J_2M \subseteq P$, yani $rsb \in P$ dolayısıyla, P nin asal olması sebebiyle, $rM \subseteq P$ dir. O halde $ra \in P$ çelişkisi elde edilir.
Karşıt olarak, Mnin U ve V alt modülleri için $UV \subseteq P$ iken $U \subseteq P$ veya $V \subseteq P$ olsun. Bir $r \in R$ ve $a \in M \setminus P$ için $ra \in P$ fakat $rM \nsubseteq P$ alalım. Öyleyse bir $\alpha \in M$ için $r\alpha \notin P$ dir. J_1 ve J_2 sırasıyla ra ve αnın temsil idealleri olsun.
O zaman $R(ra) \cdot (R\alpha) = (Ra) \cdot (Rr\alpha) = J_1M \cdot J_2M = J_1J_2M \subseteq P$ olur. Kabulümüz gereğince $Ra \subseteq P$ veya $Rr\alpha \subseteq P$ dir. Bunun sonucunda da $a \in P$ veya $r\alpha \in P$ çelişkisine ulaşılır.

4
ZAYIF ASAL ALT MODÜLLER

Tanım 4.1. R birimli-değişmeli halka, $1_R \neq 0_R$ olsun. M, R-modül ve N de Mde öz alt modül olsun. $r \in R$, $m \in M$ olmak üzere, eğer $0 \neq rm \in N$ olunca $m \in N$ ya da $rM \subseteq N$ olması gerekiyorsa Nye Mnin bir zayıf asal alt modülüdür denir [5].

Yukarıdaki tanıma denk olarak A. Azizi, zayıf asal alt modül tanımını,
"R birimli-değişmeli halka; M, R-modül; N de Mde öz alt modül olsun. $a, b \in R$ ve Mnin her T alt modülü için $abT \subseteq N$ olması $aT \subseteq N$ veya $bT \subseteq N$ olmasını gerektiriyor ise Nye bir zayıf asal alt modül denir [7]" şeklinde yapmıştır.

Asal ve zayıf asal alt modül tanımlarından anlaşılabileceği üzere, asal olan her alt modül zayıf asaldır. Aksine zayıf asal olan bir alt modül, asal olmak zorunda değildir.

Örnek 4.1. 0 her zaman zayıf asaldır. n bir bileşik sayı olmak üzere $\mathbb{Z}_n$-modül $\mathbb{Z}_n$ için 0 alt modülü zayıf asaldır fakat asal değildir. Özel olarak kendisi üzerinde $M = \mathbb{Z}_6$ modülünü ele alalım. $N = \{\overline{0}\}$, M nin bir zayıf asal alt modülüdür. Fakat $\overline{3}.\overline{4} = \overline{0}$ olup $\overline{3}\mathbb{Z}_6 \nsubseteq N$ ve $\overline{4}\mathbb{Z}_6 \nsubseteq N$ olduğundan asal değildir.

Örnek 4.2. $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası üzerinde $M = \mathbb{Z}_{12}$ modülünü alalım.
M nin $N = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$ alt modülü için $(N : M) = \{r \in \mathbb{Z} : r\mathbb{Z}_{12} \subseteq N\} = 3\mathbb{Z}$ dir. Her $rm \in N$ için $m \in N$ veya $r \in 3\mathbb{Z}$ olmalıdır. Buradan N, Mnin bir asal alt modülüdür, dolayısıyla da zayıf asaldır.

Uyarı 4.1. M, R-modül; N de asal alt modülüyse $(N : M)$nin Rnin bir asal ideali olduğu bilinmektedir. Ancak aynı durum zayıf asal alt modüller için geçerli değildir. Yani N asal olmayan bir zayıf asal alt modülse $(N : M)$, Rnin bir zayıf asal ideali olmak zorunda değildir. Mesela, M yi $\mathbb{Z}_8$ $\mathbb{Z}$-modülü olarak alalım. $N = \{0\}$ alt modülü Mde bir zayıf asal alt modül olur fakat $(N : M) = 8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$nin zayıf asal ideali değildir. Bununla birlikte aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Önerme 4.1. R değişmeli, M bir sadık devirli R-modül; N de Mnin bir zayıf asal alt modülü iken $(N : M)$, Rde zayıf asal idealdir [5].

ispat. $M = Rm$ ve $0 \neq ab \in (N : M)$, $a \notin (N : M)$ olsun. O halde $a(rm) \notin N$ olacak biçimde $r \in R$ vardır. Buradan $am \notin N$dir. $0 \neq abM \subseteq N$ olduğundan $0 \neq abm \in N$dir. Çünkü $abm = 0$ olsaydı, M sadık devirli R-modül olduğundan $ab \in (0 : m) = (0 : M) = 0$ olup $ab = 0$ çelişkisi elde edilirdi. O halde N, Mnin zayıf asal alt modülü olduğundan $b \in (N : M)$ elde edilir. Buradan $(N : M)$, Rde zayıf asal idealdir.

Tanım 4.2. P, Rnin bir asal ideali olmak üzere, R-modül Mnin her N öz alt modülüne göre $(N : M) = P$ ise Mye bir P-asal R-modül denir [5].

Önerme 4.2. R değişmeli, M bir P-asal R-modül; K de Mnin bir zayıf asal alt modülü olsun. $(K : M)$, Rde zayıf asal idealdir [5].

ispat. $0 \neq ab \in (K : M)$ ve $a \notin (K : M)$ olsun. O zaman $ax \notin K$ olacak biçimde bir $x \in M \setminus K$ vardır. $0 \neq abM \subseteq K$ olduğundan $abx \in K$ dir.
Eğer $abx = 0$ ise $ab \in (0 : x) = (0 : M) = P$ dolayısıyla $b \in P \subseteq (K : M)$ ve $(K : M)$, Rdeki bir zayıf asal idealdir.
Eğer $abx \neq 0$ ise $ax \notin K$ ve K de Mnin zayıf asal alt modülü olduğundan
$b \in (K : M)$ elde edilir. O zaman $(K : M)$, Rdeki bir zayıf asal idealdir.

Tanım 4.3. R birimli-değişmeli halka, M bir R-modül; N de öz alt modülü olsun. $r \in R$, $m \in M$ için $0 \neq rm \in N$ iken $m \in N$ veya bir $c \in \mathbb{N}$ için $r^c M \subseteq N$ ise Nye Mnin bir zayıf asalımsı alt modülü denir [12].

Tanım 4.1. ve Tanım 4.3. den anlaşılabileceği üzere her zayıf asal alt modül zayıf asalımsıdır. Ancak bunun karşıtı hep doğru değildir.

Örnek 4.3. $R = \mathbb{Z}$ tam sayılar halkası üzerinde $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ modülünü düşünelim. $Q = 4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ olsun, $r \in R$ ve $(x, y) \in M \setminus Q$ için için $0 = (0, 0) \neq r(x, y) \in Q$ iken x tek ise $r = 4s$ ve x çift ise de $r = 2t$, $(s, t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$, biçimindedir.
Öyleyse x tek iken, yani $r = 4s$ iken her k doğal sayısı için:
$r^k M = (4s)^k(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = s^k 4^{k-1}(4\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z}) \subseteq 4\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z} \subseteq 4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = Q$ elde edilir.
Benzer biçimde x çift iken, yani $r = 2t$ iken $r^k M = (2t)^k(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = t^k(2^k\mathbb{Z} \times 2^k\mathbb{Z})$ olup $k = 2$ için $r^k M \subseteq 4\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z} \subseteq Q$ elde edilir. Buradan; Q, Mnin bir zayıf asalımsı alt modülü olur fakat $0 \neq 2 \cdot (2, 1) \in Q$ iken $2M \nsubseteq Q$ ve $(2, 1) \notin Q$ olup Q zayıf asal değildir.

Önerme 4.3. R değişmeli, M bir sadık devirli R-modül ve K de zayıf asalımsı olan bir alt modülü olsun. O zaman $(K : M)$, Rnin zayıf asalımsı idealidir [22].

$ispat.$ $M = Rm$ ve $0 \neq ab \in (K : M)$, $a \notin (K : M)$ olsun. O halde $a(rm) \notin K$ biçiminde bir $r \in R$ vardır. Buradan $am \notin K$ dir. $0 \neq abM \subseteq K$ olduğundan $0 \neq abm \in K$ dir. Çünkü $abm = 0$ olsaydı, M sadık devirli olduğundan $ab \in (0 : m) = (0 : M) = 0$ olup $ab = 0$ çelişkisi elde edilirdi. O halde K bir zayıf asalımsı alt modül olduğundan $b^c \in (K : M)$ sağlayan bir $c \in \mathbb{K}$ mevcuttur. Öyleyse $(K : M)$, Rnin bir zayıf asalımsı idealidir.

Önerme 4.4. R birimli-değişmeli, M bir R-modül ve N de bir zayıf asalımsı alt modülü olsun. Eğer N, M nin bir asalımsı alt modülü değilse $(N : M)N = 0$ dır [12].

$ispat.$ Kabul edelim ki $(N : M)N \neq 0$ olsun. İspatı tamamlamak için Nnin, Mnin asalımsı alt modülü olduğunu göstermek yetecektir. $r \in R, \alpha \in M$ için $r\alpha \in N$ olsun. Eğer $r\alpha \neq 0$ ise N, Mde zayıf asalımsı olduğundan $\alpha \in N$ veya $r^c M \subseteq N$ dir.
Şimdi $r\alpha = 0$ kabul edelim. Öncelikle $rN \neq 0$ olsun. O zaman $rn \neq 0$ olacak biçimde bir $n \in N$ vardır. Buradan $0 \neq rn = r(n + \alpha) \in N$ ve dolayısıyla Nnin bir zayıf asalımsı alt modül olması sebebiyle $r \in Rad(N : M)$ veya $n + \alpha \in N$dir. Öyleyse $r \in Rad(N : M)$ veya $\alpha \in N$ dir yani N bir asalımsı alt modüldür.
Bu kez $rN = 0$ kabul edelim. $(N : M)\alpha \neq 0$ diyelim. Buradan bir $s \in (N : M)$ için $s\alpha \neq 0$ yazılabilir. Yani $0 \neq s\alpha = (r + s)\alpha \in N$ ve dolayısıyla N bir zayıf asalımsı alt modül olduğu için $r \in Rad(N : M)$ veya $\alpha \in N$ dir. Şimdi de $(N : M)\alpha = 0$ kabul edelim. $(N : M)N \neq 0$ olduğundan $bs \neq 0$ olacak biçimde $b \in (N : M)$ ve $s \in N$ vardır. O zaman $0 \neq bs = (r + b)(s + \alpha) \in N$, dolayısıyla Nnin zayıf asalımsı alt modül oluşundan $r + b \in Rad(N : M)$ veya $s + \alpha \in N$ dir. Öyleyse $r \in Rad(N : M)$ veya $\alpha \in N$ bulunur. Bu da Nnin Mde bir asalımsı alt modül olduğunu gösterir.

Teorem 4.1. *R birimli-değişmeli, M çarpımsal R-modül; N de zayıf asalımsı alt modülü olsun. Bu N asalımsı alt modül değilse $N^2 = 0$ dır. [12].*

$ispat.$ M çarpımsal modül olduğundan yukarıdaki Önerme 4.4 gereğince,
$N^2 = (N : M)^2 M = (N : M)N = 0$ elde edilir.

Yukarıdaki Önerme 4.4. ve Teorem 4.1. den yararlanarak aşağıdaki sonuca ulaşılabilir.

Sonuç 4.1. *M R-modül, K de Mdeki asal olmayan bir zayıf asal alt modül olsun. Öyleyse altta verilenler sağlanır [5].*

i) I, Rnin idealiyken; $I \subseteq (K : M)$ ise $IK = 0$ dır. Özel olarak $(K : M)K = 0$ dır.

ii) M *bir çarpımsal* R*-modülse* $K^2 = 0$ *dır.*

$ispat.$

i) $I \subseteq (K : M)$ olsun. $IK \neq 0$ olduğunu kabul edelim.
Her zayıf asal alt modül, bir zayıf asalımsı alt modül olduğu için Önerme 4.4. gereğince $(K : M)K = 0$ dır ve $I \subseteq (K : M)$ olduğundan $0 \neq IK \subseteq (K : M)K = 0$ çelişkisine ulaşılır. O zaman $IK = 0$ dır.
Özel olarak $(K : M)$ de, R nin $(K : M) \subseteq (K : M)$ özelliğini sağlayan bir ideali olduğundan $(K : M)K = 0$ dır.

ii) K asal olmayan bir zayıf asal alt modül olduğundan, asalımsı alt modül ve zayıf asalımsı alt modül tanımları gereğince K, Mnin asalımsı olmayan bir zayıf asalımsı alt modülüdür. M çarpımsal bir R- modül ise Teorem 4.1 gereğince $K^2 = 0$ dır.

Aşağıda verilen sonuçlar zayıf asal alt modülleri karakterize etmek açısından önemlidir.

Teorem 4.2. *R değişmeli; M, R-modül; N de Mnin öz alt modülü olsun. O zaman alttakiler eşdeğerdir [5].*

i) I, Rnin ideali; K, Mnin alt modülü, $0 \neq IK \subseteq N$ olsun. Öyleyse $IM \subseteq N$ ya da $K \subseteq N$ dir.

ii) N, Mnin bir zayıf asal alt modülüdür.

iii) $m \in M \setminus N$ *için* $(N : Rm) = (N : M) \cup (0 : Rm)$.

iv) $m \in M \setminus N$ *için* $(N : Rm) = (N : M)$ *veya* $(N : Rm) = (0 : Rm)$.

$ispat.$ $(i) \implies (ii)$:
$\varkappa \in R$ ve $\alpha \in M$ için $0 \neq \varkappa\alpha \in N$ kabul edelim. $I = R\varkappa$ ve $K = R\alpha$ alalım. O zaman $0 \neq IK \subseteq N$ olur. Buradan kabulümüz gereğince $I \subseteq (N : M)$ ya da $K \subseteq N$ dir. Dolayısıyla $\varkappa \in (N : M)$ ya da $\alpha \in N$ yani N, Mnin bir zayıf asal alt modülüdür.
$(ii) \implies (i)$:
N, Mnin zayıf asal alt modülü olsun. N asalsa asal modüller için istenen zaten sağlanır. Şimdi, N asal olmasın. $0 \neq IK \subseteq N$, $k \in K \setminus N$ alalım ($K \nsubseteq N$ kabul etmiş olduk). Böylece $I \subseteq (N : M)$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır.
$r \in I$ alalım. Eğer $rk \neq 0$ ise $k \notin N$ olup N zayıf asal olduğu için $r \in (N : M)$

dir. Yani $I \subseteq (N : M)$ dir.
Şimdi $rk = 0$ olsun. Önce $rK \neq 0$ kabul edelim. $y \in K$ için $ry \neq 0$ alabiliriz. $IK \subseteq N$ olduğundan $0 \neq ry \in N$ dir. Eğer $y \notin N$ ise N bir zayıf asal olduğu için $r \in (N : M)$ dir. Yani $I \subseteq (N : M)$ elde edilir. Eğer $y \in N$ ise $r(y+k) = ry \in N$ dir. $k \notin N$ olup N zayıf asal olduğundan $r \in (N : M)$, yani $I \subseteq (N : M)$ elde edilir.
$rK = 0$ kabul edelim. $Ik \neq 0$ ise bir $a \in I$ için $ak \neq 0$ diyebiliriz. O zaman N zayıf asal alt modül olduğundan $a \in (N : M)$ olur. $(r + a)k = ak \in N$ olduğundan $r \in (N : M)$, yani $I \subseteq (N : M)$ olur. Öyleyse $Ik = 0$ kabul edelim. $IK \neq 0$ olduğundan $bs \neq 0$ olacak biçimde $b \in I$ ve $s \in K$ mevcuttur. Sonuç 4.1 gereğince $(N : M)N = 0$ ve $0 \neq b(s + k) = bs \in N$ dir. Bu aşamada iki durum karşımıza çıkar. İlk olarak, eğer $b \in (N : M)$ ve $s + k \notin N$ ise $rK = 0$ olduğundan $0 \neq (r + b)(s + k) = rs + rk + bs + bk = bs \in N$ olur. Buradan $r + b \in (N : M)$ dolayısıyla $r \in (N : M)$ yani $I \subseteq (N : M)$ elde edilir. İkinci olarak, eğer $b \notin (N : M)$ ve $s + k \in N$ ise $0 \neq bs \in N$ olduğundan $s \in N$ olur ve buradan $k \in N$ çelişkisi oluşur. O halde $I \subseteq (N : M)$ dir.
$(ii) \implies (iii)$:
Eğer $m \in M \setminus N$ ise $(N : M) \cup (0 : Rm) \subseteq (N : Rm)$ olduğu barizdir. Karşıt kapsama için $x \in (N : Rm)$, $m \in M \setminus N$ alalım. Öyleyse $xm \in N$ dir. Eğer $xm \neq 0$ ise N zayıf asal olduğundan $x \in (N : M)$ olur. Eğer $xm = 0$ ise $x \in (0 : Rm)$ elde edilir.
$(iii) \implies (iv)$:
Lemma 2.4.1. gereğince açıktır.
$(iv) \implies (ii)$:
$0 \neq rm \in N$, $r \in R$, $m \in M \setminus N$ alalım. Buradan $r \in (N : Rm)$ ve $r \notin (0 : Rm)$ dir. (iv) kabulümüzden $r \in (N : Rm) = (N : M)$ elde edilir ve N, M nin bir zayıf asal alt modülü olur.

Tanım 4.4. M R-modülünde N alt modülü verilsin. $\forall a \in R$ için $(N : a) = \{\beta \in M : a\beta \in N\}$ biçiminde tanımlanan küme M nin N yi kapsayan bir alt modülüdür ve buna kolon alt modül denir [7].

Teorem 4.3. *M R-modül; N de bir öz alt modülü olsun. N bir zayıf asal alt modül olur ancak ve ancak $\forall a, b \in R$ için $(N : ab) = (N : a)$ veya $(N : ab) = (N : b)$dir [7].*

$ispat.$ $\implies$: N, Mde bir zayıf asal alt modül olsun.
Öncelikle $(N : ab) = (N : a) \cup (N : b)$ olduğunu gösterelim.
Her $\varkappa \in (N : ab)$ için $ab\varkappa \in N$, yani $ab(N : ab) \subseteq N$ dir. N zayıf asal alduğundan $a(N : ab) \subseteq N$ veya $b(N : ab) \subseteq N$ olup $a\varkappa \in N$ veya $b\varkappa \in N$ elde edilir.

Öyleyse $\varkappa \in (N : a) \cup (N : b)$ dir. Öte yandan, her $\varkappa \in (N : a) \cup (N : b)$ için $a\varkappa \in N$ veya $b\varkappa \in N$, ve dolayısıyla $ab\varkappa \in N$ dir. Buradan $\varkappa \in (N : ab)$ olur ve eşitlik elde edilir.

$(N : ab) \nsubseteq (N : a)$ ve $(N : ab) \nsubseteq (N : b)$ kabul edelim. O halde $\varkappa \in (N : ab) \setminus (N : a)$ ve $y \in (N : ab) \setminus (N : b)$ elemanları mevcuttur. Öyleyse eşitlik gereğince $(N : ab) \subseteq (N : a) \cup (N : b)$ olup $\varkappa + y \in (N : ab) \subseteq (N : a) \cup (N : b)$ dir. Buradan $\varkappa + y \in (N : a)$ veya $\varkappa + y \in (N : b)$ dir.
$\varkappa + y \in (N : a)$ ise $y \in (N : ab) \setminus (N : b)$ olduğundan $y \in (N : a)$ dır ve
$\varkappa = (\varkappa + y) - y \in (N : a)$ çelişkisi oluşur.
Benzer olarak $\varkappa + y \in (N : b)$ ise $y \in (N : b)$ çelişkisi elde edilir. Yani $(N : ab) \subseteq (N : a)$ veya $(N : ab) \subseteq (N : b)$ dir.
Ayrıca $(N : a) \subseteq (N : a) \cup (N : b) = (N : ab)$ ve $(N : b) \subseteq (N : a) \cup (N : b) = (N : ab)$ olduğundan $(N : ab) = (N : a)$ veya $(N : ab) = (N : b)$ dir.

$\Longleftarrow$: $a, b \in R$ ve $\varkappa \in M$ için $ab\varkappa \in N$ olsun. $(N : ab) = (N : a)$ kabul edelim. $\varkappa \in (N : ab) = (N : a)$ olup $a\varkappa \in N$ dir. Öyleyse N zayıf asaldır.
Benzer olarak $(N : ab) = (N : b)$ kabul edilirse de $\varkappa \in (N : ab) = (N : b)$ olup $b\varkappa \in N$ dir ve N nin zayıf asal olduğu sonucuna ulaşılır.

Şimdi çarpımsal modüllerin zayıf asal alt modülleri için birkaç özelliği inceleyelim.

Lemma 4.1. *R değişmeli, M çarpımsal R-modül ve N ve K de iki alt modülleri olsunlar.*

(i) ***Her** $n \in N$ **için** $nK = 0$ **ise** $NK = 0$ **dır.***

(ii) ***Her** $k \in K$ **için** $Nk = 0$ **ise** $NK = 0$ **dır.***

(iii) ***Her** $n \in N$ **ve** $k \in K$ **için** $nk = 0$ **ise** $NK = 0$ **dır [5].***

ispat. $(i) : n \in N$ için I_n ve J sırasıyla Rn ve K alt modüllerinin temsil idealleri olsun. ($Rn = I_nM$, $K = JM$)
O zaman $nK = (Rn)K = I_nJM = 0$ olur ve dolayısıyla $I_nJ \subseteq (0 : M)$. Önerme 2.5.7. deki temsil ideali özelliklerini kullanarak;
$NK = (\sum_{n\in N} Rn)\ K = (\sum_{n\in N} I_nM)\ (JM) = (\sum_{n\in N} I_nJ)\ M \subseteq (0 : M)M = 0$ sonucuna ulaşılır.
(ii) : (i) ye benzer olarak elde edilir.
$(iii) : n \in N$, $k \in K$ olsun. $nk = (R_n)(R_k) = I_nJ_kM = 0$ olacak biçimde R

nin I_n ve J_k idealleri vardır ve dolayısıyla $I_nJ_k \subseteq (0 : M)$ dir. Önerme 2.5.7. deki temsil ideali özelliklerini kullanarak;
$NK = (\sum_{n\in N} Rn)(\sum_{k\in K} Rk) = (\sum_{n\in N}\sum_{k\in K} I_nJ_k)M \subseteq (O : M)M = 0$ yazılabilir.

Teorem 4.4. *R değişmeli, M sonlu üretilmiş çarpımsal R-modül; P de bir öz alt modülü olsun. O zaman alttaki ifadeler eşdeğerdir [5].*

(i) *P, Mde zayıf asaldır.*

(ii) *Mnin K ve N alt modülleri $0 \neq NK \subseteq P$ biçimindeyse ya $N \subseteq P$ ya da $K \subseteq P$ dir.*

ispat. $(i) \implies (ii)$
Eğer P, Mnin bir asal alt modülü ise Teorem 3.3.den (ii) elde edilir. Öyleyse P, Mnin asal olmayan bir zayıf asal alt modülü olsun. N ve K, M nin $0 \neq NK \subseteq P$ sağlayan iki alt modülü olmak üzere $N \nsubseteq P$ ve $K \nsubseteq P$ kabul edelim. Bu durumda $NK = 0$ çelişkisinin elde edileceğini gösterelim. $n \in N$ alalım. Önce $n \in N \setminus P$ olsun. A, B ve C de sırasıyla Rn, N ve K alt modüllerinin temsil idealleri olmak üzere $Rn \subseteq N$ ve $NK \subseteq P$ olduğundan Sonuç 2.5.3. gereğince $A \subseteq B + (0 : M) = B$ ve $BC \subseteq (P : M)$ olup dolayısıyla $nK = (Rn)K = ACM \subseteq BCM \subseteq (P : M)M = P$ bulunur. Buradan $ACM \subseteq P$ olduğundan $C \subseteq (P : AM) = (P : Rn)$ dir. Teorem 4.2. gereğince $C \subseteq (P : Rn) = (P : M) \cup (0 : Rn)$ dolayısıyla $C \subseteq (P : M)$ veya $C \subseteq (0 : Rn)$ dir. $K \nsubseteq P$ olduğundan $CM = K \nsubseteq P$, yani $C \nsubseteq (P : M)$ olur, o halde $C \subseteq (0 : Rn)$ dir. Böylece $nK = (Rn)CM = 0$ ve Lemma 4.1. den $NK = 0$ olur. Şimdi $n \in N \cap P$ kabul edelim. $k \in K$ alalım. Eğer $k \in P$ ise P, M nin asal olmayan bir zayıf asal alt modülü olduğundan Sonuç 4.1. gereğince $nk \in (Rn)(Rk) \subseteq P^2 = 0$, yani $nk = 0$ dır. Buradan Lemma 4.1. (ii)den $NK = 0$ olur. Eğer $k \in K \setminus P$ ise yukarıdakine benzer şekilde A, B ve C yi sırasıyla Rk, N ve K alt modüllerinin temsil idealleri olorak alırsak $Rk \subseteq K$ ve $NK \subseteq P$ olduğundan Sonuç 2.5.3. gereğince $A \subseteq C + (0 : M) = C$ ve $BC \subseteq (P : M)$ olup dolayısıyla $Nk = N(Rk) = BAM \subseteq BCM \subseteq (P : M)M = P$ bulunur. Buradan $BAM \subseteq P$ olduğundan $B \subseteq (P : AM) = (P : Rk)$ dir. Teorem 4.2. gereğince $B \subseteq (P : Rk) = (P : M) \cup (0 : Rk)$ dolayısıyla $B \subseteq (P : M)$ veya $B \subseteq (0 : Rk)$ dir. $N \nsubseteq P$ olduğundan $BM = N \nsubseteq P$, yani $B \nsubseteq (P : M)$ olur, o halde $B \subseteq (0 : Rk)$ dir. Böylece $Nk = B(Rk)M = 0$ ve Lemma 4.1. den $NK = 0$ elde edilir.

$(ii) \implies (i)$
I, Rnin ideali ve P ve K de Mnin iki alt modülü olmak üzere $0 \neq IK \subseteq P$ olsun. $N = IM$ alalım. O zaman M çarpımsal olduğundan $0 \neq NK = I(K : M)M = IK \subseteq P$ dir. Buradan kabulümüz gereğince ya $N = IM \subseteq (P : M)M = P$ ya da $K \subseteq P$ dir. O halde Sonuç 2.5.3 gereğince $I \subseteq (P : M)$ ya da $K \subseteq P$ dir. Teorem 4.2. den; P, Mnin zayıf asal alt modülüdür.

N, Mnin öz alt modülü olsun. Nnin radikali $\sqrt{N}$ ile gösterilir. Mnin Nyi içeren tüm asal alt modüllerinin kesişimi olarak tanımlanır [13].
Eğer M çarpımsal R-modül, N de alt modülüyse Teorem 3.2. den $\sqrt{N} = \{m \in M : m^t = Rm^t \subseteq N, 0 \neq t \in \mathbb{Z}\}$ olduğunu biliyoruz.

Teorem 4.5. *R değişmeli, M sonlu üretilmiş sadık çarpımsal R-modül, N de Mnin asal olmayan zayıf asal alt modülü olsun. O zaman $N\sqrt{0} = 0$ dır [5].*

$ispat.$ $a \in \sqrt{0}$ alalım. O zaman I ve J, R nin idealleri olmak üzere $N = IM$ ve $Ra = JM$ yazılabilir. Eğer $a \in N$ ise Sonuç 2.5.3 gereğince $J \subseteq I$ dır ve Sonuç 4.1. den $N(Ra) = IJM \subseteq N^2 = 0$, yani $Na = 0$ olur. Her $a \in \sqrt{0}$ için $Na = 0$ olduğundan Lemma 4.1. gereğince $N\sqrt{0} = 0$ elde edilir.
Şimdi $a \notin N$ olsun. Teorem 4.2. den $(N : Ra) = (N : M)$ ya da $(N : Ra) = (0 : Ra)$ dır. Eğer $(N : Ra) = (0 : Ra)$ ise, $(N : M) \subseteq (N : Ra)$ olduğundan
$N = (N : M)M \subseteq (N : Ra)M = (0 : Ra)M$ olur. Buradan $Na = J(0 : Ra)M = 0$ olur ve Lemma 4.1. gereğince $N\sqrt{0} = 0$ elde edilir.
Eğer $(N : Ra) = (N : M)$ ise, $a \in \sqrt{0}$ olduğundan $a^n = 0$ ve $a^{n-1} \neq 0$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ bulunabilir. Dolayısıyla $Ra^n = J^nM = 0$ ve $Ra^{n-1} = J^{n-1}M \neq 0$ dır. M bir sadık R-modül olduğundan ve Sonuç 2.5.3 gereğince $J^n = 0$ dır. $J^{n-1} \subseteq (I : J)$ olduğundan
$0 \neq Ra^{n-1} = J^{n-1}M \subseteq (I : J)M \subseteq (IM : JM)M = (N : Ra)M = (N : M)M = N$ olur, dolayısıyla N zayıf asal olduğundan $a \in N$ olur fakat bu $a \notin N$ kabulü ile çelişir. O halde $N\sqrt{0} = 0$ olmalıdır.

Sonuç 4.2. *R değişmeli, M bir sonlu üretilmiş sadık çarpımsal R-modül; N, K de, Mnin asal olmayan zayıf asal alt modülleri olsun. Öyleyse $NK = 0$dır [5].*

$ispat.$ N ve K, Mde asal olmayan zayıf asal alt modüller olsun. Eğer $n \in N$ ise $n^2 \in N^2 = 0$ olduğundan $N \subseteq \sqrt{0}$ dır. Benzer olarak $K \subseteq \sqrt{0}$ olur. Öyleyse yukarıdaki Teorem 4.5. gereğince $NK \subseteq N\sqrt{0} = 0$ bulunur.

Sonuç 4.3. *R değişmeli, M sonlu üretilmiş sadık çarpımsal R-modül olmak üzere; D, Mnin tek maksimal alt modülü olsun ve Mnin her asal alt modülü maksimal olsun. Eğer P, Mde zayıf asal alt modülse ya $P = D$ ya da $PD = 0$ dır [5].*

$ispat.$ Eğer P asalsa, hipoteze göre P maksimal olup $P = D$ dir. Eğer P asal değil ise $\sqrt{0}$ tanımı gereğince sıfırı kapsayan herhangi bir asal ideal hipoteze göre maksimal olup D ye eşittir, yani $\sqrt{0} = N$ dir ve yukarıdaki Teorem 4.5. den $PD = P\sqrt{0} = 0$ elde edilir.

Lemma 4.2. *R quasi-yerel halka, M de sonlu üretilmiş R-modül olsun. Mnin bir tek maksimal alt modülü mevcuttur $\iff$ M devirlidir [23].*

$ispat.$ $\Longrightarrow$: Mnin biricik maksimal alt modülü N olsun. M sonlu üretilmiş olduğu için her öz alt modülünü içeren bir maksimal alt modülü vardır. Öyleyse N, M nin tüm öz alt modüllerini içerir. Mnin devirli olmadığını varsayalım. Bu durumda her $\forall \alpha \in M$ için $R\alpha$ bir öz alt modüldür ve $R\alpha \subseteq N$ dir. Buradan $M \subseteq N$ çelişkisi görülür. O zaman M devirlidir.
$\Longleftarrow$: M devirli olsun, yani $M = Rm$ biçiminde bir $m \in M$ mevcuttur. Bu durumda $Ann(m) = Ann(M)$, Rnin bir maksimal ideali olur. Buradan R-modül $R/Ann(M)$ bir cisimdir ve bir tek maksimal alt modülü vardır. Dolayısıyla Sonuç 2.5.2. gereğince $M \cong R/Ann(M)$ olduğundan, M bir tek maksimal alt modüle sahiptir.

Sonuç 4.4. *R bir değişmeli quasi-lokal halka, M tek maksimal alt modülü N olan sonlu üretilmiş sadık R-modül ve Mnin her asal alt modülü maksimal olsun. P, Mnin zayıf asal alt modülüyse ya $P = N$ ya da $PN = 0$ dır [5].*

$ispat.$ Lemma 4.2. gereğince M, devirlidir, dolayısıyla M çarpımsal bir R-modüldür. Sonuç 4.3. ten istenen elde edilir.

Asal alt modüllerin ve zayıf asal alt modüllerin bazı özelliklerini karşılaştırmak için aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Lemma 4.3. *R değişmeli, M R-modül; N de öz alt modülü olsun. Öyleyse alttakiler sağlanır [7].*

(i) *N zayıf asaldır ancak ve ancak Mnin N tarafından kapsanmayan her K alt modülü için $(N : K)$, Rnin bir asal idealidir. Özel olarak $(N : M)$ de Rnin asal idealidir.*

(ii) *N, Mnin zayıf asal alt modülü olsun. Mnin N tarafından kapsanmayan her K ve S alt modüllerine göre $(N : K) \subseteq (N : S)$ veya $(N : S) \subseteq (N : K)$ dir.*

$ispat.$ (i) $\Longrightarrow$: N zayıf asal ve $K \nsubseteq N$ olsun. O zaman $(N : K) \neq R$ dir. Çünkü $(N : K) = R$ olsaydı her $r \in R$ için $rK \in N$ olacağından $1_R \in R$ için $K = 1_R.K \subseteq N$ çelişkisi olurdu. Yani $(N : K)$ bir öz idealdir.
Şimdi $ab \in (N : K)$ olacak biçimde $a, b \in R$ alalım. O halde $abK \subseteq N$ dir. N zayıf asal alt modül olduğu için, $aK \subseteq N$ veya $bK \subseteq N$ dir.
Eğer $aK \subseteq N$ ise $a \in (N : K)$ dır.
Eğer $bK \subseteq N$ ise $b \in (N : K)$ dır.
Özel olarak, N bir öz alt modül olduğundan M kendisinin N tarafından kapsanmayan bir alt modülüdür ve buradan $(N : M)$nin de Rnin bir asal ideali olduğu görülür.

$\Longleftarrow$: $(N : K)$, Rnin bir asal ideali olsun. O halde $(N : K) \neq R$ dır, yani bir $s \in R$ vardır ki bu s için $sK \nsubseteq N$ dir.
$K \subseteq N$ olsa, $sK \subseteq K \subseteq N$ olup $sK \subseteq N$ çelişkisi olurdu. O halde $K \nsubseteq N$ dir.
Şimdi $a, b \in R$ için $abK \in N$ olsun. Buradan $ab \in (N : K)$ dir. $(N : K)$ asal olduğundan $a \in (N : K)$ veya $b \in (N : K)$ olur. Yani $aK \subseteq N$ veya $bK \subseteq N$ elde edilir ve buna göre N bir zayıf asal alt modüldür.

(ii) N zayıf asal alt modül ve $K, S \nsubseteq N$ olsun. $(N : K) \nsubseteq (N : S)$ ve $(N : S) \nsubseteq (N : K)$ kabul edelim.

Yani en az bir $0 \neq a \in (N : K) \setminus (N : S)$ ve $0 \neq b \in (N : S) \setminus (N : K)$ elemanı vardır. Buradan $aK \subseteq N$ ve $bS \subseteq N$ olur. $aK \subseteq N$ olduğundan her $k \in K$ için $ak \in N$ yazılabilir. Öyleyse her $r \in R$ için $rak \in N$ olup özel olarak b için de $bak \in N$ $(\forall k \in K)$dir. $K \nsubseteq N$ ve N zayıf asal olduğundan, en az bir $0 \neq t \in K \setminus N$ vardır ve bu t için $bat \in N$ iken $baM \subseteq N$ dir. Buradan $ba \in (N : M)$ dir ve (i) gereğince $(N : M)$ asal olduğundan $b \in (N : M)$ veya $a \in (N : M)$dır.
Eğer $b \in (N : M)$ ise $(N : M) \subseteq (N : K)$ olduğundan $b \in (N : K)$ çelişkisi elde edilir.
Eğer $a \in (N : M)$ ise $(N : M) \subseteq (N : S)$ olduğundan $a \in (N : S)$ çelişkisi elde edilir.
Benzer olarak $bS \subseteq N$ olması da bizi $a \in (N : S)$ veya $b \in (N : K)$ çelişkilerine götürür.
Öyleyse $(N : K) \subseteq (N : S)$ veya $(N : S) \subseteq (N : K)$ olmalıdır.

Önerme 4.5. R birimli-değişmeli; M, R-modül, K de öz alt modül olsun. K asal

olur ancak ve ancak K asalımsı ve zayıf asaldır [7].

$ispat.$

$\Longrightarrow$ K, Mnin asal alt modülüyse Tanım 3.2. ve Tanım 4.1. gereğince asalımsı ve zayıf asaldır.

$\Longleftarrow$ K, M nin bir asalımsı ve zayıf asal alt modülü ve $rn \in K$, $n \notin K$ olsun. O halde K asalımsı olduğundan $r^cM \subseteq K$ olacak biçimde bir $c \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Dolayısıyla her $m \in M \setminus K$ için öyle $c \in \mathbb{Z}^+$ vardır ki $r^cm \in K$ olup $r^c \in (K : m)$ dir. K zayıf asal olduğundan Lemma 4.3. gereğince $(K : m)$, Rnin bir asal idealidir. Buradan $r \in (K : M)$ dir. Böylece her $m \in M$ için $rm \in K$, yani $rM \subseteq K$ bulunur. O halde K bir asal alt modül olur.

Teorem 4.6. *R birimli-değişmeli halka, M bir R-modül ve N de Mnin öz alt modülü olsun. O zaman alttakiler eşdeğerdir [7].*

(i) *N bir zayıf asal alt modüldür.*

(ii) *Her $\varkappa, y \in M$ için $(N : \varkappa) \neq (N : y)$ ise $N = (N + R\varkappa) \cap (N + Ry)$ dir.*

$ispat.$ $(i \implies ii)$
$r \in R$ için $r \in (N : x) \setminus (N : y)$ olsun. Buradan $rx \in N$ ve $ry \notin N$ dir. Dolayısıyla $y \notin N$ olur, N zayıf asal olduğu için Lemma 4.3 (i) gereğince $(N : y)$, R nin bir asal ideali olur.
$(N : y) \subseteq (N : ry)$ ve $\forall a \in (N : ry)$ için $ary \in N$ ve $ry \notin N$, yani $ar \in (N : y)$ ve $r \notin (N : y)$ dir. $(N : y)$ asal ideal olduğundan $a \in (N : y)$ olup $(N : ry) \subseteq (N : y)$ olur, yani $(N : y) = (N : ry)$ elde edilir.
Eğer $t \in (N + Rx) \cap (N + Ry)$ ise,
$t = n_1 + r_1x = n_2 + r_2y$ olacak biçimde $r_1, r_2 \in R$, $n_1, n_2 \in N$ vardır. O zaman $rt = rn_1 + r_1rx = rn_2 + r_2ry$ olup $r_1rx, rn_1, rn_2 \in N$ olduğundan $r_2ry \in N$ elde edilir. Yani $r_2 \in (N : ry) = (N : y)$ olur ve buradan $r_2y \in N$ dir. Böylece $t = n_2 + r_2y \in N$ olur.
$(ii \implies i)$
$r_1, r_2 \in R$, $a \in M$ olmak üzere $r_1r_2a \in N$ ve $r_1a \notin N$ iken $r_2a \in N$ olduğunu göstermeliyiz. Buradan $r_1 \in (N : r_2a) \setminus (N : a)$ alabiliriz. Öyleyse $(N : r_2a) \neq (N : a)$ dır. Şimdi $x = r_2a$, $y = a$ alırsak kabulden $N = (N + Rr_2a) \cap (N + Ra)$ elde edilir. Bu da $r_2a \in (N + Rr_2a) \cap (N + Ra) = N$ olduğunu gösterir.

Uyarı 4.2. N, Mde asal alt modül olsun. Öyleyse $\varkappa, y \in M$, $r \in R$ olmak üzere $r\varkappa \in N$ ise $N = N + R\varkappa$ ya da $N = N + Rry$ dir. Çünkü $\varkappa \in N$ ise $R\varkappa \subseteq N$ dir. $\varkappa \notin N$ ise $rM \subseteq N$ yani $ry \in N$ ve $Rry \subseteq N$ dir.

Sonuç 4.5. *N, R-modül Mde zayıf asal alt modül olsun. $\varkappa, y \in M$ alalım. Öyleyse aşağıdakiler gerçeklenir [7].*

(i) *Eğer $r \in R$ iken $r\varkappa \in N$ ise $N = (N + R\varkappa) \cap (N + Rry)$*

(ii) *Eğer N bir indirgenemez alt modül ise N asaldır.*

$ispat.$ (i) Eğer $ry \in N$ ise $N = (N + R\varkappa) \cap (N + Rry)$ dir. $ry \notin N$ alalım. O zaman
$r \in (N : \varkappa)$ ve $r \notin (N : y)$ olduğundan $(N : \varkappa) \neq (N : y)$ dir. Teorem 4.6. gereğince $N \subseteq (N + R\varkappa) \cap (N + Rry) \subseteq (N + R\varkappa) \cap (N + Ry) = N$ bulunur.
(ii) $r \in R, r\varkappa \in N$ olsun. (i) gereğince her $y \in M$ için $N = (N+R\varkappa)\cap(N+Rry)$ dir. Nnin bir indirgenemez alt modül olması sebebiyle $N = (N + R\varkappa)$ ya da $N = (N + Rry)$ dir. O halde $\varkappa \in N$ ya da $ry \in N$ bulunur. Buradan N bir asal alt modüldür.

5
SONUÇ

Bu tez çalışması sonucunda zayıf asal alt modül kavramı, genel özellikleriyle verildi. Asal alt modüller için geçerli olan bazı sonuçların zayıf asal alt modüller için geçerli olmadığı örneklendirilerek gösterildi. Bu özelliklerin geçerli olması için gereken ek koşullara yer verildi. Zayıf asal alt modülleri karakterize etmek amaçlı yapılan çalışmaların derlemesi yapıldı. Bu çalışmalardaki açık olduğu belirtilerek verilen bazı sonuçların ispatları üzerinde durularak detaylı açıklamalarıyla birlikte sunuldu.

KAYNAKÇA

[1] S. Galovich, M. Goldberg, "Unique factorization rings with zero divisors," *Mathematics Magazine*, vol. 51, no. 5, pp. 276–283, 1978.

[2] A. G. Ağargün, D. D. Anderson, S. Valdes-Leon, "Unique factorization rings with zero divisors," *Communications in Algebra*, vol. 27, no. 4, pp. 1967–1974, 1999.

[3] D. Anderson, E. Smith, "Weakly prime ideals," *Houston Journal of Mathematics*, vol. 29, Jan. 2003.

[4] S. E. Atani, F. Farzalipour, "On weakly primary ideals," *Georgian Mathematical Journal*, vol. 12, no. 3, pp. 423–429, 2005.

[5] S. E. Atani, F. Farzalipour, "On weakly prime submodules," *Tamkang Journal of Mathematics*, vol. 38, no. 3, pp. 247–252, Sep. 2007.

[6] M. Behboodi, H. Koohy, "Weakly prime modules," *Vietnam J. Math.*, vol. 32, pp. 185–195, Jan. 2004.

[7] A. Azizi, "Weakly prime submodules and prime submodules," *Glasgow Mathematical Journal*, vol. 48, pp. 343–346, 2006.

[8] A. Azizi, "On prime and weakly prime submodules," *Vietnam J. Math*, vol. 36, no. 3, pp. 315–325, 2008.

[9] A. Barnard, "Multiplication modules.," *J. ALGEBRA.*, vol. 71, no. 1, pp. 174–178, 1981.

[10] Z. A. El-Bast, P. F. Smith, "Multiplication modules," *Communications in Algebra*, vol. 16, no. 4, pp. 755–779, 1988.

[11] P. F. Smith, "Some remarks on multiplication modules," *Archiv der Mathematik*, vol. 50, pp. 223–235, 1988.

[12] S. E. Atani, "The product of multiplication submodules," *Honam Mathematical Journal*, vol. 27, no. 1, pp. 1–8, 2005.

[13] R. Ameri, "On the prime submodules of multiplication modules.," *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 2003, no. 27, pp. 1715–1724, 2003.

[14] H. Mostafanasab, U. Tekir, K. H. Oral, "Weakly classical prime submodules," *Kyungpook Mathematical Journal*, vol. 56, no. 4, pp. 1085–1101, 2016.

[15] E. Uğurlu, "S-prime and s-weakly prime submodules," *Eurasian Bulletin of Mathematics*, vol. 4, no. 2, pp. 61–70, 2021.

[16] D. Sönmez, G. Yeşilot, K. Hila, "On weakly $\delta_{R,M}$-semiprimary submodules," *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, vol. 71, no. 1, pp. 119–130, 2022.

[17] G. Yeşilot, M. Özavşar, *Soyut cebir çözümlü problemleri*, 2012.

[18] F. Çallıalp, Ü. Tekir, *Değişmeli Halkalar ve Modüller*. Birsen Yayınevi, 2009.

[19] R. Y. Sharp, *Steps in Commutative Algebra* (London Mathematical Society Student Texts), 2nd ed. Cambridge University Press, 2001.

[20] D. Burton, *A First Course in Rings and Ideals* (Addison-Wesley series in mathematics). Addison-Wesley Publishing Company, 1970.

[21] M. D. Larsen, P. J. McCarthy, *Multiplicative theory of ideals*. Academic Press, 1971.

[22] A. E. Ashour, "On weakly primary submodules," *Journal of Al Azhar University-Gaza (Natural Sciences)*, vol. 13, pp. 31–40, 2011.

[23] C.-P. Lu, "Spectra of modules," *Communications in Algebra*, vol. 23, no. 10, pp. 3741–3752, 1995.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirisi

1. G. Yeşilot, Y. Şimşek, "Weakly Prime Submodules," 6th International Conference on Mathematics: An Istanbul Meeting for World Mathematicians, İstanbul, Turkey, pp.196, 2022.