T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLER VE SABİT NOKTA İTERASYONLARI

KADRİ DOĞAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
PROF. DR. VATAN KARAKAYA

İSTANBUL, 2016

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLER VE SABİT NOKTA İTERASYONLARI

Kadri DOĞAN tarafından hazırlanan tez çalışması 15.01.2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. İsmail KÜÇÜK

İstanbul Ticaret Üniversitesi

Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI

Maltepe Üniversitesi

Doç. Dr Necip ŞİMŞEK

İstanbul Ticaret Üniversitesi

Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Yıldız Teknik Üniversitesi

Bu çalışma, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü' nün BAPK 2014-07-03-DOP02 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Çalışmalarımda her türlü desteği benden esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Prof.Dr. Vatan KARAKAYA'ya, tez izleme komitesinde bulunan Sayın Prof.Dr. Ekrem SAVAŞ ve Sayın Doç. Dr. Yusuf ZEREN hocalarıma en içten duygularımla teşekkür ederim. Tez savunma sınavı jüri üyeliğini kabul ederek beni onurlandıran Sayın Prof.Dr. İsmail KÜÇÜK, Sayın Prof.Dr. Hüseyin ÇAKALLI, ve Sayın Doç.Dr. Necip ŞİMŞEK hocalarıma en samimi muhabbetlerimle teşekkürlerimi sunarım.
Doktora eğitimim boyunca beni maddi açıdan destekleyen YTÜ Bilimsel Araştırmalar Proje Koordinatörlüğü'ne teşekkür ederim.
Tüm hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim değerli aileme, çalışmalarım boyunca tüm anlayışı ve desteği ile yanımda olan sevgili eşim Afet DOĞAN'a ve çalışma arkadaşlarıma en içten duygularımla teşekkür ederim.

Ocak, 2016

Kadri DOĞAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ vi

ŞEKİL LİSTESİ viii

ÇİZELGE LİSTESİ ix

ÖZET x

ABSTRACT xii

BÖLÜM 1 1

GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 4
1.3 Hipotez 5

BÖLÜM 2 6

TEMEL KAVRAMLAR 6

2.1 Fonksiyonel Analiz ve Banach Uzaylarının Geometrisi ile İlgili Bazı Temel Kavramlar 6
2.2 Sabit Nokta Teorisiyle İlgili Bazı Temel Kavramlar 14
2.3 Sabit Nokta Teorisiyle İlgili Çalışmalarda Kullanılan Bazı Önemli Teoremler, Dönüşümler ve bu Dönüşümler Arasındaki İlişkiler 16

BÖLÜM 3 30

İTERASYON YÖNTEMLERİNİN YAKINSAKLIK DENKLİĞİ VE GEOMETRİK ÖZELLİKLİ KUVVETLİ YAKINSAKLIK SONUÇLARI 30

BÖLÜM 4 74

SABİT NOKTA İTERASYON YÖNTEMLERİNİN KARARLILIĞI 74

BÖLÜM 5 80

BAZI İTERASYON YÖNTEMLERİNE KARŞILIK GELEN DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARININ VERİ BAĞLILIĞI 80

BÖLÜM 6 92

SABİT NOKTA İTERASYON YÖNTEMLERİNİN YAKINSAKLIK HIZLARININ KARŞILAŞTIRMASI..... 92

BÖLÜM 7 100

UYGULAMA.....100

BÖLÜM 8 106

SONUÇ VE ÖNERİLER.....106

KAYNAKLAR..... 109

ÖZGEÇMİŞ..... 123

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Sıfır dahil pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
F	Cisim ($\mathrm{F}=\mathbb{R}$ yada $\mathbb{C}$)
$d: X \times X \to \mathbb{R}^+$	X üzerinde üzerinde tanımlı uzaklık fonksiyonu
$\|\bullet\|: X \to \mathrm{F}$	X üzerinde tanımlı norm fonksiyonu
(X,d)	X Metrik uzayı
$(X,\|\bullet\|)$	X Normlu uzayı
$B(x;r)$	x merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar
$\overline{B}(x;r)$	x merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar
$T: X \to Y$	X ten Y ye tanımlı T dönüşümü
F_T	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$cardF_T$	F_T nin eleman sayısı

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2. 1 İki sabit noktaya sahip bir T fonksiyonu..... 15
Şekil 2. 2 T bir daraltan (contraction) dönüşümdür..... 18
Şekil 6.1 Yeni tanımlanan (3.8) ve Ishikawa (3.12) sabit nokta iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık hızlarının karşılaştırılması.....97
Şekil 6.2 Yeni tanımlanan (3.8) ve Ishikawa (3.12) sabit nokta iterasyon yöntemlerinin adımları arasındaki değişim hızı.....97
Şekil 6.3 MP (3.24) ve PM (3.23) sabit nokta iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık hızlarının karşılaştırılması.....99
Şekil 6.4 MP (3.24) ve PM (3.23) sabit nokta iterasyon yöntemlerinin adımları arasındaki değişim hızı 99

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 5. 1 $u_0 = x_0 = 1$ başlangıç değeri ve $\alpha_n = \beta_n = 1/(n+1)$ seçimi için S dönüşümü ile elde edilen Noor iterasyon yönteminin ilk 100 adımının hesaplanması. 84

Çizelge6.1 Yeni tanımlanan (3.8) ve Ishikawa (3.12) sabit nokta iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık hızlarının karşılaştırılması 96

Çizelge 6.2 MP (3.24) ve PM (3.23) sabit nokta iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık hızlarının karşılaştırılması.....98

ÖZET

BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLER VE SABİT NOKTA İTERASYONLARI

Kadri DOĞAN

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Bu çalışmada ilk olarak tez metni içerinde (3.8) ile gösterilen yeni bir iterasyon yöntemi tanımlandı. Bu iterasyon yönteminde eğer $\xi_n = 0$ alınırsa Ishikawa iterasyonu elde edileceği görüldü. Bu nedenle ilk önce bu iterasyon yönteminin kuvvetli yakınsak olduğu sonucu ispatlandı ve iterasyonun kararlılığı gösterildi. Daha sonra (3.8) iterasyon yöntemi ile Mann iterasyon yönteminin yakınsaklıklarının denkliğine ilşkin bir sonuç elde edildi ve devamında, tanımlanan iterasyon yönteminin kullanışlı olduğunu kanıtlamak için Ishikawa iterasyon yöntemi ile yakınsaklık hızı karşılaştırması yapıldı. Bu iterasyon yöntemi için son olarak, gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümünü bulmak için etkili bir araç olacağı sonucu ispatlandı. Tanımlanan bir sonraki iterasyon yöntemi (3.8) ve Halpern iterasyonu olarak bilinen iterasyon yöntemlerinin hibrid formudur. Bu iterasyon yöntemi için J normalleştirilmiş dualite dönüşümüne sahip bir Banach uzayı ve $I-T_i$ sıfırda demiclosed özelliği ile (Teorem 3.1.38), J normalleştirilmiş dualite dönüşümüne sahip bir Banach uzayı ve $I-T$ sıfırda demiclosed özelliği ile (Teorem 3.1.39), J_ϕ weakly dizisel dualite dönüşümüne sahip bir Banach uzayı ve $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ accretive operatörlerin sonsuz bir ailesi ve ayrıca $J_{r_n}^{A_i} = (I + r_n A_i)^{-1}$ operatörü A'nın resolvent operatörü olmak üzere (Teorem 3.1.40) ve Gâteaux diferansiyellenebilir norma sahip bir Banach uzayı ve $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ accretive operatörlerin sonsuz bir ailesi ayrıca $J_{r_n}^{A_i} = (I + r_n A_i)^{-1}$ operatörü A'nın resolvent operatörü olmak üzere (Teorem 3.1.41) ifadeleri için kuvvetli yakınsaklık sonuçları

kanıtlandı. Bundan sonra literatüre yeni giren ve araştırmacılar tarafından yoğun bir şekilde çalışılan Picard-Mann iterasyon yönteminden esinlenerek tez metninde (3.24) ile gösterilen Mann-Picard iterasyon yöntemi tanımlanmıştır. Bu iterasyon yöntemi için de kuvvetli yakınsaklık, kararlılık, yakınsaklık denkliği, veri bağlılığı ve yakınsaklık hız karşılaştırması sonuçları kanıtlanmıştır. Dördüncü ve son iterasyon yöntemi olarak Kirk-MP ile gösterilen (3.25) sabit nokta iterasyon yöntemi tanımlanmıştır. Bu iterasyon yöntemi için güçlü yakınsaklık ve veri bağlılığı sonuçları araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Yeni iterasyon yöntemi, Yeni hibrid-tip iterasyon yöntemi, MP-iterasyon yöntemi, Kirk iterasyon yöntemi, Halpern tipinde iterasyon yöntemi Yakınsaklık, Yakınsamaların denkliği, Kararlılık, Sabit noktaların veri bağlılığı, Contractive-like operatörler, Weak contraction operatörler.

ABSTRACT

SOME GEOMETRICAL PROPERTIES AND NEW FIXED POINT ITERATION PROCEDURES

Kadri DOĞAN

Department of Mathematical Engineering

PhD. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

In this thesis, firstly, (3.8) fixed point iteration process was introduced. If $\xi_n = 0$, then this iteration process reduce to Ishikawa (3.12) iteration process. Hence the strong convergence and stability results were proven for (3.8) iteration process. Later, it was shown that (3.8) iteration process equivalent to Mann (3.7) iteration process. To show that this iteration method is useful, the comparison of the rate of convergence between (3.8) and (3.12) iteration processes was made. Finally, it was proven that this iteration process is effective tool to find the solution of delay differential equations. Another iteration process, it is hybrid form of (3.8) iteration process and as known Halpern (3.9) iteration process, is defined. Teorem 3.1.38, Teorem 3.1.39, Teorem 3.1.40 and Teorem 3.1.41 were proven for this iteration process. From now on, Mann-Picard (3.24) iteration process was introduced by inspired Picard-Mann (3.23) hybrid iteration process which is extensively studied by researchers. The strong convergence, the stability, the equivalance of convergenge, data dependence and the rate of convergence resluts were also proved fort his iteration process. The fourth and finally, MP-Kirk Fixed Point iteration process it was introduced and proved that the strong convergence and data dependence results

Key words: New iterative scheme, New hybrid-type iterative scheme, S-iterative scheme, Kirk iterative scheme, Halpern type iterative scheme, Convergence, Equivalence of convergences, Stability, Data dependence of fixed points, Contractive-like operators, Weak contraction operators.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Sabit nokta teori; Geometri, Topoloji ve Analizin uygun bir birleşimi olduğundan matematiğin ilgi çeken bir alanıdır. Son 50 yıl ve daha öncesinde sabit nokta teori, lineer olmayan denklemlerin (phenomena) çalışmasında çok önemli ve güçlü bir araç olarak ortaya çıkmıştır. Matematik biliminin hemen hemen her branşında çok sayıda uygulamaya sahiptir. Örneğin, adi ve kismi diferansiyel denklemlerin, integral denkelmelerin, lineer denklem sistemlerinin, dinamik sistemlerin kapalı yörüngesinde ve ekonomik dengede çözümlerin varlığını kanıtlamaktadır. Özellikle sabit nokta teknikleri; Biyoloji, Kimya, Ekonomi, Mühendislik ve Fizik gibi farklı alanlara uygulanmıştır. Bu teknikler sayesinde Kontrol Teori'de, Oyunlar Teorisin'de, Katagori Teori'de, Fonksiyonel denklemlerinde, İntegral denklemlerinde, Matematiksel Fizik'te, Matematiksel Kimya'da, Matematiksel Biyoloji'de, Matematiksel Ekonomi'de, W^* Cebir'inde, Fonksiyonel Analiz'de ve diğer birçok alanda çok verimli uygulamalar elde edilmiştir. Sabit nokta kavramı Analiz'de anahtar bir rol oynar. Ayrıca sabit nokta teoremleri random diferansiyel denklemlerde, Newton-Rapshon metoduna benzer nümerik metodlarda, Picard'ın varlık Teoremininde ve bağlantılı diğer alanlarda varlık teoride çoğunlukla kullanılmıştır. Sıralama üzerine kurulan sabit nokta teoremleri ise Cebir'de, Otomat Teori'de, Matematik Dilbilimde, Lineer Fonksiyonel Analiz'de, Yaklaşım Teori'de ve Kritik Nokta Teori'de önemli bir yer edinmişlerdir. Ayrıca, sabit nokta teoremleri; Varyasyon, liner eşitsizlikler, Optimizasyon ve yaklaşım teori alanındaki gibi birçok uygulamada büyük bir rol oynar. Bu yüzden sabit nokta teorinin çalımaları geniş bir çekilde ilgi görmektedir. Bunlardan bazıları optimizasyon [1],

hesaplama algoritmaları [2], [3], fizik [4], matematiksel model inşası [5], ekonomi [6], [7], varyasyonel eşitsizlikler [8], tamamlayıcı problemler [9], denge problemleri [10], sosyal bilimler [11-13], tıp [14-16], haberleşme [17], [18],…, vb. gibi bir çok referans verilebilir.

Sabit nokta teori çalışmaları çok geniş bir yazar kitlesi tarafından, başta tam metrik ve tam normlu uzaylar olmak üzere kısmi sıralı metrik uzaylar, konik metrik uzaylar, konveks ve genelleştirilmiş konveks metrik uzaylar, hiperkonveks metrik uzaylar, fuzzy metrik uzaylar ve intuitionistic fuzzy metrik ve normlu uzaylar,…, vb. gibi çok çeşitli matematiksel yapılar üzerinde yürütülmektedir, bkz. [19-33].

Sabit nokta teori üç başlık altında incelenir.

1) Topolojik sabit nokta teori,

2) Metrik sabit nokta teori,

3) Ayrık sabit nokta teori.

Üç alan arasında tarihsel olarak, sınır hatları üç büyük teorem ile çizilmiştir. Bu teoremler sıarasıyla aşağıdaki gibi verilebilir.

1) Brower sabit nokta teoremi

2) Banach contraction teoremi,

3) Tarski sabit nokta teoremi.

Normlu lineer uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları, 1909-1913 yılları arasında L.E.J. Brouwer ile başlamıştır. Klasik analiz derslerinden de iyi bilindiği üzere en basit sabit nokta teoremi, "Aradeğer Teoremi" nin doğrudan bir sonucu olarak: "$[a,b]\subset\mathbb{R}$ olmak üzere $f:[a,b]\to[a,b]$ sürekli bir dönüşüm ise, f nin $[a,b]$ aralığında bir sabit noktası vardır" şeklinde ifade edilir. Brouwer bu teoremi, 1912 yılında, $\mathbb{R}^n$ üzerine şu şekilde genişletmiştir : "B , $\mathbb{R}^n$ de kapalı bir yuvar olsun. Bu durumda $f:B\to B$ sürekli dönüşümü bir sabit noktaya sahiptir". Brouwer sabit nokta teoreminin kullanışlılığı ilk olarak, John Von Neumann tarafından 1928 de oyunlar teorisinin temelleri kurulurken fark edildi ve [34]' te sunduğu çalışmasında bu sonucu kullandı. Bunun yanı sıra Brouwer Sabit Nokta Teoreminin, Kakutani [35] tarafından yapılan bir genelleştirmesi, ekonomi biliminde (iktisat) Nobel ödülü alan John Nash tarafından [36] ve [37] de sunulan çalışmalarda kullanılmıştır.

1930 yılında da J. Schauder, Brouwer Sabit Nokta Teoremi'ni geliştirerek "X bir Banach uzayı K, X in boş olmayan herhangi bir kompakt konveks alt kümesi ve $f : K \to K$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda, f en az bir sabit noktaya sahiptir" ifadesini ispatlamıştır.

Doğrusal olmayan analizde klasik bir araç haline getirilen ve "contraction dönüşüm teoremi" veya kısaca "Contraction prensibi" olarak ta bilinen Banach contraction prensibi [38] en ünlü ve önemli sabit nokta teoremlerinden biridir.

Stefan Banach'ın doktora tezinin bir kısmını teşkil eden bu teorem, bir integral denklemin çözümünün varlığını ispatlamak amacıyla kurulmuş olup matematiğin birçok dalındaki varlık problemlerinin çözümünde kullanılan etkin bir unsur olmuştur.

Contraction dönüşüm teoremi [38] bir tam metrik uzaydan kendisi üzerine olan dönüşümlerle ilgili çok genel bir teoremdir. Teoremde bahsi geçen sabit noktanın daima tek olması ve kesin bir hesaplamayla elde edilebilir olması çok büyük avantajlar sağlasa da kullanılan dönüşümün contraction olması şartı teoremin uygulama alanlarına ciddi kısıtlamalar getirmektedir. Bu sebeple birçok araştırmacı daha genel metrik uzayları veya farklı türden dönüşüm sınıflarını kullanarak bu ünlü teoremin çok sayıda genelleştimelerini elde etmişlerdir, bkz. [39-56].

Yukarıda bahsedildiği üzere, Contraction dönüşüm teoremi belirli operatörlerin sabit noktaları için bir varlık ve teklik teoremi olmasının yanı sıra, sabit noktanın tam olarak hesaplanmasını sağlayan doğal bir yöntem geliştirmektedir. Söz konusu bu yönteme *iterasyon* denilir.

İterasyon yöntemleri (veya Ardışık Yaklaşımlar Yöntemleri) birçok bilim dalında karşılaşılan lineer ve, özellikle, lineer olmayan problemlerin çözümlerinde yaygın olarak kullanılan çok önemli matematiksel araçlardır.

M.S. 1. yüzylıdan günümüze kadar ulaşan dökümanlardan anlaşıldığı üzere; bu önemli hesaplama yöntemlerinden ilki, Alexandria' lı Heron un bir sayının karekökünü hesaplama sürecinde elde ettiği algoritmadır, bkz. [57].

Ele alınan bir problemde, kullanılan iterasyon şeması tarafından üretilen dizinin limiti problemin çözümünü verir. İterasyon yöntemlerinin kullanımı, bir "sabit nokta metodu" olarak tarif edilir ve çözümleri f fonksiyonunun sabit noktaları olan $x = f(x)$ tipindeki birkaç denklemden aşamalı olarak geliştirilir. Bu yaklaşım

astronomide 15. yüzyılın başlarında El-Kāshī tarafından, verilen $\sin 3^\circ$ değeri için $x = \left(\sin 3^\circ + 4x^3\right)/3$ bağıntısı yardımıyla $\sin 1^\circ$ değerinin hesaplanmasında kullanıldı. Yine astronomide, Kepler bu yöntemi kullanarak "Kepler denklemi" olarak bilinen transandantal bir denklemi çözdü, bkz. [57].

İterasyon yöntemleri bilimde geniş uygulama alanlarına sahip olduklarından, birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve bunun sonucunda çok sayıda iterasyon yöntemi geliştirilmiştir. Aşağıda ele aldığımız iterasyon yöntemleri bunların en önemlileri arasındadır.

İterasyon yönteminin Liouville [58] tarafından tanıtıldığı ve Cauchy tarafından kullanıldığı bilinmektedir. Bu yöntem ilk olarak Picard [59] tarafından, adi diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemlerinin çözümünün varlığı ve tekliğine ilişkin ispatında sistematik olarak geliştirildi. Krasnoselskij iterasyonu, bilhassa $\lambda = 1/2$ durumu, ilk olarak 1955 te Krasnoselkij [60] tarafından tanıtıldı ve 1957 de bu iterasyonunun genel formu Schaefer [61] tarfından verildi. Orijinal Mann iterasyonu 1953 te Mann [62] tarafından bir matris formülasyonunda tanıtıldı. Ishikawa itersyonu 1974 te yayınlanan Ishikawa [63] makalesinde tanıtıldı.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışma da, literatürde mevcut olan sabit nokta iterasyon yöntemleri göz önünde bulundururarak yeni ve daha hızlı operatörün sabit noktasına yakınsayan sabit nokta iterasyon yöntemleri tanımlanacak ve bu iterasyon yöntemleri tarafından üretilen iteratif dizilerin contractive-like dönüşümlerin (mevcut olması durumunda) sabit noktasına yakınsaklığına ilişkin bazı sonuçlar elde edilcektir. Ayrıca, birçok bilim dalında önemli uygulamalara sahip olan kararlılık teorisi irdelenerek, contractive-like dönüşümler aracılığıyla elde edilen bu iterasyon yöntemleri için kararlılık sonuçları elde edilecektir. Bu iterasyon yöntemleri kullanılarak contractive-like dönüşümlerin sabit noktalarının veri bağlılıklarına ilişkin bazı tahminler elde edilecektir. Devamında yeni tanımlanan (3.8) ve (3.24) iterasyon yöntemlerinin kullanışlılığını ve önemini ifade etmek için literatürde mevcut olan sabit nokta iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık hızlarının karşılaştırması yapılacaktır. Son olarak (3.8) sabit nokta iterasyon yönteminin

gecikmeli differansiyel denklemlerinin çözümlerini bulmak için etkili bir araç olduğu gösterilecektir.

1.3 Hipotez

Bu çalışmada, mevcut literatürdeki iterasyon yöntemlerinden farklı olarak sırasıyla (3.8), (3.24), (3.25) ve (3.30) ile verilen iterasyon yöntemleri tanımlandı. Bu iterasyon yöntemleri, (2.32) ve (2.35) şartlarını sağlayan sırasıyla weak contracktion ve contractive-like dönüşümler olarak adlandırılan dönüşümlerin sabit noktalarına belirli şartlar altında yakınsaktırlar. Üstelik (3.8) ve (3.24) ile verilen iterasyon yöntemlerinin (2.32) şartını sağlayan weak contraction dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsaklıkları, sırasıyla (3.2), (3.6), (3.7), (3.12), (3.13), (3.14), (3.15), (3.16) ve (3.23) ile verilen Picard, Genelleştirilmiş Krasnosel'skii, Mann, Ishikawa, Noor, S, İki adımlı Mann, SP ve PM iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıklarına denktirler. Ayrıca, (3.8) ve (3.24) ile verilen iterasyon yöntemleri Tanım 4.1.1 anlamında, (2.32) şartını sağlayan contractive-like dönüşümlere göre karalıdırlar. Son olarak, sırasıyla (3.24) ve (3.25) ile verilen MP ve Kirk-MP iterasyon yöntemlerinin kullanılmasıyla, sırasıyla (2.32) ve (2.35) şartlarını sağlayan weak contraction ve contractive-like dönüşümlerin ve bu dönüşümlerin Tanım 5.1.1 anlamındaki yaklaşım operatörlerinin sabit noktalarının birbirlerine yakınlıklarını içeren öngörüler, mevcut tezin hipotezlerini oluşturmuştur.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezde ortaya konulan problemi kanıtlamak için altyapı olarak kabul edilen bazı ön bilgilere ve sonuçlara yer verilmiştir.

2.1 Fonksiyonel Analiz ve Banach uzayların Geometrisi Kaynaklı Bazı Kavramlar

Tanım 2.1.1 (Metrik Uzay) X boş olmayan bir küme ve $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için;

M₁. $d(x, y) \geq 0$ (Pozitif tanımlılık)

M₂. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M₃. $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetriklik)

M₄. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlayan d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik veya uzaklık fonksiyonu, (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir [64]. Gösterimlerde kolaylık olması açısından bir (X, d) metrik uzayını X ile göstereceğiz.

Tanım 2.1.2 (Yakınsak Dizi) $X = (X, d)$ bir metrik uzay ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda, $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tamsayısı varsa, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine $x \in X$ noktasına yakınsaktır denir [64].

Tanım 2.1.3 (Cauchy Dizisi) $X=(X,d)$ bir metrik uzay ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her bir $\varepsilon>0$ için $m,n\geq n_0$ olduğunda, $d(x_n,x_m)<\varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0=n_0(\varepsilon)$ tamsayısı varsa, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine Cauchy dizisi denir [64].

Tanım 2.1.4 (Tam Metrik Uzay) $X=(X,d)$ bir metrik uzay olsun. X de ki her $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Cauchy dizisi yakınsak ise, (X,d) metrik uzayına tam metrik uzay denir [65].

Tanım 2.1.5 (Kompakt Metrik Uzay) $X=(X,d)$ bir metrik uzay olsun. X de ki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse (X,d) uzayına kompakt metrik uzay denir [66].

Tanım 2.1.6 (Sürekli Dönüşüm) $X=(X,d)$ ve $Y=(Y,\rho)$ iki metrik uzay, $f:X\to Y$ bir dönüşüm ve $x_0\in X$ olsun. Her bir $\varepsilon>0$ sayısı için,

$d(x,x_0)<\delta$ olduğunda $\rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon$

veya denk bir ifade ile,

$f(D(x_0;\delta))\subseteq D(f(x_0);\varepsilon)$

olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı varsa, f ye x_0 noktasında süreklidir denir. f, X in her noktasında sürekli ise, f ye X de süreklidir denir [66].

Tanım 2.1.7 (Lineer Uzay): V boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+:V\times V\to V$ ve $\cdot:\mathrm{F}\times V\to V$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa V ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir:

A. V, $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G$_1$. Her $x,y\in V$ için $x+y\in V$ dir,

G$_2$. Her $x,y,z\in V$ için $x+(y+z)=(x+y)+z$ dir,

G$_3$. Her $x\in V$ için $x+\theta=\theta+x=x$ olacak şekilde $\theta\in V$ vardır

G$_4$. Her $x\in V$ için $x+(-x)=(-x)+x=\theta$ olacak şekilde $-x\in V$ vardır,

G$_5$. Her $x,y\in V$ için $x+y=y+x$ dir.

B. $x,y\in V$ ve $\alpha,\beta\in\mathrm{F}$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

V$_1$. $\alpha\cdot x\in V$ dir,

V$_2$. $\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$ dir,

V_3. $(\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$ dir,

V_4. $(\alpha\cdot\beta)\cdot x=\alpha\cdot(\beta\cdot x)$ dir,

V_5. $1\cdot x=x$ dir (Burada 1, F nin birim elemanıdır).

$\mathrm{F}=\mathbb{R}$ ise V ye reel lineer uzay, $\mathrm{F}=\mathbb{C}$ ise V ye kompleks lineer uzay adı verilir [67].

Tanım 2.1.8 (Konveks Küme): V bir reel lineer uzay ve $A\subseteq V$ olsun. Her $x,y\in A$ için

$$B=\{z\in V: z=\alpha x+(1-\alpha)y, 0\le\alpha\le 1\}\subseteq A$$

ise, A kümesine konvekstir denir [66].

Tanım 2.1.9 (Normlu Uzay) X bir lineer uzay olsun ve F cismi $\mathbb{R}$ olmak üzere, $\|\bullet\|: X\to\mathrm{F}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon

N_1. $\|x\|=0\Leftrightarrow x=\theta$

N_2. Her $\alpha\in\mathrm{F}$ ve her $x\in X$ için $\|\alpha\cdot x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$

N_3. Her $x,y\in X$ için $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|\bullet\|$ fonksiyonuna X te (veya X üzerinde) norm, $(X,\|\bullet\|)$ ikilisine de normlu uzay denir [68].

X üzerindeki bir norm, X üzerinde

$$d(x,y)=\|x-y\|,\ \ (x,y\in X) \tag{2.1}$$

ile verilen norm bir metrik tanımlar ve bu metriğe norm tarafından üretilen metrik denir.

Tanım 2.1.10 Bir X normlu uzay üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayına X normlu uzayının dual uzayı denir ve X^* ile gösterilir. $X^*=B(X,\mathbb{R})$ şeklinde yazılabilir ve

$$\|f\|_*=\sup\{|f(x)|: x\in S_x\} \tag{2.4}$$

normuna göre bir normlu uzaydır [69].

Tanım 2.1.11 X normlu vektör uzay olsun. $S=\{f^{-1}(G): f\in X^*, G\in\tau\}$ tarafından üretilen X üzerindeki topoloji τ olsun. Bir başka deyişle $f\in X^*$,ve G, F ($\mathbb{R}$ *veya* $\mathbb{C}$)

cismi içinde açık olmak üzere $f^{-1}(G)$ kümelerinin sonlu kesişimlerinin tüm bileşimlerinin ailesi τ olsun. Daha sembolik formda $f \in X^*$ ve G, F ($\mathbb{R}\, veya\, \mathbb{C}$) cismi içinde açık olmak üzere,

$$\tau = \bigcup_{keyfi} \bigcap_{sonlu} f^{-1}(G)$$

olsun. τ topolojisine X üzerinde X^* tarafından üretilen (indirgenen) zayıf topoloji denir. Bu topoloji için $\sigma(X, X^*)$ ve τ_w notasyonu da kullanılır [70].

Tanım 2.1.12 X normlu vektör uzay olsun. $S = \left\{ \varphi^{-1}(G) : \varphi \in X^{**}, G \in \tau_{|\cdot|} \right\}$ tarafından üretilen X^* üzerindeki topoloji τ olsun. Bir başka deyişle $\varphi \in X^{**}$, $\varphi : X^* \to F$ lineer sınırlı, ve G, K ($\mathbb{R}\, veya\, \mathbb{C}$) cismi içinde açık olmak üzere $\varphi^{-1}(G)$ kümelerinin sonlu kesişimlerinin tüm bileşimlerinin ailesi τ olsun. Daha sembolik formda $\varphi \in X^{**}$ ve G, F ($\mathbb{R}\, veya\, \mathbb{C}$) cismi içinde açık olmak üzere,

$$\tau = \bigcup_{keyfi} \bigcap_{sonlu} \varphi^{-1}(G)$$

olsun. τ topolojisine X^* üzerinde X^{**} tarafından üretilen (indirgenen) zayıf* topoloji denir. Bu topoloji için $\sigma(X^*, X^{**})$ ve τ_{w^*} notasyonu da kullanılır [70].

Tanım 2.1.13 (Banach Uzayı) X normlu lineer uzay olsun**.** X**,** $d(x, y) = \|x - y\|$, $(x, y \in X)$ norm metriğine göre tam ise X'e Banach uzayı denir.

X nin Reel veya Kompleks lineer uzay oluşuna göre Banach uzayı da Reel veya Kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır [71].

X normlu uzayının $\left(X^*, \|.\|_*\right)$ dual uzayı daima bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.14 X bir reel vektör uzay olsun. X üzerinde bir iç çarpım aşağıdaki özellikleri sağlayan bir

$$\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonudur. Her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

i_1) $\langle x, x \rangle \geq 0$;

i_2) $\langle x, x \rangle = 0$ ancak ve ancak $x = 0$;

i_3) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$;

$i_4)$ $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.

$\mathbb{C}$ komplex değerli iç çarpım ise $\mathbb{R}$ değerli iç çarpım şartlarından (i_4) şartı aşağıdaki şart ile yer değiştirir.

$İ_5)$ $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

burada ($\bar{}$) eşleniği göstermektedir [70].

Aşağıdaki örnek $\mathbb{R}^3$ üzerinde tanımlı skaler çarpımın bir iç çarpım olduğunu gösterir.

Örnek 2.1.15 $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_n y_n$ ile tanımlı $\langle .,.\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir iç çarpım tanımlar. Bu iç çarpıma $\mathbb{R}^n$ üzerindeki standart iç çarpım adı verilir.

Örnek 2.1.16 $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_n \overline{y_n}$ ile tanımlı $\langle .,.\rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $\mathbb{C}^n$ üzerinde bir iç çarpım tanımlar. Bu iç çarpıma $\mathbb{C}^n$ üzerindeki standart iç çarpım adı verilir.

Tanım 2.1.17 X bir kompleks veya reel vektör uzayı ve $\langle .,.\rangle$, X üzerinde iç çarpım ise $\left(X, \langle .,.\rangle\right)$ ikilisine bir iç çarpım uzayı adı verilir.

Teorem 2.1.18 $\left(X, \langle .,.\rangle\right)$ bir iç çarpım uzayı ve $\langle .,.\rangle$ nin indirgediği norm $\|.\|$ olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ için

a) Parellel kenar kuralı

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \tag{2.5}$$

sağlanır.

b) Eğer X bir reel vektör uzayı ise bu durumda

$$4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \tag{2.6}$$

polarizasyon kuralı olarak isimlendirilen yukarıdaki eşitlik sağlanır.

c)Eğer X bir Kompleks vektör uzayı ise bu durumda

$$4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 \tag{2.7}$$

polarizasyon kuralı olarak isimlendirilen yukarıdaki eşitlik sağlanır [70].

Tanım 2.1.19 Tam iç çarpım uzayına bir Hilbert uzayı denir. [70].

1936 yılında, Clarkson [72] düzgün konvekslik üzerine önemli bir çalışma yapmıştır. Bu çalışma Banach uzaylarının geometrisi ve onun uygulamaları üzerine kapsamlı araştırmaların başlangıcı olmuştur.

$C \subset B$ kapalı, konveks ve boştan farklı bir alt küme ve B^*, B Banach uzayının dual uzayı olsun. B'nin konvekslik modülü olan $\delta_B(\varepsilon)$ 'u aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\delta_B(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|a+b\|}{2} : a,b \in \overline{B(0,1)}, \|a-b\| \geq \varepsilon\right\}. \qquad (2.8)$$

Konvekslik modülü [0,2] üzerinde sürekli olan [0,2] den [0,1]'e tanımlanan reel değerli bir fonksiyondur. Bir Banach uzayı düzgün konvekstir ancak ve ancak her $\varepsilon > 0$ için $\delta_B(\varepsilon) > 0$ dır. B bir normlu uzay ve $S_B = \{a \in B : \|a\| = 1\}$ B'nin birim küresi olsun. Eğer $a \in S_B$ için

$$\frac{d}{dt}\left(\|a+tb\|\right)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{\|a+tb\| - \|a\|}{t}$$

limiti mevcut ise bu durumda B'nin normu $a \in S_B$ noktasında Gâteaux diferansiyellenebilirdir.

Eğer her S_B noktasında Gâteaux diferansiyellenebilir ise bu takdirde B'nin normu Gâteaux diferansiyellenebilirdir denir.

Eğer her $b \in S_B$ için, limit $a \in S_B$ için düzgün yaklaşırsa B'nin normuna düzgün Gâteaux diferansiyellenebilirdir denir.

Benzer şekilde eğer B'nin normu düzgün Gâteaux diferansiyellenebilir ise bu takdirde B düzgün smooth olur.

Eğer her $a,b \in B, a \neq b \; ve \|a\| = \|b\| = 1$ için

$$\|\lambda a + (1-\lambda)b\| < 1, \quad \forall \lambda \in (0,1)$$

eşitsizliği mevcut ise B normlu uzayına strictly konveks uzay denir.

Şimdi yukarıdaki tanımların sonuçları olarak aşağıdaki teorem ve sonuçları ispatları olmadan verelim.

Teorem 2.1.20 [73] B bir Banach uzayı olsun.

a)B düzgün konvekstir ancak ve ancak B^* düzgün smoothtur.

b)B düzgün smoothtur ancak ve ancak B^* düzgün konvekstir.

Teorem 2.1.21 [73] her düzgün smooth uzay refleksivdir.

Eğer $\phi(0)=0$ olacak şekilde $[0,\infty)$ üzerinde kesin artan, sürekli ve kendi üzerine bir ϕ dönüşümüne gauge (ölçü) dönüşümü denir.

ϕ gauge (ölçü) fonksiyonu ve B herhangi bir normlu uzay olsun. Eğer $a \in B$ için $J_\phi : B \to 2^{B^*}$ dönüşümü

$$J_\phi a = \left\{ f \in B^* : \langle a, f \rangle = \|a\|\|f\|; \|f\| = \phi(\|a\|) \right\}$$

şeklinde tanımlanmış ise bu durumda J_ϕ dönüşümüne ϕ gauge fonksiyonlu dualite dönüşümü denir.

Eğer $\phi(t)=t$ seçilirse $J_\phi = J$ dualite dönüşümüne normalleştirilmiş dualite dönüşümü denir.

$$\psi(t) = \int_0^t \phi(\varsigma)\, d\varsigma, \quad t \geq 0$$

olsun, bu durumda $\delta \in (0,1)$ için $\psi(\delta t) \leq \delta \phi(t)$ olur.

$\rho : [0,\infty) \to [0,\infty)$ bir dönüşüm olsun.

$$\rho(t) = \sup\left\{ \frac{\|a+b\| - \|a-b\|}{2} - 1 : a,b \in B, \|a\| = 1 ve \|b\| = t \right\}$$

ifadesine B'nin smoothluk modülü denir. Ayrıca B düzgün smoothtur ancak ve ancak $\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(t)}{t} = 0$ dır.

$q \in \mathbb{R}$, $(0,2]$ aralığında seçilmiş olduğunu farz edelim. Eğer bir B Banach uzayı q-düzgün smooth ise aşağıdaki şartlar sağlanır.

i)Bir $c > 0$ sabiti vardır,

ii) $\rho(t) \le ct^q$.

"$q > 2$ için q-düzgün smooth Banach uzayı yoktur" iddiası Cioranescu [74] tarafında ifade edilmiştir.

Eğer B Banach uzayı weak topolojiden weak* topolojiye bir dizisel sürekli J dualite dönüşümüne sahip ise J dönüşümü tek değerli ve ayrıca smoothtur diyebiliriz. Eğer J dualite dönüşümü sürekli ve tek değerli ise B uzayı weakly dizisel sürekli dualite dönüşümüne sahiptir denir, Bakınız [74-75].

Tanım 2.1.22 i) $A : B \to 2^B$ dönüşümünün efektif (esaslı) tanım ve değer kümesi sırasıyla $Dom(A) = \{a \in B : Aa \neq \varnothing\}$ ve $R(A)$ ile gösterilmiştir. **ii)** Eğer $J : B \to 2^{B^*}$ dualite dönüşümü ve $\langle a-b, j \rangle \ge 0$ olacak şekilde $j \in J(a-b)$ ise bu takdirde her $a,b \in B$ için A dönüşümüne accretive dönüşüm denir. **iii)** Eğer her $r \ge 0$ için $R(I+rA) = B$ ise A accretive dönüşümüne m-accretive dönüşüm denir. Bu çalışmanın tümünde $A : B \to 2^B$ sıfıra sahip bir accretive operatör olarak alınacaktır. Şimdi $J_r = R(I+rA)^{-1} : B \to dom(A)$, $r > 0$ için A'nın resolventi olacak şekilde tek değerli dönüşümleri tanımlıyalım. $A^{-1} = \{a \in B : 0 \in Aa\}$ olsun. Bu durumda $r > 0$ için $A^{-1} = F(J_r)$ olduğu açıktır. Bakınız [76-77].

B refleksive, smooth ve strictly konveks Banach uzayı ve C, B'nin kapalı konveks boştan farklı bir alt kümesi (kka) olsun. Bu şartlar altında herhangi bir $a \in B$ için

$$\|z-a\| \le \min_{t \in c} \|t-a\|$$

olacak şekilde bir tek $z \in C$ noktası vardır. Bakınız [76].

Tanım 2.1.23 [77] Eğer $P_C a = z$ ise bu takdirde $P_C : B \to C$ dönüşümüne metrik projeksiyon dönüşümü denir.

$a \in B$ ve $z \in C$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $P_C a = z$ olması için gerek ve yeter şart her $t \in C$ için $\langle z-t, j(a-z) \rangle \ge 0$ olmasıdır. H reel Hilbert uzayında nonexpansive

şartını sağlayan bir $P_C : H \to C$ projeksiyon dönüşümü vardır. Ancak bir B Banach uzayında nonexpansive şartını sağlayan bir $P_C : B \to C$ projeksiyon dönüşümü yoktur. Bakınız [78].

Tanım 2.1.24 [79] C ve D, $C \subset D$ olacak şekilde B Banach uzayının alt kümeleri olsun. Eğer her $x \in B$ ve $\delta \in [0,1)$ için

$$Qx = Q\left(\delta x + (1-\delta)Qx\right)$$

ise $Q : C \to D$ dönüşümüne bir sunny dönüşümü denir.

Eğer $Q^2 = Q$ ise Q'ya bir retraction denir. Q bir sunny nonexpansive retraction olaması için gerek ve yeter koşul onun sunny, nonexpansive ve retraction olmasıdır.

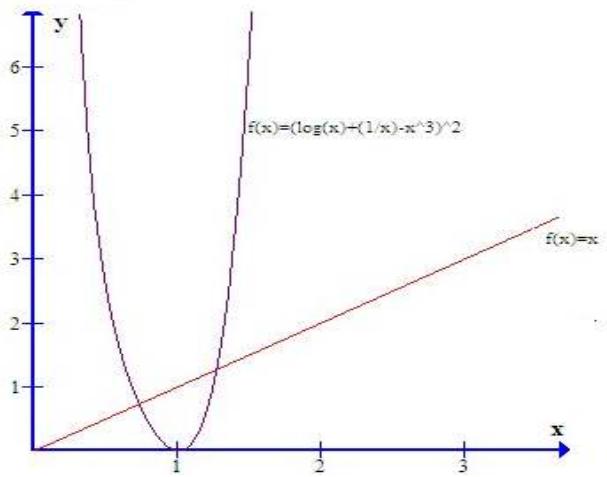
2.2 Sabit Nokta Teorisiyle İlgili Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1 (Sabit Nokta) X boş olmayan bir küme ve $T : X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer

$$Tx = x \tag{2.9}$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T nin sabit noktası denir ve T nin tüm sabit noktalarının kümesi F_T, $F(T)$ veya $Fix(T)$ ile gösterilir [80].

(2.9) ile verilen denklem geometrik olarak şu şekilde yorumlanabilir: Eğer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ye bir fonksiyon ise bu durumda f nin sabit noktaları, f ye karşılık gelen grafik ile $y = x$ doğrusunun kesiştiği noktalardır.



Şekil 2. 1 İki sabit noktaya sahip bir f fonksiyonu

Sabit noktanın varlığı ile ilgili aşağıdaki örnekleri verelim.

Örnek 2.2.2

1. Eğer $X=\mathbb{R}$ ve $Tx=x-125$ ise $F_T=\varnothing$;

2. Eğer $X=\mathbb{R}$ ve $Tx=x\cdot\sin x$ ise $F_T=\left\{\frac{(4k+1)\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{0\}$;

3. Eğer $X=\mathbb{R}$ ve $Tx=|x|$ ise $F_T=\{x:x\geq 0\}$

olur.

X herhangi bir küme ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x\in X$ için $T^{n+1}(x)=T\left(T^n(x)\right)$ olacak şekilde $T^n(x)$ i tanımlayabiliriz. $T^n(x)$, x in T altındaki $n.$ iterasyonu olarak adlandırılır.

$T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz:

i) Keyfi için $n\in\mathbb{N}$ için $F_T\subset F_{T^n}$ dir, yani bir dönüşümün sabit noktaları aynı zamanda bu dönüşümün $n.$ iterasyonunun da sabit noktalarıdır: Geçekten herhangi bir $x_0\in F_T$ için $Tx_0=x_0$ olup,

$$T^n(x_0)=T^{n-1}\left(T(x_0)\right)=T^{n-1}(x_0)$$

$$=T^{n-2}\left(T(x_0)\right)=T^{n-2}(x_0)=\cdots=T^{n-(n-1)}\left(T(x_0)\right)=T(x_0)=x_0$$

dir. Böylece $x_0\in F_{T^n}$ olduğu elde edilir.

iii) Bir $n\in\mathbb{N}$ için $F_{T^n}=\{x\}$ ise $F_T=\{x\}$ dir. Ancak bunun tersi genelde doğru değildir.

Örnek 2.2.3 $T(2)=3$, $T(1)=1$ ve $T(3)=2$ ile tanımlı $T:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$ dönüşümünü ele alalım. Bu durumda $F_{T^2}=\{1,2,3\}$ dir. Ancak $F_T=\{1\}$ dir.

Şimdi verilecek olan örnekler, bazı özel dönüşümlerin sabit noktalarının mevcut olup olmaması ile ilgilidir [81].

Örnek 2.2.4 $X=\{\alpha,\beta\}$ olmak üzere, $T(\alpha)=\beta$ ve $T(\beta)=\alpha$ ile tanımlı $T:X\to X$ dönüşümünün sabit noktası yoktur.

Ayrıca $X=[1,5]$, $Y=[6,9]$ olmak üzere herhangi bir $T:X\to Y$ (veya $T:Y\to X$) dönüşümünün sabit noktası yoktur.

Örnek 2.2.5 $T(x)=\begin{cases}2x & , \quad 0<x\le 1/2\\ 2-2x & , \quad 1/2\le x<2/3\end{cases}$ dönüşümünde 0 ve $2/3$ noktaları dönüşümün tanım kümesine ait olmadığından, bu dönüşümün sabit noktaları mevcut değildir [82].

Örnek 2.2.6 $Tx=e^{x}$ dönüşümünün de hiçbir sabit noktası yoktur. Buna karşın $Tx=e^{x-1}$ ve $Tx=-e^{x+1}$ dönüşümlerinin sabit noktaları sırasıyla 1 ve -1 dir.

2.3 Sabit Nokta Teorisiyle İlgili Çalışmalarda Kullanılan Bazı Önemli Teoremler, Dönüşümler ve Bu Dönüşümler Arasındaki İlişkiler

Tanım 2.3.1 (Lipschitzian Dönüşüm) (X,d) bir metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)\le \lambda\cdot d(x,y) \tag{2.10}$$

olacak şekilde bir $\lambda>0$ sayısı mevcut ise T ye bir Lipschitzian (veya λ-Lipschitzian) dönüşüm denilir [80].

Tanımdan da görüldüğü üzere her T Lipschitzian dönüşümü düzgün süreklidir.

Örnek 2.3.2 $X=\mathbb{R}, d(x,y)=|x-y|$ ve $Tx=3x$ olsun. Bu durumda,

$$d(Tx,Ty)=|3x-3y|=3|x-y|=3d(x,y)$$

elde edilir. Böylece $\lambda\ge 3$ için T Lipschitz şartını sağlar.

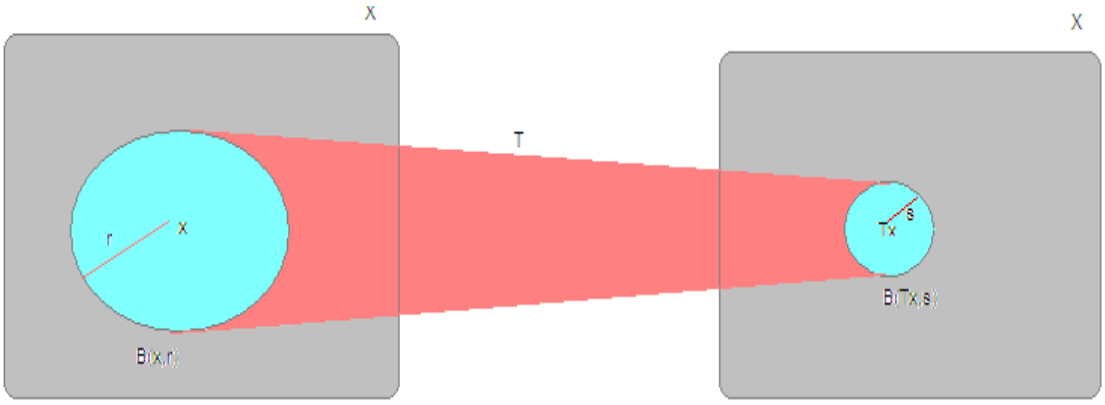
Tanım 2.3.3 (Daraltan(Contraction) Dönüşüm) (X,d) bir metrik uzay ve $T:X\to X$ bir Lipschitzian dönüşüm olsun. Eğer her $x,y\in X$ için,

$$d(Tx,Ty)\le \lambda\cdot d(x,y) \tag{2.11}$$

olacak şekilde en az bir $\lambda\in(0,1)$ sayısı bulunabiliyorsa T ye daraltan dönüşüm veya büzülme dönüşümü (conctraction mapping) denir [80].

Bu tanım geometrik olarak şu şekilde yorumlanabilir: Herhangi iki x ve y noktasının görüntüleri olan Tx ile Ty, x ile y ye nazaran birbirlerine daha yakındırlar. Özel olarak aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi; $r>s>0$ olmak üzere, her $x\in X$ ve herhangi

$r>0$ için $B(x;r)$ yuvarındaki y noktalarının tümü bir $B(Tx;s)$ yuvarına resmedilir [83].



Şekil 2. 2 T bir daraltan (contraction) dönüşümdür

Örnek 2.3.4 **(a)** $X=[0,1]$, $d(x,y)=|x-y|$ olsun ve $T(x)=\frac{1}{9}\left(x^3+2x^2-6\right)$ ile tanımlı $T:X\to X$ dönüşümünü göz önüne alalım. Her $x,y\in X$ için,

$$d(Tx,Ty)=\left|\frac{1}{9}\left(x^3+2x^2-6\right)-\frac{1}{9}\left(y^3+2y^2-6\right)\right|=\frac{1}{9}\left|\left(x^3-y^3\right)+2\left(x^2-y^2\right)\right|$$

$$\le\frac{1}{9}|x^3-y^3|+\frac{2}{9}|x^2-y^2|$$

$$=\frac{1}{9}|x-y|\cdot|x^2+xy+y^2|+\frac{2}{9}|x-y|\cdot|x+y|$$

$$\le\frac{1}{9}|x-y|\cdot 3+\frac{2}{9}|x-y|\cdot 2=\frac{7}{9}\cdot|x-y|$$

Böylece $\lambda=7/9$ olarak alınması veya herhangi bir $\lambda\in[7/9,1)$ seçimi için T dönüşümünün daraltan dönüşüm olduğu elde edilir.

(b) Ortalama Değer Teoremi (ODT), reel değerli düzgün (smooth) fonksiyonların daraltma dönüşümleri olduklarını göstermede önemli bir role sahiptir. Örneğin: $X=\mathbb{R}, d(x,y)=|x-y|$ olsun ve $T(x)=\frac{1}{5}\sin 2x$ ile tanımlı $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dönüşümünü

ele alalım. T dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilir olduğundan, ODT ni uygulayabiliriz: Bu durumda

$$d\left(Tx,Ty\right)=\left|Tx-Ty\right|=\left|T'\left(c\right)\cdot\left(x-y\right)\right|=\frac{2}{5}\left|\cos 2c\right|\left|x-y\right|\leq\frac{2}{5}\left|x-y\right|$$

olacak şekilde x ve y arasında bir c sayısı vardır. Böylece $\lambda=2/5$ olarak alınması veya herhangi bir $\lambda\in\left[2/5,1\right)$ seçimi için T dönüşümünün daraltan dönüşüm olduğu elde edilir.

Lipschitz koşulunu sağlayan her dönüşüm, düzgün sürekli olduğundan daraltan dönüşümler de düzgün süreklidir. Dolayısıyla T sürekli değilse, bir daraltan dönüşüm olamaz. Buna karşın, T daraltan dönüşüm olmasa bile, herhangi bir n için T^n bir daraltan dönüşüm olabilir.

Örnek 2.3.5 $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $T\left(x\right)=\begin{cases}-2x, & x\geq 0\\ \dfrac{-x}{4}, & x<0\end{cases}$ şeklindeki dönüşüm tanımlansın. Bu durumda T daraltan dönüşüm değil ancak T^2 daraltan dönüşümdür. Bunu göstermek için $x,y>0$ alalım. Bu durumda

$$\left|Tx-Ty\right|=2\left|x-y\right|$$

şeklinde olur. bu yüzden T daraltan dönüşüm olamaz. Diğer taraftan, $T^2x=\frac{x}{2}$ olduğundan T^2 bir daraltan dönüşümdür. Ayrıca $x=0$, T nin tek sabit noktasıdır [81].

Klasik Banach contraction prensibi sabit nokta teorideki en kullanışlı sonuçlardan biridir. Doğrusal ve doğrusal olmayan denklemlerin çözümünde birçok uygulamaya sahip olan bu önemli sonuç şu şekilde ifade edilir:

Teorem 2.3.6 (Banach contraction prensibi) $\left(X,d\right)$ bir tam metrik uzay ve $T:X\to X$ (2.11) şartını sağlayan bir contraction dönüşümü olsun. Bu durumda

(i) T , X 'te bir tek p sabit noktasına sahiptir;

(ii) Herhangi bir $x_0\in X$ için

$$x_n=Tx_{n-1}=T^nx_0,\ n=0,1,2,\ldots \qquad (2.12)$$

ile tanımlı Picard iterasyonu tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ iterasyon dizisi p ye yakınsar [38].

Bu teorem yalnızca bir sabit noktanın varlığını inşa etmekle kalmaz herhangi bir başlangıç değeri için bu sabit noktayı yaklaşık olarak hesaplamamıza da olanak sağlar. Bu süreç aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.3.7 (a) $x^3+2x^2-9x-6=0$ denklemi $[0,1]$ de bir tek çözüme sahiptir. $Tx=\frac{1}{9}\left(x^3+2x^2-6\right)$ ile tanımlı $T:[0,1]\to[0,1]$ dönüşümünü ele alalım, Örnek 2.20 (a) da T nin $\lambda=7/9$ ile bir daraltan dönüşüm olduğunu gösterilmişti. Bu nedenle Teorem 2.3.6 den dolayı ilgili denklem $[0,1]$ de bir tek çözüme sahiptir. Bu çözümü bir $\varepsilon=0.001$ hatasıyla bulmaya çalışalım. Bu durumda $x_1=0$ dan başlayacak şekilde bir $x_n=Tx_{n-1}$ dizisi seçebiliriz. Buradan $x_2=T(0)=-2/3$ olarak elde edilir böylece $d(x_1,x_2)=\left|0-(-2/3)\right|=2/3$ dir. Dolayısıyla

$$\frac{(7/9)^{n-1}}{1-(7/9)}\cdot\frac{2}{3}<0.001\Leftrightarrow \qquad \left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}<\frac{0.001}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad (n-1)\log\frac{7}{9}<\log\left(3^{-1}10^{-3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \qquad n-1>\frac{\log\left(3^{-1}10^{-3}\right)}{\log\left(3^{-2}7\right)}\Leftrightarrow n>32.857$$

olacak şekilde yeterince büyük bir n sayısı seçilebilir.

(b) $X=[a,b]$, $d(x,y)=|x-y|$ ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer T, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli, (a,b) açık aralığında türevlenebilir bir dönüşüm ve her $x\in(a,b)$ için

$$|T'x|\le k<1$$

ise, T nin X de bir tek sabit noktası vardır. Gerçekten de ortalama değer teoreminden her $x,y\in[a,b]$ için

$$|Tx-Ty| = |T'(c)\cdot(x-y)| \le k\cdot|x-y|$$

olacak şekilde bir $c \in (x,y)$ vardır. Böylece Banach daralma ilkesi gereği T nin bir tek sabit noktası vardır.

(c) $f:[1,\infty)\to[1,\infty)$, $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$ şeklinde tanımlanan fonsiyonu göz önüne alalım. Bu fonksiyon bir daraltan dönüşümdür. Gerçekten

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &= \left|\frac{x}{2}+\frac{1}{x}-\frac{y}{2}-\frac{1}{y}\right| \\ &= \left|(x-y)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{xy}\right)\right| \\ &\le \max_{x,y\in[1,\infty)}\left|(x-y)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{xy}\right)\right| \\ &= \frac{1}{2}|x-y|\end{aligned}$$

olduğundan $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$ dönüşümü $[1,\infty)$ üzerinde bir daraltan dönüşümdür.

Tanım 2.3.8 (Kesin Daraltan Dönüşüm) (X,d) bir metrik uzay ve T bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in X$ ve $x\neq y$ için,

$$d(Tx,Ty) < d(x,y) \tag{2.13}$$

ise, T ye kesin daraltan dönüşüm (strict contraction) denir [80].

"$T:X\to X$ bir daraltan dönüşüm" dür ifadesinin (2.13) şartına denk olduğu düşünülebilir ancak bu düşünce yanlıştır. (2.13) şartı (2.11) ile verilen şarttan oldukça zayıf bir şarttır. Aşağıdaki örnekte (2.13) şartını sağlayan bir T dönüşümü tarafından üretilen $x, T(x), T(T(x)),\ldots$ iterasyon dizisinin X te her zaman bir Cauchy dizisi olamayacağı gösterilmiştir.

Örnek 2.3.9 $X=\mathbb{R}$, $d(x,y)=|x-y|$ olsun ve $Tx=\ln(e^x+2)$ ile tanımlı $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dönüşümünü göz önüne alalım. T dönüşümü (2.13) şartını sağlar: ODT den dolayı

herhangi $x, y \in X$ çifti için $|T(x)-T(y)| = |T'(c)||x-y| = \left|\frac{e^x}{2+e^x}\right||x-y| < |x-y|$ olacak şekilde $c \in (x, y)$ sayısı mevcuttur.

$x_2 = \ln\left(e^0+2\right) = \ln 3,\ x_3 = \ln\left(e^{\ln 3}+1\right) = \ln 4, \ldots,\ x_n = \ln(n+1)$

Ancak $x_1 = 0$ da başlayan iterasyon dizisini ele alalım. Bu dizi sınırsız olduğundan bir Cauchy dizisi olamaz. Buradan T nin bir daraltan dönüşüm olmadığı görülür.

Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan kesin daraltan dönüşümlerin sabit noktalara sahip olmaları gerekmediği aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 2.3.10 $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Tx = \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{4}$ şeklinde tanımlanan bir dönüşüm olsun. Bu dönüşüm maximum değerini $x = 2$ noktasında alır ve $[1,2]$ aralığında artan olur. $T(1) = \frac{5}{4}$ ve $T(2) = \frac{3}{2}$ olduğundan her $x \in [1,2]$ için $f(x) \in [1,2]$ olur. Bu yüzden $x \in [1,2]$ için $g(x) = f(x)$ olacak şekilde bir $g : [1,2] \to [1,2]$ dönüşümü vardır.

Her $x, y \in [1,2]$

$$g(x) - g(y) = \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} - y + \frac{y^2}{4}$$
$$= (x-y)\left(1 - \frac{x}{4} - \frac{y}{4}\right)$$

olur ve

$$|g(x) - g(y)| \le |x-y| \sup_{x,y \in [1,2]} \left|1 - \frac{x}{4} - \frac{y}{4}\right|$$
$$= \frac{1}{2}|x-y|$$

şeklindeki eşitsizlik elde edilir. Bu nedenle her $x, y \in [1,2]$ için $1 - \frac{x}{4} - \frac{y}{4}$ ifadesi maximum ve minimum değerlerini sırasıyla $x = y = 1$ ve $x = y = 2$ noktalarında aldıklarından $\mathbb{R}$'nin alışılmış metriğine göre $d(g(x), g(y)) \le \frac{1}{2} d(x, y)$ elde edilir. Bu nedenle $g : [1,2] \to [1,2]$ bir daraltan dönüşümdür.

$[1,2]$, $\mathbb{R}$ tam uzayının kapalı bir alt kümesi olduğundan kendisi de tamdır. Bu yüzden Contraction Teoremi'ne göre $g:[1,2]\to[1,2]$ dönüşümü $[1,2]$ de bir sabit noktaya sahiptir. Elbette $g:[1,2]\to[1,2]$ denklemi sadece bir quadratik denklem olduğundan $g(x)=x$ denkleminin çözümüne doğrudan ulaşmak kolaydır. Ancak benzer örnekleri içeren yüksek mertebeden polinom denklemleri cebirsel yöntemler ile çözülemeyebilir. Bu durumda Contraction Dönüşüm Teoremi gibi topolojik yöntemler gerekir.

Ayrıca yukarıdaki örnekte eğer x rasyonel ise $g(x)$de rasyoneldir. Bu durumda g, $[1,2]\cap\mathbb{Q}$ üzerinde bir bir daraltan dönüşüm üretir. Contraction Dönüşüm Teoremi $[1,2]\cap\mathbb{Q}$ de bir sabit noktanın varlığından bahsetmez. Çünkü $[1,2]\cap\mathbb{Q}$, $[1,2]$ gibi $\mathbb{R}$ tam uzayının kapalı bir alt kümesi değildir. Bu nedenle $[1,2]\cap\mathbb{Q}$ tam değildir. g'nin tek sabit noktası $\sqrt{2}$ ve buda rasyonel olmadığından g bir sabit noktaya sahip değildir.

Bu dönüşümlerin sabit noktalarının varlığını garantilemek için çalışılan uzayın kompakt olması yeterli olacaktır.

Teorem 2.3.6 deki (i) ve (ii) şartını sağlayan bir dönüşüme bir Picard operatörü denilir [85].

Teorem 2.3.6 de dikkat edilmesi gereken önemli bir husus, (2.11) ile verilen contractive lik şartının T nin X üzerinde sürekli olmasını gerektirmesidir. 1968 yılında Kannan [49] T nin X üzerinde sürekli olmasını gerektirmeyen bir contractive lik şartı tanımlayarak, Banach contraction prensibini aşağıdaki şekilde genelleştirmiştir:

Teorem 2.3.11 (Kannan Teoremi) (X,d) bir tam metrik uzay ve $T:X\to X$ aşağıdaki şartı sağlayan bir dönüşüm olsun, her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)\le a\cdot\left[d(x,Tx)+d(y,Ty)\right] \tag{2.14}$$

olacak şekilde en az bir $a\in[0,1/2)$ sayısı mevcut olsun. Bu durumda T bir Picard operatörüdür.

Yukarıdaki Teoremin şartlarını sağlayan örnek aşağıdaki gibidir.

Örnek 2.3.12 $X=\mathbb{R}$ olsun ve $T:X\to X$ dönüşümünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım,

$$Tx = \begin{cases} 0, \ x \in (-\infty, 2] \\ -\frac{1}{2}, \ x \in (2, \infty) \end{cases}.$$

Bu durumda (i) T sürekli değildir. (ii) T, (2.14) ile verilen şartı sağlar (bu durumda $a = \frac{1}{5}$ tir) ve böylece Kannan teoreminden dolayı T bir Picard dönüşümüdür [86].

Kannan Teoremin'den esinlenilerek, T nin sürekliliğini gerektirmeyen çeşitli contractive tip dönüşüm sınıfları için çok sayıda sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Bu çalışmalardan bazıları [87-92] da görülebilir.

Bu teoremlerden biri Chatterjea [93] tarafından (2.14) şartına benzer bir şart kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

Teorem 2.3.13 (Chatterjea Teoremi) (X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ aşağıdaki şartı sağlayan bir dönüşüm olsun, her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \le b\left[d(x,Ty) + d(y,Tx)\right] \qquad (2.15)$$

olacak şekilde en az bir $b \in [0,1/2)$ sayısı mevcut olsun. Bu durumda T bir Picard operatörüdür.

Burada (2.14) şartını sağlayan bir dönüşüm Kannan dönüşümü olarak adlandırılırken, (2.15) şartını sağlayan bir dönüşüm Chatterjea dönüşümü olarak adlandırılmaktadır.

Ayrıca Rhoades [94] tarafından verilen bir örnekte, (2.11) ile verilen contractive lik şartı ile (2.14) ve (2.15) ile verilen contractive lik şartlarının birbirlerinden bağımsız oldukları gösterilmiştir.

1972 yılında Zamfirecu [56], (2.11), (2.14) ve (2.15) şartlarını bir araya getirerek aşağıda verilen önemli sonucu elde etti:

Teorem 2.3.14 (Zamfirescu Teoremi) (X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

(z_1) $d(Tx,Ty) \le \lambda d(x,y)$,

(z_2) $d(Tx,Ty) \le a \cdot \left[d(x,Tx) + d(y,Ty)\right]$,

(z_3) $d(Tx,Ty) \le b \cdot \left[d(x,Ty) + d(y,Tx)\right]$,

şartlarından en az birisinin doğru olacağı şekilde, $\lambda \in [0,1)$, $0 < a, b < 1/2$ şartlarını sağlayan λ, a ve b reel sayıları varsa, bu durumda T bir Picard operatörüdür.

En genel contraction şartlarından biri Ciric [42] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlandı:

Tanım 2.3.15 (Quasi Contraction) (X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \le h \cdot \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), d(x,Ty), d(y,Tx)\} \tag{2.16}$$

olacak şekilde bir $h \in (0,1)$ sayısı varsa, T ye bir quasi contraction denilir ve T bir Picard operatörüdür.

(2.14), (2.15) ve (z_1)-(z_3) şartlarından herbirinin (2.16) şartını gerektirdiği açıktır.

Literatürde, bu tipten contraction şartlarından esinlenilerek elde edilmiş olan birçok sabit nokta teoremi mevcuttur, örneğin Rus [87], Taskovic [89], Rhoades [94], [95], Berinde [96].

2004 yılında Berinde [86], (z_1)-(z_3) ten daha genel olan ve karşılık gelen T dönüşümünün sürekliliğini gerektirmeyen aşağıdaki contraction şartını tanımlayarak bazı sabit nokta teoremleri elde etti:

Tanım 2.3.16 (Zayıf Contraction) (X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \le \delta d(x,y) + L d(y,Tx) \tag{2.17}$$

veya

$$d(Tx,Ty) \le \delta d(x,y) + L d(x,Ty) \tag{2.18}$$

olacak şekilde bir $\delta \in (0,1)$ sabiti ve bir $L \ge 0$ mevcut ise, T ye bir zayıf contraction denilir.

T dönüşümünün zayıf contractive liğini kontrol etmek için hem (2.17) hem de (2.18) ile verilen şartları kontrol etmek gerekir.

(2.17) veya (2.18) de $\delta = \lambda$ ve $L = 0$ alınırsa (2.11) ile verilen contraction şartı elde edilir. Buradan da (2.11) ile verilen contraction şartının aynı zamanda bir tek sabit noktaya sahip olan bir zayıf contraction olduğu sonucuna ulaşılır [94].

Herhangi bir Zamfirescu dönüşümü bir zayıf contraction dır [86]. Dolayısıyla, sırasıyla, (2.14) ve (2.15) ile verilen Kannan ve Chatterjea dönüşümleride birer zayıf contraction olarak elde edilir. Bununla birlikte quasi contractionlarında da zayıf contraction oldukları aşağıdaki önermede verilmiştir.

Sonuç 2.3.17 Herhangi bir quasi contraction, $0 < h < 1/2$ şartı altında bir zayıf contraction olur [86].

Sonuç 2.3.17 ten, quasi contraction ların $h < 1/2$ şartıyla birlikte zayıf contractionlar olduğu bilinmektedir. Bununla birlikte, aşağıdaki örnekte gösterildiği üzere $h \geq 1/2$ şartıyla da zayıf contraction olan quasi contractionlar mevcuttur. Buradan da şu sonuca ulaşılır: $h < 1/2$ şartı, bir quasi contraction ın bir zayıf contraction olması için gerekli bir şart değildir [86].

Örnek 2.3.18 $T : [0,1] \to [0,1]$ dönüşümünü

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{2}{3}, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda,

(i) T, $h \in [2/3, 1)$ ile (2.16) şartını sağlar,

(ii) T, $\delta \geq 2/3$ ve $L \geq \delta$ ile (2.17) şartını sağlar [90].

2004 yılında Berinde [86], (2.17) ve (2.18) ile verilen zayıf contraction şartlarını kullanarak; Teorem 2.3.6, Teorem 2.3.14 ve literatürdeki birçok sabit nokta teoreminin önemli bir genelleştirmesi olan aşağıdaki teoremi elde etti:

Teorem 2.3.19 (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü (2.17) şartını sağlayan bir zayıf contraction olsun. Bu durumda

(i) $F_T = \{x \in X : Tx = x\} \neq \varnothing$;

(ii) Herhangi bir $x_0 \in X$ için, (2.12) ile verilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Picard iterasyonu bazı $x_* \in F_T$ ye yakınsar.

Teorem 2.3.6 ve Teorem 2.3.14 de kullanılan operatörlerin sabit noktaları teklikle belirli olmasına rağmen, aşağıdaki örnekte gösterildiği üzere zayıf contraction lar bir tek sabit noktaya sahip olmak zorunda değildirler.

Örnek 2.3.20 $T:[0,1]\to[0,1]$ dönüşümü birim dönüşüm olsun. Bu durumda

(i) T, keyfi $\delta\in(0,1)$ ve $L\geq 1-\delta$ ile (2.17) şartını sağlar. Gerçekten; (2.17) ve (2.18) şartlarından

$$|x-y|\leq\delta\cdot|x-y|+L\cdot|x-y|$$

olduğu elde edilir. Eğer keyfi bir $\delta\in(0,1)$ alır ve $L\geq 1-\delta$ olarak seçersek bu eşitsizlik her $x,y\in[0,1]$ için doğru olur.

(ii) T nin sabit noktalarının kümesi $[0,1]$ aralığının tümüdür, yani $F_T=[0,1]$ dir [86].

Berinde [86] tarafından ortaya konulan aşağıdaki teorem, (2.17) ile verilen contractive şartına oldukça benzer ek bir contractive şartıyla bir zayıf contractionın sabit noktasını teklikle belirlemeyi mümkün kılmaktadır.

Teorem 2.3.21 (X,d) bir tam metrik uzay ve $T:X\to X$ dönüşümü aşağıdaki şartı sağlayan bir zayıf contraction olsun: Her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)\leq\theta\cdot d(x,y)+L_1\cdot d(x,Tx) \tag{2.19}$$

olacak şekilde $\theta\in(0,1)$ sabiti ve $L_1\geq 0$ mevcuttur.

Bu durumda

(i) T bir tek sabit noktaya sahiptir, yani $F_T=\{x_*\}$ dır;

(ii) Herhangi bir $x_0\in X$ için, (2.12) ile verilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Picard iterasyonu $x_*\in F_T$ ye yakınsar.

Yukarıdaki teoreme bağlı olarak aşağıdaki incelemeler yapılabilir:

(i) Uzaklık fonksiyonunun simetrikliğinden dolayı, her $x,y\in X$ için (2.32)' nin sağlanması için gerek ve yeter koşul, her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)\leq\theta\cdot d(x,y)+L_1\cdot d(y,Ty) \tag{2.20}$$

şartının sağlanmasıdır. Böylece, (2.17) ve (2.18) şartlarındaki duruma benzer şekilde, somut uygulamalarda hem (2.19) hem de (2.20) şartının sağlandığının kontrol edilmesi gerekir.

(ii) (2.19) şartı Osilike [97-99] tarafından belirli sabit nokta iterasyon yöntemlerinin kararlılıklarının ispatlanması için kullanıldı. Ayrıca Osilike [97] ve [98]' te görüldüğü üzere (2.19) şartı, T nin bir sabit noktaya sahip olmasını gerektirmez. Ancak, eğer (2.19) şartını sağlayan bir T dönüşümü bir sabit noktaya sahip ise bu nokta kesinlikle tektir.

(iii) (2.11), (2.14), (2.15) şartlarını veya Teorem 2.3.14' deki (z_1)-(z_3) şartlarını sağlayan herhangi bir T dönüşümü (2.19) ve (2.20) teklik şartlarını da sağlar. Böylece Örnek 2.3.20 gözönüne alındığında Teorem 2.3.21 (ve ayrıca Teorem 2.3.19), Teorem 2.3.14' i genelleştirir. Üstelik, $0 < h < 1/2$ şartıyla, herhangi bir quasi contraction da (2.19) ve (2.20) şartlarını sağlar. Bu da Teorem 2.3.21' in Teorem 2.3.6, Teorem 2.3.11, Teorem 2.3.13 ve Teorem 2.3.14' i genelleştirdiğini gösterir.

2006 yılında, Olatinwo vd. [100] yukarıda bahsedilen contractive lik şartlarını daha da genelleştiren aşağıdaki contractive şartını tanımlayarak belirli sabit nokta iterasyon yöntemlerinin kararlılıklarını incelediler.

Tanım 2.3.22 (Contractive-Like Operatörler) (X,d) bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \le \delta \cdot d(x,y) + \varphi\big(d(x,Tx)\big) \tag{2.21}$$

olacak şekilde bir $\delta \in [0,1)$ sabiti ve $\varphi(0) = 0$ şartını sağlayan bir $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ monoton artan fonksiyonu mevcut ise, T ye bir contractive-like dönüşüm denilir.

(2.21) ile verilen ifade, Tanım 2.3.22 da ele alınan X in bir normlu lineer uzay veya Banach uzayı olması durumunda norm tarafından üretilen metrik yardımıyla, yani $d(x,y) = \|x - y\|$, $\forall x, y \in X$ bağıntısı yardımıyla aşağıdaki şekilde yeniden formüle edilebilir:

$$\|Tx - Ty\| \le \delta \cdot \|x - y\| + \varphi\big(\|x - Tx\|\big) \tag{2.22}$$

Aşağıdaki incelemeler (2.22) ile verilen contractive lik şartı yukarıda bahsedilen contractive şartlarından daha genel olduğunu göstermektedir. Gerçekten, eğer (2.22)' da,

(i) $\varphi(t) = L \cdot t,\ L \geq 0$ olarak alınırsa bu durumda Osilike [97]' te verilen contractive tanımı elde edilir.

(ii) $\varphi(t) = \frac{c}{1-c} \cdot t,\ c \in [0,1)$ olarak alınırsa bu durumda Rhoades [101]' de tanımlanan contractive lik şartı elde edilir.

(iii) $\lambda \in [0,1)$ ve $0 \leq a, b < 1/2$ şartlarını sağlayan λ, a ve b reel sayıları için $\delta = \max\left\{\lambda, \frac{a}{1-a}, \frac{b}{1-b}\right\}$ olmak üzere, $\varphi(t) = 2 \cdot \delta \cdot t$ olarak alınırsa bu durumda Berinde [102] ve Harder ve Hicks [103]' daki Zamfirescu nun contractive tanımını elde edilir.

(iv) $\varphi(t) = 0$ olarak alınırsa bu durumda da (2.11) ile verilen contraction şartı elde edilir.

Aşağıdaki örnekte, (2.22) şartını sağlayan contractive-like dönüşümlerin genelde bir sabit noktaya sahip olmadıkları, ancak sahip olmaları durumunda ise bu sabit noktanın tek olduğu gösterilmiştir.

Örnek 2.3.23 $X = [0,\infty)$ olsun ve T yi

$$Tx = \begin{cases} 1.0, & 0 \leq x \leq 0.8 \\ 0.6, & 0.8 < x \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Genelliği bozmaksızın $x < y$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $0 \leq x < y \leq 0.8$ veya $0.8 < x < y$ için $\|Tx - Ty\| = 0$ dır ve böylece (2.22) şartı sağlanır. Eğer $0 \leq x \leq 0.8 < y$ ise bu durumda $\|Tx - Ty\| = 0.4$ tür. Şimdi herhangi bir $L \geq 2$ sayısı için φ yi $\varphi(t) = Lt$ olarak tanımlayalım. Bu durumda φ fonksiyonu artandır, süreklidir ve $\varphi(0) = 0$ dır. Ayrıca, $\|x - Tx\| = 1 - x$ olup

$$\varphi(\|x - Tx\|) = L(1-x) \geq 0.2L \geq 0.4$$

tür. Böylece herhangi bir $\delta \in [0,1)$ için

$$0.4 = \|Tx - Ty\| \leq L\|x - Tx\| \leq \delta\|x - y\| + L\|x - Tx\|$$

dir ve (2.22) şartı $0 \leq x \leq 0.8 < y$ için de sağlanır. Ancak T herhangi bir sabit noktaya sahip değildir. Bununla birlikte, eğer T bir sabit noktaya sahip ise (2.22) şartı

kullanılarak bu sabit noktanın tekliği kolayca gösterilebilir: T nin $x_1 \neq x_2 \in F_T$ gibi farklı iki sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim, (2.22)' dan

$$0 \neq \|x_1 - x_2\| = \|Tx_1 - Tx_2\| \leq \delta \cdot \|x_1 - x_2\| + \varphi\left(\|x_1 - Tx_1\|\right)$$

$$= \delta \cdot \|x_1 - x_2\| + \varphi\left(\|x_1 - x_1\|\right)$$

$$= \delta \cdot \|x_1 - x_2\|, \ \left(\|x_1 - x_1\| = 0 \text{ ve } \varphi(0) = 0 \text{ olduğundan}\right)$$

veya

$$(1-\delta) \cdot \|x_1 - x_2\| \leq 0 \Leftrightarrow \|x_1 - x_2\| < 0$$

olduğu elde edilir. Bu ise uzaklık fonksiyonunun pozitif tanımlılığı ile çelişir. Bu çelişki $x_1 \neq x_2$ kabulünden kaynaklanmaktadır, dolayısıyla T bir tek sabit noktaya sahiptir.

BÖLÜM 3

İTERASYON YÖNTEMLERİNİN YAKINSAKLIK DENKLİĞİ VE GEOMETRİK ÖZELLİKLİ KUVETLİ YAKINSAKLIK SONUÇLARI

Bu bölümde bir iterasyon yönteminin en genel formdaki tanımını vererek literatürde yaygın olarak kullanılan iterasyon yöntemlerini ve tanımlamış olduğumuz bazı yeni iterasyon yöntemlerini tanıtacak ve bu iterasyon yöntemleri ile tanımlamış olduğumuz yeni iterasyon yöntemlerinin çeşitli dönüşüm sınıfları için Banach uzaylarının geometrik özellikleri kullanılarak yakınsaklıklarını ve yakınsaklıkları arasındaki denkliği inceleyeceğiz.

$\left(X,\|\bullet\|\right)$ bir normlu uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. f bir fonksiyon olmak üzere, bir sabit nokta iterasyon yöntemi en genel formda

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = f\left(T, x_n\right),\ n = 0,1,2,\ldots \end{cases} \tag{3.1}$$

bağıntısı ile tanımlanır [80].

Tanım 3.1.1 (Picard İterasyon Yöntemi) (3.1) ile verilen ifadede

$$x_{n+1} = f\left(T, x_n\right) = Tx_n \tag{3.2}$$

alınmasıyla elde edilen iterasyon yöntemine Picard iterasyon yöntemi (veya ardışık yaklaşıklıklar dizisi) denilir.

Picard iterasyon yöntemi (3.2), Liouville [58] tarafından tanımlanmış ve Cauchy tarafından kullanılmıştır. Bu yöntem ilk olarak 1890 yılında Picard [59] adi diferansiyel

denklemler için başlangıç değer problemlerinin çözümünün varlığı ve tekliğine ilişkin ispatında kullandığı görülmektedir.

Teorem 2.3.6 da, (3.2) ile verilen Picard iterasyon yönteminin (2.11) ile verilen contraction dönüşümlerin bir tek sabit noktasına yakınsadığı gösterilmiştir.

Örnek 3.1.2 $C[0,b]$ de

$$\frac{d\varphi}{dx} = \alpha\varphi(x), \qquad \varphi(0) = 1$$

denkleminin yani $[0,b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli φ fonksiyonları arasında bir çözümünü aradığımızı farzedelim. Yukarıdaki denklemi bir integral denklemi olarak aşağıdaki şekilde yeniden yazalım.

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \alpha\int_0^x \varphi(\xi)d\xi = 1 + \alpha\int_0^x \varphi(\xi)d\xi. \qquad (3.3)$$

(Bu integral, temel teoreminin yapısına uygundur.) Şimdi $T:[0,1]\to[0,1]$ dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımlıyalım.

$$T(\varphi)(x) = 1 + \alpha\int_0^x \varphi(\xi)d\xi.$$

Yani $T(\varphi)$, denklemin sağ tarafı ile verilen $x\in[0,b]$değerli bir fonksiyondur. Eğer sürekli bir foksiyonun integrallenebildiği ve T nin tanımındaki integralin x in sürekli bir fonksiyonu olduğu gerçeğini kullanırsak bu takdirde (3.3) denklemi $T(\varphi)=\varphi$ denklemine denk olur.

Şimdi, $C[0,b]$ uzayının uygun bir metrikle bir tam metrik uzay olduğunu biliyoruz. Bu yüzden eğer T contraction ise bu durumda $T(\varphi)=\varphi$ denklemi ardışık yaklaşımlar metodunu kullanarak yaklaşabildiğimiz bir tek çözüme sahiptir. Bunu nihayete kavuşturmak için aşağıdaki eşitsizlikler dizisini göz önüne alalım.

$$
\begin{aligned}
d_\infty\left(T(\varphi),T(\psi)\right) &= \sup_{x\in[0,b]}\left|T(\varphi)(x)-T(\psi)(x)\right| \\
&= \sup_{x\in[0,b]}\left|1+\alpha\int_0^x\varphi(\xi)d\xi-1-\alpha\int_0^x\psi(\xi)d\xi\right| \\
&= \sup_{x\in[0,b]}\left|\alpha\int_0^x\left(\varphi(\xi)-\psi(\xi)\right)d\xi\right| \\
&\le |\alpha|\int_0^b\left|\varphi(\xi)-\psi(\xi)\right|d\xi \\
&\le b|\alpha|\sup_{\xi\in[0,b]}\left|\varphi(\xi)-\psi(\xi)\right| \\
&\le b|\alpha|\,d_\infty(\varphi,\psi).
\end{aligned}
$$

Bu yüzden T, $b<|\alpha|^{-1}$ olmak üzere bir contractiondır.

g, $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ açık domaini üzerinde tanımlanan reel değerli bir fonksiyon olsun.

$$\frac{d\varphi}{dx}=g\left(x,\varphi(x)\right),\qquad \varphi(x_0)=\varphi_o$$

adi (lineer olmayan) differansiyel denklemini alalım. Burada x, $\mathbb{R}$ de bir değer ve φ, x ve φ_0 sabitinin bir fonksiyonu olsun. Bu durumda aşağıdaki teoremi ispatsız verelim.

Teorem 3.1.3 $(x_0,\varphi_0)\in\Omega$ ve g, c sabit olmak üzere

$$\left|g(x,y_1)-g(x,y_2)\right|\le c|y_1-y_2|$$

Lipschitz şartını sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\varphi(x_0)=\varphi_o$ başalangıç koşuluna sahip $\frac{d\varphi}{dx}=g\left(x,\varphi(x)\right)$ denklemi $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ aralığı üzerinde bir tek çözüme sahiptir[104].

Bununla birlikte (2.11) contraction şartını sağlayan T dönüşümü üzerindeki $\lambda<1$ şartı $\lambda=1$ olarak zayıflatıldığında, yani ele alınan dönüşüm sınıfı

$$\|Tx-Ty\|\le\|x-y\|,\forall x,y\in X \qquad (3.4)$$

şartını sağlayan ve nonexpansive dönüşümler olarak adlandırılan dönüşüm sınıfı, (3.2) ile verilen Picard iterasyon yönteminin (3.4) şartını sağlayan nonexpansive dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsaması söz konusu değildir. Örneğin $X=[0,1]$ olsun ve her $x\in[0,1]$ için $T:[0,1]\to[0,1]$ dönüşümünü

$$Tx=1-x$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda T, (3.4) şartını sağlayan bir nonexpansive dönüşümdür ve $F_T = \{1/2\}$ olup T bir tek sabit noktaya sahiptir. Bununla birlikte, herhangi bir $x = x_0 \neq 1/2$ başlangıç değeri için, (3.2) ile verilen Picard iterasyonu

$$x_0, 1-x_0, x_0, 1-x_0, \ldots$$

şeklinde x_0 ve $1-x_0$ değeleri arasında salınan bir dizi üretir ki, söz konusu bu dizi T nin sabit noktası olan $1/2$ değerine yakınsamaz [80].

Yukarıdaki gerçekten hareketle araştırmacılar yeni iterasyon yöntemleri tanımlama veya mevcut iterasyon yöntemlerini geliştirme ihtiyacı duymuşlardır.

Picard iterasyonunun nonexpansive dönüşümlerin sabit noktasına yakınsamasındaki yetersizliği göz önünde bulunduran Krasnosel'skii [60] aşağıdaki iterasyon yöntemini tanımlayarak bu yetersizliği ortadan kaldırmıştır.

Tanım 3.1.4 (Krasnosel'skii İterasyon Yöntemi) (3.1) ile verilen ifadede

$$x_{n+1} = f(T, x_n) = \frac{1}{2}(x_n + Tx_n) \tag{3.5}$$

alınmasıyla elde edilen iterasyon yöntemine Krasnosel'skii iterasyon yöntemi denilir. Yukarıdaki örnekte herhangi bir $x = x_0 \neq 1/2$ başlangıç değeri için, (3.5) ile verilen Krasnosel'skii iterasyonu tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1/2\}$ sabit dizisi T nin sabit noktası olan $1/2$ değerine yakınsar [80].

Schaefer [61], (3.5) ile verilen Krasnosel'skii iterasyon yöntemini aşağıdaki şekilde genelleştirerek nonexpansive dönüşümlerin sabit noktasına yaklaşımda bulundu.

Tanım 3.1.5 (Schaefer İterasyon Yöntemi) $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere, (3.1) ile verilen ifadede

$$x_{n+1} = f(T, x_n) = (1-\lambda)x_n + \lambda T x_n \tag{3.6}$$

alınmasıyla elde edilen iterasyon yöntemine Schaefer iterasyon yöntemi denilir.

Nonexpansive dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşımda bulunmak amacıyla tanımlanan en genel iterasyon yöntemi Mann iterasyon yöntemidir [62]. Mann iterasyon yöntemi kronolojik olarak Krasnolsel'skii iterasyon yönteminden iki yıl önce

bir matris yardımı ile tanımlanmış olmasına rağmen, biçimsel olarak Krasnolsel'skii iterasyonunun bir genelleştirmesidir ve Mann iterasyonunun normal formu Schaefer iterasyonundaki λ parametresinin yerine $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ reel sayı dizisi yazılması ile aşağıdaki şekilde verilir.

Tanım 3.1.6 (Mann İterasyon Yöntemi) $\alpha_n \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$ belirli şartları sağlayan bir reel sayı dizisi olmak üzere, (3.1) ile verilen ifadede

$$\begin{cases} u_0 \in X, \\ u_{n+1} = f(T, u_n) = (1-\alpha_n)u_n + \alpha_n T u_n \end{cases} \tag{3.7}$$

alınmasıyla elde edilen iterasyon yöntemine Mann iterasyon yöntemi denilir.

Ishikawa iterasyon yönteminden daha hızlı ve bir genelleştirmesi olan iterasyon yöntemimiz aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.7 E bir normlu uzay, C onun konveks alt uzayı ve $T : C \to C$ kendi üzerine bir dönüşüm olsun.

$$\begin{cases} \mathrm{x}_0 = \mathrm{x} \in \mathrm{C} \\ \mathrm{f}(\mathrm{T}; \mathrm{x}_n) = (1\text{-}\varsigma_n)\,\mathrm{x}_n + \xi_n \mathrm{T}\mathrm{x}_n + (\varsigma_n - \xi_n)\,\mathrm{T}\mathrm{y}_n \\ \mathrm{y}_n = (1\text{-}\zeta_n)\,\mathrm{x}_n + \zeta_n \mathrm{T}\mathrm{x}_n, \forall n \in N, \end{cases} \tag{3.8}$$

$n \geq 0$ için $\{\varsigma_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizileri aşağıdaki koşulları sağlar.

i) $\varsigma_n \geq \xi_n$,

ii) $\{\varsigma_n - \xi_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\varsigma_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in [0,1]$,

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n = \infty$.

Bu iterasyon yöntemi hem Ishikawa hem de Mann iterasyon yöntemlerinden daha genel olduğu kolayca görülebilir.

1967'de, Halpern [105] nonexpansive dönüşümü altında aşağıdaki iterasyon yöntemini ilk olarak tanımlanmıştır. Bu iterasyon yöntemi:

Tanım 3.1.8 Herhangi bir $a_0 \in C$ başlangıç değeri ve herhangi bir $u \in C$ sabiti için (3.1) ile verilen ifadede

$$a_{n+1} = f(T, a_n) = (1-\varphi_n)u + \varphi_n T a_n \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $b \in (0,1) ve \varphi_n = n^{-b}$ olacak şekilde $\varphi_n \in [0,1]$ dir. Daha sonra Lions [106] 1977 yılında (3.9) iterasyon yönteminin aşağıdaki ilk üç şartı sağlayacak şekilde T'nin sabit noktasına güçlü yakınsadığını göstermiştir.

C_1) $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$;

C_2) $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n = \infty$;

C_3) $\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{\varphi_{n+1}^2}$;

C_4) $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_{n+1} - \varphi_n| < \infty$;

C_5) $\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{\varphi_{n+1}} = 0$;

C_6) $|\varphi_{n+1} - \varphi_n| \le o(\varphi_{n+1}) + \sigma_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$, $a_n = o(b_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Ayrıca, yukarıdaki şartlardan bazılarını kullanarak farklı uzaylarda birçok yazar çeşitli sonuçlar elde etmişlerdir. Önemli olanları aşağıdaki gibi sıralayalım.

1.[107]'da, Wittmann C_1, C_2 ve C_4 şartlarını kullanarak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin T'nin sabit noktasına güçlü yakınsadığını göstermiştir.

2.[108,109]'de, Reich C_1, C_2 ve C_6 şartlarını kullanarak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin T'nin sabit noktasına düzgün smooth Banach uzaylarında güçlü yakınsadığını göstermiştir.

3.[110]'de, Shioji ve Takahashi C_1, C_2 ve C_4 şartlarını kullanarak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin T'nin sabit noktasına düzgün Gateaux differansiyellenebilir norma sahip Banach uzaylarında güçlü yakınsadığını göstermiştir.

4.[74]'de, Xu C_1, C_2 ve C_5 şartlarını kullanarak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin T'nin sabit noktasına güçlü yakınsadığını göstermiştir.

[105] de bir açık problem olarak sadece C_1 ve C_2 şartları kullanılarak (3.9) iterasyon yönteminin quasi-nonexpansive dönüşümler için güçlü yakınsaklığını garanti edilebilir mi? Şeklinde sorulmuştur.

Bazı yazarlar tarafından bu soru olumlu cevaplanmıştır. Aşağıdaki listede bu yazarlardan bazılarının çalışmaları görülebilir, detaylar için bakınız [111-118]. Ancak

[119]'de Hilbert uzaylarında nonexpansive dönüşümler için bu açık problemin cevabının olumsuz olduğu gösterilmiştir.

Tanım 3.1.9 (Kirk İterasyon Yöntemi) $i=\overline{0,k}$, $k\geq 1$ için $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_0 > 0$ ve $\sum_{i=0}^{k}\alpha_i = 1$ olmak üzere, (3.1) ile verilen ifadede

$$x_{n+1} = f\left(T, x_n\right) = \sum_{i=0}^{k}\alpha_i T^i x_n,\ n\geq 0, \tag{3.10}$$

alınmasıyla elde edilen iterasyon yöntemine Kirk iterasyon yöntemi denir [120].

Bu iterasyon yönteminde, $k=0$ alınırsa Picard iterasyon yöntemi ve $k=1$ alınırsa Schaefer iterasyon yöntemi elde edilir.

Sabit nokta teoride yaygın olarak kullanılan bir diğer iterasyon yöntemi de Ishikawa iterasyon yöntemidir. İlk olarak 1974 yılında Shiro Ishikawa [63] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanan bu iterasyon yöntemi,

$$\|x-y\| \leq \|(1+t)(x-y)-t(Tx-Ty)\|, \forall x, y \in X \text{ ve } t>0 \tag{3.11}$$

eşitsizliğini sağlayan ve pseudo-contractive dönüşüm olarak adlandırılan T dönüşümlerinin sabit noktalarına yakınsamada kullanıldı.

Tanım 3.1.10 (Ishikawa İterasyon Yöntemi) $\alpha_n, \beta_n \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere, (3.1) ile verilen ifadede

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{cases} \tag{3.12}$$

alınmasıyla elde edilen iterasyon yöntemine Ishikawa iterasyon yöntemi denir.

2000 yılında Noor [121] tarafından aşağıdaki üç adımlı iterasyon yöntemi tanımlandı.

Tanım 3.1.11 (Noor İterasyon Yöntemi) $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere, (3.1) ile verilen ifadede

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T z_n \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases} \tag{3.13}$$

alınmasıyla elde edilen iterasyon yöntemine Noor iterasyon yöntemi olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.12 (S-İterasyon Yöntemi) $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}\subset[0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere, (3.1) ile verilen ifadede

$$\begin{cases} x_{n+1}=(1-\alpha_n)Tx_n+\alpha_n Ty_n, \\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n Tx_n,\ n\in\mathbb{N}, \end{cases} \tag{3.14}$$

alınmasıyla elde edilen iterasyon yöntemine S-iterasyon yöntemi denir [122], [95-69].

Aşağıdaki iterasyon şeması S. Thianwan [123] tarafından tanımlandı.

Tanım 3.1.13 (Thianwan İterasyon Yöntemi) $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}\subset[0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere, (3.1) ile verilen ifadede

$$\begin{cases} x_{n+1}=(1-\alpha_n)y_n+\alpha_n Ty_n, \\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n Tx_n,\ n\in\mathbb{N}, \end{cases} \tag{3.15}$$

alınmasıyla elde edilen iterasyon yöntemine iki adımlı Mann iterasyon yöntemi denir.

Phuengrattana ve Suantai [124] Noor iterasyon yönteminden esinlenerek, iki adımlı Mann iterasyon yöntemini aşağıdaki şekilde genelleştirdiler.

Tanım 3.1.14 (SP-İterasyon Yöntemi) $\alpha_n,\beta_n,\gamma_n\in[0,1],\forall n\in\mathbb{N}$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere, (3.1) ile verilen ifadede

$$\begin{cases} x_{n+1}=(1-\alpha_n)y_n+\alpha_n Ty_n, \\ y_n=(1-\beta_n)z_n+\beta_n Tz_n, \\ z_n=(1-\gamma_n)x_n+\gamma_n Tx_n,\ n\in\mathbb{N}, \end{cases} \tag{3.16}$$

alınmasıyla elde edilen iterasyon yöntemine SP-iterasyon yöntemi denir.

2009 da Olatinwo [125] aşağıdaki hibrid iterasyon yöntemlerini tanımladı.

Tanım 3.1.15 (Kirk-Ishikawa ve Kirk-Mann İterasyon Yöntemleri) k ve s, $k\geq s$ şartını sağlayan tamsayılar ve $\alpha_{n,i},\beta_{n,j}\in[0,1]$, $\alpha_{n,i}\geq 0$, $\alpha_{n,0}\neq 0$, $\beta_{n,j}\geq 0$, $\beta_{n,0}\neq 0$ şartlarını sağlayan diziler olmak üzere;

(i)
$$\begin{cases} x_0\in X, \\ x_{n+1}=\alpha_{n,0}x_n+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}T^i y_n, \quad \sum_{i=0}^{k}\alpha_{n,i}=1, \\ y_n=\beta_{n,0}x_n+\sum_{j=1}^{s}\beta_{n,j}T^j x_n, \quad \sum_{j=0}^{s}\beta_{n,j}=1,\forall n\in\mathbb{N} \end{cases} \tag{3.17}$$

ile tanımlı iterasyon yöntemine Kirk-Ishikawa iterasyon yöntemi denilir.

$$\textbf{(ii)}\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = \alpha_{n,0}x_n + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{n,i}T^i x_n, \ \sum_{i=0}^{k} \alpha_{n,i} = 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.18}$$

ile tanımlı iterasyon yöntemine Kirk-Mann iterasyon yöntemi denilir.

Chugh ve Kumar [126] Kirk-Mann ve Kirk-Ishikawa iterasyon yöntemlerini genelleştiren aşağıdaki iterasyon yöntemini tanımladılar.

Tanım 3.1.16 (Kirk-Noor İterasyon Yöntemi) k, s ve t, $k \geq s \geq t$ şartını sağlayan tamsayılar ve $\alpha_{n,i}, \beta_{n,j}, \gamma_{n,l} \in [0,1]$, $\alpha_{n,i} \geq 0$, $\alpha_{n,0} \neq 0$, $\beta_{n,j} \geq 0$, $\beta_{n,0} \neq 0$, $\gamma_{n,l} \geq 0$, $\gamma_{n,0} \neq 0$ şartlarını sağlayan diziler olmak üzere;

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = \alpha_{n,0}x_n + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{n,i}T^i y_n, \quad \sum_{i=0}^{k} \alpha_{n,i} = 1, \\ y_n = \beta_{n,0}x_n + \sum_{j=1}^{s} \beta_{n,j}T^j z_n, \ \sum_{j=0}^{s} \beta_{n,j} = 1, \\ z_n = \gamma_{n,0}x_n + \sum_{l=1}^{t} \gamma_{n,l}T^l x_n, \quad \sum_{l=0}^{t} \gamma_{n,l} = 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.19}$$

ile tanımlı iterasyon yöntemine Kirk-Noor iterasyon yöntemi denilir.

Hussain vd. [127] aşağıdaki iterasyon yöntemini tanımladılar.

Tanım 3.1.17 (Kirk-SP İterasyon Yöntemi) k, s ve t, $k \geq s \geq t$ şartını sağlayan tamsayılar ve $\alpha_{n,i}, \beta_{n,j}, \gamma_{n,l} \in [0,1]$, $\alpha_{n,i} \geq 0$, $\alpha_{n,0} \neq 0$, $\beta_{n,j} \geq 0$, $\beta_{n,0} \neq 0$, $\gamma_{n,l} \geq 0$, $\gamma_{n,0} \neq 0$ şartlarını sağlayan diziler olmak üzere;

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = \alpha_{n,0}y_n + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{n,i}T^i y_n, \quad \sum_{i=0}^{k} \alpha_{n,i} = 1, \\ y_n = \beta_{n,0}z_n + \sum_{j=1}^{s} \beta_{n,j}T^j z_n, \ \sum_{j=0}^{s} \beta_{n,j} = 1, \\ z_n = \gamma_{n,0}x_n + \sum_{l=1}^{t} \gamma_{n,l}T^l x_n, \quad \sum_{l=0}^{t} \gamma_{n,l} = 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.20}$$

ile tanımlı iterasyon yöntemine Kirk-SP iterasyon yöntemi denilir.

2014 yılında F. GÜRSOY ve V. KARAKAYA aşağıdaki Kirk-S iterasyon yöntemini tanımlayıp bu iterasyon yöneteminin güçlü yakınsaklık ve kararlılık sonuçlarını Banach uzaylarında contractive-like dönüşüm sınıfları için ispatladılar [128].

Tanım 3.1.18 (Kirk-S İterasyon Yöntemi) s_1 ve s_2, $s_1 \geq s_2$ şartını sağlayan tamsayılar ve $\alpha_{n,i_1}, \beta_{n,i_2} \in [0,1]$, $\alpha_{n,i_1} \geq 0$, $\alpha_{n,0} \neq 0$, $\beta_{n,i_2} \geq 0$, $\beta_{n,0} \neq 0$ şartlarını sağlayan diziler olmak üzere;

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = \alpha_{n,0} T x_n + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} T^{i_1} y_n, \quad \sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_{n,i_1} = 1, \\ y_n = \beta_{n,0} x_n + \sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2} T^{i_2} x_n, \quad \sum_{i_2=0}^{s_2} \beta_{n,i_2} = 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.21}$$

ile tanımlı iterasyon yöntemine Kirk-S iterasyon yöntemi denilir.

Bu bölümün devamında, bazı yeni iterasyon yöntemleri tanımlanarak bu yeni iterasyonlar yardımıyla ele alınan konulara ilişkin elde edilen orijinal sonuçlara yer verilecektir.

Bilindiği gibi literatürde Halpern iterasyon yönteminin birçok genellemesi bulunmaktadır. Aşağıdaki iterasyon yönteminin sadece C_1 ve C_2 şartları yardımı ile quasi-nonexpansive dönüşümlerinin sonsuz bir ailesinin sabit noktasına güçlü yakınsakdığı temel sonuçlarda ispatlanmıştır.

Tanım 3.1.19 $T_i : C \to C$ quasinonexpansive dönüşümlerinin sonsuz bir ailesi olsun. $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi

$$\begin{cases} v_1 \text{ , u } \in \text{ C} \\ v_{n+1} = \xi_n \text{u} + (1\text{-}\varsigma_n)\text{T}_0\text{v}_\text{n} + (\varsigma_n - \xi_n)\,\text{T}_0\text{w}_\text{n} \\ w_\text{n} = \zeta_{n,0} v_\text{n} + \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_{n,i} \text{T}_i \text{v}_\text{n}, \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{3.22}$$

ile tanımlanan bir dizi olsun. Ayrıca $[0,1]$ deki $\{\varsigma_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\zeta_{n,i}\}_{n\in\mathbb{N}, i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ ve $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizileri aşağıdaki kontrol şartlarını sağlasın.

1. $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0;$

2. $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_n = \infty$;

3.Her $n \in \mathbb{N}$ için $\zeta_{n,0} + \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_{n,i} = 1$;

4. $\liminf_{n\to\infty} \varsigma_n \zeta_{n,0} \zeta_{n,i} > 0.$

Bu iterasyon yöntemi Halpern tipinde iterasyon yöntemi denir. Bu iterasyon yöntemi tanımladığımız (3.8) iterasyon yöntemi ile Halpern iterasyon yönteminin karışımı olan bir iterasyon yöntemidir.

2013'te Picard-Mann iterasyon yöntemi [129] Khan tarafından Picard, Mann ve Ishikawa iterasyon yöntemlerinden daha hızlı yakınsayan bir iterasyon yöntemi bulmak amacı ile aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.20 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]$ ve k_1 başlangıç değeri olmak üzere

$$\begin{cases} k_1 \in C \\ k_{n+1} = Tt_n \\ t_n = (1-c_n)k_n + c_n Tk_n, \ \forall\ n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.23}$$

şeklinde tanımlanan iterasyon yöntemine Picard-Mann iterasyon yöntemi denir.

Sabit nokta iterasyon yöntemi tanımlanırken iki önemli kriter göz önüne alınır. Bu kriterler yakınsaklık hızı ve iterasyon yönteminin sadeliğidir. Bu nedele Picard – Mann iterasyon yöntemi önemlidir. Picard - Mann itersyon yöntemini ve literatürdeki diğer iterasyon yöntemleri göz önünde bulundurarak yeni bir iterasyon yöntemi tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.21 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]$ ve $x_1 \in C$ olmak üzere

$$\begin{cases} x_1 \in C \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)y_n + \alpha_n Ty_n \\ y_n = Tx_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.24}$$

şeklinde tanımlanan iterasyon yöntemine Mann-Picard iterasyon yöntemi denir.

Son olarak, Mann-Picard iterasyon yöntemini genelleştiren ve Kirk-MP iterasyon yöntemi olarak adlandırılan yeni iterasyon yöntemi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.22 k ve s, $k \geq s$ şartını sağlayan tamsayılar ve $\alpha_{n,i}, \beta_{n,j} \in [0,1]$, $\alpha_{n,i} \geq 0$, $\alpha_{n,0} \neq 0$, $\beta_{n,j} \geq 0$, $\beta_{n,0} \neq 0$ şartlarını sağlayan diziler ve $x_0 \in X$ başlangıç koşulu olmak üzere;

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = \alpha_{n,0} y_n + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{n,i} T^i y_n, \quad \sum_{i=0}^{k} \alpha_{n,i} = 1, \\ y_n = \sum_{j=1}^{s} \beta_{n,j} T^j x_n, \quad \sum_{j=1}^{s} \beta_{n,j} = 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.25}$$

şeklinde tanımlanan iterasyon yöntemine Kirk-MP iterasyon yöntemi denir.

(3.25) ile verilen iterasyon yönteminde $s = k = 1$ olarak alınması durumunda $\sum_{i=0}^{1} \alpha_{n,i} = 1$ ve $\sum_{j=1}^{1} \beta_{n,j} = 1$ olarak elde edilir, bunlara ek olarak $\alpha_{n,1} = \varphi_n$ seçimi ile birlikte (3.25) ile verilen Kirk- MP iterasyon yöntemi, (3.24) ile verilen MP iterasyon yöntemine indirgenir.

Yukarıda verilen iterasyon yöntemlerinin bazı dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsaması için dönüşüm sınıfları, uzay ve iterasyon yöntemleri üzerine bazı kısıtlar koyulur. Bu kısıtların amacı iterasyon yöntemlerinin, dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsamada engel teşkil eden yerleri aşmaktır. Bu nedenle sabit nokta teoride birçok Lemma ve Teoremler tanımlanmıştır. Şimdi esas sonuçlarımızın ispatında kullanılan bazı teoremler ve lemmaları aşağıdaki şekilde verilebilir.

Lemma 3.1.24 Eğer $\sigma \in [0,1)$ bir reel sayı ve $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ olacak şekilde bir negatif olmayan sayı dizisi ise, bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$u_{n+1} \leq \sigma u_n + \varepsilon_n$$

şartını sağlayan herhangi bir $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif sayı dizisi için $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ dır [80].

Lemma 3.1.26 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olsun.

$s_{n+1} \leq (1-\mu_n) s_n$

olacak şekilde $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,1)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = \infty$ olduğunu farzedelim. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ elde edilir [130].

Lemma 3.1.27 $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$, her $n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n \in [0,1)$ olacak şekildeki negatif olmayan bir reel sayı dizisi olsun. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$ ise, bu durumda $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\beta_n) = 0$ dır [131].

Aşağıdaki teoremler verilen Tanımlar, Teoremler, Lemmalar ve matematiksel kavramlar ışığında ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.28 E bir Banach uzayı ve C bu uzayın boştan farklı kapalı konveks bir alt kümesi ve $T : C \to C$ Teorem 2.3.21 şartlarını sağlayan (2.19) ile verilen bir dönüşüm olsun. Ayrıca $x_0 \in E$ olmak üzere $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, (3.8) şartlarını sağlayan iterasyon dizisi olsun. Bu takdirde $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, T 'nin sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat T 'nin C 'de bir tek sabit noktaya sahip olduğu ve $F(T) \neq \varnothing$ olduğu Teorem 2.3.21'de açıkça görülmektedir.

(3.8)'den

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &= \|(1-\varsigma_n)\mathrm{x}_n + \xi_n \mathrm{Tx}_n + (\varsigma_n - \xi_n)\,\mathrm{Ty}_n - p\| \\
&\leq (1-\varsigma_n)\|\mathrm{x}_n - p\| + (\varsigma_n - \xi_n)\|\mathrm{Ty}_n - p\| + \xi_n\|\mathrm{Tx}_n - p\| \\
&\leq (1-\varsigma_n)\|\mathrm{x}_n - p\| + (\varsigma_n - \xi_n)\delta\|\mathrm{y}_n - p\| + (\varsigma_n - \xi_n)L\|p - Tp\| \\
&\quad + \xi_n\delta\|\mathrm{x}_n - p\| + \xi_n L\|p - Tp\| \\
&= [1 - \varsigma_n + \xi_n\delta]\|\mathrm{x}_n - p\| + (\varsigma_n - \xi_n)\delta\|\mathrm{y}_n - p\| + \varsigma_n L\|p - Tp\|
\end{aligned} \tag{3.26}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.8)'den

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{y}_n - p\| &= \|(1-\zeta_n)\,\mathrm{x}_n + \zeta_n \mathrm{Tx}_n - p\| \\
&\leq (1-\zeta_n)\|\,\mathrm{x}_n - p\| + \zeta_n\|\mathrm{Tx}_n - p\| \\
&\leq (1-\zeta_n)\|\,\mathrm{x}_n - p\| + \zeta_n\delta\|\mathrm{x}_n - p\| + \zeta_n L\|p - Tp\| \\
&= [1 - \zeta_n(1-\delta)]\|\,\mathrm{x}_n - p\| + \zeta_n L\|p - Tp\|
\end{aligned} \tag{3.27}$$

ifadesi elde edilir. (3.26) eşitsizliğinde (3.27) yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &\leq [1 - \varsigma_n + \xi_n\delta]\|\mathrm{x}_n - p\| + \varsigma_n L\|p - Tp\| \\
&\quad + (\varsigma_n - \xi_n)\delta\left[[1 - \zeta_n(1-\delta)]\|\,\mathrm{x}_n - p\| + \zeta_n L\|p - Tp\|\right] \\
&\leq \left[1 - \varsigma_n + \xi_n\delta + (\varsigma_n - \xi_n)\delta[1 - \zeta_n(1-\delta)]\right]\|\mathrm{x}_n - p\| \\
&\quad + [\varsigma_n + (\varsigma_n - \xi_n)\delta\zeta_n]L\|p - Tp\|
\end{aligned} \tag{3.28}$$

düzenlenmiş eşitsizliğine ulaşılır.

$\|p-Tp\|=0$ olduğundan (3.28) eşitsizliğinde sadeleştirmeler yapılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\|x_{n+1}-p\| \le \left[1-\varsigma_n(1-\delta)\right]\|x_n-p\|. \tag{3.29}$$

Tümevarıma göre (3.29) eşitsizliği $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1}-p\| \le \left[1-\varsigma_n(1-\delta)\right]\|x_n-p\| \\
&\|x_n-p\| \le \left[1-\varsigma_{n-1}(1-\delta)\right]\|x_{n-1}-p\| \\
&\|x_{n-1}-p\| \le \left[1-\varsigma_{n-2}(1-\delta)\right]\|x_{n-2}-p\| \\
&\|x_{n-2}-p\| \le \left[1-\varsigma_{n-3}(1-\delta)\right]\|x_{n-3}-p\| \\
&. \\
&. \\
&. \\
&\|x_2-p\| \le \left[1-\varsigma_1(1-\delta)\right]\|x_1-p\| \\
&\|x_1-p\| \le \left[1-\varsigma_0(1-\delta)\right]\|x_0-p\|
\end{aligned}$$

şeklinde açılımı yapılabilir. Ayrıca her $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-p\| &\le \prod_{i=0}^{n}\left[1-\varsigma_i(1-\delta)\right]\|x_0-p\| \\
&\le \|x_0-p\| e^{\left(\sum_{i=1}^{n}\left[-\varsigma_i(1-\delta)\right]\right)} \\
&= \|x_0-p\| e^{\left(-(1-\delta)\sum_{i=1}^{n}\varsigma_i\right)}
\end{aligned}$$

olur.

$0<\delta<1$, $\varsigma \in [0,1]$ ve $\sum_{i=1}^{n}\varsigma_i = \infty$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\sup\|x_{n+1}-p\| \le \lim_{n\to\infty}\sup\|x_0-p\| e^{\left(-(1-\delta)\sum_{i=1}^{n}\varsigma_i\right)} \le 0$$

olur. Bu yüzden $\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-p\|=0$ yani $x_n \to p \in F(T)$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.1.29 [132] B, J_ϕ zayıf dizisel sürekli dualite dönüşümüne sahip bir Banach uzayı olsun. Bu durumda her $a,b \in B$ için

$$\psi\left(\|a+b\|\right) \le \psi\left(\|a\|\right) + 2\left\langle b, j_\phi(a+b)\right\rangle$$

dir. Eğer J_ϕ yerine J alınırsa $a,b \in B$ için

$\|a+b\|^2 \le \|a\|^2 + 2\langle b, j(a+b)\rangle$

özel hali elde edilir.

Lemma 3.1.30 [133] B, J_ϕ zayıf dizisel sürekli dualite dönüşümüne sahip bir Banach uzayı ve C , B 'nin kapalı konveks boştan farklı bir altkümesi olsun. $F(T) \neq \varnothing$ olacak şekilde $T : C \to C$ bir nonexpansive dönüşüm olsun. Bu durumda her $u \in C$ ve $b \in F(T)$ için

$\langle u-a, j(b-a)\rangle \le 0$

olacak şekilde bir $a \in F(T)$ vardır.

Lemma 3.1.31 [134] B, J_ϕ zayıf dizisel sürekli dualite dönüşümüne sahip bir refleksif Banach uzayı ve C, B'nin kapalı konveks boştan farklı bir altkümesi olsun. $F(T) \neq \varnothing$ olacak şekilde $T : C \to C$ bir nonexpansive dönüşüm olsun. $u \in C$ ve $t \in (0,1)$ olak üzere $z_t \in C$, $z_t = tu + (1-t)Tz_t$ denklemi için C'de tek çözüm olsun. Bu takdirde T'nin sabit noktaya sahip olması için gerek ve yeter koşul $t \to 0^+$ iken $\{z_t\}_{t\in(0,1)}$ sınırlı kalmasıdır ve bu durumda $\{z_t\}_{t\in(0,1)}$, T'nin sabit noktasına kuvvetli yakınsar. Eğer $Q : C \to F(T)$ dönüşümünü

$Q(u) = \lim_{t\to 0} z_t$

olacak şekilde sunny nonexpansive retraction olarak alırsak bu takdirde $u \in C$ ve $b \in F(T)$ için $Q(u)$

$\langle u-Q(u), j_\phi(b-Q(u))\rangle \le 0$

Varyasyon eşitsizliğini çözer.

Aşağıdaki tanımda verilen demiclosed prensibi nonexpansive sabit nokta teoride önemli ve kullanışlı sonuçlardan biridir.

Tanım 3.1.32 [118] $C \subset B$ boştan farklı B Banach uzayının altkümesi olsun. Ayrıca $T : C \to B$ tanımlansın. Eğer $a_n \xrightarrow{w} p$ olan C'de herhangi bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için ve eğer $n \to \infty$ iken $\|a_n - Ta_n\| \to 0$ ise bu durumda T dönüşümüne 0'da demiclosed denir. Bu da $Tp = p$ olmasını gerektirir.

Lemma 3.1.33 [135] B, J_ϕ zayıf dizisel sürekli dualite dönüşümüne sahip bir refleksive Banach uzayı ve C, B'nin kapalı konveks boştan farklı bir altkümesi olsun. $F(T) \neq \varnothing$ olacak şekilde $T : C \to C$ bir nonexpansive dönüşüm olsun. Bu takdirde $(I-T)$ dönüşümü bir $p \in B$ noktasında demiclosed denir. Yani $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bir a noktasına zayıf yakınsayan ve $(I-T)a = p$ olacak şekilde $(I-T)a_n \to p$ kuvvetli yakınsayan C'de her hangi bir dizidir (Burada I dönüşümü B'nin kendi üzerine birim dönüşümüdür). Özelde p=0 alınırsa $a \in F(T)$ olur.

Lemma 3.1.34 [136] Negatif olmayan bir $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ reel dizisi

$$\mu_{n+1} \leq (1-\varphi_n)\mu_n + \varphi_n \varepsilon_n$$

eşitsizliğini sağlasın ve ayrıca

1. $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n = \infty$
2. $\limsup_{n\to\infty} \varepsilon_n \leq 0$, veya
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \varphi_n < \infty$

Şartlarını sağladığını kabul edelim. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$ dır.

Lemma 3.1.35 [77] B bir reel Banach uzayı ve A, B üzerinde bir m-accretive operatör olsun. Ayrıca her $t > 0$ için J_t A ve t' ye bağlı bir resolvent operatör olsun. Bu takdirde her $k, l > 0$ ve $a \in B$ için

$$\|J_k a - J_l a\| \leq \frac{|k-l|}{k}\|a - J_k a\|$$

olur.

Lemma 3.1.36 [137] Her $i \geq 0$ için $\mu_{n_i} \leq \mu_{n_{i+1}}$ şartını sağlayan $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$'nin $\{\mu_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ altdizisi mevcut olacak şekilde $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ bir reel sayı dizisi olsun. Ayrıca

$$\eta_{(n)} = \max\{k \leq n : \mu_k \leq \mu_{k+1}\}$$

ile tanımlanan doğal sayıların bir $\left\{\eta_{(n)}\right\}_{n\geq n_0}$ alt dizisini göz önüne alalım. Bu durumda $\left\{\eta_{(n)}\right\}_{n\geq n_0}$, her $n\geq n_0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\eta_{(n)}=0$$

ifadesini sağlayan artmayan bir dizidir. Bu nedenle $\mu_{\eta_{(n)}}\leq\mu_{\eta_{(n)+1}}$ sağlanır ve bu da $\mu_n\leq\mu_{\eta_{(n)+1}}$ olmasını gerektirir.

Lemma 3.1.37 [138] B, düzgün konveks bir Banach uzayı $t>0$ bir sabit olsun. Bu takdirde $\forall k,l\geq 0$, $a_i\in B_t=\left\{z\in B:\|z\|\leq t\right\}$, $\rho_i\in(0,1)$ ve $i\geq 0$ olmak üzere $\sum_{i=0}^{\infty}\rho_i=1$ için

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\rho_i a_i\right\|^2\leq\sum_{i=1}^{\infty}\rho_i\|a_i\|^2-\rho_k\rho_l g\left(\|a_k-a_l\|\right)$$

olacak şekilde sürekli, kesin artan ve konveks bir $g:[0,2t)\to[0,\infty)$ fonksiyonu vardır.

Teorem 3.1.38 B, J normalleştirilmiş dualite dönüşümüne sahip bir Banach uzayı ve C, B'nin kapalı konveks boştan farklı bir altkümesi olsun. Her $i\geq 0$ için $F=\bigcap_{i=0}^{\infty}F(T)\neq\varnothing$ ve $I-T_i$ sıfırda demiclosed olacak şekilde $T_i:C\to C$ quasinonexpansive dönüşümlerinin sonsuz bir ailesi olsun. $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi

$$\begin{cases} v_1\ ,\mathrm{u}\ \in\ \mathrm{C} \\ v_{\mathrm{n+1}}=\ \xi_{\mathrm{n}}\mathrm{u}+(1\text{-}\varsigma_n)\mathrm{T}_0\mathrm{v}_{\mathrm{n}}+(\varsigma_n-\xi_{\mathrm{n}})\ \mathrm{T}_0\mathrm{w}_{\mathrm{n}} \\ w_{\mathrm{n}}\ =\ \zeta_{n,0}v_{\mathrm{n}}+\sum_{i=1}^{\infty}\zeta_{n,i}\mathrm{T}_i\mathrm{v}_{\mathrm{n}},\forall n\in\mathbb{N}, \end{cases} \tag{3.30}$$

ile tanımlanan bir dizi olsun. Ayrıca $[0,1]$ deki $\{\varsigma_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{\zeta_{n,i}\right\}_{n\in\mathbb{N},i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ ve $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizileri aşağıdaki kontrol şartlarını sağlasın.

1. $\lim_{n\to\infty}\xi_n=0;$

2. $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_n = \infty$;

3.Her $n \in \mathbb{N}$ için $\zeta_{n,0} + \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_{n,i} = 1$;

4. $\liminf_{n\to\infty} \varsigma_n \zeta_{n,0} \zeta_{n,i} > 0$.

Bu takdirde $P_F : B \to F$ metrik projeksiyon dönüşümü olmak üzere $n \to \infty$ iken $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $P_F u$'ya kuvvetli yakınsar.

İspat İspat üç adımdan oluşmaktadır.

Adım1. $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{T_i v_n\}_{n\in\mathbb{N}, i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ dizilerinin sınırlı olduğunu ispatlayalım. İlk olarak $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin sınırlı olduğunu gösterelim. $p \in F$ olsun. Lemma 3.1.37'göre

$$\begin{aligned}
\|w_n - p\|^2 &= \left\| \zeta_{n,0} v_n + \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_{n,i} \mathrm{T}_i \mathrm{v}_n - p \right\|^2 \\
&\le \zeta_{n,0} \|v_n - p\|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_{n,i} \|\mathrm{T}_i \mathrm{v}_n - p\|^2 - \zeta_{n,0}\zeta_{n,i} g\left(\|v_n - \mathrm{T}_i \mathrm{v}_n\|\right) \\
&\le \zeta_{n,0} \|v_n - p\|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_{n,i} \|\mathrm{v}_n - p\|^2 - \zeta_{n,0}\zeta_{n,i} g\left(\|v_n - \mathrm{T}_i \mathrm{v}_n\|\right) \qquad (3.31) \\
&= \|v_n - p\|^2 - \zeta_{n,0}\zeta_{n,i} g\left(\|v_n - \mathrm{T}_i \mathrm{v}_n\|\right) \\
&\le \|v_n - p\|^2
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}
\|v_{n+1} - p\| &= \|\xi_n u + (1-\varsigma_n)\mathrm{T}_0 \mathrm{v}_n + (\varsigma_n - \xi_n)\,\mathrm{T}_0 \mathrm{w}_n - p\| \\
&\le \xi_n \|u - p\| + (1-\varsigma_n)\|\mathrm{T}_0 \mathrm{v}_n - p\| + (\varsigma_n - \xi_n)\|\mathrm{T}_0 \mathrm{w}_n - p\| \\
&\le \xi_n \|u - p\| + (1-\varsigma_n)\|\mathrm{v}_n - p\| + (\varsigma_n - \xi_n)\|\mathrm{w}_n - p\| \\
&\le \xi_n \|u - p\| + (1-\varsigma_n)\|\mathrm{v}_n - p\| + (\varsigma_n - \xi_n)\|\mathrm{v}_n - p\| \\
&\le \xi_n \|u - p\| + (1-\xi_n)\|\mathrm{v}_n - p\| \\
&\le \max\{\|u - p\|, \|\mathrm{v}_n - p\|\}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Tümevarım yoluyla devam edilirse

$$\|v_{n+1}-p\| \le \max\{\|u-p\|,\|v_1-p\|\},\ \forall n\in\mathbb{N}$$

İfadesine ulaşılır. Bu nedenle $\|v_{n+1}-p\|$'nin sınırlı olduğu gösterilmiş olur ve bu da $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$'in sınırı olduğu sonucunu doğurur. Ayrıca $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{T_i v_n\}_{n\in\mathbb{N},i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ dizileri $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine bağlı olduklarından bunlarından sınırlılıklarını göstermek kolaydır.

Adım2. Her hangi $n\in\mathbb{N}$

$$\|v_{n+1}-z\|^2 \le (1-\xi_n)\|v_n-z\|^2 + 2\xi_n\langle u-z, j(v_{n+1}-z)\rangle \tag{3.32}$$

olduğunu gösterelim. (3.31) eşitsizliği göz önüne alındığında

$$\|w_n-z\|^2 \le \|v_n-z\|^2 - \zeta_{n,0}\zeta_{n,i}g(\|v_n-T_i v_n\|) \tag{3.33}$$

elde edilir. Bu yüzden (3.33)

$$\begin{aligned}
\|v_{n+1}-z\|^2 &= \|\xi_n u + (1-\varsigma_n)T_0 v_n + (\varsigma_n-\xi_n)T_0 w_n - z\|^2 \\
&\le \xi_n\|u-z\|^2 + (1-\varsigma_n)\|T_0 v_n - z\|^2 + (\varsigma_n-\xi_n)\|T_0 w_n - z\|^2 \\
&\le \xi_n\|u-z\|^2 + (1-\varsigma_n)\|v_n-z\|^2 \\
&\quad + (\varsigma_n-\xi_n)\left[\|v_n-z\|^2 - \zeta_{n,0}\zeta_{n,i}g(\|v_n-T_i v_n\|)\right] \\
&= \xi_n\|u-z\|^2 + (1-\xi_n)\|v_n-z\|^2 \\
&\quad + \xi_n\zeta_{n,0}\zeta_{n,i}g(\|v_n-T_i v_n\|) - \varsigma_n\zeta_{n,0}\zeta_{n,i}g(\|v_n-T_i v_n\|)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

sonucunu doğurur.

$$K_1 = \sup\left\{\left|\|u-z\|^2 - \|v_n-z\|^2\right| + \xi_n\zeta_{n,0}\zeta_{n,i}g(\|v_n-T_i v_n\|)\right\}$$

olarak alalım. Bu durumda (3.34) yeniden düzenlenirse

$$\varsigma_n\zeta_{n,0}\zeta_{n,i}g(\|v_n-T_i v_n\|) \le \|v_n-z\|^2 - \|v_{n+1}-z\|^2 + \xi_n K_1 \tag{3.35}$$

olur. Lemma 3.1.29 ve (3.31)'ya göre eşitsizlik tekrar düzenlenirse aşağıdaki gibi istenilen eşitsizlik elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\|v_{n+1}-z\|^2 &= \| \xi_n u+ (1-\varsigma_n)T_0 v_n + (\varsigma_n-\xi_n)T_0 w_n - z\|^2 \\
&= \| \xi_n (u-z) + (1-\varsigma_n)(T_0 v_n - z) + (\varsigma_n-\xi_n)(T_0 w_n - z)\|^2 \\
&\le \| (1-\varsigma_n)(T_0 v_n - z) + (\varsigma_n-\xi_n)(T_0 w_n - z)\|^2 \\
&\quad + 2\langle \xi_n (u-z), j(v_{n+1}-z)\rangle \\
&\le (1-\varsigma_n)\|T_0 v_n - z\|^2 + (\varsigma_n-\xi_n)\|T_0 w_n - z\|^2 \\
&\quad + 2\langle \xi_n (u-z), j(v_{n+1}-z)\rangle \\
&\le (1-\varsigma_n)\|v_n - z\|^2 + (\varsigma_n-\xi_n)\|w_n - z\|^2 \\
&\quad + 2\langle \xi_n (u-z), j(v_{n+1}-z)\rangle \\
&\le (1-\varsigma_n)\|v_n - z\|^2 + (\varsigma_n-\xi_n)\|v_n - z\|^2 \\
&\quad + 2\xi_n \langle (u-z), j(v_{n+1}-z)\rangle \\
&= (1-\xi_n)\|v_n - z\|^2 + 2\xi_n \langle (u-z), j(v_{n+1}-z)\rangle .
\end{aligned}
$$

Adım3. $n \to \infty$ iken $v_n \to z$ olduğunu göstereceğiz. Bu adımı iki durumda inceleyeceğiz.

Durum1 $\{\|u_n - z\|\}_{n\ge n_0}$ artmayan bir dizi olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\{\|u_n - z\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi yakınsaktır. Bu yüzden $n \to \infty$ iken $\|v_n - z\|^2 - \|v_{n+1} - z\|^2 \to 0$ olduğu açıktır.

(4) şartı ve (3.35) eşitsizliğinden

$$\lim_{n\to\infty} g(\|v_n - T_i v_n\|) = 0$$

olur. g fonksiyonun özelliğinden

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - T_i v_n\| = 0$$

elde edilir. Ayrıca $(w_n - v_n)$ ve $(v_{n+1} - w_n)$ dizilerini aşağıdaki gibi oluşturalım.

$$
\begin{aligned}
w_n - v_n &= \varphi_{n,0} v_n + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{n,i} T_i v_n - v_n \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{n,i} (T_i v_n - v_n),
\end{aligned}
\qquad (3.36)
$$

ve

$$v_{n+1} - w_n = \xi_n u + (1-\zeta_n) T_0 v_n + (\zeta_n - \xi_n) T_0 w_n \ - w_n$$

$$\begin{aligned} \|v_{n+1} - w_n\| &= \|\xi_n (u - T_0 w_n) + \zeta_n (T_0 v_n - T_0 w_n) + (T_0 v_n \ - w_n)\| \\ &\le \xi_n \|u - T_0 w_n\| + \zeta_n \|T_0 v_n - T_0 w_n\| + \|T_0 v_n - w_n\| \\ &\le \xi_n \|u - T_0 w_n\| + \zeta_n \|v_n - w_n\| + \|T_0 v_n \ - w_n\|. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Yukarıdaki (3.36) ve (3.37) ifadelerinden $\lim_{n\to\infty} \|v_{n+1} - w_n\| = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \|w_n - v_n \ \| = 0$ elde edilir. Bundan dolayı

$$\|v_{n+1} - v_n\| \le \|w_n - v_n \ \| + \|v_{n+1} - w_n\| \tag{3.38}$$

elde edilir. (3.38) ifadesi

$$\lim_{n\to\infty} \|v_{n+1} - v_n\| = 0$$

olmasını gerektirir.

Daha önce $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin sınırlı olduğu gösterilmişti. Bu yüzden her $j \in \mathbb{N}$ için $v_{n_j+1} \to l$ olacak şekilde $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$'nin bir $\{v_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ alt dizisi vardır. Sıfırda demiclosed olma prensibine göre $l \in F$ olur. Yukarıdaki gerçekler ve Tanım1 göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \langle u - z, J(v_{n+1}, z) \rangle \ &= \lim_{k\to\infty} \langle u - z, J(v_{n_j+1} - z) \rangle \\ &= \langle u - z, J(l - z) \rangle \\ &= \langle u - P_F u, J(l - P_F u) \rangle \\ &\le \ 0 \end{aligned} \tag{3.39}$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 3.1.34'e göre istenilen sonuç elde edilmiştir.

Durum2 Her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\left\|v_{n_j}-z\right\| \le \left\|v_{n_j+1}-z\right\|$$

olacak şekilde $\left\{n_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\left\{n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir alt dizisi olsun. Bu takdirde Lemma 3.1.36'den bir azalmayan $\left\{m_k\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ dizisi vardır bu nedenle her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\left\|z-v_{m_k}\right\| < \left\|z-v_{m_k+1}\right\| \text{ ve } \left\|z-v_k\right\| \le \left\|z-v_{m_k+1}\right\|$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu Lemma için (3.35) eşitsizliğini tekrar yazarsak $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\zeta_{m_k}\varphi_{m_k,0}\varphi_{m_k,i}g\left(\left\|v_{m_k}-T_iv_{m_k}\right\|\right) &\le \left\|v_{m_k}-z\right\|^2-\left\|v_{m_k+1}-z\right\|^2+\xi_{m_k}K_1\\ &\le \xi_{m_k}K_1\end{aligned}$$

olur. (1) ve (2) şartları göz önüne alınırsa

$$\lim_{k\to\infty} g\left(\left\|v_{m_k}-T_iv_{m_k}\right\|\right)=0$$

ve ayrıca

$$\lim_{k\to\infty}\left\|v_{m_k}-T_iv_{m_k}\right\|=0$$

limitleri elde edilir. Bu yüzden Durum1 dekine benzer yollar izlenerek

$$\limsup_{n\to\infty}\left\langle u-z, J\left(v_{m_k},z\right)\right\rangle = \limsup_{n\to\infty}\left\langle u-z, J\left(v_{v_{m_k}+1},z\right)\right\rangle \le 0$$

ve (3.31)' dan

$$\left\|v_{m_k+1}-z\right\|^2 \le \left(1-\xi_{m_k}\right)\left\|v_{m_k}-z\right\|^2+2\xi_{m_k}\left\langle u-z, J\left(v_{m_k+1}-z\right)\right\rangle$$

eşitsizlikleri elde edilir.Daha önce $\left\|v_{m_k}-z\right\| \le \left\|v_{m_k+1}-z\right\|$ eşitsizliğinin sağladığı gösterilmişti. Bu nedenle

$$\begin{aligned}\xi_{m_k}\left\|v_{m_k}-z\right\|^2 &\le \left\|v_{m_k}-z\right\|^2-\left\|v_{m_k+1}-z\right\|^2+2\xi_{m_k}\left\langle u-z, J\left(v_{m_k+1}-z\right)\right\rangle\\ &\le 2\xi_{m_k}\left\langle u-z, J\left(v_{m_k+1}-z\right)\right\rangle\end{aligned},$$

olur. Buna bağlı olarak

$$\lim_{k\to\infty}\left\|v_{m_k}-z\right\|=0 \qquad (3.40)$$

ve devamında (3.39) ve (3.40) ifadeleri göz önünde tutularak

$$\lim_{k\to\infty}\left\|v_{m_k+1}-z\right\|=0$$

elde edilir.

Sonuç olarak $k\in\mathbb{N}$ için $\left\|v_k-z\right\|\le\left\|v_{m_k+1}-z\right\|$ sonucu elde edilir. $k\to\infty$ iken $v_{m_k}\to z$ olduğundan $n\to\infty$ iken $v_k\to z$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.39 B, J normalleştirilmiş dualite dönüşümüne sahip bir Banach uzayı ve C, B'nin kapalı konveks boştan farklı bir altkümesi olsun. $F(T)\neq\varnothing$ olacak şekilde $T:C\to C$ bir quasi-nonexpansive dönüşüm ve ayrıca $(I-T)$ sıfırda demiclosed olsun. $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi

$$\begin{cases} v_1 \text{ , u } \in \text{ C} \\ v_{n+1} = \xi_n u + (1-\varsigma_n)\text{Tv}_n + (\varsigma_n-\xi_n)\,\text{Tw}_n \\ w_n = (1-\zeta_n)v_n+\zeta_n \text{Tv}_n, \forall n\in\mathbb{N}, \end{cases}$$

ile tanımlanan bir dizi olsun. Ayrıca $[0,1]$ deki $\{\varsigma_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\zeta_{n,i}\}_{n\in\mathbb{N},i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ ve $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizileri aşağıdaki kontrol şartlarını sağlasın.

a) $\sum_{i=1}^{\infty}\xi_n=\infty$;

b) $\lim_{n\to\infty}\xi_n=0$;

c)Her $n\in\mathbb{N}$ için $\liminf_{n\to\infty}\varsigma_n\zeta_n(1-\zeta_n)>0$.

Bu takdirde $P_F:B\to F$ metrik projeksiyon dönüşümü olmak üzere $n\to\infty$ iken $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi P_Fu'ya kuvvetli yakınsar.

Teorem 3.1.40 B, J_ϕ zayıf dizisel dualite dönüşümüne sahip bir Banach uzayı ve C, B'nin kapalı konveks boştan farklı bir altkümesi olsun. Her $i \geq 0 \quad r, r_n > 0$ için $lim_{n\to\infty} r_n = r$ olmak üzere $\overline{D(A_i)} \subset C \subset \bigcap_{r>0}^{\infty} R(I + rA_i)$ olacak şekilde $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ accretive operatörlerin sonsuz bir ailesi ve ayrıca $J_{r_n}^{A_i} = (I + r_n A_i)^{-1}$ operatörü A'nın resolvent operatörü olsun. $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi

$$\begin{cases} v_1 \text{ , u } \in \text{ C} \\ v_{n+1} = \xi_n u + (1-\varsigma_n) J_{r_n}^{A_0} v_n + (\varsigma_n - \xi_n) J_{r_n}^{A_0} w_n \\ w_n = \zeta_{n,0} v_n + \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_{n,i} J_{r_n}^{A_i} v_n, \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

ile tanımlanan bir dizi olsun. Ayrıca $[0,1]$ deki $\{\varsigma_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\zeta_{n,i}\}_{n\in\mathbb{N},i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ ve $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizileri aşağıdaki kontrol şartlarını sağlasın.

1. $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$;
2. $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_{n,i} = \infty$;
3. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\zeta_{n,0} + \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_{n,i} = 1$;
4. $\liminf_{n\to\infty} \varsigma_n \zeta_{n,0} \zeta_{n,i} > 0$.

Bu takdirde $Q_Z : B \to Z$ sunny nonexpansive retraction dönüşümü $Z = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^{-1}(0) \neq \varnothing$ olacak şekilde $n \to \infty$ iken $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $Q_Z u$'ya kuvvetli yakınsar.

İspat İspat üç adımdan oluşmaktadır. $z = Q_Z u$ olarak alalım.

Adım1. $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\left\{J_{r_n}^{A_i} v_n\right\}_{n\in\mathbb{N},i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ dizilerinin sınırlı olduğunu ispatlayalım. İlk olarak $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin sınırlı olduğunu gösterelim. $p \in F$ olsun. Lemma 3.1.37'göre

$$\begin{aligned}\|w_n - p\|^2 &= \left\| \zeta_{n,0} v_{\mathrm{n}} + \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_{n,i} J_{r_n}^{A_i} \mathrm{v}_{\mathrm{n}} - p \right\|^2 \\ &\le \zeta_{n,0} \|v_{\mathrm{n}} - p\|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_{n,i} \left\| J_{r_n}^{A_i} \mathrm{v}_{\mathrm{n}} - p \right\|^2 - \zeta_{n,0}\zeta_{n,i} g\left(\left\| v_{\mathrm{n}} - J_{r_n}^{A_i} \mathrm{v}_{\mathrm{n}} \right\| \right) \\ &\le \zeta_{n,0} \|v_{\mathrm{n}} - p\|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_{n,i} \|\mathrm{v}_{\mathrm{n}} - p\|^2 - \zeta_{n,0}\zeta_{n,i} g\left(\left\| v_{\mathrm{n}} - J_{r_n}^{A_i} \mathrm{v}_{\mathrm{n}} \right\| \right) \qquad (3.41) \\ &= \|v_{\mathrm{n}} - p\|^2 - \zeta_{n,0}\zeta_{n,i} g\left(\left\| v_{\mathrm{n}} - J_{r_n}^{A_i} \mathrm{v}_{\mathrm{n}} \right\| \right) \\ &\le \|v_{\mathrm{n}} - p\|^2\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}\|v_{\mathrm{n+1}} - p\| &= \left\| \xi_{\mathrm{n}} \mathrm{u} + (1\text{-}\zeta_n) J_{r_n}^{A_0} \mathrm{v}_{\mathrm{n}} + (\zeta_n - \xi_{\mathrm{n}}) J_{r_n}^{A_0} \mathrm{w}_{\mathrm{n}} - p \right\| \\ &\le \xi_{\mathrm{n}} \|\mathrm{u} - p\| + (1\text{-}\zeta_n) \left\| J_{r_n}^{A_0} \mathrm{v}_{\mathrm{n}} - p \right\| + (\zeta_n - \xi_{\mathrm{n}}) \left\| J_{r_n}^{A_0} \mathrm{w}_{\mathrm{n}} - p \right\| \\ &\le \xi_{\mathrm{n}} \|\mathrm{u} - p\| + (1\text{-}\zeta_n) \|\mathrm{v}_{\mathrm{n}} - p\| + (\zeta_n - \xi_{\mathrm{n}}) \|\mathrm{w}_{\mathrm{n}} - p\| \\ &\le \xi_{\mathrm{n}} \|\mathrm{u} - p\| + (1\text{-}\zeta_n) \|\mathrm{v}_{\mathrm{n}} - p\| + (\zeta_n - \xi_{\mathrm{n}}) \|\mathrm{v}_{\mathrm{n}} - p\| \\ &\le \xi_{\mathrm{n}} \|\mathrm{u} - p\| + (1\text{-}\xi_{\mathrm{n}}) \|\mathrm{v}_{\mathrm{n}} - p\| \\ &\le \max\left\{ \|\mathrm{u} - p\|, \|\mathrm{v}_{\mathrm{n}} - p\| \right\}\end{aligned}$$

yazılabilir. Tümevarım yoluyla devam edilirse

$$\|v_{\mathrm{n+1}} - p\| \le \max\left\{ \|\mathrm{u} - p\|, \|\mathrm{v}_1 - p\| \right\}, \ \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}$$

İfadesine ulaşılır. Bu nedenle $\|v_{\mathrm{n+1}} - p\|$'nin sınırlı olduğu gösterilmiş olur ve bu da $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$'in sınırı olduğu sonucunu doğurur. Ayrıca $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\left\{ J_{r_n}^{A_i} v_n \right\}_{n\in\mathbb{N}, i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ dizileri $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine bağlı olduklarından bunlarından sınırlılıklarını göstermek kolaydır.

Adım2. Her hangi $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$

$$\|v_{\mathrm{n+1}} - z\|^2 \le (1 - \xi_n) \|v_{\mathrm{n}} - z\|^2 + 2\xi_n \left\langle u - z, j\left(v_{\mathrm{n+1}} - z\right) \right\rangle \qquad (3.42)$$

olduğunu gösterelim. (3.41) eşitsizliği göz önüne alındığında

$$\|w_n - z\|^2 \le \|v_{\mathrm{n}} - z\|^2 - \zeta_{n,0}\zeta_{n,i} g\left(\left\| v_{\mathrm{n}} - J_{r_n}^{A_i} \mathrm{v}_{\mathrm{n}} \right\| \right) \qquad (3.43)$$

elde edilir. Bu yüzden (3.43)

$$
\begin{aligned}
\left\|v_{n+1}-z\right\|^2 &= \left\| \xi_n u + (1-\varsigma_n) J_{r_n}^{A_0} v_n + (\varsigma_n - \xi_n) J_{r_n}^{A_0} w_n - z \right\|^2 \\
&\le \xi_n \left\|u-z\right\|^2 + (1-\varsigma_n) \left\| J_{r_n}^{A_0} v_n - z \right\|^2 + (\varsigma_n - \xi_n) \left\| J_{r_n}^{A_0} w_n - z \right\|^2 \\
&\le \xi_n \left\|u-z\right\|^2 + (1-\varsigma_n) \left\| v_n - z \right\|^2 \\
&\quad + (\varsigma_n - \xi_n) \left[\left\|v_n - z\right\|^2 - \zeta_{n,0}\zeta_{n,i} g\left(\left\| v_n - J_{r_n}^{A_i} v_n \right\| \right) \right] \\
&= \xi_n \left\|u-z\right\|^2 + (1-\xi_n) \left\| v_n - z \right\|^2 \\
&\quad + \xi_n \zeta_{n,0}\zeta_{n,i} g\left(\left\| v_n - T_i v_n \right\| \right) - \varsigma_n \zeta_{n,0}\zeta_{n,i} g\left(\left\| v_n - J_{r_n}^{A_i} v_n \right\| \right)
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

sonucunu doğurur.

$$
K_2 = \sup \left\{ \left| \left\|u-z\right\|^2 - \left\|v_n - z\right\|^2 \right| + \zeta_{n,0}\zeta_{n,i} g\left(\left\| v_n - J_{r_n}^{A_i} v_n \right\| \right) \right\}
$$

olarak alalım. Bu durumda (3.44) yeniden düzenlenirse

$$
\varsigma_n \zeta_{n,0}\zeta_{n,i} g\left(\left\| v_n - J_{r_n}^{A_i} v_n \right\| \right) \le \left\| v_n - z \right\|^2 - \left\| v_{n+1} - z \right\|^2 + \xi_n K_2 \tag{3.45}
$$

olur. Lemma 3.1.29 ve (3.41)'ya göre eşitsizlik tekrar düzenlenirse aşağıdaki gibi istenilen eşitsizlik elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\left\|v_{n+1}-z\right\|^2 &= \left\| \xi_n u + (1-\varsigma_n) J_{r_n}^{A_0} v_n + (\varsigma_n - \xi_n) J_{r_n}^{A_0} w_n - z \right\|^2 \\
&= \left\| \xi_n (u-z) + (1-\varsigma_n) \left(J_{r_n}^{A_0} v_n - z \right) + (\varsigma_n - \xi_n) \left(J_{r_n}^{A_0} w_n - z \right) \right\|^2 \\
&\le \left\| (1-\varsigma_n) \left(J_{r_n}^{A_0} v_n - z \right) + (\varsigma_n - \xi_n) \left(J_{r_n}^{A_0} w_n - z \right) \right\|^2 \\
&\quad + 2 \left\langle \xi_n (u-z), j\left(v_{n+1} - z\right) \right\rangle \\
&\le (1-\varsigma_n) \left\| J_{r_n}^{A_0} v_n - z \right\|^2 + (\varsigma_n - \xi_n) \left\| J_{r_n}^{A_0} w_n - z \right\|^2 \\
&\quad + 2 \left\langle \xi_n (u-z), j\left(v_{n+1} - z\right) \right\rangle \\
&\le (1-\varsigma_n) \left\| v_n - z \right\|^2 + (\varsigma_n - \xi_n) \left\| w_n - z \right\|^2 \\
&\quad + 2 \left\langle \xi_n (u-z), j\left(v_{n+1} - z\right) \right\rangle \\
&\le (1-\varsigma_n) \left\| v_n - z \right\|^2 + (\varsigma_n - \xi_n) \left\| v_n - z \right\|^2 \\
&\quad + 2 \xi_n \left\langle (u-z), j\left(v_{n+1} - z\right) \right\rangle \\
&= (1-\xi_n) \left\| v_n - z \right\|^2 + 2 \xi_n \left\langle (u-z), j\left(v_{n+1} - z\right) \right\rangle .
\end{aligned}
$$

Adım3. $n \to \infty$ iken $v_n \to z$ olduğunu göstereceğiz. Bu adımı iki durumda inceleyeceğiz.

Durum1 $\{\|u_n - z\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ artmayan bir dizi olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\{\|u_n - z\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi yakınsaktır. Bu yüzden $n \to \infty$ iken $\|v_n - z\|^2 - \|v_{n+1} - z\|^2 \to 0$ olduğu açıktır.

(4) şartı ve (3.45) eşitsizliğinden

$$\lim_{n\to\infty} g\left(\left\|v_n - J_{r_n}^{A_i} v_n\right\|\right) = 0$$

olur. g fonksiyonun özelliğinden

$$\lim_{n\to\infty} \left\|v_n - J_{r_n}^{A_i} v_n\right\| = 0$$

elde edilir. Ayrıca $(w_n - v_n)$ ve $(v_{n+1} - w_n)$ dizilerini aşağıdaki gibi oluşturalım.

$$\begin{aligned} w_n - v_n &= \varphi_{n,0} v_n + \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{n,i} J_{r_n}^{A_i} v_n - v_n \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{n,i} \left(J_{r_n}^{A_i} v_n - v_n\right), \end{aligned} \tag{3.46}$$

ve

$$v_{n+1} - w_n = \xi_n u + (1 - \zeta_n) J_{r_n}^{A_0} v_n + (\zeta_n - \xi_n) J_{r_n}^{A_0} w_n - w_n$$

$$\begin{aligned} \left\|v_{n+1} - w_n\right\| &= \left\|\xi_n \left(u - J_{r_n}^{A_0} w_n\right) + \zeta_n \left(J_{r_n}^{A_0} v_n - J_{r_n}^{A_0} w_n\right) + \left(J_{r_n}^{A_0} v_n - w_n\right)\right\| \\ &\le \xi_n \left\|u - J_{r_n}^{A_0} w_n\right\| + \zeta_n \left\|J_{r_n}^{A_0} v_n - J_{r_n}^{A_0} w_n\right\| + \left\|J_{r_n}^{A_0} v_n - w_n\right\| \\ &\le \xi_n \left\|u - J_{r_n}^{A_0} w_n\right\| + \zeta_n \left\|v_n - w_n\right\| + \left\|J_{r_n}^{A_0} v_n - w_n\right\|. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Yukarıdaki (3.46) ve (3.47) ifadelerinden $\lim_{n\to\infty} \left\|v_{n+1} - w_n\right\| = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \left\|w_n - v_n\right\| = 0$ elde edilir. Bundan dolayı

$$\left\|v_{n+1} - v_n\right\| \le \left\|w_n - v_n\right\| + \left\|v_{n+1} - w_n\right\| \tag{3.48}$$

elde edilir. (3.48) ifadesi

$$\lim_{n\to\infty}\left\|v_{n+1}-v_n\right\|=0$$

olmasını gerektirir.

Lemma 3.1.35 ve (3.46) den

$$\begin{aligned}\left\|v_n-J_r^{A_i}v_n\right\| &\le \left\|v_n-J_{r_n}^{A_i}v_n\right\|+\left\|J_{r_n}^{A_i}v_n-J_r^{A_i}v_n\right\| \\ &\le \left\|v_n-J_{r_n}^{A_i}v_n\right\|+\frac{|r_n-r|}{r_n}\left\|v_n-J_{r_n}^{A_i}v_n\right\|\end{aligned}$$

ve her $i\in\mathbb{N}$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|v_n-J_r^{A_i}v_n\right\|=0$$

elde edilir.

Daha önce $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin sınırlı olduğu gösterilmişti. Bu yüzden her $j\in\mathbb{N}$ için $v_{n_j+1}\to l\in F\left(J_r^{A_j}v_n\right)$ olacak şekilde $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$'nin bir $\left\{v_{n_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ alt dizisi vardır. Yukarıdaki gerçekler ve Tanım 2.1.23 göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\left\langle u-z,J\left(v_{n+1},z\right)\right\rangle &= \lim_{k\to\infty}\left\langle u-z,J\left(v_{n_j+1}-z\right)\right\rangle \\ &= \left\langle u-z,J\left(l-z\right)\right\rangle \qquad (3.49)\\ &= \left\langle u-P_Fu,J\left(l-P_Fu\right)\right\rangle \\ &\le 0\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 3.1.34'e göre istenilen sonuç elde edilmiştir.

Durum2 Her $j\in\mathbb{N}$ için

$$\left\|v_{n_j}-z\right\|\le\left\|v_{n_j+1}-z\right\|$$

olacak şekilde $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir alt dizisi olsun. Bu takdirde Lemma 3.1.36'den bir azalmayan $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ dizisi vardır bu nedenle her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\|z - v_{m_k}\| < \|z - v_{m_k+1}\| \text{ ve } \|z - v_k\| \leq \|z - v_{m_k+1}\|$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu Lemma için (3.45) eşitsizliğini tekrar yazarsak $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\zeta_{m_k}\varphi_{m_k,0}\varphi_{m_k,i}g\left(\|v_{m_k} - T_i v_{m_k}\|\right) &\leq \|v_{m_k} - z\|^2 - \|v_{m_k+1} - z\|^2 + \xi_{m_k}K_2 \\ &\leq \xi_{m_k}K_2\end{aligned}$$

olur. (1) ve (2) şartları göz önüne alınırsa

$$\lim_{k\to\infty} g\left(\|v_{m_k} - J_{r_n}^{A_i} v_{m_k}\|\right) = 0$$

ve ayrıca

$$\lim_{k\to\infty} \|v_{m_k} - J_{r_n}^{A_i} v_{m_k}\| = 0$$

limitleri elde edilir. Bu yüzden Durum1 dekine benzer şekilde

$$\limsup_{n\to\infty} \langle u - z, J(v_{m_k}, z)\rangle = \limsup_{n\to\infty} \langle u - z, J(v_{v_{m_k}+1}, z)\rangle \leq 0$$

ve (3.41)' dan

$$\|v_{m_k+1} - z\|^2 \leq (1 - \xi_{m_k})\|v_{m_k} - z\|^2 + 2\xi_{m_k}\langle u - z, J(v_{m_k+1} - z)\rangle$$

eşitsizlikleri elde edilir.Daha önce $\|v_{m_k} - z\| \leq \|v_{m_k+1} - z\|$ eşitsizliğinin sağladığı gösterildiğinden

$$\begin{aligned}\xi_{m_k}\|v_{m_k} - z\|^2 &\leq \|v_{m_k} - z\|^2 - \|v_{m_k+1} - z\|^2 + 2\xi_{m_k}\langle u - z, J(v_{m_k+1} - z)\rangle \\ &\leq 2\xi_{m_k}\langle u - z, J(v_{m_k+1} - z)\rangle\end{aligned},$$

Elde edilir. Buna bağlı olarak

$$\lim_{k\to\infty} \|v_{m_k} - z\| = 0 \qquad (3.50)$$

ve (3.49) ve (3.50) ifadeleriyle birlikte

$$\lim_{k\to\infty}\left\|v_{m_k+1}-z\right\|=0$$

elde edilir.

Sonuç olarak $k\in\mathbb{N}$ için $\|v_k-z\|\le\left\|v_{m_k+1}-z\right\|$ sonucu elde edilir. $k\to\infty$ iken $v_{m_k}\to z$ olduğundan $n\to\infty$ iken $v_k\to z$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.41 B, Gâteaux diferansiyellenebilir norma sahip bir Banach uzayı ve C, B'nin kapalı konveks boştan farklı bir altkümesi olsun. Her $i\ge 0\quad r,r_n>0$ için $lim_{n\to\infty}r_n=r$ olmak üzere $\overline{D(A_i)}\subset C\subset\bigcap_{r>0}^{\infty}R(I+rA_i)$ olacak şekilde $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ accretive operatörlerin sonsuz bir ailesi ve ayrıca $J_{r_n}^{A_i}=(I+r_nA_i)^{-1}$ operatörü A'nın resolvent operatörü olsun. $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi

$$\begin{cases} v_1\ ,\mathrm{u}\ \in\ \mathrm{C} \\ v_{\mathrm{n+1}}=\ \xi_{\mathrm{n}}\mathrm{u}+(1\text{-}\varsigma_n)J_{r_n}^{A_0}\mathrm{v}_{\mathrm{n}}+(\varsigma_n-\xi_{\mathrm{n}})J_{r_n}^{A_0}\mathrm{w}_{\mathrm{n}} \\ w_{\mathrm{n}}\ =\ \zeta_{n,0}v_{\mathrm{n}}+\sum_{i=1}^{\infty}\zeta_{n,i}J_{r_n}^{A_i}\mathrm{v}_{\mathrm{n}},\forall n\in\mathbb{N}, \end{cases}$$

ile tanımlanan bir dizi olsun. Ayrıca $[0,1]$ deki $\{\varsigma_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\zeta_{n,i}\}_{n\in\mathbb{N},i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ ve $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizileri aşağıdaki kontrol şartlarını sağlasın.

1. $\lim_{n\to\infty}\xi_n=0$;
2. $\sum_{i=1}^{\infty}\xi_{n,i}=\infty$;
3. Her $n\in\mathbb{N}$ için $\zeta_{n,0}+\sum_{i=1}^{\infty}\zeta_{n,i}=1$;
4. $\liminf_{n\to\infty}\varsigma_n\zeta_{n,0}\zeta_{n,i}>0$.

Bu takdirde $Q_Z : B \to Z$ sunny nonexpansive retraction dönüşümü $Z = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^{-1}(0) \neq \varnothing$ olacak şekilde $n \to \infty$ iken $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $Q_Z u$'ya güçlü yakınsar.

Teorem 3.1.42 B bir Banach uzayı ve C bu uzayın boştan farklı kapalı konveks bir alt uzayı ve $F(T) \neq \varnothing$ olacak şekilde $T : C \to C$ (2.19) şartlarını sağlayan bir dönüşüm olsun. Ayrıca $\pi_1 \in C$ olmak üzere $\{\pi_n\}_{n=1}^{\infty}$, Tanım 3.1.21 şartlarını sağlayan iterasyon dizisi olsun. Bu takdirde $\{\pi_n\}_{n=1}^{\infty}$, T'nin sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat T'nin C'de bir tek sabit noktaya sahip olduğu ve $F(T) \neq \varnothing$ olduğu Teorem 2.3.21'de açıkça görülmektedir.

(3.24) iterasyon yönteminin ve weak contraction şartlarına göre

$$\begin{aligned} \|\pi_{n+1} - s^*\| &= \|(1-\varphi_n)\rho_n + \varphi_n T\rho_n - s^*\| \\ &\leq (1-\varphi_n)\|\rho_n - s^*\| + \varphi_n \|T\rho_n - s^*\| \\ &\leq (1-\varphi_n)\|\rho_n - s^*\| + \varphi_n\delta\|\rho_n - s^*\| + \varphi_n L\|s^* - Ts^*\| \\ &= (1-\varphi_n(1-\delta))\|\rho_n - s^*\| + \varphi_n L\|s^* - Ts^*\| \end{aligned} \tag{3.51}$$

elde edilir. Aynı şekilde $\|\rho_n - s^*\|$ ifadesi

$$\begin{aligned} \|\rho_n - s^*\| &= \|T\pi_n - s^*\| \\ &\leq \delta\|\pi_n - s^*\| + L\|s^* - Ts^*\| \end{aligned} \tag{3.52}$$

olarak düzenlenebilir. (3.52) eşitsizliği (3.51) altında yazılırsa

$$\begin{aligned} \|\pi_{n+1} - s^*\| &\leq \delta(1-\varphi_n(1-\delta))\|\pi_n - s^*\| \\ &\quad + (1-\varphi_n(1-\delta))L\|s^* - Ts^*\| + \varphi_n L\|s^* - Ts^*\| \\ &\leq (1-\varphi_n(1-\delta))\|\pi_n - s^*\| + (1+\varphi_n\delta)L\|s^* - Ts^*\| \end{aligned} \tag{3.53}$$

elde edilir. $\|s^* - Ts^*\| = 0$ olduğundan

$$\|\pi_{n+1} - s^*\| \leq (1-\varphi_n(1-\delta))\|\pi_n - s^*\| \tag{3.54}$$

olur. Tümevarım yöntemiyle $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\left\|\pi_{n+1}-s^*\right\| &\le \left(1-\varphi_n\left(1-\delta\right)\right)\left\|\pi_n-s^*\right\| \\
\left\|\pi_n-s^*\right\| &\le \left(1-\varphi_{n-1}\left(1-\delta\right)\right)\left\|\pi_{n-1}-s^*\right\| \\
\left\|\pi_{n-1}-s^*\right\| &\le \left(1-\varphi_{n-2}\left(1-\delta\right)\right)\left\|\pi_{n-2}-s^*\right\| \\
&\vdots \\
\left\|\pi_1-s^*\right\| &\le \left(1-\varphi_0\left(1-\delta\right)\right)\left\|\pi_0-s^*\right\|
\end{aligned}$$

yazılabilr. Bu nedenle

$$\begin{aligned}
\left\|\pi_{n+1}-s^*\right\| &\le \prod_{i=0}^{n}\left(1-\varphi_i\left(1-\delta\right)\right)\left\|\pi_0-s^*\right\| \\
&\le \left\|\pi_0-s^*\right\| e^{\left(-(1-\delta)\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\right)}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\delta \in \left(0,1\right)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n = \infty$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\pi_{n+1}-s^*\right\| = 0$$

olur ve bu da $\lim_{n\to\infty}\pi_n = s^*$ olmasını gerektir. Böylece ispat tamamlanır.#

Aşağıdaki lemma (3.25) iterasyon yönteminin kuvvetli yakınsaması için önemli bir rol üstlenecektir.

Lemma 3.1.43 $\left(X,\left\|\bullet\right\|\right)$ bir normlu lineer uzay ve $T: X \to X$ dönüşümü (2.35) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. $\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu, $\varphi\left(0\right)=0$ ve $\varphi\left(Lu\right) \le L\varphi\left(u\right)$, $L \ge 0$, $u \in \mathbb{R}^+$ şartlarını sağlayan bir alt toplamsal, monoton artan fonksiyon olsun. Bu durumda, her $i \in \mathbb{N}$, $L \ge 0$, $a \in \left[0,1\right)$ ve her $x, y \in X$ için

$$\left\|T^i x - T^i y\right\| \le \sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j} a^{i-j}\varphi^j\left(\left\|x-Tx\right\|\right) + a^i\left\|x-y\right\| \tag{3.55}$$

eşitsizliği sağlanır [100].

Teorem 3.1.44 E bir normlu lineer uzay, $T: E \to E$ dönüşümü (2.22) şartını sağlayan bir contractive-like dönüşüm ve $\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\varphi\left(0\right)=0$ şartını sağlayan bir alt toplamsal, monoton artan fonksiyon olsun. $\left\{x_n\right\}_{n=0}^{\infty}$, Kirk-MP iterasyon yöntemi

(3.25) tarafından üretilen bir dizi olsun. T nin bir q sabit noktasına sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ iterasyon dizisi q ya yakınsar.

İspat T, (2.22) şartını sağladından q nun tek olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi $x_n \to q \ (n \to \infty)$ olduğu gösterilecektir.

(3.21), (2.22) ve Lemma 3.1.43' in kullanılmasıyla

$$\|x_{n+1} - q\| = \left\| \alpha_{n,0}(Ty_n - Tq) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{n,i}\left(T^i y_n - T^i q\right) \right\|$$

$$\leq \alpha_{n,0}\|Ty_n - Tq\| + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{n,i}\left\|T^i y_n - T^i q\right\|$$

$$\leq \delta\alpha_{n,0}\|y_n - q\| + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{n,i}\left\{\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j} a^{i-j}\varphi^j\left(\|q - Tq\|\right) + a^i\|y_n - q\|\right\}$$

$$= \delta\alpha_{n,0}\|y_n - q\| + \left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}a^i\right)\|y_n - q\| \qquad (3.56)$$

ve

$$\|y_n - q\| = \left\|\sum_{p=1}^{s}\beta_{n,p}\left(T^p x_n - T^p q\right)\right\|$$

$$\leq \sum_{p=1}^{s}\beta_{n,p}\left\|T^p x_n - T^p q\right\|$$

$$\leq \sum_{p=1}^{s}\beta_{n,p}\left\{\sum_{j=1}^{p}\binom{p}{j} a^{p-j}\varphi^j\left(\|q - Tq\|\right) + a^p\|x_n - q\|\right\}$$

$$= \left(\sum_{p=1}^{s}\beta_{n,p}a^p\right)\|x_n - q\| \qquad (3.57)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

(3.57)' ün (3.56)' de yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\| &\le \delta\alpha_{n,0}\left(\sum_{p=1}^{s}\beta_{n,p}a^p\right)\|x_n-q\|+\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}a^i\right)\left(\sum_{p=1}^{s}\beta_{n,p}a^p\right)\|x_n-q\| \\ &= \left(\sum_{p=1}^{s}\beta_{n,p}a^p\right)\left[\delta\alpha_{n,0}+\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}a^i\right)\right]\|x_n-q\|\end{aligned} \tag{3.58}$$

ifadesi elde edilir.

σ yı aşağıdaki şekilde tanımlayalım

$$\sigma = \left(\sum_{p=1}^{s}\beta_{n,p}a^p\right)\left[\delta\alpha_{n,0}+\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}a^i\right)\right]. \tag{3.59}$$

Şimdi $\sigma \in [0,1)$ olduğu gösterilecektir.

δ , a^i , $a^p \in [0,1)$, $\alpha_{n,0} > 0$ ve $\sum_{i=0}^{k}\alpha_{n,i} = \sum_{p=1}^{s}\beta_{n,p} = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}\sigma &= \left(\sum_{p=1}^{s}\beta_{n,p}a^p\right)\left[\delta\alpha_{n,0}+\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}a^i\right)\right] \\ &\le \left[\delta\alpha_{n,0}+\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}a^i\right)\right] \\ &< \alpha_{n,0}+\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}a^i\right) \\ &< \alpha_{n,0}+\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\right) \\ &= \alpha_{n,0}+(1-\alpha_{n,0}) = 1\end{aligned} \tag{3.60}$$

olduğu elde edilir. Lemma 3.1.25' şartları sağlandığından $\lim_{n\to\infty} x_n = q$ olarak elde edilir.#

$X = [0,1]$ uzayını ve $T:[0,1]\to[0,1]$, $Tx = 1-x$ dönüşümünü ele alalım. Herhangi bir $x = x_0 \neq 1/2$ başlangıç değeri için, (3.5) ile verilen Krasnosel'skii iterasyonu tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1/2\}$ sabit dizisi T nin sabit noktası olan $1/2$ değerine yakınsar.

Yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi (3.2) ile verilen Picard iterasyon yönteminin verilen nonexpansive dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsamadığı ancak bununla birlikte

aynı şartlar altında, (3.5) ile verilen Krasnoselskij iterasyon yönteminin nonexpansive dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsadığı gösterilmiştir. [80].

Mutangadura ve Chidume [139] tarafından verilen diğer bir örnekte, (3.7) ile verilen Mann iterasyonunun (3.11) eşitsizliğini sağlayan pseudo-contractive dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsamadığı ancak bununla birlikte [63]' te, (3.12) ile verilen Ishikawa iterasyonunun bir Lipschitzian pseudo-contractive dönüşümün sabit noktasına yakınsadığı gösterilmiştir.

Yukarıdaki gerçeklerden hareketle Rhoades ve Şoltuz [140], [141], belirli bir dönüşüm sınıfı için, Mann iterasyon yöntemi (3.7) bu dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsak iken Ishikawa iterasyon yöntemi (3.12)' de yakınsak mı veya tersine, Ishikawa itersyon yöntemi yakınsak iken Mann iterasyon yöntemi de yakınsak mıdır? Sorusu bir çok araştırmacı tarafından çeşitli dönüşüm sınıfları için olumlu bir şekilde ispatlandı ve sonuç olarak, sabit nokta iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıklarının denkliği ile ilgili geniş bir literatür oluşturuldu, bkz., [140], [141-149].

Şimdi, (3.7) ile verilen Mann itrerasyon yönteminin, (3.8) ve (3.24) ile tanımlamış olduğumuz yeni iterasyon yöntemlerimiz ile yakınsaklıkları arasında denklikler kurulacaktır ve ayrıca yukarıda bahsettiğimiz diğer iterasyon yöntemleri ile yakınsaklıklarının denk olduğu gösterilecektir. Bunun için aşağıdaki lemmaya ihtiyaç duyulacaktır.

Lemma 3.1.45 $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$; her $n \in \mathbb{N}$ için $\delta_n \in [0,1]$, her $n \geq n_0$ için $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i = \infty$ ve $\sigma_n = o(\delta_n)$ olmak üzere

$$\beta_{n+1} \leq (1-\delta_n)\beta_n + \sigma_n$$

şartını sağlayan negatif olmayan bir reel sayı dizisi olsun. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$ dır [150].

Teorem 3.1.46 B bir Banach uzayı ve C bu uzayın boştan farklı kapalı konveks bir alt uzayı ve $F(T) \neq \varnothing$ olacak şekilde $T : C \to C$ (2.19) şartlarını sağlayan bir dönüşüm olsun. Ayrıca i) $\pi_1 = w_1 \in C$ ii) $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]$ iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n = \infty$ olmak üzere $\{\pi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve

$\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ sırasıyla MP ve Mann iterasyonlarının şartlarını sağlayan iterasyon dizileri olsun. Bu takdirde $\{\pi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ T 'nin s^* sabit noktasına yakınsaklıkları denktir.

İspat $n \to \infty$ iken $\pi_n \to s^*$ kabulü altında $n \to \infty$ iken $w_n \to s^*$ olduğunu göstereceğiz.

MP, Mann iterasyon yöntemleri ve (2.19) dönüşümün şartları kullanılarak

$$\begin{aligned} \|\pi_{n+1} - w_{n+1}\| &= \|(1-\varphi_n)\rho_n + \varphi_n T\rho_n - (1-\varphi_n)w_n + \varphi_n T w_n\| \\ &\le (1-\varphi_n)\|\rho_n - w_n\| + \varphi_n \|T\rho_n - Tw_n\| \\ &\le (1-\varphi_n)\|\rho_n - w_n\| + \varphi_n\delta\|\rho_n - w_n\| + \varphi_n L\|\rho_n - T\rho_n\| \\ &\le (1-\varphi_n(1-\delta))\|\rho_n - w_n\| + \varphi_n L\|\rho_n - T\rho_n\| \end{aligned} \tag{3.61}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $\|\rho_n - w_n\|$ ifadesi için de düzenlenirse

$$\begin{aligned} \|\rho_n - w_n\| &= \|T\pi_n - w_n\| \\ &\le \|T\pi_n - \pi_n\| + \|\pi_n - w_n\| \end{aligned} \tag{3.62}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.61) içinde (3.62) yazılırsa

$$\begin{aligned} \|\pi_{n+1} - w_{n+1}\| &\le (1-\varphi_n(1-\delta))\|\pi_n - w_n\| + \|\pi_n - T\pi_n\| \\ &\quad + \varphi_n L\|\rho_n - T\rho_n\| \\ &= (1-\varphi_n(1-\delta))\|\pi_n - w_n\| \\ &\quad + (1-\varphi_n(1-\delta))\|\pi_n - T\pi_n\| \\ &\quad + L\varphi_n\|\rho_n - T\rho_n\| \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşırız. $n \to \infty$ iken $\pi_n \to s^*$ olduğundan her $n \in \mathrm{N}$ için

$$\begin{aligned} \|\pi_n - T\pi_n\| &\le \|\pi_n - s^*\| + \|Ts^* - T\pi_n\| \\ &\le \|\pi_n - s^*\| + \delta\|s^* - \pi_n\| + L\|s^* - Ts^*\| \\ &= (1+\delta)\|\pi_n - s^*\| \to 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|\rho_n - T\rho_n\| &\le \|\rho_n - s^*\| + \|Ts^* - T\rho_n\| \\ &\le \|\rho_n - s^*\| + \delta\|s^* - \rho_n\| + L\|s^* - Ts^*\| \\ &= (1+\delta)\|\rho_n - s^*\| + L\|s^* - Ts^*\| \\ &= (1+\delta)\|\rho_n - s^*\| \\ &\le (1+\delta)\delta\|\pi_n - s^*\| + L(1+\delta)\|s^* - Ts^*\| \\ &= (1+\delta)\delta\|\pi_n - s^*\| \to 0\end{aligned}$$

olur ve bu yüzden

$$\lim_{n\to\infty}\|\rho_n - T\rho_n\| = \lim_{n\to\infty}\|\pi_n - T\pi_n\| = 0$$

elde edilir. Eğer

$$\begin{aligned}s_n &= \|\pi_n - w_n\|, \\ \varsigma_n &= \varphi_n(1-\delta), \\ \tau_n &= (1-\varphi_n(1-\delta))\|\pi_n - T\pi_n\| + L\varphi_n\|\rho_n - T\rho_n\|\end{aligned}$$

olarak seçilirse $\lim_{n\to\infty}\frac{\tau_n}{\varsigma_n} = 0$ olur. Lemma 3.1.45'nin şartları sağlandığından

$$\lim_{n\to\infty}\|\pi_n - w_n\| = 0$$

sonucu elde edilir. Ayrıca

$$\|w_n - s^*\| \le \|w_n - \pi_n\| + \|\pi_n - s^*\|$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\|w_n - s^*\| = 0$$

olmasını gerektirir.

Tersine $n\to\infty$ iken $w_n \to s^*$ olduğunda $n\to\infty$ iken $\pi_n \to s^*$ olduğunu göstereceğiz.

MP, Mann iterasyon yöntemlerini ve weak contraction şartlarını kullanarak

$$\begin{aligned}\|w_{n+1}-\pi_{n+1}\| &= \|(1-\varphi_n)w_n+\varphi_n Tw_n-(1-\varphi_n)\rho_n+\varphi_n T\rho_n\| \\ &\le (1-\varphi_n)\|w_n-\rho_n\|+\varphi_n\|Tw_n-T\rho_n\| \\ &\le (1-\varphi_n)\|w_n-\rho_n\|+\varphi_n\delta\|w_n-\rho_n\| \\ &\quad +\varphi_n L\|w_n-Tw_n\| \\ &\le (1-\varphi_n(1-\delta))\|w_n-\rho_n\|+\varphi_n L\|w_n-Tw_n\|\end{aligned} \tag{3.63}$$

eşitsizliği yazabiliriz. Ayrıca $\|w_n-\rho_n\|$ ifadesi için de düzenlenirse

$$\begin{aligned}\|w_n-\rho_n\| &= \|w_n-T\pi_n\| \\ &\le \|w_n-Tw_n\|+\|Tw_n-T\pi_n\| \\ &\le \|w_n-Tw_n\|+\delta\|w_n-\pi_n\|+L\|w_n-Tw_n\| \\ &= \delta\|w_n-\pi_n\|+(1+L)\|w_n-Tw_n\|\end{aligned} \tag{3.64}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.63) içinde (3.64) yazılırsa

$$\begin{aligned}\|w_{n+1}-\pi_{n+1}\| \le (1-\varphi_n(1-\delta))\|w_n-\pi_n\| \\ +\left[(1-\varphi_n(1-\delta))(1+L)+\varphi_n L\right]\|w_n-Tw_n\|\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} w_n = s^*$ ve $Ts^* = s^*$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\|w_n-Tw_n\|$$

olduğu açıktır. Eğer

$$\begin{aligned}s_n &= \|w_n-\pi_n\|, \\ \varsigma_n &= \varphi_n(1-\delta), \\ \tau_n &= \left[(1-\varphi_n(1-\delta))(1+L)+\varphi_n L\right]\|w_n-Tw_n\|\end{aligned}$$

olarak seçilirse bu durumda Lemma 3.1.45'nin tüm şartları sağlanmış olur. Bu yüzden

$$\lim_{n\to\infty}\|w_n-\pi_n\| = 0$$

olur. $\lim_{n\to\infty}\|w_n-s^*\| = 0$ olduğundan $n\to\infty$ iken

$$\|\pi_n-s^*\| \le \|\pi_n-w_n\|+\|w_n-s^*\| \to 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.#

Teorem 3.1.47 B bir Banach uzayı, $\varnothing \neq C \subset B$ boştan farklı konveks ve kapalı bir küme olsun. $T : C \to C$ **,** (2.19) şartını sağlayan bir dönüşüm olsun. ve $F_T \neq \varnothing$ olsun. $x_0 = u_0 \in C$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n \in [0,1)$ ise, bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) (3.7) ile verilen Mann iterasyonu $p \in F_T$ ye yakınsar,

(2) (3.8) ile verilen yeni iterasyon metodu $p \in F_T$ ye yakınsar.

İspat (1)$\Rightarrow$(2): $n \to \infty$ iken $u_n \to p$ kabulü altında $n \to \infty$ iken $x_n \to p$ olduğunu göstereceğiz. (3.8), Mann iterasyon yöntemleri ve (2.19) dönüşüm şartlarını kullanarak

$$\begin{aligned}\|u_{n+1} - x_{n+1}\| &= \|(1-\alpha_n)\,u_n + \alpha_n T u_n - (1-\alpha_n)\,x_n - \beta_n T x_n - (\alpha_n - \beta_n)\,T y_n\| \\ &\leq (1-\alpha_n)\|u_n - x_n\| + (\alpha_n - \beta_n)\|Tu_n - Ty_n\| + \beta_n \|Tu_n - Tx_n\| \\ &\leq (1-\alpha_n)\|u_n - x_n\| + (\alpha_n - \beta_n)\{\delta\|u_n - y_n\| + L\|u_n - Tu_n\|\} \\ &\quad + \beta_n \{\delta\|u_n - x_n\| + L\|u_n - Tu_n\|\} \\ &\leq (1-\alpha_n + \beta_n\delta)\|u_n - x_n\| + (\alpha_n - \beta_n)\delta\|u_n - y_n\| \\ &\quad + \alpha_n L\|u_n - Tu_n\|, \end{aligned} \tag{3.65}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $\|u_n - y_n\|$ ifadesi için de düzenlenirse

$$\begin{aligned}\|u_n - y_n\| &= \|u_n - (1-\theta_n)x_n - \theta_n T x_n\| \\ &= \|(1-\theta_n)u_n + \theta_n u_n - (1-\theta_n)x_n - \theta_n T x_n\| \\ &\leq (1-\theta_n)\|u_n - x_n\| + \theta_n\|u_n - Tx_n\| \\ &\leq (1-\theta_n)\|u_n - x_n\| + \theta_n\|u_n - Tu_n\| + \theta_n\|Tu_n - Tu_n\| \\ &\leq (1-\theta_n)\|u_n - x_n\| + \theta_n\|u_n - Tu_n\| + \theta_n\{\delta\|u_n - x_n\| + L\|u_n - Tu_n\|\} \\ &\leq (1-\theta_n(1-\delta))\|u_n - x_n\| + \theta_n(1+L)\|u_n - Tu_n\| \end{aligned} \tag{3.66}$$

eşitsizliği de elde edilebilir. (3.65) eşitsizliğinde $\|u_n - \mathrm{y_n}\|$ isfadesi yerine (3.66) ifedesi yazılırsa

$$\begin{aligned}\|u_{n+1} - x_{n+1}\| &\le (1-\alpha_n+\beta_n\delta)\|u_n - \mathrm{x_n}\| \\ &\quad + (\alpha_n - \beta_n)\delta \begin{Bmatrix} (1-\theta_n(1-\delta))\|u_n - x_n\| \\ +\theta_n(1+L)\|u_n - Tu_n\| \end{Bmatrix} \\ &\quad + \alpha_n L\|u_n - Tu_n\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (1-\alpha_n+\beta_n\delta + (\alpha_n - \beta_n)\delta(1-\theta_n(1-\delta)))\|u_n - \mathrm{x_n}\| \\ &\quad + \left[\ \alpha_n L + (\alpha_n - \beta_n)\delta\theta_n(1+L)\right]\|u_n - Tu_n\| \end{aligned}$$

olarak elde edilir. $\delta \in [0,1)$ ve $i = \overline{1, k-1}$ için $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\theta_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0,1)$ olduğundan,

$$(1-\alpha_n+\beta_n\delta + (\alpha_n - \beta_n)\delta(1-\theta_n(1-\delta))) < 1-\alpha_n(1-\delta)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}\|u_{n+1} - x_{n+1}\| &\le (1-\alpha_n(1-\delta))\|u_n - \mathrm{x_n}\| \\ &\quad + \left[\ \alpha_n L + (\alpha_n - \beta_n)\delta\theta_n(1+L)\right]\|u_n - Tu_n\| \\ &\le (1-\alpha_n(1-\delta))\|u_n - \mathrm{x_n}\| + \alpha_n(1+2L)\|u_n - Tu_n\| \end{aligned} \qquad (3.67)$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Şimdi, Lemma 3.1.34 'e göre

$\mu_n = \|u_n - x_n\|$,

$\varphi_n = \alpha_n(1-\delta) \subset [0,1)$,

$\varepsilon_n = (1+2L)\|u_n - Tu_n\|$.

tanımlamaları yapılırsa şartlar sağlanış olur. Lemma 3.1.34'nin şartları sağlandığından

$\lim_{n\to\infty}\|u_n - p\| = 0$ ve $Tp = p \in F_T$ olduğundan, (2.19)' dan

$$0 \le \|u_n - Tu_n\|$$

$$\le \|u_n - p\| + \|Tp - Tu_n\|$$

$$\le \|u_n - p\| + \delta\|p - u_n\| + L\|p - Tp\|$$

$$= (1+\delta)\|u_n - p\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

olduğu elde edilir, bu da $\lim_{n\to\infty}\|u_n - Tu_n\| = 0$ olmasını, yani $\limsup_{n\to\infty} \varepsilon_n \le 0$ olmasını gerektirir. Böylece, Lemma 3.1.34' in (3.67)' ye uygulanmasıyla

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n - x_n\| = 0 \tag{3.68}$$

olduğu elde edilir.

Ayrıca, üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\|x_n - p\| \le \|x_n - u_n\| + \|u_n - p\| \tag{3.69}$$

eşitsizliği yazılabilir. (3.69) eşitsizliğine (3.68)' ün ve $\lim_{n\to\infty}\|u_n - p\| = 0$ kabulünün uygulanmasıyla $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\| = 0$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ olduğu elde edilir.

(2)$\Rightarrow$(1):): $n \to \infty$ iken $x_n \to p$ kabulü altında $n \to \infty$ iken $u_n \to p$ olduğunu göstereceğiz. (3.8), Mann iterasyon yöntemleri ve (2.32) dönüşüm şartlarını kullanarak

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &= \|(1-\alpha_n)\,x_n + \beta_n T x_n + (\alpha_n - \beta_n)\,Ty_n - (1-\alpha_n)\,u_n - \alpha_n T u_n\| \\ &\le (1-\alpha_n)\,\|x_n - u_n\| + \beta_n\|Tx_n - Tu_n\| + (\alpha_n - \beta_n)\|Ty_n - Tu_n\| \\ &\le (1-\alpha_n)\,\|x_n - u_n\| + \beta_n\{\delta\|x_n - u_n\| + L\|x_n - Tx_n\|\} \\ &\quad + (\alpha_n - \beta_n)\{\delta\|y_n - u_n\| + L\|y_n - Ty_n\|\} \qquad (3.70) \\ &\le (1-\alpha_n+\beta_n\delta)\,\|x_n - u_n\| + \beta_n L\|x_n - Tx_n\| \\ &\quad + (\alpha_n - \beta_n)\delta\|y_n - u_n\| + (\alpha_n - \beta_n)L\|y_n - Ty_n\|\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $\|u_n - y_n\|$ ifadesi için de düzenlenirse

$$\|u_n - \mathrm{y_n}\| = \|(1-\theta_n)x_n + \theta_n T x_n - (1-\theta_n)u_n - \theta_n u_n\|$$

$$\leq (1-\theta_n)\|x_n - u_n\| + \theta_n \|Tx_n - u_n\|$$

$$= (1-\theta_n)\|x_n - u_n\| + \theta_n \|Tx_n - x_n + x_n - u_n\|$$

$$= (1-\theta_n)\|x_n - u_n\| + \theta_n \|Tx_n - x_n\| + \theta_n \|x_n - u_n\|$$

$$= \|x_n - u_n\| + \theta_n \|Tx_n - x_n\| \qquad (3.71)$$

eşitsizliği de elde edilebilir. (3.70) eşitsizliğinde $\|u_n - \mathrm{y_n}\|$ ifadesi yerine (3.71) ifadesi yazılırsa

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq (1\text{-}\alpha_n + \beta_n\delta)\ \|\mathrm{x_n} - \mathrm{u_n}\| + \beta_n \mathrm{L}\|\mathrm{x_n} - \mathrm{Tx_n}\| \\ &\quad + (\alpha_n - \beta_n)\delta\{\|x_n - u_n\| + \theta_n \|Tx_n - x_n\|\} \\ &\quad + (\alpha_n - \beta_n)\mathrm{L}\|y_n - \mathrm{Ty_n}\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leq (1\text{-}\alpha_n(1-\delta))\ \|\mathrm{x_n} - \mathrm{u_n}\| \\ &\quad + (\beta_n \mathrm{L} + (\alpha_n - \beta_n)\delta\theta_n)\|\mathrm{x_n} - \mathrm{Tx_n}\| \\ &\quad + (\alpha_n - \beta_n)\mathrm{L}\|y_n - \mathrm{Ty_n}\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leq (1\text{-}\alpha_n(1-\delta))\ \|\mathrm{x_n} - \mathrm{u_n}\| \\ &\quad + \alpha_n(1+\mathrm{L})\|\mathrm{x_n} - \mathrm{Tx_n}\| + \alpha_n \mathrm{L}\|y_n - \mathrm{Ty_n}\|\end{aligned}$$

$$= (1\text{-}\alpha_n(1-\delta))\ \|\mathrm{x_n} - \mathrm{u_n}\| + \alpha_n\left[(1+\mathrm{L})\|\mathrm{x_n} - \mathrm{Tx_n}\| + \mathrm{L}\|y_n - \mathrm{Ty_n}\|\right] \qquad (3.72)$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi, Lemma 3.1.34'e göre

$\mu_n = \|x_n - u_n\|$,

$\varphi_n = \alpha_n(1-\delta) \subset [0,1)$,

$$\varepsilon_n := \left[(1+\mathrm{L})\left\|\mathrm{x_n} - \mathrm{Tx_n}\right\| + \mathrm{L}\left\|y_{\mathrm{n}} - \mathrm{Ty_n}\right\|\right].$$

tanımlamaları yapılırsa şartlar sağlanış olur. Lemma 3.1.34'nin şartları sağlandığından

$\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\| = 0$ ve $Tp = p \in F_T$ olduğundan, (2.32)' dan

$$0 \le \|x_n - Tx_n\|$$

$$\le \|x_n - p\| + \|Tp - Tx_n\|$$

$$\le \|x_n - p\| + \delta\|p - x_n\| + L\|p - Tp\|$$

$$= (1+\delta)\|x_n - p\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ve

$$0 \le \|y_n - Ty_n\|$$

$$\le \|y_n - p\| + \|Tp - Ty_n\|$$

$$\le \|y_n - p\| + \delta\|p - y_n\| + L\|p - Tp\|$$

$$= (1+\delta)\|y_n - p\|$$

$$= (1+\delta)\|(1-\theta_n)x_n + \theta_n Tx_n - (1-\theta_n)p - \theta_n p\|$$

$$\le (1+\delta)(1-\theta_n)\|x_n - p\| + (1+\delta)\theta_n\|Tx_n - Tp\|$$

$$\le (1+\delta)(1-\theta_n)\|x_n - p\| + (1+\delta)\theta_n\{\delta\|x_n - p\| + L\|p - Tp\|\}$$

$$\le \left[(1+\delta)(1-\theta_n) + (1+\delta)\theta_n\delta\right]\|x_n - p\| + (1+\delta)\theta_n L\|p - Tp\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

olduğu elde edilir, bu da $\lim_{n\to\infty}\|x_n - Tx_n\| = \lim_{n\to\infty}\|y_n - Ty_n\| = 0$ olmasını, yani $\limsup_{n\to\infty}\varepsilon_n \le 0$ olmasını gerektirir. Böylece, Lemma 3.1.34' in (3.72)' ye uygulanmasıyla

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - u_n\| = 0 \tag{3.73}$$

olduğu elde edilir.

Ayrıca, üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\|u_n - p\| \le \|u_n - x_n\| + \|x_n - p\| \tag{3.74}$$

eşitsizliği yazılabilir. (3.74) eşitsizliğine (3.73)' ün ve $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\| = 0$ kabulünün uygulanmasıyla $\lim_{n\to\infty}\|u_n - p\| = 0$ veya $\lim_{n\to\infty} u_n = p$ olduğu elde edilir.#

Gürsoy [151], Soltuz [152]-[153] and Chugh and Kumar [154] çalışmalarından faydalanarak aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 3.1.48 B bir Banach uzayı ve C bu uzayın boştan farklı kapalı konveks bir alt uzayı olacak şekilde $T : C \to C$ dönüşümü (2.19) şartlarını sağlasın. Ayrıca Picard, Mann, Ishikawa, Picard-Mann, CR, S, SP, (3.8) ve Mann-Picard sabit nokta iterasyon yöntemleri aynı başlangıç koşuluna sahip ise bu durumda aşağıdakiler denk olur.

1.Picard iterasyon yöntemi (3.2) $s^* \in F_T$ sabit noktasına yakınsar.

2.Mann iterasyon yöntemi (3.7) $s^* \in F_T$ sabit noktasına yakınsar.

3.Ishikawa iterasyon yöntemi (3.12) $s^* \in F_T$ sabit noktasına yakınsar.

4.Picard-Mann iterasyon yöntemi (3.23) $s^* \in F_T$ sabit noktasına yakınsar.

5. Mann-Picard iterasyon yöntemi (3.24) $s^* \in F_T$ sabit noktasına yakınsar.

6. Yeni iterasyon yöntemi (3.8) $s^* \in F_T$ sabit noktasına yakınsar.

7.S- iterasyon yöntemi (3.14) $s^* \in F_T$ sabit noktasına yakınsar.

8.Thianwan iterasyon yöntemi (3.15) $s^* \in F_T$ sabit noktasına yakınsar.

9.Noor- iterasyon yöntemi (3.13) $s^* \in F_T$ sabit noktasına yakınsar.

10.SP- iterasyon yöntemi (3.16) $s^* \in F_T$ sabit noktasına yakınsar.

BÖLÜM 4

SABİT NOKTA İTERASYON YÖNTEMLERİNİN KARARLILIĞI

Tarihsel süreç içerisinde günlük hayat problemleri ilk olarak matematiksel denklem yapılarıyla modellenmiş ve daha sonra bu denklemlerin çözümleri incelenmiştir. Denklem çözümlerinin anlamlılığı varlık ve tekliğe dayandırılmıştır. Tam bu noktada sabit nokta teorinin argümanları ortaya çıkmıştır. Basit ifadeyle dönüşümün sabit noktası ve iterasyon dizisinin dönüşümün sabit noktasına yakınsaması olarak söyleyenebilir. Ancak fonksiyondaki yuvarlama veya ayrık hesaplama nedeniyle gerçek dizi yerine bir yaklaşım dizisi elde edilir. Eğer gerçek dizi fonksiyonun bir sabit noktasına yakınsarken yaklaşım dizisi de aynı sabit noktaya yakınsarsa bu durumda gerçek dizi yani iterative algoritma kararlıdır denir. Sezgisel olarak, eğer başlangıç verisindeki veya hesaplama sürecinde oluşan verideki "küçük" değişiklikler hesaplanan sabit nokta değeri üzerinde "küçük" bir etki meydana getiriyorsa ele alınan sabit nokta iterasyonuna kararlıdır denilir.

Bu fikir çerçevesinde yapılan ilk çalışma M.Urabe tarafından [155]' da sunulmuştur. Bununla birlikte, ilk olarak metrik uzaylarda Picard iterasyon yöntemi için kararlılık sonucu Ostrowski [156] tarafından verilmiş olmasına rağmen genel iterasyon yöntemleri için kararlılık kavramı Harder ve Hicks [103], [157], [158] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlandı:

Tanım 4.1.1 (X,d) bir metrik uzay, $T:X\to X$ bir dönüşüm, $x_0\in X$ olsun ve (3.1) ile verilen iterasyon yöntemi tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin T' nin bir p sabit

noktasına yakınsadığını kabul edelim. $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, X te keyfi bir dizi olsun ve $n=0,1,2,\ldots,$ için

$$\varepsilon_n = d\left(y_{n+1}, f\left(T, y_n\right)\right) \tag{4.1}$$

olarak alalım. (3.1) ile verilen sabit nokta iterasyon yönteminin T-kararlı (veya T' ye göre kararlı) olması için gerek ve yeter koşul

$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = p$

olmasıdır.

Tanım 4.1.1' de ele alınan X in bir normlu lineer uzay veya Banach uzayı olması durumunda norm tarafından üretilen metrik yardımıyla, yani $d\left(x,y\right)=\left\|x-y\right\|$, $\forall x, y \in X$ bağıntısı yardımıyla, (4.1) ile verilen ifadenin yerine

$$\varepsilon_n = \left\|y_{n+1} - f\left(T, y_n\right)\right\| \tag{4.2}$$

ifadesi kullanılır.

Ayrık dinamikte ve diğer nümerik hesaplamalarda fonksiyonun kaotik davranışı nedeniyle mühendislik ve uygulamalı bilimlerde iterative algoritmaların kararlılık çalışması zevkli bir alan olarak tanınmaktadır. Bilgisayar programlama sayesinde hesaplamalı matematikteki değişim iterative algoritmaların kararlılık teorisindeki artan ilgiyi hızlandırmıştır.

Harder ve Hicks [103], [157], [158] çeşitli contractive tipten dönüşüm sınıflarını kullanarak Picard (3.2), Mann (3.7) ve Kirk (3.10) iterasyon yöntemleri için bazı kararlılık teoremleri ispatladılar.

Harder ve Hicks [103]' nın sonuçları Rhoades [101], [159] tarafından aşağıdaki iki farklı Ciric tipli contractive dönüşüm sınıfı kullanılarak genişletildi: $\lambda \in \left[0,1\right)$ olmak üzere

$$d\left(Tx,Ty\right) \le \lambda \max\left\{d\left(x,y\right), d\left(x,Ty\right), d\left(y,Tx\right)\right\} \tag{4.3}$$

ve

$$d\left(Tx,Ty\right) \le \lambda \max\left\{d\left(x,y\right), \frac{d\left(x,Tx\right)+d\left(y,Ty\right)}{2}, d\left(x,Ty\right), d\left(y,Tx\right)\right\}. \tag{4.4}$$

1995 yılında Osilike [97], Harder ve Hicks [103]ve Rhoades [101], [159] tarafından kullanılan dönüşüm sınıflarından çok daha genel olan ve

$$d\left(Tx,Ty\right)\le Ld\left(x,Tx\right)+\lambda d\left(x,y\right),\ \lambda\in\left[0,1\right),\ L\ge 0 \tag{4.5}$$

şartını sağlayan dönüşüm sınıflarını kullanarak Rhoades [159] ün sonuçlarını daha da genelleştirdi.

Osilike ve Udomene [86]' de; Harder ve Hicks [103], [157], [158] , Rhoades [101], [159] ve Osilike [97] tarafından kullanılan ispat metodlarından daha kısa olan bir ispat metodu kullanılarak (4.5) şartını sağlayan dönüşümler tarafından üretilen Picard (3.2), Kirk (3.10) ve Ishikawa (3.12) iterasyon yöntemleri için kararlılık teoremleri ispatladılar.

Berinde [102], Osilike ve Udomene [99]' daki aynı ispat metodunu kullanarak Harder ve Hicks [103]' daki kararlılık sonuçlarını yeniden ispatladı.

Imoru ve Olatinwo [160], (2.22) şartını sağlayan dönüşüm sınıflarını kullanarak Harder ve Hicks [103], Rhoades [101], [159] , Osilike ve Udomene [99], Osilike [97], Berinde [102]' daki bazı kararlılık sonuçlarını genelleştirdiler.

Olatinwo [125] bu eğilimi devam ettirerek (2.22) şartını sağlayan dönüşümler tarafından üretilen Kirk-Mann (3.18) ve Kirk-Ishikawa (3.17) iterasyon yöntemleri için [97], [99-103], [159], [161] ve [162]' daki bazı sonuçları genelleştiren kararlılık teoremleri ispatladı.

2012 yılında Chugh ve Kumar [126] Kirk-Noor (3.19) iterasyon yöntemini tanımlayarak (2.22) şartını sağlayan dönüşümler tarafından üretilen bu iterasyon yöntemi için Olatinwo [125]' de ve burada atıf yapılan çok sayıdaki çalışmada elde edilen sonuçları genelleştiren bir kararlılık teoremi ispatladılar.

Bu bölümün devamında, bir önceki bölümde tanımlamış olduğumuz iterasyon yöntemlerinin kararlılıklarına ilişkin bazı yeni sonuçlar verilecektir.

Teorem 4.1.2 $\left(E,\|\ \|\right)$ bir Banach uzayı $\varnothing\neq C\subset E$ kapalı conveks bir altküme ve $T:C\to C$ dönüşümü (2.22) şartlarını sağlasın. Ayrıca $x_0\in C$ olmak üzere $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, (3.8)'in şartlarını sağlayan bir iterasyon dizisi olsun. Bu takdirde $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ iterasyon dizisi T-karalıdır.

İspat: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, p' ye yakınsayan bir sabit nokta iterasyon dizisi ayrıca $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, E' de keyfi bir dizi olsun. $\mathrm{v_n} = (1\text{-}\zeta_n)\,\mathrm{y_n} + \zeta_n \mathrm{Ty_n}$ olacak şekilde

$$\varepsilon_n = \left\| y_{n+1} - (1\text{-}\varsigma_n)\mathrm{y_n} \text{ - } \xi_n \mathrm{Ty_n} \text{ - } (\varsigma_n - \xi_n)\,\mathrm{Tv_n} \right\|$$

seçelim ve $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} y_n = p$ olduğunu göstereceğiz. (2.19) contraction şartı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left\| y_{n+1} - p \right\| &\le \left\| y_{n+1} - (1\text{-}\varsigma_n)\mathrm{y_n} \text{ - } \xi_n \mathrm{Ty_n} \text{ - } (\varsigma_n - \xi_n)\,\mathrm{Tv_n} \right\| \\
&\quad + \left\| (1\text{-}\varsigma_n)\mathrm{y_n} + \xi_n \mathrm{Ty_n} + (\varsigma_n - \xi_n)\,\mathrm{Tv_n} - p \right\| \\
&= \varepsilon_n + \left\| (1\text{-}\varsigma_n)\mathrm{y_n} + \xi_n \mathrm{Ty_n} + (\varsigma_n - \xi_n)\,\mathrm{Tv_n} - p \right\| \\
&\le \varepsilon_n + (1\text{-}\varsigma_n)\left\| \mathrm{y_n} - p \right\| + \xi_n \left\| \mathrm{Ty_n} - p \right\| + (\varsigma_n - \xi_n)\left\| \mathrm{Tv_n} - p \right\| \\
&\le \varepsilon_n + (1\text{-}\varsigma_n)\left\| \mathrm{y_n} - p \right\| + \xi_n \delta \left\| \mathrm{y_n} - p \right\| + \xi_n L \left\| p - Tp \right\| \\
&\quad + (\varsigma_n - \xi_n)\delta \left\| \mathrm{v_n} - p \right\| + (\varsigma_n - \xi_n)\mathrm{L} \left\| p - Tp \right\| \\
&\le \varepsilon_n + \left[1\text{-}\varsigma_n + \xi_n \delta\right] \left\| \mathrm{y_n} - p \right\| + \xi_n L \left\| p - Tp \right\| \\
&\quad + (\varsigma_n - \xi_n)\delta \left\| \mathrm{v_n} - p \right\| + (\varsigma_n - \xi_n)\mathrm{L} \left\| p - Tp \right\| \\
&= \varepsilon_n + \left[1\text{-}\varsigma_n + \xi_n \delta\right] \left\| \mathrm{y_n} - p \right\| + (\varsigma_n - \xi_n)\delta \left\| \mathrm{v_n} - p \right\| + \varsigma_n \mathrm{L} \left\| p - Tp \right\|
\end{aligned} \tag{4.6}$$

eşitsizliği elde edilir. Tekrar benzer işlemler $\left\| \mathrm{v_n} - p \right\|$ için gerçekleştirilirse

$$\begin{aligned}
\left\| \mathrm{v_n} - p \right\| &= \left\| (1\text{-}\zeta_n)\,\mathrm{y_n} + \zeta_n \mathrm{Ty_n} - p \right\| \\
&\le (1\text{-}\zeta_n)\left\| \mathrm{y_n} - p \right\| + \zeta_n \left\| \mathrm{Ty_n} - p \right\| \\
&\le (1\text{-}\zeta_n)\left\| \mathrm{y_n} - p \right\| + \zeta_n \delta \left\| \mathrm{y_n} - p \right\| + \zeta_n L \left\| p - Tp \right\| \\
&= (1\text{-}\zeta_n \left[1 - \delta\right])\left\| \mathrm{y_n} - p \right\| + \zeta_n L \left\| p - Tp \right\|
\end{aligned} \tag{4.7}$$

ve (4.6)'de (4.7) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\left\| y_{n+1} - p \right\| &\le \varepsilon_n + \left[1\text{-}\varsigma_n + \xi_n \delta\right] \left\| \mathrm{y_n} - p \right\| + \varsigma_n \mathrm{L} \left\| p - Tp \right\| \\
&\quad + (\varsigma_n - \xi_n)\delta \left[(1\text{-}\zeta_n \left[1 - \delta\right])\left\| \mathrm{y_n} - p \right\| + \zeta_n L \left\| p - Tp \right\| \right] \\
&= \varepsilon_n + \left[\left(1\text{-}\varsigma_n + \xi_n \delta\right) + (\varsigma_n - \xi_n)\delta(1\text{-}\zeta_n \left[1 - \delta\right]) \right] \left\| \mathrm{y_n} - p \right\| \\
&\quad + \left[\varsigma_n + (\varsigma_n - \xi_n)\delta\zeta_n \right] L \left\| p - Tp \right\|
\end{aligned} \tag{4.8}$$

eşitsizliği elde edilir. $\left\| p - Tp \right\| = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\left\| y_{n+1} - p \right\| &\le \varepsilon_n + \left[\left(1\text{-}\varsigma_n + \xi_n \delta\right) + (\varsigma_n - \xi_n)\delta(1\text{-}\zeta_n \left[1 - \delta\right]) \right] \left\| \mathrm{y_n} - p \right\| \\
&\le \varepsilon_n + \left(1\text{-}\varsigma_n \left[1 - \delta\right]\right) \left\| \mathrm{y_n} - p \right\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $0<\left(1\text{-}\varsigma_n\left(1-\delta\right)\right)<1$ olduğundan Lemma 3.1.29 kullanılarak $\lim_{n\to\infty} y_n = p$ ifadesi elde edilir. Tersine $\lim_{n\to\infty} y_n = p$ olsun. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ olduğunu aşağıdaki şekilde göstereceğiz.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &= \left\| y_{n+1} - (1\text{-}\varsigma_n)\mathrm{y_n} \text{ - } \xi_\mathrm{n}\mathrm{Ty_n} \text{ - } (\varsigma_n - \xi_\mathrm{n})\,\mathrm{Tv_n} \right\| \\
&\le \left\| y_{n+1} - p \right\| + \left\| p - (1\text{-}\varsigma_n)\mathrm{y_n} \text{ - } \xi_\mathrm{n}\mathrm{Ty_n} \text{ - } (\varsigma_n - \xi_\mathrm{n})\,\mathrm{Tv_n} \right\| \\
&\le \left\| y_{n+1} - p \right\| + (1\text{-}\varsigma_n)\left\| p - \mathrm{y_n} \right\| + \xi_\mathrm{n}\left\| p - \mathrm{Ty}_n \right\| + (\varsigma_n - \xi_\mathrm{n})\left\| p - \mathrm{Tv_n} \right\| \\
&\le \left\| y_{n+1} - p \right\| + (1\text{-}\varsigma_n)\left\| p - \mathrm{y_n} \right\| + \xi_\mathrm{n}\delta\left\| p - \mathrm{y}_n \right\| \\
&\quad + (\varsigma_n - \xi_\mathrm{n})\delta(1\text{-}\zeta_n\left[1-\delta\right])\left\| p - \mathrm{y_n} \right\| \\
&\le \left\| y_{n+1} - p \right\| + (1\text{-}\varsigma_n + \xi_\mathrm{n}\delta + (\varsigma_n - \xi_\mathrm{n})\delta(1\text{-}\zeta_n\left[1-\delta\right]))\left\| p - \mathrm{y_n} \right\| \\
&\le \left\| y_{n+1} - p \right\| + (1\text{-}\varsigma_n\left(1-\delta\right)\left\| p - \mathrm{y_n} \right\|
\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} y_n = p$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ sonucuna varılır. Bu yüzden iterasyon yöntemi T-karalıdır.

Teorem 4.1.3 $\left(E, \left\| \ \right\|\right)$ bir Banach uzayı ve $T : E \to E$ (2.19) şartlarını sağlayan bir dönüşüm olsun. Ayrıca $x_0 \in E$ olmak üzere $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, (3.24)'in şartlarını sağlayan iterasyon dizisi olsun. Bu takdirde $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ iterasyon dizisi T-karalıdır.

İspat: $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ (3.24), p' ye yakınsayan bir sabit nokta iterasyon dizisi ayrıca $\left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, E' de keyfi bir dizi olsun. $\mathrm{v_n} = \mathrm{Ty_n}$ olacak şekilde

$$\varepsilon_n = \left\| y_{n+1} - (1-\alpha_n)\mathrm{v_n} \ - \ \alpha_\mathrm{n}\mathrm{Tv_n} \ \right\|$$

seçelim ve $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} y_n = p$ olduğunu kanıtlayacağız. (2.19) contraction şartı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left\| y_{n+1} - p \right\| &\le \left\| y_{n+1} - (1-\alpha_n)\mathrm{v_n} - \ \alpha_\mathrm{n}\mathrm{Tv_n} \right\| \\
&\quad + \left\| (1-\alpha_n)\mathrm{v_n} + \alpha_\mathrm{n}\mathrm{Tv} \ - p \right\| \\
&= \varepsilon_n + \left\| (1\text{-}\alpha_n)\mathrm{v_n} \ + \alpha_\mathrm{n}\mathrm{Tv_n} \ - p \right\| \\
&= \varepsilon_n + (1\text{-}\alpha_n)\left\| \mathrm{v_n} \ - p \right\| + \alpha_\mathrm{n}\left\| \mathrm{Tv_n} \ - p \right\| \\
&\le \varepsilon_n + \left(1\text{-}\alpha_n\left(1-\delta\right)\right)\left\| \mathrm{v_n} - p \right\| + \alpha_\mathrm{n} L\left\| p - Tp \right\|
\end{aligned} \tag{4.9}$$

eşitsizliği elde edilir. Tekrar benzer işlemler $\left\| \mathrm{v_n} - p \right\|$ için gerçekleştirilirse

$$\|v_n - p\| = \|y_n - p\|$$

$$\leq \delta\|y_n - p\| + L\|Tp - p\| \qquad (4.10)$$

ve (4.9)'de (4.10) yerine yazılırsa

$$\|y_{n+1} - p\| \leq \varepsilon_n + (1-\alpha_n(1-\delta))\left[\delta\|y_n - p\| + L\|Tp - p\|\right] + \alpha_n L\|p - Tp\|$$

eşitsizliği elde edilir. $\|p - Tp\| = 0$ olduğundan

$$\|y_{n+1} - p\| \leq \varepsilon_n + (1-\alpha_n(1-\delta))\delta\|y_n - p\|$$

elde edilir. Ayrıca $0<1-\alpha_n(1-\delta)<1$ olduğundan Lemma 3.1.29 kullanılarak $\lim_{n\to\infty} y_n = p$ ifadesi elde edilir. Tersine $\lim_{n\to\infty} y_n = p$ olsun. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ olduğunu aşağıdaki şekilde göstereceğiz.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &= \|y_{n+1} - (1-\alpha_n)v_n - \alpha_n Tv_n\| \\
&\leq \|y_{n+1} - p\| + \|p - (1-\alpha_n)v_n - \alpha_n Tv_n\| \\
&\leq \|y_{n+1} - p\| + (1-\alpha_n)\|p - v_n\| + \alpha_n\|p - Tv_n\| \\
&\leq \|y_{n+1} - p\| + (1-\alpha_n)\|p - v_n\| + \alpha_n\delta\|p - v_n\| \\
&\leq \|y_{n+1} - p\| + (1-\alpha_n(1-\delta))\|p - v_n\| \\
&= \|y_{n+1} - p\| + (1-\alpha_n(1-\delta))\|p - Ty_n\| \\
&\leq \|y_{n+1} - p\| + (1-\alpha_n(1-\delta))\delta\|p - y_n\|
\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} y_n = p$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ sonucuna varılır. Bu yüzden iterasyon yöntemi T-karalıdır.

BÖLÜM 5

BAZI İTERASYON YÖNTEMLERİNE KARŞILIK GELEN DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARININ VERİ BAĞLILIĞI

Sabit nokta toride önemli bir araştırma konusu olan kavramlardan biri de sabit noktaların veri bağlılığıdır.

Sabit nokta teorinin literatüründe, sabit noktaların veri bağlılığı konusu ile ilgili çok sayıda çalışma mevcut olmakla birlikte yoğun olarak metrik uzaylarda Picard iterasyonu için, Berinde [163], Chifu ve Petruşel [164], Espínola ve Petruşel [165], Markin [166], Rus ve Muresan [167], Rus vd. [168] ve bu çalışmalardaki diğer bazı referanslar tarafından çalışılmıştır. Son zamanlarda normlu lineer uzaylarda ve Banach uzaylarında diğer iterasyon yöntemleri için çalışılmaya başlanan bu konuya katkıda bulunan bazı yazarlar, Chugh vd. [169], Chugh ve Kumar [170], Karakaya vd. [171], Olantiwo [172], [173], Şoltuz ve Grosan [174] ve Şoltuz [131], [175] dir.

Sabit noktaların veri bağlılığı tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir:

Tanım 5.1.1 $T, \widetilde{T} : B \to B$ iki operatör olsun. Her $x \in B$ ve uygun bir $\varepsilon > 0$ için

$$\left\| Tx - \widetilde{T}x \right\| \leq \varepsilon \tag{5.1}$$

ise $\widetilde{T}$' ya T' nin bir yaklaşım operatörü denilir [80].

Bir T dönüşümünün p ile gösterilen sabit noktası hesaplanırken, çeşitli sebeplerden dolayı T' nin Tanım 5.1.1' deki şartları sağlayan $\widetilde{T}$ gibi belirli bir yaklaşım operatörü kullanılır. $\widetilde{T}$' nın belirli bir metodla hesaplanabilen q gibi bir sabit noktaya sahip

olduğunu kabul edelim. Bu durumda doğal olarak aşağıdaki problemler ortaya çıkmaktadır:

(i) p yaklaşık olarak q mudur?

Eğer cevap evet ise

(ii) $\|p-q\|$ değeri nasıl hesaplanabilir?

Yukarıda verilen referanslarda, farklı dönüşüm sınıfları ve iterasyon metodları için (i) ve (ii) ile verilen problemlere olumlu cevaplar bulunmuştur. Bu cevaplardan biri Şoltuz ve Grosan [174] tarafından aşağıdaki teoremle verilmiştir:

Teorem 5.1.2 X bir reel Banach uzayı, $B \subset X$ boş olmayan konveks ve kapalı bir küme ve $\varepsilon > 0$ sabit bir sayı olsun. $T : B \to B$ (2.22) şartını sağlayan bir dönüşüm ve $S : B \to B$ bir dönüşüm olsun. T ' nin x^* gibi ve S nin de (x^* a yeterince yakın) u^* gibi sabit noktalara sahip olduklarını kabul edelim. Eğer

$$\|Tz - Sz\| \leq \varepsilon, \ \forall z \in B$$

bağıntısı sağlanıyor ise, bu durumda

$$\|x^* - u^*\| \leq \frac{\varepsilon}{1-q}$$

olur.

Örnek 5.1.3 $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} 1 & , x \in (-\infty, 3] \\ -1.5 & , x \in (3, +\infty) \end{cases}$$

ile verilsin. Bu durumda $\varphi = I$ (özdeşlik dönüşümü) olmak üzere, T dönüşümü $\delta = 0.1$ ile (2.22) şartını sağlayan bir contractive-like dönüşümdür ve bir tek sabit noktası $x = 1$ dır. Şimdi, sabit noktası 2 olan ve

$$Sx = \begin{cases} 2 & , x \in (-\infty, 3] \\ -2.5 & , x \in (3, +\infty) \end{cases}$$

ile tanımlanan $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümünü ele alalım.

Bu iki dönüşüm arasındaki uzaklığı $\varepsilon = 1$ olarak alalım, yani $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\|Sx - Tx\| \leq 1$ olsun

$u_0 = x_0 = 1$ ve $\alpha_n = \beta_n = 1/(n+1)$ olarak seçelim. Teorem 5.1.2 den bağımsız olarak, Noor iterasyonunun S dönüşümüne uygulanmasıyla Çizelge 5.1.1 te $u_0 = x_0 = 1$ başlangıç değeri ve $\alpha_n = \beta_n = \theta_n = 1/(n+1)$ seçimi için S dönüşümü ile elde edilen Noor iterasyon yönteminin ilk 100 adımının hesaplanması

Çizelge 5.1.1 Noor iterasyon yönteminin ilk 100 adımının hesaplanması

iterasyon Adım Sayısı	**Noor İterasyonu**
1	**1.5**
.	.
.	.
.	.
5	**0.96875**
.	.
.	.
.	.
10	**1.9990234375**
.	.
.	.
.	.
100	**1.99999999999999999999999999992**
.	.
.	.
.	.
$n \to \infty$	**2**

şeklinde verilebilir. Yukarıdaki hesaplama Matlab kullanılarak yapılmıştır. Bu yapılan işlemlerden, S dönüşümüne uygulanan Noor iterasyon yönteminin S nin bir tek x=2 sabit noktasına yakınsadığı çıkarımına ulaşırız. . Nihai olarak iki sabit nokta arasındaki uzaklığın 1 olacağı görülebilir. Aslında, S nin sabit noktasını bilmeksizin (ve onu hesaplamaksızın) Teorem 5.1.2' yi kullanarak, bu sabit noktayı aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz:

$$\left\| x^* - u^* \right\| \le \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-0.1} = \frac{1}{0.9} = 1.11111111.$$

Sonuç olarak; T ve S nin arasındaki uzaklık 1.11111111 den daha küçük olmalıdır [176].

Bu bölüm, yeni tanımlamış olduğumuz (3.8) iterasyon yöntemi ve (3.24) ile verilen Mann-Picard iterasyon yöntemi yardımıyla, sırasıyla (2.19) ve (2.22) şartını sağlayan dönüşümlerin sabit noktalarının veri bağlılıklarına ilişkin bazı sonuçlar verilmiştir.. Aşağıdaki lemma bu sonuçların elde edilmesinde önemlidir.

Lemma 5.1.4 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ negatif olmayan bir dizi, her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu_n \in (0,1)$, $\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n = \infty$ ve $\eta_n \geq 0$ olsun. Her $n \geq n_0$ için

$$a_{n+1} \leq (1-\mu_n) a_n + \mu_n \eta_n$$

eşitsizliğinin sağlanacağı şekilde bir n_0 sayısının mevcut olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} \eta_n$$

eşitsizliği sağlanır [174].

Teorem 5.1.5 B bir Banach uzayı ve C bu uzayın boştan farklı kapalı konveks bir alt uzayı ve $F(S) \neq \varnothing$ olacak şekilde $S, \tilde{S} : C \to C$ (2.19) şartlarını sağlayan dönüşümler ve S'nin yaklaşım operatörü $\tilde{S}$ olsun. $\{\pi_n\}_{n=1}^{\infty}$ Mann-Picard ve $\{\varphi_n\}_{n\in\mathrm{N}} \in [0,1]$ aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde $\{\tilde{\pi}_n\}_{n=1}^{\infty}$ aşağıdaki şekilde verilen bir iterasyon dizisi olsun.

$$\begin{cases} \pi_1 \in C \\ \tilde{\pi}_{n+1} = (1-\varphi_n)\tilde{\rho}_n + \varphi_n \tilde{S}\tilde{\rho}_n \\ \tilde{\rho}_n = \tilde{T}\tilde{\pi}_n, \quad \forall n \in \mathrm{N}, \end{cases} \tag{5.2}$$

1. $(1-\varphi_n) \leq \varphi_n$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n = \infty$.

Eğer $\lim_{n\to\infty} \tilde{\pi}_n = \tilde{s}^*$ olacak şekilde $\tilde{s}^* \in F(\tilde{S})$ ise bu takdirde

$$\left\| s^* - \tilde{s}^* \right\| \leq \frac{2\varepsilon}{1-\delta}$$

dir.

İspat (3.24) ve (5.2) iterasyon yöntemlerinden aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$\pi_{n+1}-\tilde{\pi}_{n+1}=\left(1-\varphi_n\right)\left(\rho_n-\breve{\rho}_n\right)+\varphi_n\left(S\rho_n-\breve{S}\breve{\rho}_n\right).$$

Bu nedenle

$$\begin{aligned}\left\|\pi_{n+1}-\tilde{\pi}_{n+1}\right\| &= \left\|\left(1-\varphi_n\right)\left(\rho_n-\breve{\rho}_n\right)+\varphi_n\left(S\rho_n-\breve{S}\breve{\rho}_n\right)\right\| \\ &\le \left(1-\varphi_n\right)\left\|\rho_n-\breve{\rho}_n\right\|+\varphi_n\left\|S\rho_n-\breve{S}\breve{\rho}_n\right\| \\ &\le \left(1-\varphi_n\right)\left\|\rho_n-\breve{\rho}_n\right\|+\varphi_n\left[\left\|S\rho_n-S\breve{\rho}_n\right\|+\left\|S\breve{\rho}_n-\breve{S}\breve{\rho}_n\right\|\right] \\ &\le \left(1-\varphi_n\right)\left\|\rho_n-\breve{\rho}_n\right\|+\varphi_n\delta\left\|\rho_n-\breve{\rho}_n\right\|+\varphi_n L\left\|\rho_n-S\rho_n\right\|+\varphi_n\varepsilon \\ &= \left(1-\varphi_n\left(1-\delta\right)\right)\left\|\rho_n-\breve{\rho}_n\right\|+\varphi_n L\left\|\rho_n-S\rho_n\right\|+\varphi_n\varepsilon.\end{aligned} \tag{5.3}$$

eşitsizliği elde edilir.

Tekrar (3.24), (5.2) ve (2.19) ifadeleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\left\|\rho_n-\breve{\rho}_n\right\| &= \left\|S\pi_n-\breve{S}\tilde{\pi}_n\right\| \\ &\le \left\|S\pi_n-S\tilde{\pi}_n\right\|+\left\|S\tilde{\pi}_n-\breve{S}\tilde{\pi}_n\right\| \\ &\le \delta\left\|\pi_n-\tilde{\pi}_n\right\|+L\left\|\pi_n-S\pi_n\right\|+\varepsilon.\end{aligned} \tag{5.4}$$

eşitsizliğine ulaşabiliriz.

(5.3) ifadesinde (5.4) ifadesi yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}\left\|\pi_{n+1}-\tilde{\pi}_{n+1}\right\| \le{}& \left(1-\varphi_n\left(1-\delta\right)\right)\delta\left\|\pi_n-\tilde{\pi}_n\right\|+\left(1-\varphi_n\left(1-\delta\right)\right)\varepsilon \\ &+\left(1-\varphi_n\left(1-\delta\right)\right)L\left\|\pi_n-S\pi_n\right\|+\varphi_n L\left\|\rho_n-S\rho_n\right\|+\varphi_n\varepsilon\end{aligned} \tag{5.5}$$

eşitsizliği elde edilir.

$1-\varphi_n\le\varphi_n$ olduğundan (5.5) eşitsizliğini

$$\begin{aligned}\left\|\pi_{n+1}-\tilde{\pi}_{n+1}\right\| &\le \left(1-\varphi_n\left(1-\delta\right)\right)\left\|\pi_n-\tilde{\pi}_n\right\|+\varphi_n[\left(1-\delta\right)\varepsilon \\ &\quad +\left(1-\delta\right)L\left\|\pi_n-S\pi_n\right\|+L\left\|\rho_n-S\rho_n\right\|+\varepsilon] \\ &\le \left(1-\varphi_n\left(1-\delta\right)\right)\left\|\pi_n-\tilde{\pi}_n\right\| \\ &\quad +\varphi_n\left(1-\delta\right)\frac{[L\left\|\pi_n-S\pi_n\right\|+L\left\|\rho_n-S\rho_n\right\|+2\varepsilon]}{\left(1-\delta\right)}\end{aligned}$$

şeklinde tekrar düzenliyelim.

Şimdi Lemma 5.1.4 şartlarını sağlatmak için

$$\begin{aligned}a_n &= \left\|\pi_n-\tilde{\pi}_n\right\|, \\ \mu_n &= \varphi_n\left(1-\delta\right), \\ \eta_n &= \frac{[L\left\|\pi_n-S\pi_n\right\|+L\left\|\rho_n-S\rho_n\right\|+2\varepsilon]}{\left(1-\delta\right)}\end{aligned}$$

ifadelerini tanımlıyalım.

$\left\{\pi_n\right\}_{n\in\mathrm{N}}$ ve $\left\{\rho_n\right\}_{n\in\mathrm{N}}$ dizilerinin S nin sabit noktasına yakınsadığı gösterildiğinden Teorem 3.1.42 den $\lim_{n\to\infty}\left\|\pi_n-S\pi_n\right\|=\lim_{n\to\infty}\left\|\rho_n-S\rho_n\right\|=0$ olduğunu kolayca görebiliriz. Bu durumda

$$0\le \limsup_{n\to\infty}\left\|\pi_n-\tilde{\pi}_n\right\| \le \limsup_{n\to\infty}\frac{[L\left\|\pi_n-S\pi_n\right\|+L\left\|\rho_n-S\rho_n\right\|+2\varepsilon]}{\left(1-\delta\right)}$$

eşitsizliği sağlanır. Lemma 5.1.4'e göre

$$\left\|s^*-\tilde{s}^*\right\|\le\frac{2\varepsilon}{1-\delta}$$

İfadesi elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.#

Teorem 5.1.6 T ve $\widetilde{T}$, Teorem 5.1.5 deki gibi iki dönüşüm olsun. $\left\{x_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\left\{u_n\right\}_{n=0}^{\infty}$, (3.25) ve

(i) Her $n\in\mathbb{N}$ için $1-\alpha_{n,0}\ge\alpha_{n,0}$,

(ii) $\forall i\in\mathbb{N}$ için $\left\|T^i z-\widetilde{T^i}z\right\|\le\left[\varepsilon\sum_{j=1}^{i}\delta^{j-1}\right]$

şartlarını sağlayan $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0,1)$ reel dizileriyle tanımlı iki iteratif dizi olsun. Eğer $p = Tp$ ve $q = \tilde{T}q$ ise bu durumda

$$\|p-q\| \leq \frac{4\varepsilon}{(1-\delta)^2}$$

dır.

İspat. Sırasıyla T ve $\tilde{T}$ ya karşılık gelen aşağıdaki Kirk-MP iterasyon yöntemlerini ele alalım:

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_{n,0} y_n + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{n,i} T^i y_n, \quad \sum_{i=0}^{k} \alpha_{n,i} = 1, \\ y_n = \sum_{j=1}^{s} \beta_{n,j} T^j x_n, \; n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{j=1}^{s} \beta_{n,j} = 1. \end{cases} \tag{5.6}$$

ve

$$\begin{cases} u_0 \in C, \\ u_{n+1} = \alpha_{n,0} v_n + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{n,i} \tilde{T}^i v_n, \quad \sum_{i=0}^{k} \alpha_{n,i} = 1 \\ v_n = \sum_{j=1}^{s} \beta_{n,j} \tilde{T}^j u_n, \; n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{j=1}^{s} \beta_{n,j} = 1. \end{cases} \tag{5.7}$$

(2.22), (5.6) ve (5.7)' u kullanarak aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1}-u_{n+1}\| &= \left\|\alpha_{n,0}y_n+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}T^i y_n-\alpha_{n,0}v_n-\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\widetilde{T}^i v_n\right\| \\
&\le \alpha_{n,0}\|y_n-v_n\|+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\left\|T^i y_n-\widetilde{T}^i v_n\right\| \\
&\le \alpha_{n,0}\|y_n-v_n\|+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\left\|T^i y_n-T^i v_n+T^i v_n-\widetilde{T}^i v_n\right\| \\
&\le \alpha_{n,0}\|y_n-v_n\|+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\left\|T^i y_n-T^i v_n\right\| \\
&+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\left\|T^i v_n-\widetilde{T}^i v_n\right\| \\
&\le \alpha_{n,0}\|y_n-v_n\|+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\left\|T^i y_n-T^i v_n\right\|+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\left[\sum_{j=1}^{i}\varepsilon\delta^{j-1}\right] \\
&\le \alpha_{n,0}\|y_n-v_n\|+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\left[\sum_{j=1}^{i}\varepsilon\delta^{j-1}\right] \\
&+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\left[\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}\delta^{i-j}\varphi^j\left(\|y_n-Ty_n\|\right)+\delta^i\|y_n-v_n\|\right] \\
&\le \alpha_{n,0}\|y_n-v_n\|+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\left[\sum_{j=1}^{i}\varepsilon\delta^{j-1}\right] \\
&+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\left[\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}\delta^{i-j}\varphi^j\left(\|y_n-Ty_n\|\right)\right] \\
&+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\delta^i\|y_n-v_n\| \\
&\le \left(\alpha_{n,0}+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\delta^i\right)\|y_n-v_n\|+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\left[\sum_{j=1}^{i}\varepsilon\delta^{j-1}\right] \\
&+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\left[\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}\delta^{i-j}\varphi^j\left(\|y_n-Ty_n\|\right)\right].
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

Aynı şekilde $\|y_n-v_n\|$ içinde araştırırsak

$$
\begin{aligned}
\|y_n - v_n\| &= \left\| \sum_{m=1}^{s} \beta_{n,m} T^m x_n - \sum_{m=1}^{s} \beta_{n,m} \widetilde{T}^m u_n \right\| \\
&\le \sum_{m=1}^{s} \beta_{n,m} \left\| T^m x_n - \widetilde{T}^m u_n \right\| \\
&\le \sum_{m=1}^{s} \beta_{n,m} \left\| T^m x_n - T^m u_n + T^m u_n - \widetilde{\mathrm{T}}^m u_n \right\| \\
&\le \sum_{m=1}^{s} \beta_{n,m} \left\| T^m x_n - T^m u_n \right\| \\
&+ \sum_{m=1}^{s} \beta_{n,m} \left\| T^m u_n - \widetilde{\mathrm{T}}^m u_n \right\| \\
&\le \sum_{m=1}^{s} \beta_{n,m} \left\| T^m x_n - T^m u_n \right\| \\
&+ \sum_{m=1}^{s} \beta_{n,m} \left[\sum_{j=1}^{i} \varepsilon \delta^{j-1} \right] \\
&\le \sum_{m=1}^{s} \beta_{n,m} \left[\sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} \delta^{m-j} \varphi^j \left(\|x_n - T x_n\| \right) + \delta^m \|x_n - u_n\| \right] \\
&+ \sum_{m=1}^{s} \beta_{n,m} \left[\sum_{j=1}^{i} \varepsilon \delta^{j-1} \right] \\
&\le \sum_{m=1}^{s} \beta_{n,m} \left[\sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} \delta^{m-j} \varphi^j \left(\|x_n - T x_n\| \right) \right] \\
&+ \sum_{m=1}^{s} \beta_{n,m} \delta^m \|x_n - u_n\| + \sum_{m=1}^{s} \beta_{n,m} \left[\sum_{j=1}^{i} \varepsilon \delta^{j-1} \right]
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

eşitsizliği elde edilir.

(5.8) ve (5.9)' in birleştirilmesiyle

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u_{n+1}\| \le \left(\alpha_{n,0} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{n,i} \delta^i \right) & \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{m=1}^{s} \beta_{n,m} \left[\sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} \delta^{m-j} \varphi^j \left(\|x_n - T x_n\| \right) \right] \\ \displaystyle + \sum_{m=1}^{s} \beta_{n,m} \delta^m \|x_n - u_n\| + \sum_{m=1}^{s} \beta_{n,m} \left[\sum_{j=1}^{m} \varepsilon \delta^{j-1} \right] \end{array} \right\} \\
& + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{n,i} \left[\sum_{j=1}^{i} \varepsilon \delta^{j-1} \right] + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{n,i} \left[\sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} \delta^{i-j} \varphi^j \left(\|y_n - T y_n\| \right) \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\alpha_{n,0}+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\delta^{i}\right)\sum_{m=1}^{s}\beta_{n,m}\delta^{m}\left\|x_n-u_n\right\| \\
&+\left(\alpha_{n,0}+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\delta^{i}\right)\sum_{m=1}^{s}\beta_{n,m}\left[\sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}\delta^{m-j}\varphi^{j}\left(\left\|x_n-Tx_n\right\|\right)\right] \\
&+\left(\alpha_{n,0}+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\delta^{i}\right)\sum_{m=1}^{s}\beta_{n,m}\left[\sum_{j=1}^{m}\varepsilon\delta^{j-1}\right] \\
&+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\left[\sum_{j=1}^{i}\varepsilon\delta^{j-1}\right]+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\left[\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}\delta^{i-j}\varphi^{j}\left(\left\|y_n-Ty_n\right\|\right)\right] \\
&\leq \left(\alpha_{n,0}+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\delta^{i}\right)\sum_{m=1}^{s}\beta_{n,m}\delta^{m}\left\|x_n-u_n\right\| \\
&+\left(\alpha_{n,0}+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\delta^{i}\right)\sum_{m=1}^{s}\beta_{n,m}\left[\sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}\delta^{m-j}\varphi^{j}\left(\left\|x_n-Tx_n\right\|\right)\right] \\
&+\left\{\left(\alpha_{n,0}+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\delta^{i}\right)\sum_{m=1}^{s}\beta_{n,m}\left[\sum_{j=1}^{m}\delta^{j-1}\right]+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\left[\sum_{j=1}^{i}\delta^{j-1}\right]\right\}\varepsilon \\
&+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\left[\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}\delta^{i-j}\varphi^{j}\left(\left\|y_n-Ty_n\right\|\right)\right].
\end{aligned}
$$

olduğu elde edilir.

$\left\{\alpha_{n,i}\right\}_{n=0,i=0,\ldots,k}^{\infty},\left\{\beta_{n,m}\right\}_{n=0,m=1,\ldots,s}^{\infty}\subset[0,1)$ ve $\delta\in[0,1)$ olduğundan ve ayrıca (i) hipotezinden

$$1-\alpha_{n,0}\geq\alpha_{n,0} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-u_{n+1}\| \le & \left(\alpha_{n,0}+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\delta^{i}\right)\sum_{m=1}^{s}\beta_{n,m}\delta^{m}\|x_n-u_n\| \\ & +\left(\alpha_{n,0}+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\delta^{i}\right)\sum_{m=1}^{s}\beta_{n,m}\left[\sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}\delta^{m-j}\varphi^{j}\left(\|x_n-Tx_n\|\right)\right] \\ & +\left\{\left(\alpha_{n,0}+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\delta^{i}\right)\sum_{m=1}^{s}\beta_{n,m}\left[\sum_{j=1}^{m}\delta^{j-1}\right]+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\left[\sum_{j=1}^{i}\delta^{j-1}\right]\right\}\varepsilon \\ & +\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\left[\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}\delta^{i-j}\varphi^{j}\left(\|y_n-Ty_n\|\right)\right] \\ & \le \left(1-(1-\delta)\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\right)\sum_{m=1}^{s}\beta_{n,m}\delta^{m}\|x_n-u_n\| \\ & +2(1-\delta)\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\frac{\sum_{m=1}^{s}\beta_{n,m}\left[\sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}\delta^{m-j}\varphi^{j}\left(\|x_n-Tx_n\|\right)\right]}{1-\delta} \\ & +2\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}(1-\delta)\left\{\sum_{m=1}^{s}\beta_{n,m}\left(1-\delta^{m}\right)+\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\left(1-\delta^{i}\right)\right\}\frac{\varepsilon}{(1-\delta)^{2}} \\ & +2(1-\delta)\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\left[\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}\delta^{i-j}\varphi^{j}\left(\|y_n-Ty_n\|\right)\right]\right)}{1-\delta}\end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır veya buna denk olarak

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-u_{n+1}\| \le & \left(1-(1-\delta)\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\right)\|x_n-u_n\| \\ & +(1-\delta)\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\left\{\frac{\begin{array}{l}2\sum_{m=1}^{s}\beta_{n,m}\left[\sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}\delta^{m-j}\varphi^{j}\left(\|x_n-Tx_n\|\right)\right] \\ +\frac{4\varepsilon}{(1-\delta)}+2\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\left[\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}\delta^{i-j}\varphi^{j}\left(\|y_n-Ty_n\|\right)\right]\end{array}}{1-\delta}\right\}\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

a_n , μ_n ve η_n aşağıdaki şekilde tanımlasın

$a_n=\|x_n-u_n\|$,

$$\mu_n = (1-\delta)\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i} \in (0,1),$$

$$\eta_n := (1-\delta)\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\left\{\frac{\begin{array}{l}2\sum_{m=1}^{s}\beta_{n,m}\left[\sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}\delta^{m-j}\varphi^{j}\left(\|x_n - Tx_n\|\right)\right] \\ +\frac{4\varepsilon}{(1-\delta)} + 2\sum_{i=1}^{k}\alpha_{n,i}\left[\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}\delta^{i-j}\varphi^{j}\left(\|y_n - Ty_n\|\right)\right]\end{array}}{1-\delta}\right\}.$$

Teorem 3.1.44 den $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\| = 0$ gösterilmişti. T, (2.22) şartını sağladığından ve $Tp = p \in F_T$ olduğundan Teorem 5.1.5' in ispatındakine benzer şekilde

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - Tx_n\| = \lim_{n\to\infty}\|y_n - Ty_n\| = 0$$

olur ve φ sürekli olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\varphi\left(\|x_n - Tx_n\|\right) = \lim_{n\to\infty}\varphi\left(\|y_n - Ty_n\|\right) = \lim_{n\to\infty}\varphi^{j}\left(\|x_n - Tx_n\|\right) = \lim_{n\to\infty}\varphi^{j}\left(\|y_n - Ty_n\|\right) = 0$$

olduğu elde edilir. Böylece Lemma 5.1.4' ün uygulanmasıyla

$$\|p - q\| \le \frac{4\varepsilon}{(1-\delta)^2}$$

olarak elde edilir. Bu elde edilen sonuç istenilen sonuçtur.#

BÖLÜM 6

SABİT NOKTA İTERASYON YÖNTEMLERİNİN YAKINSAKLIK HIZLARININ KARŞILAŞTIRMASI

Tezin bu bölüme kadar yapılan çalışmalarında bir sabit nokta iterasyon yönteminin belirli operatör sınıflarının sabit noktasına yakınsaklıkları, bu algoritmaların kararlılığı ve veri bağlılığı sonuçları gösterildi. Bu çalışmalar yapılırken genellikle benzer yöntemler izlenmiştir. Bu nedenle hangi iterasyon yönteminin daha kullanışlı olduğuna karar verme aşamasına geçilmedi. Bu bölümde tanımlanan sabit nokta iterasyon yöntemleri ile literatürde mevcut olan diğer iterasyon yöntemleri karşılaştırılacaktır. Ayrıca yeni tanımlanan sabit nokta iterasyon yöntemlerinin neden tanımlandığı ve neden diğer iterasyon yöntemlerininden daha kullanışlı olduğu gösterilecektir.

Bir iterasyon yönteminin kullanışlı ve etkili olması için iki önemli ölçüt gözönüne alınır. Bunlardan birincisi sadelik ikincisi ise hızıdır. Bu nedenle bir sabit nokta iterasyon yöntemi için hızlı olmak büyük önem arz etmektedir. Sabit nokta teoride, bahsedilen bu durum “iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıklarının hızı” başlığı altında literatürde çalışılmaktadır.

Sabit nokta teoride yakınsaklık hızı çalışmalarını yapan birçok araştırmacı bulunmaktadır. Bunların başında Berinde gelmektedir. Bu çalışmada keyfi Banach uzaylarında Zamfirescu operatör sınıflarını kullanarak Picard iterasyon yönteminin Mann iterasyon yönteminden daha hızlı olduğunu [177] çalışmasında gösterilmiştir. Daha sonra Babu ve Prasad [178] çalışmalarında Mann iterasyon yönteminin Ishikawa iterasyon yönteminden daha hızlı olduğunu göstermişlerdir. Ancak hemen ardından Qing ve Rhoades aksi bir örnek ile bunun yanlış bir iddia olduğunu [179] çalışmalarında

göstermişlerdir. Bundan başka Berinde [180] tarafından tanımlanan iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık hızı karşılaştırmasına olanak sağlayan tanımı kullanarak diğer iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık hızı çalışmalarını birçok araştırmacı devam ettirmişleridir. Bunlardan başlıcaları ([181]-[186]) şeklinde listelenbilir.

Yukarıdaki çalışmalar göz önünde bulundurularak tanımladığımız (3.8) iterasyon yöntemi ve (3.24) iterasyon yönteminin sırasıyla (3.12) iterasyon yöntemi ve (3.23) iterasyon yöntemlerinden daha hızlı olduğu birer örnek yardımıyla gösterilmiştir. Ayrıca bu örneklerin nümerik sonuçları birer tablo halinde verildi. Daha sonra bu tabloları desteklemek için nümerik sonuçların grafikleri çizildi. Son olarak itarasyon yöntemlerinin ardışık iki adımının arasındaki farkın sıfıra yakınsadığı türev garfikleri de verildi.

Örnek 6.1.1 $T:[0,1]\to[0,1]$, $Tx=\frac{x}{2}$ bir dönüşümünü ele alalım. $n=0,1,2,...,15$ için $v_n=\zeta_n=\xi_n=\varsigma_n=0$ ve $n\geq 16$ için $v_n=\zeta_n=\frac{4}{\sqrt{n}},\xi_n=\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{n}}ve\,\varsigma_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{n}}$ olsun. T, 0 sabit noktasına sahip bir zayıf contraction dönüşümünün (2.19) şartları sağladığı aşikardır. Ayrıca $n\geq 16$ için

$$v_n=\varsigma_n=\frac{4}{\sqrt{n}},\xi_n=\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{n}}ve\,\zeta_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{n}}\in[0,1]ve\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=\infty$$

olduğundan yeni iterasyon yöntemi Ishikawa iterasyon yönteminden daha hızlıdır. Bunu göstermek için $u_0=w_0\neq 0$ sırasıyla yeni ve Ishikawa iterasyon yöntemlerinin başlangıç değerleri olduğunu farz edelim.

İlk olarak yeni iterasyon yöntemini ele alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
u_{n+1}&=(1-\varsigma_n)\mathrm{u_n}+\xi_n\mathrm{Tu_n}+(\varsigma_n-\xi_n)\,\mathrm{T}\left((1-\zeta_n)\,\mathrm{u_n}+\zeta_n\mathrm{Tu_n}\right)\\
&=\left(1-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right)\mathrm{u_n}+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{Tu_n}\\
&\quad+\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right)T\left(\left(1-\frac{4}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{u_n}+\frac{4}{\sqrt{n}}\mathrm{Tu_n}\right)\\
&=\left(1-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right)\mathrm{u_n}+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\frac{1}{2}\mathrm{u_n}\\
&\quad+\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right)\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{4}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{u_n}+\frac{4}{\sqrt{n}}\frac{1}{2}\mathrm{u_n}\right)
\end{aligned}\qquad(6.1)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{u_n} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{u_n} + \frac{2}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{u_n}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{4}{n}\right)\mathrm{u_n}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{4}{n}\right)\mathrm{u_n}$$

$$= \prod_{i=16}^{n}\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{i}} - \frac{4}{i}\right)\mathrm{u_0}$$

ifadesi elde edilir.

İkinci olarak Ishikawa iterasyon yöntemini alalım ve yukarıdaki işlemleri onun için de gerçekleyelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= (1\text{-}v_n)\mathrm{w_n} + v_n\mathrm{T}\left((1\text{-}\zeta_n)\,\mathrm{w_n} + \zeta_n\mathrm{T}\mathrm{w_n}\right) \\ &= \left(1 - \frac{4}{\sqrt{n}}\right)w_{\mathrm{n}} + \frac{4}{\sqrt{n}}\mathrm{T}\left(\left(1 - \frac{4}{\sqrt{n}}\right)w_{\mathrm{n}} + \frac{4}{\sqrt{n}}\mathrm{T}w_{\mathrm{n}}\right) \\ &= \left(1 - \frac{4}{\sqrt{n}}\right)w_{\mathrm{n}} + \frac{4}{\sqrt{n}}\frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{4}{\sqrt{n}}\right)w_{\mathrm{n}} + \frac{4}{\sqrt{n}}\frac{1}{2}w_{\mathrm{n}}\right) \\ &= \left(1 - \frac{4}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right)w_{\mathrm{n}} \end{aligned} \qquad (6.2)$$

$$= \left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{4}{n}\right)w_{\mathrm{n}}$$

$$= \prod_{i=16}^{n}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{i}} - \frac{4}{i}\right)w_0$$

ifadesi elde edilir. Şimdi yukarıdaki (6.2) ve (6.1) iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık hızı tanımı kullanılarak hangisinin sabit noktaya daha hızlı yakınsadığı aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$\left|\frac{u_{n+1} - 0}{w_{n+1} - 0}\right| = \left|\frac{\prod_{i=16}^{n}\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{i}} - \frac{4}{i}\right)\mathrm{u_0}}{\prod_{i=16}^{n}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{i}} - \frac{4}{i}\right)w_0}\right|$$

$$= \left| \prod_{i=16}^{n} \frac{\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{i}} - \frac{4}{i}\right)}{\left(1 - \frac{2}{\sqrt{i}} - \frac{4}{i}\right)} \right|$$

$$= \left| \prod_{i=16}^{n} \left[1 - \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{i}}}{1 - \frac{2}{\sqrt{i}} - \frac{4}{i}} \right] \right|$$

$$= \left| \prod_{i=16}^{n} \left[1 - \frac{i - 4\sqrt{i}}{4i - 8\sqrt{i} - 16} \right] \right|.$$

Ayrıca

$$0 \leq \prod_{i=16}^{n} \left[1 - \frac{i - 4\sqrt{i}}{4i - 8\sqrt{i} - 16} \right]$$

olduğu açıktır ve

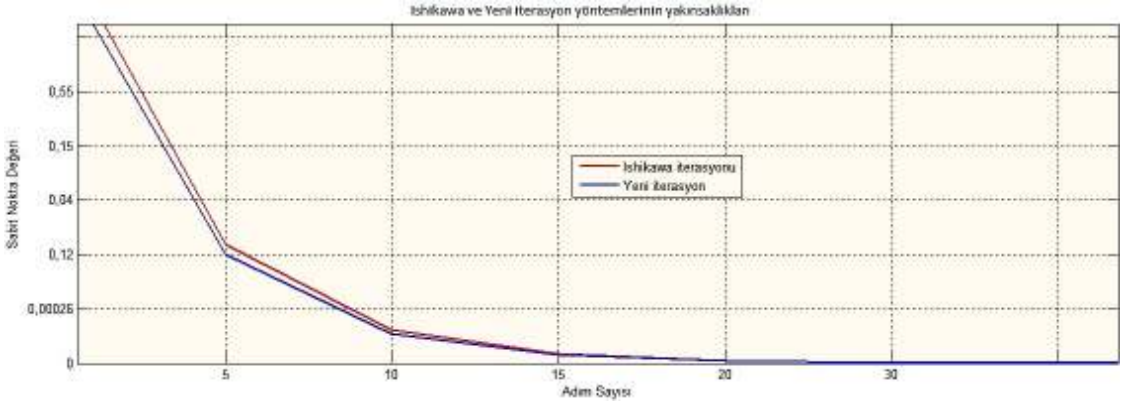
$$\lim_{n \to \infty} \prod_{i=16}^{n} \left[1 - \frac{i - 4\sqrt{i}}{4i - 8\sqrt{i} - 16} \right] = 0$$

olur. Bu yüzden ispat tamamlanır. Yani yeni sabit nokta iterasyon yöntemi Ishikawa sabit nokta iterasyon yönteminden sabit noktaya daha hızlı yakınsar.

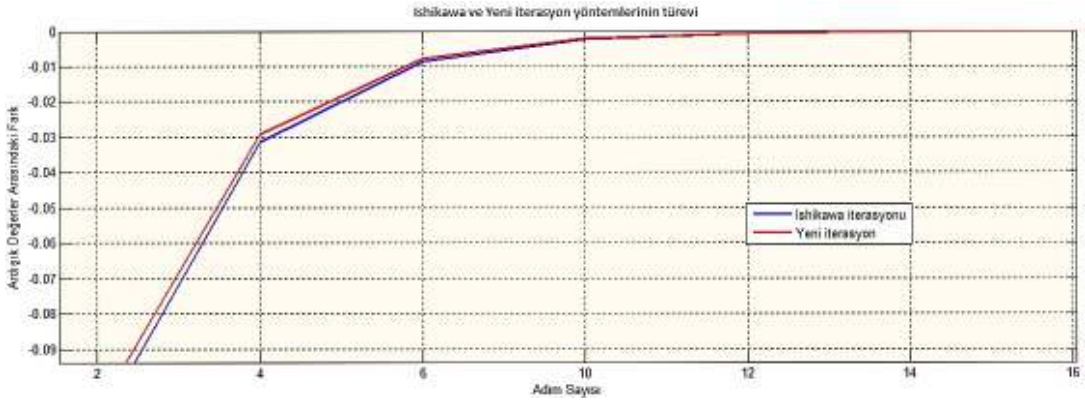
Şimdi Örnek 6.1.1'deki iddiamızı güçlendirici ve destekleyici bu iterasyon yöntemlerinin sabit noktaya yakınsaklığını gösteren nümerik tablo ve grafikleri verelim.

Çizelge 6.1 Ishikawa ve Yeni iterasyon yönteminin sabit noktaya yakınsama verileri

Adım Sayısı	Yeni iterasyon	Ishikawa iterasyonu
1.	1,990000000000000	1,990000000000000
2.	0,541618812060050	0,556472918237748
3.	0,147412531445900	0,155609099865344
4.	0,040121306615323	0,043513693420310
5.	0,010919826345371	0,012167935658745
6.	0,002972051946272	0,003402576213543
7.	0,000808904142975	0,000951478148280
8.	0,000220159648738	0,000266066242117
9.	0,000059920908248	0,000074401335777
10.	0,000016308689016	0,000020805190171
11.	0,000004438740086	0,000005817851703
12.	0,000001208093031	0,000001626872822
13.	0,000000328806991	0,000000454929983
14.	0,000000089491483	0,000000127214179
15.	0,000000024356920	0,000000035573490
16.	0,000000006629229	0,000000009947580
17.	0,000000001804279	0,000000002781688
18.	0,000000000491071	0,000000000777856
19.	0,000000000133655	0,000000000217516
20.	0,000000000036377	0,000000000060825
21.	0,000000000009901	0,000000000017009
22.	0,000000000002695	0,000000000004756
23.	0,000000000000733	0,000000000001330
24.	0,000000000000200	0,000000000000372
25.	0,000000000000054	0,000000000000104
26.	0,000000000000015	0,000000000000029
27.	0,000000000000004	0,000000000000008
28.	0,000000000000001	0,000000000000002
29.	0,000000000000000	0,000000000000001



Şekil 6.1 Ishikawa ve Yeni iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıkları



Şekil 6.2 Ishikawa ve Yeni iterasyon yöntemlerinin türevleri

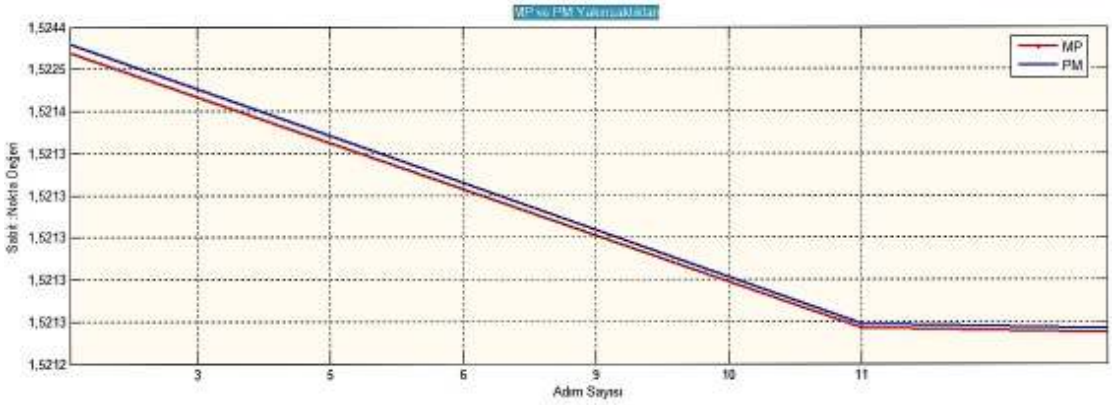
Örnek 6.1.2 [186] $S:[0,2]\to[0,2]$, $S=(x+2)^{\frac{1}{3}}$ ve $n\geq 15$ için $\varphi_n=\frac{3}{4}$ diğer durumlarda $\varphi_n=0$ olacak şekilde bir dönüşüm olsun. Bu dönüşümün $1,521379706804570\in F(S)$ sabit noktasına sahip bir zayıf contraction dönüşüm olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca bu dönüşümün Teorem 3.1.42 'in tüm şartlarını sağladığı açıktır. Eğer $\{\pi_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ ve $\{k_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ aynı başlangıç koşullarına sabip sırasıyla MP (3.24) ve PM (3.23) sabit nokta iterasyon yöntemleri iseler bu durumda $\{\pi_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ sabit nokta iterasyon yöntemi $\{k_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ sabit nokta iterasyon yönteminden $1,521379706804570\in F(S)$ sabit noktasına daha hızlı yakınsar.

İddiamızı kanıtlamak için örnekte verilen dönüşümün iterasyonlar yardımı ile elde edilen nümerik değerlerinin sabit noktaya yaklaşımları bir tablo ve iki grafik ile gösterilmiştir.

Çizelge 6.2 MP ve PM sabit nokta iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık verileri

Adım Sayısı	MP	PM
1.	$1,990000000000000$	$1,990000000000000$
2.	$1,544499673873150$	$1,544874898372010$
3.	$1,522569021765430$	$1,522589308040770$
4.	$1,521441018705160$	$1,521442067123600$
5.	$1,521382867925110$	$1,521382921986440$
6.	$1,521379869786640$	$1,521379872573970$
7.	$1,521379715207650$	$1,521379715351360$
8.	$1,521379707237820$	$1,521379707245230$
9.	$1,521379706826910$	$1,521379706827290$
10.	$1,521379706805720$	$1,521379706805740$
11.	$1,521379706804630$	$1,521379706804630$
12.	$1,521379706804570$	$1,521379706804570$

Çizelge 6.2 den MP (3.24) iterasyon yönteminin PM (3.23) iterasyon yönteminden daha hızlı $1,521379706804570 \in F(S)$ sabit noktasına yakısadığı okunabilir. Burada iki iterasyon yöntemi aynı adımda yakınsak gibi görünse de adımlar arasındaki farktan açık bir şekilde MP iterasyon yönteminin PM iterasyon yöneteminden daha hızlı sabit noktaya yaklaşımı kolayca görülür.



Şekil 6. 3 MP ve PM iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıkları

Şekil 6.3 te MP (3.24) iterasyon yöntemi kırmızı eğri ve PM (3.23) iterasyon yöntemi mavi eğri ile ifade edilmiştir. Görüldüğü gibi kırmızı eğri mavi eğriye göre sabit noktaya daima daha yakın hareket etmektedir.



Şekil 6. 4 MP ve PM iterasyon yöntemlerinin türevleri

Şekil 6.4 te yakınsaklık hızının daha net bir şekilde görülmesi için adımlar arasındaki değişim oranını ifade eden türev grafiği verilmiştir. Bu grafik sayesinde hangi iterasyon yönteminin değişimi sıfıra daha hızlı yaklaştığı ölçülmektedir. Bu işlem sayesinde değişimin sıfır olduğu yeri belirleriz ve sabit noktayı elde ederiz. Çünkü sabit nokta iterasyon yöntemleri yardımı ile dönüşümün sabit noktası belirli bir adımda elde edildikten sonra geriye kalan diğer adımlar sabit nokta ile aynı değerde olur. Bu yüzden sabit noktaya kadar olan adımlarda değişimin olduğu fakat sabit noktayı veren adımdan sonraki adımlarda ise değişimin sıfır olduğu kolayca Çizelge 6.2 den de görülür. Bu nedenle türev grafikleri çalışmalarımızda önemli bir yere sahiptir.

BÖLÜM 7

UYGULAMA

Sabit nokta teori, lineer olmayan denklemlerin çalışmasında çok önemli ve güçlü bir araç olarak ortaya çıkmıştır. Matematik biliminin hemen hemen her branşında çok sayıda uygulamaya sahiptir. Örneğin, adi ve kismi diferansiyel denklemlerin, integral denkelmelerin, lineer denklem sistemlerinin, dinamik sistemlerin kapalı yörüngesinde ve ekonomik dengede çözümlerin varlığını kanıtlamaktadır. Özellikle sabit nokta teknikleri; Biyoloji, Kimya, Ekonomi, Mühendislik ve Fizik gibi farklı alanlara uygulanmıştır. Bu teknikler sayesinde Kontrol Teori'de, Oyunlar Teorisin'de, Katagori Teori'de, Fonksiyonel denklemlerinde, İntegral denklemlerinde, Matematiksel Fizik'te, Matematiksel Kimya'da, Matematiksel Biyoloji'de, Matematiksel Ekonomi'de, W^* Cebir'inde, Fonksiyonel Analiz'de ve diğer birçok alanda çok verimli uygulamalar elde edilmiştir. Sabit nokta kavramı Analiz'de anahtar bir rol oynar. Ayrıca sabit nokta teoremleri random diferansiyel denklemlerde, Newton-Rapshon metoduna benzer nümerik metodlarda, Picard'ın varlık Teoremininde ve bağlantılı diğer alanlarda varlık teoride çoğunlukla kullanılmıştır. Sıralama üzerine kurulan sabit nokta teoremleri ise Cebir'de, Otomata Teori'de, Matematik Dilbilimde, Lineer Fonksiyonel Analiz'de, Yaklaşım Teori'de ve Kritik Nokta Teori'de önemli bir yer edinmiştir.

İterasyon yönteminin Liouville [58] tarafından tanıtıldığı ve Cauchy tarafından kullanıldığı bilinmektedir. Bu yöntem ilk olarak Picard [59] tarafından, adi diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemlerinin çözümünün varlığı ve tekliğine ilişkin ispatında sistematik olarak geliştirildi.

Bu nedenle tanımlanan yeni iterasyon (3.8) yönteminin gecikmeli differansiyel denkleminin çözümünün varlığı ve tekliğine ilişkin kullanışlı bir araç olduğu aşağıdaki uygulamada gösterilmiştir.

Uygulama 7.1.1 Bu uygulamada $C[a,b]$ tüm sürekli fonksiyonların uzayı $\|x-y\|_\infty = \max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|$ Chebyshev normu ile donatılmıştır. $C[a,b]$ uzayı bu norma göre Banach uzayıdır. Daha fazla detay için [187-188] referanslarına bakınız.

Şimdi

$$x'(t) = g\left(t, x(t), x(t-\tau)\right),\ t\in[t_0,b] \tag{7.1}$$

ve başlangıç koşulu

$$x(t) = \varphi(t),\ t\in[t_0-\tau,t_0] \tag{7.2}$$

olacak şekilde bir gecikmeli diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

Aşağıdaki şartların sağlandığını farz edelim.

C1) $t_0, b\in\mathbb{R}, \tau\geq 0$,

C2) $g\in C\left([t_0,b]\times\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$,

C3) $\varphi\in C\left([t_0-\tau,t_0],\mathbb{R}\right)$,

C4) Her $\gamma_i,\lambda_i\in\mathbb{R}(i=1,2)$ ve $K_g>0$ olacak şekilde $t\in[t_0,b]$ için

$$\left|g(t,\gamma_1,\gamma_2)-g(t,\lambda_1,\lambda_2)\right|\leq K_g\left[|\gamma_1-\lambda_1|+|\gamma_2-\lambda_2|\right]+L|\gamma_1-T\gamma_1|$$

eşitsizliği mevcuttur.

C5) $2K_g(b-t_0)<1$.

(7.1)- (7.2) denkleminin çözümüne göre $x\in C\left([t_0-\tau,t_0],\mathbb{R}\right)\cap C^1\left([t_0,b],\mathbb{R}\right)$ olur.

Yukarıdaki problem aşağıdaki gibi tekrar düzenlenebilir.

C6) $x(t)=\begin{cases}\varphi(t), & t\in[t_0-\tau,t_0]\\ \varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t} g\left(s,x(s),x(s-\tau)\right)ds, & t\in[t_0,b]\end{cases}$.

Ayrıca $T:C\left([t_0-\tau,b],\mathbb{R}\right)\to C\left([t_0-\tau,b],\mathbb{R}\right)$ dönüşümü

$$T(x)(t)=\begin{cases}\varphi(t), & t\in[t_0-\tau,t_0]\\ \varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t} g\left(s,x(s),x(s-\tau)\right)ds, & t\in[t_0,b]\end{cases}.$$

Berinde anlamında zayıf contraction şartı kullanılarak yukarıdaki problemin çözümü iterasyon yardımıyla aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 7.1.2 C_1)-C_5) şartlarının gerçeklendiğini kabul edelim. Bu durumda (7.1)- (7.2) problemi $C\left(\left[t_0-\tau,t_0\right],\mathbb{R}\right)\cap C^1\left(\left[t_0,b\right],\mathbb{R}\right)$'de bir tek çözüme sahiptir.

İspat $Tp=p$ olacak şekilde T'nin sabit noktasını p ile gösterilir. T dönüşümü için (3.8) ile gösterilen sabit nokta iterasyon yöntemini göz önüne alalım.

$t\in\left[t_0-\tau,t_0\right]$ için $\lim_{n\to\infty}x_n=p$ olduğu açıkça görülmektedir. Bu nedenle $t\in\left[t_0,b\right]$ olmak üzere.

$$
\begin{aligned}
\left\|x_{n+1}-p\right\|_{\infty} &= \left\|(1-\varsigma_n)\mathrm{x}_{\mathrm{n}}+\xi_{\mathrm{n}}\mathrm{Tx}_{\mathrm{n}}+(\varsigma_n-\xi_{\mathrm{n}})\,\mathrm{Ty}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty} \\
&\le (1-\varsigma_n)\left\|\mathrm{x}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty}+(\varsigma_n-\xi_{\mathrm{n}})\left\|\mathrm{Ty}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty}+\xi_{\mathrm{n}}\left\|\mathrm{Tx}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty} \\
&\le (1-\varsigma_n)\left\|\mathrm{x}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty}+(\varsigma_n-\xi_{\mathrm{n}})\max_{t\in[t_0-\tau,b]}\left|\mathrm{Ty}_{\mathrm{n}}(t)-Tp(t)\right| \\
&\quad+\xi_{\mathrm{n}}\max_{t\in[t_0-\tau,b]}\left|\mathrm{Tx}_{\mathrm{n}}(t)-Tp(t)\right| \\
&\le (1-\varsigma_n)\left\|\mathrm{x}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty}+(\varsigma_n-\xi_{\mathrm{n}})\max_{t\in[t_0-\tau,b]}\left|\begin{matrix}\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t}g\left(s,\mathrm{y}_{\mathrm{n}}(s),\mathrm{y}_{\mathrm{n}}(s-\tau)\right)ds\\ -\varphi(t_0)-\int_{t_0}^{t}g\left(s,p(s),p(s-\tau)\right)ds\end{matrix}\right| \\
&\quad+\xi_{\mathrm{n}}\max_{t\in[t_0-\tau,b]}\left|\begin{matrix}\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t}g\left(s,\mathrm{x}_{\mathrm{n}}(s),\mathrm{x}_{\mathrm{n}}(s-\tau)\right)ds\\ -\varphi(t_0)-\int_{t_0}^{t}g\left(s,p(s),p(s-\tau)\right)ds\end{matrix}\right| \\
&\le (1-\varsigma_n)\left\|\mathrm{x}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty}+(\varsigma_n-\xi_{\mathrm{n}})\max_{t\in[t_0-\tau,b]}\left|\begin{matrix}\int_{t_0}^{t}g\left(s,\mathrm{y}_{\mathrm{n}}(s),\mathrm{y}_{\mathrm{n}}(s-\tau)\right)ds\\ -\int_{t_0}^{t}g\left(s,p(s),p(s-\tau)\right)ds\end{matrix}\right| \\
&\quad+\xi_{\mathrm{n}}\max_{t\in[t_0-\tau,b]}\left|\begin{matrix}\int_{t_0}^{t}g\left(s,\mathrm{x}_{\mathrm{n}}(s),\mathrm{x}_{\mathrm{n}}(s-\tau)\right)ds\\ -\int_{t_0}^{t}g\left(s,p(s),p(s-\tau)\right)ds\end{matrix}\right| \\
&\le (1-\varsigma_n)\left\|\mathrm{x}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty}+(\varsigma_n-\xi_{\mathrm{n}})\max_{t\in[t_0-\tau,b]}\left|\int_{t_0}^{t}\left|g\left(s,\mathrm{y}_{\mathrm{n}}(s),\mathrm{y}_{\mathrm{n}}(s-\tau)\right)-g\left(s,p(s),p(s-\tau)\right)\right|ds\right| \\
&\quad+\xi_{\mathrm{n}}\max_{t\in[t_0-\tau,b]}\int_{t_0}^{t}\left|g\left(s,\mathrm{x}_{\mathrm{n}}(s),\mathrm{x}_{\mathrm{n}}(s-\tau)\right)-g\left(s,p(s),p(s-\tau)\right)\right|ds \\
&\le (1-\varsigma_n)\left\|\mathrm{x}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty}+(\varsigma_n-\xi_{\mathrm{n}})\max_{t\in[t_0-\tau,b]}\int_{t_0}^{t}\left[\begin{matrix}K_g\left[\left|\mathrm{y}_{\mathrm{n}}(s)-p(s)\right|+\left|\mathrm{y}_{\mathrm{n}}(s-\tau)-p(s-\tau)\right|\right]\\ +L\left|\mathrm{y}_{\mathrm{n}}(s)-T\mathrm{y}_{\mathrm{n}}(s)\right|\end{matrix}\right]ds \\
&\quad+\xi_{\mathrm{n}}\max_{t\in[t_0-\tau,b]}\int_{t_0}^{t}\left[\begin{matrix}K_g\left[\left|x_{\mathrm{n}}(s)-p(s)\right|+\left|x_{\mathrm{n}}(s-\tau)-p(s-\tau)\right|\right]\\ +L\left|x_{\mathrm{n}}(s)-Tx_{\mathrm{n}}(s)\right|\end{matrix}\right]ds
\end{aligned}
$$

şekilinde olur. Bu yüzden

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathrm{x}_{\mathrm{n}+1}-p\right\|_{\infty} &\le (1-\varsigma_n)\left\|\mathrm{x}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty} \\
&\quad +(\varsigma_n-\xi_{\mathrm{n}})\mathrm{K}_g\left(b-t_0\right)\max_{t\in[t_0-\tau,b]}\left\{\left|\mathrm{y}_{\mathrm{n}}(t)-p(t)\right|+\left|\mathrm{y}_{\mathrm{n}}(t)-p(t)\right|\right\} \\
&\quad +(\varsigma_n-\xi_{\mathrm{n}})\mathrm{L}\left(b-t_0\right)\max_{t\in[t_0-\tau,b]}\left|\mathrm{y}_{\mathrm{n}}(t)-T\mathrm{y}_{\mathrm{n}}(t)\right| \\
&\quad +\xi_{\mathrm{n}}\mathrm{K}_g\left(b-t_0\right)\max_{t\in[t_0-\tau,b]}\left\{\left|x_{\mathrm{n}}(t)-p(t)\right|+\left|x_{\mathrm{n}}(t)-p(t)\right|\right\} \\
&\quad +\xi_{\mathrm{n}}\mathrm{L}\left(b-t_0\right)\max_{t\in[t_0-\tau,b]}\left|x_{\mathrm{n}}(t)-Tx_{\mathrm{n}}(t)\right| \\
&= (1-\varsigma_n)\left\|\mathrm{x}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty}+(\varsigma_n-\xi_{\mathrm{n}})2\mathrm{K}_g\left(b-t_0\right)\max_{t\in[t_0-\tau,b]}\left|\mathrm{y}_{\mathrm{n}}(t)-p(t)\right| \\
&\quad +\xi_{\mathrm{n}}2\mathrm{K}_g\left(b-t_0\right)\max_{t\in[t_0-\tau,b]}\left|x_{\mathrm{n}}(t)-p(t)\right| \\
&= (1-\varsigma_n)\left\|\mathrm{x}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty}+(\varsigma_n-\xi_{\mathrm{n}})2\mathrm{K}_g\left(b-t_0\right)\left\|\mathrm{y}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty} \\
&\quad +\xi_{\mathrm{n}}2\mathrm{K}_g\left(b-t_0\right)\left\|x_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty} \\
&= (1-\varsigma_n+\xi_{\mathrm{n}}2\mathrm{K}_g\left(b-t_0\right))\left\|\mathrm{x}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty}+(\varsigma_n-\xi_{\mathrm{n}})2\mathrm{K}_g\left(b-t_0\right)\left\|\mathrm{y}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty}
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer yol ile devam edilerek $\left\|\mathrm{y}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty}$ için de

$$
\begin{aligned}
\left\|\mathrm{y}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty} &= \left\|(1-\zeta_n)\,\mathrm{x}_{\mathrm{n}}+\zeta_n\mathrm{Tx}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty} \\
&\le (1-\zeta_n)\left\|\,\mathrm{x}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty}+\zeta_n\left\|\mathrm{Tx}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty} \\
&= (1-\zeta_n)\left\|\,\mathrm{x}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty}+\zeta_n\left\|\mathrm{Tx}_{\mathrm{n}}-Tp\right\|_{\infty} \\
&= (1-\zeta_n)\left\|\,\mathrm{x}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty}+\zeta_n\max_{t\in[t_0-\tau,b]}\left|\mathrm{Tx}_{\mathrm{n}}(t)-Tp(t)\right| \\
&= (1-\zeta_n)\left\|\,\mathrm{x}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty}+\ \zeta_n\max_{t\in[t_0-\tau,b]}\left|\begin{matrix}\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t}g\left(s,\mathrm{x}_{\mathrm{n}}(s),\mathrm{x}_{\mathrm{n}}(s-\tau)\right)ds\\ -\varphi(t_0)-\int_{t_0}^{t}g\left(s,p(s),p(s-\tau)\right)ds\end{matrix}\right| \\
&= (1-\zeta_n)\left\|\,\mathrm{x}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty}+\ \zeta_n\max_{t\in[t_0-\tau,b]}\left|\begin{matrix}\int_{t_0}^{t}g\left(s,\mathrm{x}_{\mathrm{n}}(s),\mathrm{x}_{\mathrm{n}}(s-\tau)\right)ds\\ -\int_{t_0}^{t}g\left(s,p(s),p(s-\tau)\right)ds\end{matrix}\right| \\
&\le (1-\zeta_n)\left\|\,\mathrm{x}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty} \\
&\quad +\ \zeta_n\max_{t\in[t_0-\tau,b]}\int_{t_0}^{t}\left|g\left(s,\mathrm{x}_{\mathrm{n}}(s),\mathrm{x}_{\mathrm{n}}(s-\tau)\right)-g\left(s,p(s),p(s-\tau)\right)\right|ds \\
&\le (1-\zeta_n)\left\|\,\mathrm{x}_{\mathrm{n}}-p\right\|_{\infty} \\
&\quad +\ \zeta_n\max_{t\in[t_0-\tau,b]}\int_{t_0}^{t}\left[\begin{matrix}K_g\left[\left|x_{\mathrm{n}}(s)-p(s)\right|+\left|x_{\mathrm{n}}(s-\tau)-p(s-\tau)\right|\right]\\ +L\left|x_{\mathrm{n}}(s)-Tx_{\mathrm{n}}(s)\right|\end{matrix}\right]ds
\end{aligned}
$$

eşitsizliği bulunur. Bu nedenle

$$
\begin{aligned}
\left\| \mathrm{y_n} - p \right\|_\infty &\le (1-\zeta_n) \left\| \mathrm{x_n} - p \right\|_\infty \\
&\quad + \zeta_n \mathrm{K}_g (b - t_0) \max_{t \in [t_0-\tau, b]} \left\{ \left| x_\mathrm{n}(t) - p(t) \right| + \left| x_\mathrm{n}(t) - p(t) \right| \right\} \\
&\quad + \xi_\mathrm{n} \mathrm{L} (b - t_0) \max_{t \in [t_0-\tau, b]} \left| x_\mathrm{n}(t) - Tx_\mathrm{n}(t) \right| \\
&\le (1-\zeta_n) \left\| \mathrm{x_n} - p \right\|_\infty \\
&\quad + 2\zeta_n \mathrm{K}_g (b - t_0) \max_{t \in [t_0-\tau, b]} \left| x_\mathrm{n}(t) - p(t) \right| \qquad (7.4) \\
&\quad + \xi_\mathrm{n} \mathrm{L} (b - t_0) \max_{t \in [t_0-\tau, b]} \left| x_\mathrm{n}(t) - Tx_\mathrm{n}(t) \right| \\
&\le (1-\zeta_n) \left\| \mathrm{x_n} - p \right\|_\infty + 2\zeta_n \mathrm{K}_g (b - t_0) \left\| x_\mathrm{n} - p \right\|_\infty \\
&\quad + \xi_\mathrm{n} \mathrm{L} (b - t_0) \left\| x_\mathrm{n} - Tx_n \right\|_\infty \\
&= (1-\zeta_n \left(1 - 2\mathrm{K}_g (b - t_0)\right)) \left\| \mathrm{x_n} - p \right\|_\infty
\end{aligned}
$$

istenilen eşitsizliğe ulaşılır. (7.4) eşitsizliği (7.3) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\left\| \mathrm{x_{n+1}} - p \right\|_\infty &\le (1-\varsigma_n + \xi_\mathrm{n} 2\mathrm{K}_g (b - t_0)) \left\| \mathrm{x_n} - p \right\|_\infty \\
&\quad + (\varsigma_n - \xi_\mathrm{n}) 2\mathrm{K}_g (b - t_0) (1-\zeta_n \left(1 - 2\mathrm{K}_g (b - t_0)\right)) \left\| \mathrm{x_n} - p \right\|_\infty \\
&= \begin{bmatrix} 1-\varsigma_n + \xi_\mathrm{n} 2\mathrm{K}_g (b - t_0) \\ +(\varsigma_n - \xi_\mathrm{n}) 2\mathrm{K}_g (b - t_0) (1-\zeta_n \left(1 - 2\mathrm{K}_g (b - t_0)\right)) \end{bmatrix} \left\| \mathrm{x_n} - p \right\|_\infty
\end{aligned}
$$

$1 - 2\mathrm{K}_g (b - t_0)$ ve $\varsigma_n \ge \xi_\mathrm{n}$ olduğundan

$$
\left\| \mathrm{x_{n+1}} - p \right\|_\infty \le (1-\zeta_n \left(1 - 2\mathrm{K}_g (b - t_0)\right)) \left\| \mathrm{x_n} - p \right\|_\infty
$$

yazabiliriz. $\zeta_n \left(1 - 2\mathrm{K}_g (b - t_0)\right) = \mu_n < 1$ ve $\left\| \mathrm{x_n} - p \right\|_\infty = s_n$ alırsak Lemma 3.1.26'nin şartları sağlanmış olur. Bu da $\lim_{n \to \infty} \left\| \mathrm{x_n} - p \right\|_\infty = 0$ sonucunu doğur.

BÖLÜM 8

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma; literatür özeti, tezin amacı ve hipotezi içeren "Giriş bölümü", esas sonuçlara temel teşkil eden "Temel kavramlar bölümü", yeni tanımlanan (3.8), (3.24), (3.25) ve (3.30) iterasyon yöntemlerinin kuvvetli yakınsaklıkları ve literatürdeki diğer iterasyonlar ile yakınsaklık denkliklerini içeren "Bazı sabit nokta iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıkları ve yakınsaklıkları arasındaki denklik bölümü", (3.8) ve (3.24) sabit nokta iterasyon yöntemlerinin karalılığını gösteren "Sabit nokta iterasyon yöntemlerinin kararlılığı bölümü", (3.24) ve (3.25) sabit nokta iterasyon yöntemlerinin veri bağlılığı sonuçlarının kanıtlarını içeren "Bazı iterasyon yöntemlerine karşılık gelen dönüşümlerin sabit noktalarının veri bağlılığı bölümü", (3.8) iterasyon yönteminin (3.12) Ishikawa iterasyon yönteminden daha hızlı olduğunu gösteren Örnek 6.1.1'i ve MP (3.24) iterasyon yönteminin PM (3.23) iterasyon yönetminden daha hızlı olduğunu gösteren Örnek 6.1.2'yi içeren "Sabit nokta iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık hızlarının karşılaştırması bölümü", (3.8) sabit nokta iterasyon yönteminin gecikmeli differansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için etkili bir araç olduğunu kanıtlayan "Uygulama bölümü" ve "Sonuç ve öneriler bölümü" olmak üzere 8 bölümden oluşmaktadır. Tezin tümü (3.8), (3.24), (3.25) ve (3.30) sabit nokta iterasyon yöntemleri ve bu iterasyon yöntemlerinin kuvvetli yakınsaklıklarını göstermek için kullanılan geometrik özellikler üstüne kurulmuştur. Başlangıçta (3.8) iterasyon yöntemi tanımlanıp Teorem 3.1.28 Banach uzaylarında zayıf contraction dönüşüm sınıfları için güçlü yakınsaklığını ifade eden teorem ispatlanmış ve ardından bu iterasyon yönteminin literatürdeki diğer iterasyon yöntemleri ile yakınsaklık denklikleri Teorem

3.1.47 de gösterildi. Ayrıca (3.8) iterasyon yönteminin kararlılığı Teorem 4.1.2 de ve (3.12) Ishikawa iterasyon yönteminden daha hızlı olduğu hem analitik ve hemde nümerik olarak Örnek 6.1.1 de sunuldu. Bu iterasyon yöntemi için son olarak, $C[a,b]$ tüm sürekli fonksiyonların uzayı $\|x-y\|_\infty = \max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|$ Chebyshev normu ile donatılmış ve bu norma göre Banach uzayı olduğu bilindiğinden

$$x'(t) = g\left(t, x(t), x(t-\tau)\right),\ t\in[t_0, b] \tag{7.1}$$

denklemi ve başlangıç koşulu

$$x(t) = \varphi(t),\ t\in[t_0-\tau, t_0] \tag{7.2}$$

olacak şekilde bir gecikmeli diferansiyel denkleminin (3.8) iterasyon yöntemi ile çözümüne ulaşıldığı Teorem 7.1.2 ile kanıtlandı. Daha sonra (3.8) ve (3.9) iterasyon yöntemlerinin melez hali olan halpern tipinde iterasyon yöntemleri tanımlanıp Teorem 3.1.38 de J normalleştirilmiş dualite dönüşümüne sahip bir Banach uzayında demiclosed özelliği ve projeksiyon dönüşümlerinin özellikleri kullanılarak (3.30) iterasyon yönteminin quasi-nonexpansive dönüşüm sınıfları altında kuvvetli yakınsak olduğu gösterildi. Halpern tipli (3.30) sabit nokta iterasyon yönteminde $\sum_{i=1}^{1}\zeta_{n,i} = \sum_{i=1}^{\infty}\zeta_{n,i}$ alınırsa J normalleştirilmiş dualite dönüşümüne sahip bir Banach uzayında demiclosed özelliği ve projeksiyon dönüşümlerinin özellikleri kullanılarak (3.30) iterasyon yönteminin quasi-nonexpansive dönüşüm sınıfları altında kuvvetli yakınsak olduğu Teorem 3.1.39'da gösterildi. Teorem 3.1.40'ta J_ϕ zayıf dizisel dualite dönüşümüne sahip bir Banach uzayında $lim_{n\to\infty} r_n = r$ olmak üzere $\overline{D(A_i)} \subset C \subset \bigcap_{r>0}^{\infty} R(I+rA_i)$ olacak şekilde $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ accretive operatörlerin sonsuz bir ailesi ve (3.30) iterasyon yönteminde T nin yerine $J_{r_n}^{A_i} = (I+r_nA_i)^{-1}$ A'nın resolvent operatörü kullanılarak oluşturulan yeni Halpern tipli iterasyon yönteminin sunny nonexpansive retraction dönüşümü altında kuvvetli yakınsak olduğu ifade edildi. Teorem 3.1.40 tan farklı olarak J_ϕ zayıf dizisel dualite dönüşümüne sahip bir Banach uzayı yerine Gâteaux diferansiyellenebilir norma sahip bir Banach uzayında aynı iterasyon yöntemi A nın resolvent operatörü kullanılarak belirli şartlar altında sunny nonexpansive retraction dönüşümü için kuvvetli yakınsak olduğu Teorem 3.1.41'de ifade edildi.

Yukarıda bahsedilen çalışmaların ardından tezin önemli bir parçasını oluşturan (3.24) ile ifade edilen Mann-Picard iterasyon yöntemi tanımlanmış ve bu iterasyon yönteminin kuvvetli yakınsaklığı, kararlılığı, Mann iterasyon yöntemi ile yakınsaklık denkliği ve veri bağlılığı sonuçları weak contraction dönüşümler için Banach uzaylarında belirli şartlar altında sırasıyla Teorem 3.1.42, Teorem 4.1.3, Teorem 3.1.46 ve Teorem 5.1.5 de sunuldu. Bilindiği gibi (3.23) iterasyon yöntemi araştırmacıların yoğun bir ilgisine sahiptir. Çünkü literatürde mevcut iterasyon yöntemlerinden ayrı olarak sadelik ve hız bakımından önemli bir avantaja sahiptir. Bu nedenle bu iterasyon yöntemi kadar sade ve daha hızlı bir iterasyon yönteminin ne şekilde tanımlanabileceği hususu araştırıldı ve sonuç olarak MP iterasyon yöntemi tanımlanıp yukarıdaki sonuçlar ispatlandı. Ancak bu iterasyon yönteminin PM iterasyon yönteminden daha avantajlı kullanıma sahip olduğunu gösteren Örnek 6.1.2 verilip bu örneği destekleyen bilgisayar programları yardımıyla çizilen grafikler ve nümerik değerleri içeren tablo verildi.

Son iterasyon yöntemi olarak Kirk (3.10) ve MP (3.24) iterasyon yöntemlerinden faydalanarak Kirk-MP (3.25) iterasyon yöntemi tanımlandı. Daha sonra bu iterasyon yönteminin kuvvetli yakınsaklığı, (2.22) contractive-like dönüşüm sınıfı kullanılarak Lemma 3.1.43 yardımıyla Banach uzayları için Teorem 3.1.44 de ispatlandı ve veri bağlılığı

$$\text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için } 1-\alpha_{n,0} \geq \alpha_{n,0},$$

$$\forall i \in \mathbb{N} \text{ için } \left\| T^i z - \widetilde{T}^i z \right\| \leq \left[\varepsilon \sum_{j=1}^{i} \delta^{j-1} \right]$$

şartları altında Teorem 5.1.6 da gösterildi.

Literatürde sabit nokta iterasyon yöntemlerinin genel halleri Kirk-multistep, Jungck-multistep ve Normal multistep ile sıkça karşılaşılır. Bu sabit nokta iterasyon yöntemleri literatürdeki en hızlı iterasyon yöntemleri olduğundan önemli bir yere sahiptirler. Bu nedenle tezde tanımlanan iterasyon yöntemlerinin multistep tipleri yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Ceng, L.-C., Ansari, Q. ve Yao, J.-C., (2011). "Some iterative methods for finding fixed points and for solving constrained convex minimization problems", Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 74: 5286-5302.

[2] Argyros, I.K. ve Hilout, S., (2013). Computational Methods in Nonlinear Analysis: Efficient Algorithms, Fixed Point Theory and Applications: World Scientific Publishing Company Incorporated.

[3] Argyros, I., (2007). Computational Theory of Iterative Methods: Elsevier Science.

[4] Borwein, J. ve Sims, B., (2011). The Douglas–Rachford Algorithm in the Absence of Convexity, H.H. Bauschke Burachik, R.S. Combettes, P.L. Elser, V. Luke, D.R. ve Wolkowicz, H., ed. Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering. Springer New York, 93-109.

[5] Somarakis, C. ve Baras, J.S., (2013). "Fixed point theory approach to exponential convergence in LTV continuous time consensus dynamics with delays", SIAM CT.

[6] Border, K.C., (1989). Fixed point theorems with applications to economics and game theory, Cambridge university press, Cambridgei UK.

[7] Ok, E.A., (2007). Real analysis with economic applications, Princeton University Press, Princeton.

[8] Siddiqi, A. ve Ansari, Q., (1989). "An iterative method for generalized variational inequalities", Mathematica Japonica, 34: 475-481.

[9] Isac, G., (1992). Complementarity problems, Springer-Verlag.

[10] Shehu, Y., (2011). "Iterative Methods for Family of Strictly Pseudocontractive Mappings and System of Generalized Mixed Equilibrium Problems and Variational Inequality Problems", Fixed Point Theory and Applications, 2011: 852789.

[11] Giocoli, N., (2003). "Fixing the point: the contribution of early game theory to the tool-box of modern economics", Journal of Economic Methodology, 10: 1-39.

[12] Echenique, F. ve Oviedo, J., (2004). "Core many-to-one matchings by fixed-point methods", Journal of Economic Theory, 115: 358-376.

[13] Fleiner, T., (2003). "A fixed-point approach to stable matchings and some applications", Mathematics of Operations Research, 28: 103-126.

[14] Chen, M., Lu, W., Chen, Q., Ruchala, K.J. ve Olivera, G.H., (2008). "A simple fixed-point approach to invert a deformation field", Medical physics, 35: 81.

[15] Radde, N., (2010). "Fixed point characterization of biological networks with complex graph topology", Bioinformatics, 26: 2874-2880.

[16] Wang, G.-Q. ve Cheng, S.S., (2009). "Fixed point theorems arising from seeking steady states of neural networks", Applied Mathematical Modelling, 33: 499-506.

[17] Broy, M., (1982). "Fixed point theory for communication and concurrency", Formal Description of Programming Concepts, II: 125-148.

[18] Hui, L., Jun, Z. ve Cheng, L., (2010). "Application examples of the network fixed point theory for space-air-ground integrated communication network", International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), 18-20 Oct. 2010, Moscow.

[19] Altun, I., Abbas, M. ve Simsek, H., (2011). "A fixed point theorem on cone metric spaces with new type contractivity", Banach J. Math. Anal, 5: 15-24.

[20] Alaca, C., Turkoglu, D. ve Yildiz, C., (2006). "Fixed points in intuitionistic fuzzy metric spaces", Chaos, Solitons & Fractals, 29: 1073-1078.

[21] Ertürk, M. ve Karakaya, V., (2013). "n-tuplet fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces", Journal of Inequalities and Applications, 2013: 196.

[22] Karapınar, E., (2009). "Fixed point theorems in cone Banach spaces", Fixed Point Theory and Applications, 2009: 609281.

[23] Khamsi, M., Lin, M. ve Sine, R., (1992). "On the fixed points of commuting nonexpansive maps in hyperconvex spaces", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 168: 372-380.

[24] Park, S., (2006). " A survey on fixed point theorems in generalized convex spaces", RIMS Kôkyûroku, 1484: 124-133.

[25] Sahin, I. ve Telci, M., (2008). "Fixed points of contractive mappings on complete cone metric spaces", Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 345: 719-724.

[26] Simsek, N. ve Karakaya, V., (2009). "On Some Geometrical Properties of Generalized Modular Spaces of Cesaro Type Defined by Weighted Means", Journal of Inequalities and Applications, 2009: 932734.

[27] Simsek, N., Savaş, E. ve Karakaya, V., (2010). "Some geometric and topological properties of a new sequence space defined by de la Vallée-Poussin mean", Journal of Computational Analysis and Applications, 12: 768-779.

[28] Takahashi, W., (1970). "A convexity in metric space and nonexpansive mappings. I", Kodai Mathematical Journal, 22: 142-149.

[29] Turkoglu, D., Alaca, C., Cho, Y. ve Yildiz, C., (2006). "Common fixed point theorems in intuitionistic fuzzy metric spaces", Journal of Applied Mathematics and Computing, 22: 411-424.

[30] Turkoglu, D. ve Rhoades, B., (2005). "A fixed fuzzy point for fuzzy mapping in complete metric spaces", Mathematical Communications, 10: 115-121.

[31] Başarır, M. ve Şahin, A., (2013). "On the strong and Δ-convergence of new multi-step and S-iteration processes in a CAT (0) space", Journal of Inequalities and Applications, 2013: 482.

[32] Öztürk, M. ve Başarır, M., (2012). "On some common fixed point theorems with rational expressions on cone metric spaces over a Banach algebra", Hacet. J. Math. Stat, 41: 211-222.

[33] Öztürk, M. ve Başarır, M., (2011). "On Some Common Fixed Point Theorems With φ-Maps On G−Cone Metric Spaces", Bull. Math. Anal. Appl, 3: 121-133.

[34] Neumann, J.V., (1928). "Zur theorie der gesellschaftsspiele", Mathematische Annalen, 100: 295-320.

[35] Kakutani, S., (1941). "A generalization of Brouwer's fixed point theorem", Duke mathematical journal, 8: 457-459.

[36] Nash, J.F., (1950). "Equilibrium points in n-person games", Proceedings of the national academy of sciences, 36: 48-49.

[37] Nash, J., (1951). "Non-cooperative games", The Annals of Mathematics, 54: 286-295.

[38] Banach, S., (1922). "Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales", Fund. Math, 3: 133-181.

[39] Arshad, M., Azam, A., Vetro, P. ve Górniewicz, L., (2009). "Some common fixed point results in cone metric spaces", Fixed Point Theory and Applications, 2009: 8.

[40] Caristi, J. ve Kirk, W.A., (1975). Geometric fixed point theory and inwardness conditions, ed. The Geometry of Metric and Linear Spaces. Springer, 74-83.

[41] Caristi, J., (1976). "Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions", Transactions of the American Mathematical Society, 215: 241-251.

[42] Ćirić, L.B., (1974). "A generalization of Banach's contraction principle", Proceedings of the American Mathematical Society, 45: 267-273.

[43] Ćirić, L., (2009). "Some new results for Banach contractions and Edelstein contractive mappings on fuzzy metric spaces", Chaos, Solitons & Fractals, 42: 146-154.

[44] Ekeland, I., (1974). "On the variational principle", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 47: 324-353.

[45] Ekeland, I., (1979). " Nonconvex minimization problems", Bull. Amer. Math. Soc., 1:443–474.

[46] Kirk, W., Contraction mappings and extensions in Handbook of metric fixed point theory (WA Kirk and B. Sims Eds.), 2001, ed^eds.: Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. MR1904272 (2003 f: 54096).

[47] Kirk, W.A., (2003). "Fixed points of asymptotic contractions", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 277: 645-650.

[48] Hardy, G.E. ve Rogers, T., (1973). "A generalization of a fixed point theorem of Reich", Canad. Math. Bull, 16: 201-206.

[49] Kannan, R., (1968). "Some results on fixed points", Bulletin of Calcutta Mathematical Society, 60: 71-76.

[50] Meir, A. ve Keeler, E., (1969). "A theorem on contraction mappings", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 28: 326-329.

[51] Nadler Jr, S.B., (1969). "Multi-valued contraction mappings", Pacific J. Math, 30: 475-488.

[52] Reich, S., (1971). "Kannan's fixed point theorem", Boll. Un. Mat. Ital, 4: 1-11.

[53] Subrahmanyam, P., (1974). "Remarks on some fixed point theorems related to Banach's contraction principle", J. Math. Phys. Sci., 8: 445-457.

[54] Suzuki, T., (2001). "Generalized distance and existence theorems in complete metric spaces", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 253: 440-458.

[55] Suzuki, T., (2004). "Several fixed point theorems concerning τ-distance", Fixed Point Theory and Applications, 3: 195-209.

[56] Zamfirescu, T., (1972). "Fix point theorems in metric spaces", Archiv der Mathematik, 23: 292-298.

[57] Chabert, J.L. ve Barbin, E., (1999). A History of Algorithms: From the Pebble to the Microchip, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.

[58] Liouville, J., (1837). "Second mémoire: Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équ ation différentielles du second membre contenant un paramètre variable"", Journal de Mathématiques pures et appliquées, 2: 16-35.

[59] Picard, E., (1890). "Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives", Journal de Mathématiques pures et appliquées, 6:145-210.

[60] Krasnosel'skii, M.A., (1955). "Two remarks on the method of successive approximations", Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 10: 123-127.

[61] Schaefer, H., (1957). "Über die Methode sukzessiver Approximationen", Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 59: 131-140.

[62] Mann, W.R., (1953). "Mean value methods in iteration", Proceedings of the American Mathematical Society, 4: 506-510.

[63] Ishikawa, S., (1974). "Fixed points by a new iteration method", Proceedings of the American Mathematical Society, 44: 147-150.

[64] Kreyszig, E., (1989). Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, USA.

[65] Maddox, I.J., (1988). Elements of Functional Analysis, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge.

[66] Brown, A.L. ve Page, A., (1970). Elements of functional analysis, Van Nostrand-Reinhold, London.

[67] Pugachev, V.S. ve Sinitsyn, I.N., (1999). Lectures on Functional Analysis and Applications, World Scientific Publishing Company, Singapore.

[68] Moore, R.E. ve Cloud, M.J., (2007). Computational Functional Analysis, Horwood Pub., Chichester.

[69] Agarwal, R.P., Sahu, D.R. ve O'Regan, D., (2009). Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications, Springer, New York.

[70] Somasumdaram, D., (2008). A First Course in Functional Analysis, Alpha Science, Oxford.

[71] Curtain, R.F. ve Pritchard, A.J., (1977). Functional Analysis in Modern Applied Mathematics, Academic Press, London.

[72] Clarkson, J. A., (1936). Uniformly convex spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 40, 396 -414.

[73] Chidume, C., (2009). Geometric properties of Banach spaces and nonlinear iterations, Springer-Verlag London Limited, doi:10.1007/978-1-84882-190-3, pp. 17.

[74] Cioranescu, I., (1990). Geometri of Banach spaces, Duality mappings and nonlinear problems, Kluwer Academic, Dordrect.

[75] Reich, S., (1992). Review of Geometry of Banach spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems by Ioana Cioranescu, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990, Bull. Amer. Math. Soc., 26 (1992), pp. 367–370.

[76] Yao, Y, Liou, Y-C, Zhou, H, (2009). Strong convergence of an iterative method for nonexpansive mappings with new control conditions. Nonlinear Anal. 70, 2332-2336.

[77] Takahashi, W, (2000). Nonlinear Functional Analysis, Fixed Point Theory and Its Applications. Yokahama Publishers, Yokahama.

[78] Goebel, K, ve Reich, S, (1984). Uniform Convexity, Hyperbolic Geometry, and Nonexpansive Mappings. Dekker, New York .

[79] Reich, S, (1973). Asymptotic behavior of contractions in Banach spaces. J. Math. Anal. Appl. 44, 57-70

[80] Berinde, V., (2007). Iterative Approximation of Fixed Points, Springer, Berlin.

[81] Kızıltunç, H., (2007). Genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının iterasyon metotlarıyla elde edilmesi, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

[82] Devaney, R.L., (1992). A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment, Westview Press, Colorado.

[83] Hunter, J.K. ve Nachtergaele, B., (2001). Applied Analysis, World Scientific, Singapore.

[84] Greenlees, J., (2011). "MAS331: Metric spaces", http://www.greenlees.staff.shef.ac.uk/mas331/Solutions7.pdf, 2 Ekim 2013.

[85] Rus, I.A., (1996). Picard Operators and Applications, Babes-Bolyai University, Faculty of Mathematics and Computer Science, Cluj-Napoca.

[86] Berinde, V., (2004). "Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration", Nonlinear Analysis Forum, 9:43–53.

[87] Rus, I. A., (1979). Principles and Applications of the Fixed Point Theory, Editura Dacia, Cluj-Napoca.

[88] Rus, I. A., (2001). Generalized Contractions and Applications, Cluj University Press, Cluj-Napoca.

[89] Taskovic, M., (1986). Osnove teorije fiksne tacke (Fundamental Elements of Fixed Point Theory), Matematicka biblioteka 50, Beograd.

[90] Gürsoy, F., (2013). Bazı sabit nokta iterasyon yöntemlerinin kararlılığı ve yakınsaklığının incelenmesi, Doktora Tezi, *Yıldız Teknik Üniveristesi Fen Bilimleri enstitüsü, İstanbul*.

[91] Alotaibi, A., Kumar, V., ve Hussain, N., (2013). Convergence comparison and stability of Jungck-Kirk-type algorithms for common fixed point problems, Fixed Point Theory and Applications, 2013(1), 1-30.

[92] Gürsoy, F., (2014). A Picard-S Iterative Scheme for Approximating Fixed Point of Weak-Contraction Mappings. arXiv preprint arXiv:1404.0241.

[93] Chatterjea, S., (1972). "Fixed-point theorems", CR Acad. Bulgare Sci, 25: 727-730.

[94] Rhoades, B.E., (1977). "A comparison of various definitions of contractive mappings", Transactions of the American Mathematical Society, 226: 257-290.

[95] Rhoades, B., (1983). "Contractive definitions revisited", Contemporary Math, 21: 189-205.

[96] Berinde, V., (1997). Generalized Contractions and Applications (Contracții generalizate şi aplicații) (in Romanian), Editura Cub Pres 22, Baia Mare.

[97] Osilike, M., (1995). "Stability results for fixed point iteration procedures", J. Nigerian Math. Soc, 14: 17-29.

[98] Osilike, M., (1997). "Stability of the Ishikawa iteration method for quasi-contractive maps", Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 28: 1251-1266.

[99] Osilike, M. ve Udomene, A., (1999). "Short proofs of stability results for fixed point iteration procedures for a class of contractive-type mappings", Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 30: 1229-1234.

[100] Olatinwo, M., Owojori, O. ve Imoru, C., (2006). "Some stability results for fixed point iteration processes", Aus. J. Math. Anal. Appl, 3: 1-7.

[101] Rhoades, B., (1993). "Fixed point theorems and stability results for fixed point iteration procedures II", Indian J. Pure Appl. Math, 24: 691-703.

[102] Berinde, V., (2002). "On the stability of some fixed point procedures", Bul. Stiint. Univ. Baia Mare, Ser. B, Matematica-Informatica, 18: 7-14.

[103] Harder, A.M. ve Hicks, T.L., (1988). "Stability results for fixed point iteration procedures", Math. Japon, 33: 693-706.

[104] Lindelöf, E., (1984). Sur l'application de la méthode des approximations successives aux équations différentielles ordinaires du premier ordre; Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. 116: 454–457.

[105] Halpern, B., (1967). Fixed points of nonexpanding maps. Bull. Am. Math. Soc. 73, 957-961.

[106] Lions, P-L., (1977). Approximation de points fixes de contractions. C. R. Acad. S ci., Ser. A-B 284, A1357-A1359.

[107] Wittmann, R., (1992).Approximation of fixed points of nonexpansive mappings. Arch. Math. 58, 486-491 (1992).

[108] Reich, S., (1980). Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces. J. Math. Anal. Appl. 75,287-292 .

[109] Reich, S., (1994). Approximating fixed points of nonexpansive mappings. Panam. Math. J. 4, 23-28

[110] Shioji, N, ve Takahashi, W., (1997). Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces. Proc. Am. Math. Soc. 125, 3641-3645.

[111] Chidume, CE, ve Chidume, CO., (2006). Iterative approximation of fixed points of nonexpansive mappings. J. Math. Anal. Appl.318, 288-295.

[112] Suzuki, T., (2007). A su¢ cient and necessary condition for Halpern-type strong convergence to fixed points of nonexpansive mappings. Proc. Am. Math. Soc. 135, 99-106.

[113] Hu, L-G., (2008). Strong convergence of a modified Halpern's iteration for nonexpansive mappings, Fixed Point Theory Appl. 2008, Article ID 649162

[114] Song, Y, ve Chai, X., (2009). Halpern iteration for firmly type nonexpansive mappings. Nonlinear Anal.71, 4500-4506

[115] Saejung, S., (2010). Halpern.s iteration in Banach spaces. Nonlinear Anal.. 73, 3431.3439 .

[116] Nilsrakoo, W, ve Saejung, S., (2011). Strong convergence theorems by Halpern-Mann iterations for relatively nonexpansive mappings in Banachspaces, Appl. Math. Comput.. 217, 6577.6586.

[117] Li, S., Li, L., Zhang, L., ve He, X., (2013). Strong convergence of modified Halpern's iterations for a k-strictly pseudocontractive mapping. Journal of Inequalities and Applications, 2013(1), 98.

[118] Pang, C. T., ve Naraghirad, E., 2013). Strong convergence of Halpern iterations for quasi-nonexpansive mappings and accretive operators in Banach spaces. Fixed Point Theory and Applications, 2013(1), 332.

[119] Suzuki, T., Reich's problem concerning Halpern's convergence. Arch. Math.. 92, 602.613.

[120] Kirk, W., (1971). "On successive approximations for nonexpansive mappings in Banach spaces", Glasgow Math. J, 12:6-9.

[121] Noor, M.A., (2000). "New approximation schemes for general variational inequalities", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 251: 217-229.

[122] Agarwal, R., O Regan, D. ve Sahu, D., (2007). "Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings", Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 8: 61-79.

[123] Thianwan, S., (2009). "Common fixed points of new iterations for two asymptotically nonexpansive nonself-mappings in a Banach space", Journal of Computational and Applied Mathematics, 224: 688-695.

[124] Phuengrattana, W. ve Suantai, S., (2011). "On the rate of convergence of Mann, Ishikawa, Noor and SP-iterations for continuous functions on an arbitrary interval", Journal of Computational and Applied Mathematics, 235: 3006-3014.

[125] Olatinwo, M., (2009). "Some stability results for two hybrid fixed point iterative algorithms in normed linear space", Matematique Vesnik, 61: 247-256.

[126] Chugh, R. ve Kumar, V., (2012). "Stability of hybrid fixed point iterative algorithms of Kirk-Noor type in normed linear space for self and nonself operators", International Journal of Contemporary Mathematical sciences, 7: 1165-1184.

[127] Hussain, N., Chugh, R., Kumar, V. ve Rafiq, A., (2012). "On the rate of convergence of Kirk-type iterative schemes", Journal of Applied Mathematics, 2012.

[128] Gürsoy, F ve Karakaya, V., (2014). “Some Convergence and Stability Results for Two New Kirk Type Hybrid Fixed Point Iterative Algorithms,” Journal of Function Spaces, 2014, Article ID 684191, 8, 2014. doi:10.1155/2014/684191.

[129] Khan, SH. , (2013). A Picard-Mann hybrid iterative process. Fixed Point Theory Appl. (2013). doi:10.1186/1687-1812-2013-69.

[130] Rhoades, B. E. ve Xue, Z., (2010). Comparison of the rate of convergence Among Picard, Mann, Ishikawa, and Noor iterations applied to pages. quasicontractive maps, Fixed Point Theory and Appl., 2010 Article ID 169062, 12.

[131] Soltuz, S.M., (2004). "Data dependence for Ishikawa iteration", Lecturas Matemáticas, 25: 149-155.

[132] Xu, H-K., (2002). Iterative algorithms for nonlinear operators. J. Lond. Math. Soc. 66, 240-256.

[133] Gossez, JP., ve Dozo, EL., (19712) some geonetric properties related to the fixed point theory for non-expansive mappings. Pac. J.Math., 40, 565-573.

[134] Xu, H-K., (2002). Another control condition in an iterative method for nonexpansive mappings. Bull. Aust. Math. Soc. 65,109-113.

[135] Browder, F. E., (1968). Semicontractive and semiaccretive nonlinear mappings in Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 74, 660.665.

[136] Park J. A., (1994). Mann-iteration for strictly pseudocontractive maps, J. Korean Math. Soc., 31(1994), 333.337.

[137] Maingé, PE., (2008). Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and non-strictly convex minimization. Set-Valued Anal. 16, 899-912.

[138] Chang, SS, Kim, JK, ve Wang, XR., (2010). Modified block iterative algorithm for solving convex feasibility problems in Banach spaces. J. Inequal. Appl. 2010, Article ID 869684.

[139] Chidume, C. ve Mutangadura, S., (2001). "An example on the Mann iteration method for Lipschitz pseudocontractions", Proceedings of the American Mathematical Society, 129: 2359-2363.

[140] Rhoades, B. ve Soltuz, S.M., (2004). "The equivalence between Mann–Ishikawa iterations and multistep iteration", Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 58: 219-228.

[141] Rhoades, B. ve Şoltuz, Ş.M., (2004). "The equivalence between the convergences of Ishikawa and Mann iterations for an asymptotically nonexpansive in the intermediate sense and strongly successively pseudocontractive maps", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 289: 266-278.

[142] Rhoades, B., (2004). "The equivalence of Mann iteration and Ishikawa iteration for a Lipschitzian $\psi-$ uniformly pseudocontractive and $\psi-$ uniformly accretive maps", Tamkang Journal of Mathematics, 35: 235-246.

[143] Rhoades, B. ve Soltuz, S., (2004). "The equivalence of Mann and Ishikawa iteration dealing with strongly pseudocontractive or strongly accretive maps", Panamer. Math. J, 14: 51-59.

[144] Rhoades, B. ve Soltuz, S.M., (2003). "On the equivalence of Mann and Ishikawa iteration methods", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2003: 451-459.

[145] Rhoades, B. ve Soltuz, S.M., (2003). "The equivalence of Mann iteration and Ishikawa iteration for non-Lipschitzian operators", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2003: 2645-2651.

[146] Rhoades, B. ve Soltuz, S.M., (2004). "The equivalence of Mann iteration and Ishikawa iteration for ψ -uniformly pseudocontractive or ψ -uniformly accretive maps", Int. J. Math. Sci, 46: 2443-2451.

[147] Rhoades, B. ve Şoltuz, S.M., (2003). "The equivalence between the convergences of Ishikawa and Mann iterations for an asymptotically pseudocontractive map", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 283: 681-688.

[148] Özdemir, M. ve Akbulut, S., (2006). "On the equivalence of some fixed point iterations", Kyungpook Math Journal, 46: 211-217.

[149] Karakaya, V., Doğan, K., Gürsoy, F. ve Ertürk, M., (2013). "Fixed Point of a New Three Step Iteration Algorithm Under Contractive Like Operators Over Normed Spaces", Abstract and Applied Analysis, 2013, Article ID 560258, 9 pages, 2013. doi:10.1155/2013/560258.

[150] Weng, X., (1991). "Fixed point iteration for local strictly pseudo-contractive mapping", Proceedings of the American Mathematical Society, 113: 727-731.

[151] Gürsoy, F., Karakaya, V., ve Rhoades, B. E., (2012). The equivalence among new multistep iteration, S-iteration and some other iterative schemes. *arXiv preprint arXiv:1211.5701*.

[152] S. M. Soltuz, (2005).The Equivalence of Picard, Mann and Ishikawa iterations Dealing with Quasi-Contractive Operators, Mathematical Communications, 10, 81-89.

[153] S. M. Soltuz, (2007).The Equivalence between Krasnoselskij, Mann, Ishikawa, Noor and MultistepIterations,.Mathe-matical Communications, 12, 53-61.

[154] R. Chugh and V. Kumar, (2011). Strong Convergen ce of SP Iterative Scheme for Quasi-Contractive Orators,.International Journal of Computer Applications, 31, No. 5, 21-27.

[155] Urabe, M., (1956). "Convergence of numerical iteration in solution of equations", J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, 19: 479-489.

[156] Ostrowski, A., (1967). "The Round off Stability of Iterations", ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 47: 77-81.

[157] Harder, A.M., (1987). Fixed Point Theory and Stability Results for Fixed Point Iteration Procedures, Doktora Tezi, University of Missouri, Rolla.

[158] Harder, A.M. ve Hicks, T.L., (1988). "A stable iteration procedure for nonexpansive mappings", Math. Japon, 33: 687-692.

[159] Rhoades, B., (1990). "Fixed point theorems and stability results for fixed point iteration procedures", Indian J. Pure Appl. Math, 21: 1-9.

[160] Imoru, C.O. ve Olatinwo, M.O., (2003). "On the stability of Picard and Mann iteration processes", Carpathian J. Math, 19: 155-160.

[161] Olatinwo, M., Owojori, O. ve Imoru, C., (2006). "On some stability results for fixed point iteration procedure", Journal of Mathematics and Statistics, 2: 339-342.

[162] Olatinwo, M., Owojori, O. ve Imoru, C., (2006). "Some stability results on Krasnolslseskij and Ishikawa fixed point iteration procedures", Journal of Mathematics and Statistics, 2: 360-362.

[163] Berinde, V., (2003). "On the approximation of fixed points of weak contractive mappings", Carpathian J. Math, 19: 7-22.

[164] Chifu, C. ve Petruşel, G., (2007). "Existence and data dependence of fixed points and strict fixed points for contractive-type multivalued operators", Fixed Point Theory and Applications, 2007.

[165] Espínola, R. ve Petruşel, A., (2005). "Existence and data dependence of fixed points for multivalued operators on gauge spaces", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 309: 420-432.

[166] Markin, J., (1973). "Continuous dependence of fixed point sets", Proceedings of the American Mathematical Society, 38: 545-547.

[167] Rus, I.A. ve Muresan, S., (1998). "Data dependence of the fixed points set of weakly Picard operators", Studia Univ. Babes-Bolyai Mathematica, 43: 79-83.

[168] Rus, I.A. Petruşel, A. ve Sîntămărian, A., (2003). "Data dependence of the fixed point set of some multivalued weakly Picard operators", Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 52: 1947-1959.

[169] Chugh, R. Kumar, S. ve Jagjeet, J., (2013). "Data Dependence of Some New Iterative Schemes for Quasi-Contractive Operators", International Journal of Computer Applications, 73: 12-18.

[170] Chugh, R. ve Kumar, V., (2012). "Data dependence of Noor and SP iterative schemes when dealing with quasi-contractive operators", International Journal of Computer Applications, 40: 41-46.

[171] Karakaya, V. Gürsoy, F. Doğan, K. ve Ertürk, M., (2013). "Data Dependence Results for Multistep and CR Iterative Schemes in the Class of Contractive-Like Operators", Abstract and Applied Analysis, 2013: 381980.

[172] Olatinwo, M., (2009). "Some results on the continuous dependence of the fixed points in normed linear space", Fixed Point Theory, 10: 151-157.

[173] Olatinwo, M.O., (2010). "On The Continuous Dependence of The Fixed Points for (φ, ψ)− Contractive-Type Operators", Kragujevac Journal of Mathematics, 34: 91-102.

[174] Şoltuz, S.M. ve Teodor, G., (2008). "Data Dependence for Ishikawa Iteration When Dealing with Contractive-Like Operators", Fixed Point Theory and Applications, 2008:242916.

[175] Soltuz, S.M., (2001). "Data dependence for Mann iteration", Octogon Mathematical Magazine, 9: 825-828.

[176] Asaduzzaman, M., & Ali, M. Z., (2014). Data Dependence For Noor Iterative Scheme Dealing With Contractive-Like Operators. *GANIT: Journal of Bangladesh Mathematical Society*, *33*, 13-24.

[177] Berinde, V., (2004). Picard iteration converges faster than Mann iteration for a class of quasi-contractive operators, Fixed Point Theory and Applications, 2(2004) 97-105.

[178] Babu, G.V. and Prasad, K.N., (2006). Mann iteration converges faster than Ishikawa iteration for the class of Zam.rescu operators, Fixed Point Theory and Appl., 2006 (2006), Article ID49615, 6

[179] Qing, Y. ve Rhoades, B. E., (2008). Comments on the rate of convergence between Mann and Ishikawa iterations applied to Zamfirescu operators, Fixed Point Theory and Applications, 2008, 3.

[180] Berinde, V., (2004). Picard iteration converges faster than Mann iteration for a class of quasi-contractive operators, Fixed Point Theory and Applications, 1(2004), 1-9.

[181] Rhoades, B. E. ve Xue, Z., (2010). Comparison of the rate of convergence among Picard, Mann, Ishikawa, and Noor iterations applied to quasicontractive maps, Fixed Point Theory and Appl., 2010 (2010), Article ID 169062, 12.

[182] Xue, Z., (2008). The comparison of the convergence speed between Picard, Mann, Krasnoselskij and Ishikawa iterations in Banach spaces, Fixed Point Theory and Appl., 2008 (2008), Article ID 387056, 5.

[183] Karakaya, V., Doğan, K., Gürsoy, F. ve Ertürk, M., (2013). Fixed point of a new three-step algorithm under contrative-like operators over normed spaces, Abst. and Appl. Anal., 2013 (2013), Article ID 560258, 9.

[183] Chugh, R. ve Kumar, V., (2013). Convergence of SP iterative scheme with mixed errors for accretive Lipschitzian and strongly accretive Lipschitzian operators in Banach space, International Journal of Computer Mathematics, volume 2013, 17.

[184] Hussain, N., Rafiq, A., Damjanović, B. ve Lazović, R., (2011). On Rate of convergence of various iterative schemes, Fixed Point Theory and Applications, 45(2011) 6.

[185] Rhoades, B. E., (1976). Comments on two fixed point iteration methods, J. Math. Anal. Appl. 56(1976) 741–750.

[186] Yuan, Q. ve Rhoades, B.E. (2008). Comments on the rate of convergence between Mann and Ishikawa iterations applied to Zam.rescu operators. Fixed Point Theory and Applications 2008.

[187] Hammerlin, G. ve Hoffmann, K. H., (1991). Numerical mathematics. Springer.

[188] Soltuz, S. M. ve Otrocol, D., (2007). Classical results via Mann-Ishikawa iteration, Revu d.Analyse Numerique de l. Approximation 36(2).

[189] Singh, S. L., (2008). A new approach in numerical Praxis, Progress Math.(Varanasi), 32(2)(1998) 75-89.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Kadri DOĞAN

Doğum Tarihi ve Yeri : 02/09/1981-NUSAYBİN

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : kdogan@yildiz.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Matematik	Yüzüncü Yıl Üniversitesi	2007
Lisans	Matematik	İnönü Üniversitesi	2004
Lise	Fen	Nusaybin Lisesi	1999

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	**Firma/Kurum**	**Görevi**
2005-2009	özel eğitim kurumları	Uzman öğretici
2010-2011	Artvin Çoruh Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2011-	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. Dogan, K., & Karakaya, V. (2014). On the Convergence and Stability Results for a New General Iterative Process. *The Scientific World Journal*. (S.C.I)

(Tez kapsamında yapılan makale)

2. Karakakya V., Şimşek N., Doğan K., (2014). *New matrix domain derived by the matrix product, Filomat ,**(Baskıda)*** (S.C.I)
3. Karakaya, V., Bouzara, N. E. H., Doğan, K., & Atalan, Y. (2014). Existence of Tripled Fixed Points for a Class of Condensing Operators in Banach Spaces. *The Scientific World Journal*, *2014*. (S.C.I)
4. Karakaya, V., Gürsoy, F., Doğan, K. ve Ertürk, M., (2013). "Data Dependence Results for Multistep and CR Iterative Schemes in the Class of Contractive-Like Operators", Abstract and Applied Analysis, 2013:1-7. (S.C.I)
5. Karakaya, V., Doğan, K., Gürsoy, F. ve Ertürk, M., (2013). "Fixed Point of a New Three-Step Iteration Algorithm under Contractive-like Operators over Normed Spaces", Abstract and Applied Analysis, 2013:1-10. (S.C.I)
6. Karakaya, V., , Doğan, K.,Atalan, Y., Bouzara N. E. H. (2015)." Some Fixed Point Results for a New Three Steps Iteration Process in Banach Spaces", Fixed Point Theory, **(Baskıda)** (S.C.I)

Bildiri

1. Doğan K., Şimşek N., Altun Y., New sequence spaces defined by generalized B^{m} difference matrix of order m and factorable matrix , International Conference on Applied Analysis and Application(ICAAA-2012) , (2012).
2. Gürsoy, F., Karakaya, V., Doğan, K., & Ertürk, M. (2013, Haziran). Some Convergence Results For Jungck-Noor and Jungck-Thianwan Hybrid-Type Iterative Procedures. International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM2013). Istanbul/TURKEY
3. Karakaya, V., Gürsoy, F., Doğan, K., & Ertürk, M. (2013, Şubat). Data

Dependence Of Multistep And CR Iterative Schemes In The Class Of Contractive-Like Operators. International Conference On Mathematical Sciences And Statistics 2013 (ICMSS 2013). Kuala Lumpur/MALAYSIA

4. Doğan, K., Karakaya, V., Ertürk, M. & Gürsoy, F., (2013, Şubat). Fixed Points of Quasi-Contractive Type Operators in Normed Spaces by a Three-step iteration process. International Conference On Mathematical Sciences And Statistics 2013 (ICMSS 2013). Kuala Lumpur/MALAYSIA.

5. Doğan, K., Karakaya, V., Gürsoy, F. ve Ertürk, M., (2013). "Convergence results for Jungck-SP and Jungck-Noor type iteration algorithms in convex metric spaces", ICAAMM2013, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 2-5 June 2013, Istanbul-Turkey.

6. Doğan, K., Karakaya, V.,Convergence and stability results for a new general iterative process, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM2013). Istanbul/TURKEY.

7. Hacıoğlu E., Karakaya V., Doğan K., Atalan Y., On the convergence results for a new iteration method under generalized multivalued nonexpansive mappings in Banach spaces, Karatekin Mathematics Days (KMD2014) Çankırı /TURKEY.

8. Atalan Y., Karakaya V., Doğan K., Bouzara N. H., On DPM Iteration Method for Weak Contraction Mappings in Banach Spaces, Karatekin Mathematics Days (KMD2014) Çankırı /TURKEY

9. Bouzara N. H., Karakaya V., Doğan K., Atalan Y., On Different Results for a New Two-Step Iteration Method under Weak Contraction Mappings in Banach Spaces , Karatekin Mathematics Days (KMD2014) Çankırı /TURKEY.

10. Doğan K., Karakaya V., On some results of MP iteration procedure for weak contraction operator in Banach spaces , Karatekin Mathematics Days (KMD2014) Çankırı /TURKEY

11. Karakaya V., Bouzara N. H., Doğan K., Atalan Y., Existence of tripled fixed points for a class of condensing operators , Karatekin Mathematics Days (KMD2014) Çankırı /TURKEY.

12. Doğan K., Karakaya V., Two step perturbed iterative algorithm for

generalized nonlinear implicit quasi-variational inclusion, V Congress of Mathematicians of Macedonia, Ohrid, R. Macedonia, 2014.

13. Doğan K., Karakaya V., "On Mann-Picard Newton-like iteration process", The 11th International Conference on Fixed Point Theory and its Applications (ICFPTA 2015), Galatasaray University,
14. Istanbul/Turkey,2015.

Doğan K., Karakaya V., "Some fixed point results on generalized convex metric spaces" International Conference on Analaysis and its Applications (ICAA2015), Aligarh Muslim University, Aligarh/India,2015

Proje

1. Proje Adı: Bazı Geometrik özellikler ve sabit nokta iterasyonları
   Proje Yürütücüsü: Prof.Dr. Vatan KARAKAYA
   Araştırmacı: Kadri DOĞAN
   Destekleyen Kurum/ Birim: Yıldız Teknik Üniversitesi/ Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü
   Proje No: BAPK 2014-07-03-DOP02

ÖDÜLLERİ

1. YTÜ-UBYT (Yıldız Teknik Üniversitesi Uluslararası Bilimsel Yayınları Teşvik Desteği), 2013.
2. TÜBİTAK-UBYT (TÜBİTAK Uluslararası Bilimsel Yayınları Teşvik Desteği), 2014.