3. ELEMENTER FONKSİYONLAR

3.1. Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar

Üstel fonksiyon

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x.e^{iy} = e^x\,(cosy + isiny)$$

biçiminde tanımlanır.

Sıfırdan farklı tek kompleks değişkeni $z = re^{i\theta}$ olan logaritmik fonksiyon

$$logz = Logr + i\theta$$

denklemi ile tanımlanır. Yani $z \neq 0$ için

$$logz = ln|z| + iargz$$

olup burada $argz = Argz + 2n\pi$, $-\pi < Argz \leq \pi$ şeklindedir. $n = 0$ ile bulunan değere logaritmanın esas değeri denir ve $Logz = ln|z| + iArgz$ ile gösterilir.

Soru 1. Aşağıdaki ifadelerin doğru olduklarını gösteriniz.

1) $e^{2\mp 3\pi i} = -e^2$

2) $e^{z+\pi i} = -e^z$

3) $exp\left(\frac{2+\pi i}{4}\right) = \sqrt{\frac{e}{2}}(1+i)$

Çözüm.

1)

$$\begin{aligned} e^{2\mp 3\pi i} &= e^2 e^{\mp 3\pi i} \\ &= e^2\,(cos(\mp 3\pi) + isin(\mp 3\pi)) \\ &= e^2\,(cos(\mp\pi) + isin(\mp\pi)) \\ &= e^2(-1 + i.0) \\ &= -e^2 \end{aligned}$$

bulunur.

2)

$$
\begin{aligned}
e^{z+\pi i} &= e^{z}\left(cos\pi + isin\pi\right)\\
&= e^{z}(-1+i.0)\\
&= -e^{z}
\end{aligned}
$$

bulunur.

3)

$$
\begin{aligned}
e^{\left(\frac{2+\pi i}{4}\right)} &= e^{\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}i}\\
&= e^{\frac{1}{2}}.e^{\frac{\pi}{4}i} = e^{\frac{1}{2}}\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)\\
&= e^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\\
&= \sqrt{\frac{e}{2}}(1+i)
\end{aligned}
$$

bulunur.

Soru 2. $e^{z} = -2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm.

$$e^{x}(cosy + isiny) = -2 + i0$$

$$e^{x}cosy + ie^{x}siny = -2 + i0$$

olup buradan 1) $e^{x}cosy = -2$ ve 2) $e^{x}siny = 0$ olmalıdır.

(2) denkleminde $\forall x \in \mathbb{R}$ için $e^{x} > 0$ olduğundan

$$siny = 0 \Rightarrow y = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

olmalıdır. Bulunan değer (1) denkleminde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
e^{x}cosy &= e^{x}cos(k\pi)\\
&= e^{x}(-1)^{k} = -2
\end{aligned}
$$

ifadesinin sağlanabilmesi için $k = 2n+1, \ \ n \in \mathbb{Z}$ olmalıdır. Buradan

$$e^x = 2 \Rightarrow x = ln2$$

elde edilir.

O halde $e^z = -2$ denkleminin çözüm kümesi

$$\{(x,y) : x = ln2, y = (2n+1)\pi, \ \ n \in \mathbb{Z}\}$$

olarak elde edilir.

Soru 3. $e^z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm.

$$\begin{aligned} z &= log(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i) \\ &= ln|-\sqrt{2} + \sqrt{2}i| + iarg(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i) \\ &= ln2 + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right), \ \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

bulunur.

Soru 4. $e^z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ denkleminin $(0, 2\pi)$ aralığındaki çözümünü bulunuz.

Çözüm.

$$Loge^z = Log(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)$$

olup buradan $z = ln2 + \frac{3\pi}{4}i$ bulunur.

Soru 5. Aşağıdaki sayıların logaritmalarını hesaplayınız.

a) 1

b) -1

c) i

d) $1-i$

Çözüm. a)

$$\begin{aligned} log1 &= ln|1| + iarg(1) \\ &= ln1 + i(0+2k\pi) \\ &= 2k\pi i, \ \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} log(-1) &= ln|-1| + iarg(-1) \\ &= ln1 + i(\pi+2k\pi) \\ &= (2k+1)\pi i, \ \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} logi &= ln|i| + iarg(i) \\ &= ln1 + i(\frac{\pi}{2}+2k\pi) \\ &= (\frac{1}{2}+2k)\pi i, \ \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} log(1-i) &= ln|1-i| + iarg(1-i) \\ &= ln\sqrt{2} + i(-\frac{\pi}{4}+2k\pi), \ \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

elde edilir.

Soru 6. $Re(z_1) > 0$ ve $Re(z_2) > 0$ ise

$$Log(z_1 z_2) = Logz_1 + Logz_2$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $Re(z_1) > 0 \Rightarrow Argz_1 = \theta_1$ olmak üzere $-\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ olur. Benzer şekilde, $Re(z_2) > 0 \Rightarrow Argz_1 = \theta_1$ olduğundan $-\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ dır.

Dolayısıyla

$$Logz_1 = ln|z_1| + i\theta_1$$

$$Logz_2 = ln|z_2| + i\theta_2$$

ve

$$\begin{aligned} Logz_1 + Logz_2 &= ln|z_1| + ln|z_2| + i(\theta_1 + \theta_2) \\ &= ln|z_1 z_2| + i(\theta_1 + \theta_2) \\ &= Log(z_1 z_2) \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlik her zaman doğru değildir. Gerçekten,

$$Log[(-1+i)(-1+i)] = Log(-2i) = ln2 - i\frac{\pi}{2}$$

fakat

$$Log(-1+i) + Log(-1+i) = ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4} + ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4} = ln2 + i\frac{3\pi}{2}$$

şeklindedir.

Soru 7. $Log(z+1) = i\frac{\pi}{4}$ denklemini çözünüz.

Çözüm. 1. Yol.

$$Log(z+1) = ln|z+1| + iarg(z+1) = i\frac{\pi}{4}$$

olduğundan $ln|z+1| = 0$ ve $arg(z+1) = \frac{\pi}{4}$ olmalıdır ($arg(z+1) = arctan\frac{y}{x+1} = \frac{\pi}{4}$ olur). Buradan

$$1)(x+1)^2 + y^2 = 1$$

ve

$$2)\frac{y}{x+1} = tan\frac{\pi}{4} = 1$$

elde edilir. (1) ve (2) denklemleri birlikte çözülerek

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1$$

ve $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ elde edilir. Sonuç olarak

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

bulunur.

2. Yol. $Log(z+1) = i\frac{\pi}{4} \Rightarrow z+1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ ve böylece $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \frac{i}{\sqrt{2}}$ bulunur.

Alıştırmalar

1) $e^z = 1 + i\sqrt{3}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

2) $e^{i\bar{z}} = \overline{e^{iz}}$ olması için gerek ve yeter şart $z = n\pi (n \in \mathbb{Z})$ olmasıdır, gösteriniz.

3) $|e^{z^2}| \leq e^{|z|^2}$ eşitsizliğini ispatlayınız.

4) $log z = (\pi/2)i$ denkleminin tüm köklerini bulunuz.

5) a) $y = 1$, $x \leq 0$ yarı doğrusu dışında her yerde $Log(z-i)$ fonksiyonunun analitik olduğunu;

b) reel eksenin $x \leq -4$ kısmı ve $\frac{\mp(1-i)}{\sqrt{2}}$ noktaları dışında $\frac{Log(z+4)}{z^2+i}$ fonksiyonunun her yerde analitik olduğunu gösteriniz.