T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BANACH UZAYLARINDA BAZI GEOMETRİK KAVRAMLAR

FATMA ALTUN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
Prof. Dr. VATAN KARAKAYA

İSTANBUL, 2012

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BANACH UZAYLARINDA BAZI GEOMETRİK KAVRAMLAR

Fatma ALTUN tarafından hazırlanan tez çalışması 09.07.2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Ömer GÖK

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Yrd. Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK

İstanbul Ticaret Üniversitesi _____

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans çalışmamı planlayıp yöneten, bilgi ve desteğiyle karşılaştığım tüm zorluklarda yoluma ışık tutan, güler yüzüyle motivasyonumu arttıran, hoşgörü ve sabrını hiç esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. Vatan KARAKAYA' ya sonsuz saygı ve teşekkürlerimi bir borç bilirim. Ayrıca tez çalışmam boyunca manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan çok değerli arkadaşlarım Ebru ÇAKMAK, Kevser SEVİM ve Ümmü ŞAHİN' e tüm içtenliğimle teşekkürlerimi sunuyorum.

Son olarak eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini en önemlisi sevgilerini esirgemeyen sevgili anne ve babama sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Haziran, 2012

Fatma ALTUN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ v

ŞEKİL LİSTESİ..... vi

ÖZET vii

ABSTRACT viii

BÖLÜM 1

GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 2
1.3 Hipotez 3

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR 4

2.1 Temel Tanım ve Teoremler 4
2.2 Banach Uzaylarında Temel Geometrik Kavramalar 9

BÖLÜM 3

MODÜLER VE NORMLU UZAYLARDA BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLER 24

3.1 Modüler Uzayların Yapısal Özellikleri ve Uygulamaları 24

BÖLÜM 4

YENİ BİR PARANORMLU DİZİ UZAYI VE BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ 42

KAYNAKLAR 57

ÖZGEÇMİŞ 60

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
ρ	Konveks Modül
ces_p	Cesaro Dizi Uzayı
$ces(p)$	Genelleştirilmiş Cesaro Dizi Uzayı
$conv(A)$	A Kümesinin Konveks Kabuğu
$\overline{conv}(A)$	A Kümesinin kapalı Konveks Kabuğu
$B(X)$	X Uzayının Kapalı birim Küresi
$S(X)$	X Uzayının Birim Küresi
X_ρ	Modüler Uzay
$\overset{w}{\to}$	Zayıf Yakınsama
X^*	Dual Uzay
$\delta(\varepsilon)$	Konvekslik modülü
$\beta(\varepsilon)$	Gurarii konvekslik modülü
$\alpha(C)$	C kümesinin kompaktlık ölçüsü
π_i	$i.$ koordinat dönüşümü

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa
Şekil 2. 1 Düzgün Uzaylar 10
Şekil 2. 2 Refleksif Olmayan Uzaylar..... 12
Şekil 2. 3 Kesin Konveks ve Düzgün Konveks Uzaylar..... 14

ÖZET

BANACH UZAYLARINDA BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLER

Fatma ALTUN

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Dört bölüm olarak tasarlanan bu çalışmanın birinci bölümünde literatür özeti ve mevcut çalışmanın amacı yer almaktadır.

İkinci bölümünde ise daha sonra kullanılmak üzere fonksiyonel analize ait tanım ve teoremler ile bazı geometrik kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde modüler uzay kavramı verilmiştir. Ayrıca modüler yapı ile oluşturulmuş bazı dizi uzayları üzerinde ikinci bölümde verilen bazı geometrik özelliklerin uygulaması verilmiştir.

Dördüncü bölümde yeni bir paranormlu dizi uzayı tanımlanarak bu uzay üzerinde bazı topolojik özellikler ile geometrik özellikler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Modüler yapı, dizi uzayları, paranomlu uzay, geometrik özellikler, topolojik özellikler.

ABSTRACT

SOME GEOMETRİC PROPERTIES OF BANACH SPACES

Fatma ALTUN

Department of Mathematical Engineering

MSc. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

This study consist of four sections. In the first section the summary of the literature and purpose of the current study have been given.
In the second chapter some basic definitions and theorems of functional analysis which are used in the following chapters have been given.

In the third chapter modular spaces have been introduced. Some geometric properties which are given in the second section were applied over the some sequence spaces which constructed with modular structure.

In the fourth chapter a new paranormed sequence space has been introduced and some topolojical and geometric properties of this spaces have been studied.

Keywords: Modüler structure, sequence spaces, paranormed space, geometric properties, topolojical properties.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Son zamanlarda dizi uzaylarının topolojik özelliklerinin yanı sıra geometrik özellikleri de geniş bir çalışma alanına sahip olmuştur. Bu sayede fonksiyonel analizlin anlaşılmasında güçlük çekilen bazı kavramlarına açıklık getirilmiştir. Bu geometrik özelliklere ilişkin yapılan bazı çalışmalar aşağıda verilmiştir.

Opial (1967), kendi adıyla anılan Opial özelliğini tanımlayarak $\ell_p \ (1<p<\infty)$ uzaylarında bu özelliğin sağlanıp $L_p[0,2\pi]$ uzaylarında ise sağlamadığını göstermiştir. Franchetti (1981), herhangi sonsuz boyutlu bir Banach uzayının Opial özelliğini sağlayan eşdeğer bir norma sahip olduğunu ispatlamıştır. Daha sonra Prus (1992), düzgün Opial özelliğini tanımlamıştır. Huff (1980), yaklaşık olarak düzgün konvekslik kavramını tanımlayarak her yaklaşık olarak düzgün konveks Banach uzaylarının refleksif olduğunu ve düzgün Kadec-Klee özelliğine sahip olduğunu göstermiştir. Kutzarova (1991), $k-$yaklaşık olarak Banach uzaylarını tanımlamıştır.

Yukarıda değinilen özellikler ile diğer bazı geometrik özellikler birçok yazar tarafından çeşitli dizi uzayları üzerinde incelenmiştir.

Shue (1970), ilk olarak Cesaro dizi uzayını normla birlikte tanımlamıştır. Birçok özelliği ile Cesaro dizi uzayları $\left(ces_p\right)$, birçok yazar tarafından çalışılmıştır. Liu, Wu ve Lee (1996), $\left(ces_p\right)$' nin Kadec-Klee ve yerel düzgün rotund olma özelliklerine sahip olduğunu göstermişlerdir. Cui, Hudzik ve Pluciennik (1997, ces_p' nin $p-$tipte Banach-Saks özelliğini çalışmışlardır. Sanhan ve Suantai (2003), normlu Cesaro dizi uzaylarını paranormlu dizi uzaylarına genelleştirmişlerdir. Ayrıca genelleştirilmiş bu

dizi uzayı üzerinde modüler yapı kurarak bazı geometrik özellikleri çalışmışlardır. Sanhan ve Suantai (2003), genelleştirilmiş Cesaro dizi uzayları üzerinde $k-NUC$ özelliğini çalışarak diğer geometrik özelliklere ilişkin sonuçlar elde etmişlerdir. Petrot ve Suantai (2005), genelleştirilmiş Cesaro dizi uzayı üzerinde düzgün Opial özelliğini çalışmışlardır. Karakaya (2007), Lacunary içerikli yeni bir dizi uzayı tanımlayıp bu uzayı Luxemburg normu ile donatarak bu uzay üzerinde Kadec-Klee ve rotund olma gibi geometrik özellikleri incelemiştir. Mongkolkeha ve Kumam (2011), Karakaya (2007) tarafından tanımlanan dizi uzayı üzerinde (β) ve düzgün Opial özelliklerini çalışmışlardır. Khan ve Rahman (1997), $ces\left[(p_n),(q_n)\right]$ dizi uzayını tanımlamışlardır. Mursaleen ve Khan (2005), bu uzayı vektör değerli dizi uzayına genelleştirmişlerdir. Şimşek ve Karakaya (2010), $ces\left[(p_n),(q_n)\right]$ paranormlu dizi uzayını vektör değerli $ces(X,p_n,q_n)$ uzayına genelleştirerek bazı topolojik özelliklerinin yanı sıra bu uzay üzerinde Kadec-Klee ve rotund olma özelliklerini çalışmışlardır. Savaş, Karakaya ve Şimşek (2009), $\ell(p)-$tipte yeni bir dizi uzayı tanımlayarak bu uzayın bazı topolojik özellikleri ile $p-$tipte Banach-Saks ve Gurarii konvekslik modülü ile ilgili geometrik özelliklerini incelemişlerdir.

Leindler (1965), ilk olarak $(V,\lambda)-$toplanabilirliği tanımlamak için de la Vallee ortalamalarını kullanmıştır. Malkowsky ve Savaş (2000), genelleştirilmiş de la Vallee Poussin ortalamalarından doğan yeni dizi uzayları tanımlamışlardır. Savaş, Şimşek ve Karakaya (2010), de la Vallee-Poussin ortalamarı ile tanımlı yeni bir dizi uzayı tanımlayarak bu uzayın bazı topolojik ve geometrik özelliklerini incelemişlerdir. Şimşek (2010), tanımlanan bu dizi uzayının düzgün Opial ve $k-NUC$ gibi geometrik özelliklerini çalışmışlardır. Aynı zamanda bu uzayla ilgili bazı sonuçlara ulaşmıştır. Malkowsky ve Savaş (2004), genelleştirilmiş ağırlıklı ortalamaları kullanarak yeni bir dizi uzayı tanımlamışlardır. Altay ve Başar (2007), bu dizi uzayından esinlenerek yeni bir paranormlu dizi uzayı tanımlamışlardır. Şimşek ve Karakaya (2009), $\ell_\rho(u,v,p)$ modüler dizi uzayını tanımlayarak Kadec-Klee ve Opial özelliklerini incelemişlerdir.

1.2 Tezin Amacı

Tezimizin amacı birçok uygulama alanı olan bazı geometrik kavramların tanıtılması ve bu kavramların çeşitli dizi uzayları üzerinde uygulamalarının verilmesidir.

1.3 Hipotez

$V=(v_{nk})$ matrisi kullanılarak $\ell_{\rho\Delta}(u,v,p)$ dizi uzayı tanımlanıp bazı topolojik ve geometrik özelliklerinin incelenmesi hedeflenmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölüm, daha sonra kullanılacak olan fonksiyonel analizin temel kavramlarının takdimine ayrılmıştır.

Tanım 2.1 (Lineer uzay)

X boş olmayan bir cümle ve K, reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+ : X \times X \to X$$

$$\cdot : K \times X \to X$$

ikili işlemleri aşağıda verilen özellikleri sağlıyorsa X cümlesine K üzerinde bir lineer (vektör) uzay adı verilir (Maddox [1]).

Her $\alpha, \beta \in K$ ve $x, y, z \in X$ için

(L1) $x + y = y + x$

(L2) $x + (y + z) = (x + y) + z$

(L3) $x + \theta = x$ olacak şekilde $\theta \in X$ vardır.

(L4) Her bir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde $(-x) \in X$ vardır.

(L5) $1.x = x$

(L6) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

(L7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

(L8) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

Tanım 2.2 (Lineer altuzay)

X bir lineer uzay ve M de X ' in bir alt cümlesi olsun.

$x, y \in M$ ve α, β skaler olmak üzere $\alpha x + \beta y \in M$ ise M ye X ' in bir lineer alt uzayı denir (Maddox [1]).

Tanım 2.3 (Normlu lineer uzay)

X , K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|.\| : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ çiftine de normlu lineer uzay denir (Maddox [1]).

(N1) $\|x\| \geq 0$

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\lambda \in K$

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

Her normlu lineer uzay $d(x.y) = \|x - y\|$ metriği ile üretilir ve norm tarafından üretilen metrik olarak adlandırılır.

Tanım 2.4 (Yarı Norm)

X , K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer $q : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa q ' ya bir yarınorm , (X, q) ' ya da bir yarınormlu uzay denir (Maddox [1]).

i) $q(\lambda x) = |\lambda| q(x)$,

ii) $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$.

Tanım 2.5 (Metrik Uzay)

X , boştan farklı bir cümle olmak üzere;

(M1) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

(M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M3) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$

(M4) $\forall x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

aksiyomlarını sağlayan

$$d : X \times X \to \mathbb{R}^+$$

fonksiyonuna X için bir metrik, (X, d) ikilisine de metrik uzay denir (Kreyszig [2]).

Tanım 2.6

$X=(X,d)$ bir metrik uzay olmak üzere (x_n), X ' de bir dizi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0$$

olacak şekilde $x\in X$ varsa (x_n) dizisi yakınsaktır denir (Kreyszig [2]).

Tanım 2.7

$X=(X,d)$ bir metrik uzay olmak üzere (x_n) X ' de bir dizi olsun.

$\forall\varepsilon>0$ ve her $m,n>N$ için $d(x_n,x_m)<\varepsilon$ olacak şekilde bir $N=N(\varepsilon)$ varsa (x_n) dizisi Cauchy dizisi olarak adlandırılır (Kreyszig [2]).

Tanım 2.8

(X,d) bir metrik uzay olsun. Eğer X ' de her Cauchy dizisi X ' de bir noktaya yakınsıyorsa X ' e tam metrik uzay denir (Maddox [1]).

Tanım 2.9 (Yakınsak Dizi)

$(X,\|.\|)$ bir normlu uzay ve $x=(x_n)$, X ' de bir dizi olsun.

$\forall\varepsilon>0$ ve her $n>N(\varepsilon)$ için $\|x_n-x\|<\varepsilon$ olacak şekilde $N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine $x\in X$ ' e yakınsıyor denir (Kreyszig [2]).

Tanım 2.10 (Paranormlu Uzay)

X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer $g:X\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, $\lambda\in K$, $x,y\in X$ için

i) $g(\theta)=0$,
ii) $g(x)=g(-x)$,
iii) $g(x+y)\le g(x)+g(y)$,
iv) $\lambda\to\lambda_0$ ve $g(x-x_0)\to 0$ iken $g(\lambda x-\lambda_0 x_0)\to 0$

şartlarını sağlıyorsa g ' ye bir paranorm ve (X,g) ikilisine de paranormlu uzay denir (Malkowsky ve Savaş [3]).

Tanım 2.11 (Tam Paranormlu Uzay)

Bir (X,g) paranormlu uzayında alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa (X,g) uzayına tam paranormlu uzay denir (Maddox [1]).

Tanım 2.12 (Banach Uzayı)

Bir $(X,\|.\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahipse, bu $(X,\|.\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı denir (Maddox [1]).

Tanım 2.13 (Dizi Uzayları)

Kompleks ve reel değerli tüm $x=(x_k)$ dizilerinin cümlesi w olarak gösterilmek üzere;

$x=(x_k), y=(y_k)\in w$ ve α bir sabit olsun.

$x+y=(x_k+y_k)$ ve $\alpha x=(\alpha x_k)$

şeklinde tanımlanan işlemler altında w bir lineer uzaydır.

Literatürde yer alan bazı iyi bilinen dizi uzayları aşağıda verilmiştir.

$$\ell_\infty=\left\{x=(x_k)\in w:\sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k|<\infty\right\}$$

$$c=\left\{x=(x_k)\in w:\lim_{k\to\infty}x_k=l,\ l\in\mathbb{R}\right\}$$

$$c_0=\left\{x=(x_k)\in w:\lim_{k\to\infty}x_k=0\right\}$$

$$\ell_1=\left\{x=(x_k)\in w:\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|<\infty\right\}$$

$$\ell_p=\left\{x=(x_k)\in w:\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty\right\}$$

$$cs=\left\{x\in w:\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right|=0\right\}$$

$$bs=\left\{x\in w:\sup\left|\sum_{k=1}^{n}x_k\right|<\infty\right\}$$

Bu uzaylar sırasıyla sınırlı, yakınsak, sıfıra yakınsak, mutlak yakınsak, p-yakınsak, yakınsak serilerin ve sınırlı serilerin uzayı olarak adlandırılır. Bu uzaylardan ℓ_∞, c, c_0 uzayları $\|x\|_\infty=\sup_k|x_k|$ normu altında birer Banach uzaylarıdır. Aynı şekilde ℓ_1 ve ℓ_p uzayları sırasıyla $\|x\|_1=\sum_k|x_k|$ ve $\|x\|_p=\left(\sum_k|x_k|^p\right)^{1/p}$ normları ile birer Banach uzaylarıdır. Bu uzaylar arasında

$$l_1\subset l_p\subset l_q\subset c_0\subset c\subset l_\infty \qquad (1<p<q<\infty)$$

şeklinde bir kapsama bağıntısı olup, aşağıda verildiği gibi bir norm eşitsizliği geçerlidir (Maddox [1]).

$$\|x\|_1\geq\|x\|_p\geq\|x\|_q\geq\|x\|_\infty$$

Tanım 2.14 (Lineer Fonksiyonel)

X bir lineer uzay olmak üzere $f : X \to C$ dönüşümüne bir fonksiyonel denir. Eğer her $x, y \in X$ için $f(x+y) \le f(x) + f(y)$ eşitsizliği gerçekleniyorsa, f fonksiyoneline alt toplamsal,

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ eşitliği gerçekleniyorsa toplamsaldır denir. Eğer her $x \in X$ ve her λ skaleri için $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ ise f fonksiyoneli homojendir denir. Homojen ve alt toplamsal olan bir fonksiyonele alt lineer, toplamsal ve homojen olan bir fonksiyonele ise lineer fonksiyonel denir. Her $x \in X$ için $|f(x)| \le K.||x||$ olacak şekilde bir $K>0$ reel sayısı varsa $f : X \to C$ dönüşümüne sınırlı lineer fonksiyonel denir.

Sınırlı bir lineer fonksiyonelin normu;

$$\| f \| = \sup_{x \neq \theta} \frac{| f(x) |}{\| x \|}$$

olarak verilir (Maddox [1]).

Tanım 2.15 (Sürekli Dual Uzay)

X normlu bir uzay olsun. X üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonellerden oluşan $B(X, \mathbb{R})$ cümlesi

$$\| f \| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq \theta}} \frac{| f(x) |}{\| x \|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \| x \| = 1}} | f(x) |$$

normu ile bir Banach uzayı oluşturur. Bu uzaya X ' in dual uzayı denir ve X^* ile gösterilir (Maddox [1]).

Tanım 2.16 (İkinci Dual)

X^*, X Banach uzayının duali olmak üzere $B(X^*, \mathbb{R})$ uzayına X uzayının ikinci duali denir ve X^{**} ile gösterilir. X^{**} da bir Banach uzayıdır (Maddox [1]).

Tanım 2.17 (Refleksif Uzay)

X normlu bir uzay olmak üzere $X^{**} = X$ ise X uzayına refleksif uzay denir (Maddox [1]).

Tanım 2.18 (Kuvvetli Yakınsaklık)

X bir normlu lineer uzay ve $(x_n) \in X$ olmak üzere $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n), kuvvetli yakınsak olarak adlandırılır (Kreyszig [2]).

Tanım 2.19 (Zayıf Yakınsaklık)

X bir normlu lineer uzay ve $(x_n) \in X$ olmak üzere;

Her $f \in X^*$ için $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisi x noktasına zayıf yakınsar denir ve $x_n \xrightarrow{w} x$ şeklinde gösterilir (Kreyszig [2]).

Tanım 2.20

Bu çalışmada $(X, \|.\|)$ bir reel Banach uzayı olmak üzere sırasıyla $B(X)$ ve $S(X)$ ile X uzayının kapalı birim yuvarı ve birim küresi gösterilmiştir.

$$B(X) = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$$

ve

$$S(X) = \{x \in X : \|x\| = 1\}.$$

2.2 Banach Uzaylarında Temel Geometrik Kavramlar

Bu çalışmanın temel amaçlarından birisi Banach uzaylarının geometrisinin belirlenmesi ve geometrik kavramların literatür gelişimine göre takdimidir. Dolayısıyla bu bölümde Banach uzaylarının geometrisini belirlemede kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.21 (Konveks Uzay)

X, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $E \subset X$ olmak üzere her $x, y \in E$ ve $\lambda \in (0,1)$ için $\lambda x + (1-\lambda) y \in E$ ise E alt kümesine konvekstir denir.

Örnek 2.1

ℓ_p uzayı konvekstir.

İspat

$\ell_p = \left\{ x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty,\ 1 < p < \infty \right\}$ şeklinde tanımlanır.

$\lambda \in (0,1)$ ve $x, y \in \ell_p$ olsun.

Bu durumda $\sum_k |x_k|^p < \infty$, $\sum_k |y_k|^p < \infty$ dir.

$$\sum_k |\lambda x_k + (1-\lambda) y_k|^p \le |\lambda|^p \sum_k |x_k|^p + |1-\lambda|^p \sum_k |y_k|^p$$
$$< \infty$$

Dolayısıyla $\lambda x + (1-\lambda) y \in \ell_p$ olduğundan ℓ_p konvekstir.

Benzer şekilde ℓ_1, c, c_0 uzaylarının da konveks olduğu gösterilebilir.

Tanım 2.22 (Konvekslik modülü)

X Banach uzayının konvekslik modülü $\delta_X : [0,2] \to [0,1]$ olmak üzere;

$$\delta_x(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\| \le 1, \|y\| \le 1, \|x-y\| \ge \varepsilon\right\}$$

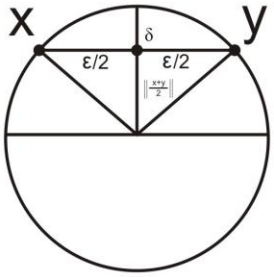
şeklinde tanımlanır (Clarkson [4]).

Tanım 2.23 (Düzgün Konveks Uzay)

Herbir $\varepsilon \in (0,2]$ için $x, y \in X$ olmak üzere;

$$\left.\begin{array}{r} \|x\| \le 1 \\ \|y\| \le 1 \\ \|x-y\| > \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \le \delta$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa X Banach uzayı düzgün konvekstir, denir (Clarkson [4]).



Şekil 2.1 Düzgün Konveks Uzay

Örnek 2.2

$2 \le p < \infty$ için ℓ_p uzayları düzgün konvekstir (Agarval, O'Regan ve Sahu [5]).

İspat

$x, y \in \ell_p$ için

$$\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \le 2^{p-1}\left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)$$

eşitsizliği geçerlidir. Dolayısıyla $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$ ve $\|x-y\| \ge \varepsilon$ olacak şekilde $x, y \in \ell_p$ alındığında

$$\|x+y\|^p \le 2^p - \|x-y\|^p \text{ ve } \frac{\|x+y\|^p}{2^p} \le 1 - \frac{\|x-y\|^p}{2^p}$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \le \left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p} = 1-\left[1-\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p}\right]$$
$$\le 1-\delta_{\ell_p}(\varepsilon)$$

elde edilir. Burada $\delta_{\ell_p}(\varepsilon) \ge 1-\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p}$ dir.

Örnek 2.3

$1 < p < \infty$ için L_p uzayları düzgün konvekstir (Carothers [6]).

İspat

L_p uzayının düzgün konveksliği $1 < p \le 2$ ve $2 \le p < \infty$ olmak üzere iki bölümde incelenmiştir.

$1 < p \le 2$ durumunda, $f, g \in L_p$ ve $q = p/(p-1)$ için

$$\|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^q \le 2\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)^{q-1} \tag{2.1}$$

eşitsizliği geçerlidir.

$\|f\|_p \le 1$, $\|g\| \le 1$ ve $\|f-g\|_p \ge \varepsilon$ olduğunda (2.1)' de verilen eşitsizlik gereği

$$\delta(\varepsilon) = 1-\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right)^q$$

dir. Burada $q = p/(p-1) \ge 2$ dir.

$2 \le p < \infty$ durumunda, $f, g \in L_p$ için

$$\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \le 2^{p-1}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Dolayısıyla $\|f\|_p \le 1$, $\|g\|_p \le 1$ ve $\|f-g\|_p \ge \varepsilon$ olduğunda

$$\|f+g\|_p^p \le 2^{p-1}.2-\varepsilon^p = 2^p\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)$$

Bu durumda $\delta(\varepsilon) = 1-\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p}$ dir.

Teorem 2.1 (Milman, Pettis Teoremi)

Düzgün konveks her uzay refleksiftir (Agarval, O'Regan ve Sahu [5]).

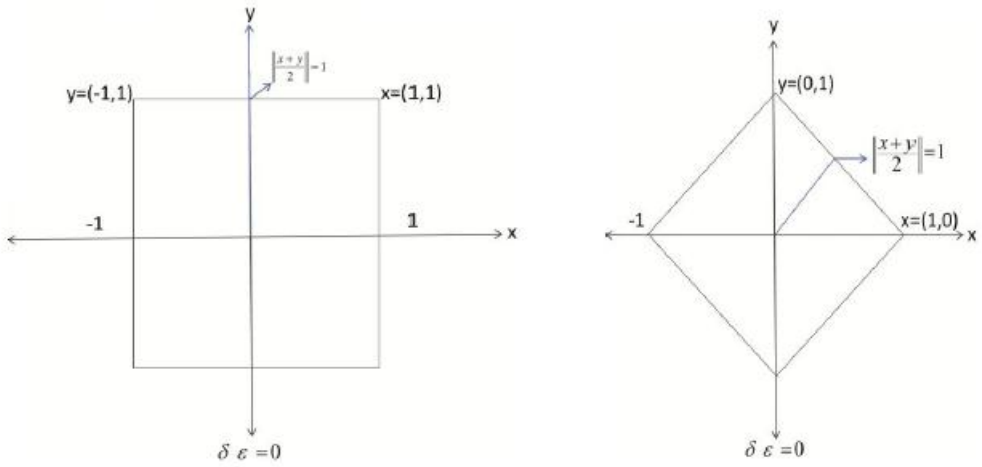
ℓ_1 ve ℓ_∞ uzaylarının refleksif olmadığını aşağıdaki örnek ile gösterebiliriz.

Örnek 2.4

$x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ olmak üzere;

$$\|x\|_\infty=\max\{|x_1|,|x_2|\}$$
$$\|x\|_1=|x_1|+|x_2|$$

normları ile ℓ_2^∞ ve ℓ_2^1 uzayları elde edilir. Bu uzayların her birinin birim yuvarı kareseldir ve her biri için $\varepsilon\in[0,2]$ olmak üzere $\delta(\varepsilon)=0$ dir. Dolayısıyla düzgün konveks uzay değillerdir.



Şekil 2.2 Refleksif Olmayan Uzaylar

Lemma 2.1

X düzgün konvekstir $\Leftrightarrow\|x_n\|\le 1,\ \|y_n\|\le 1$ olacak şekilde her $(x_n),\ (y_n)$ çifti için

$$\left\|\frac{x_n+y_n}{2}\right\|\to 1\Rightarrow\|x_n-y_n\|\to 0$$

İspat

X düzgün konveks bir uzay olsun.

$\forall n\in\mathbb{N}$ için $\|x_n\|\le 1,\ \|y_n\|\le 1$ ve $\lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|=2$ olacak şekilde $(x_n),\ (y_n)\in X$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|\neq 0$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $\varepsilon>0$ için $\|x_{n_i}-y_{n_i}\|\ge\varepsilon$ olacak şekilde (n)' nin bir (n_i) alt dizisi vardır.

X düzgün konveks olduğundan

$$\|x_{n_i}+y_{n_i}\|\le 2(1-\delta(\varepsilon)) \tag{2.2}$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon)>0$ vardır.

$\lim_{n\to\infty}\|x_n + y_n\| = 2$ olduğundan (2.2)' den $2 \le 2\left(1-\delta(\varepsilon)\right)$ elde edilir ki bu da bir çelişkidir.

Aksine $\|x_n\| \le 1,\ \|y_n\| \le 1$ ve $\lim_{n\to\infty}\|x_n + y_n\| = 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0$ olduğu kabul edilsin. X düzgün konveks değilse $\|x\| \le 1,\ \|y\| \le 1,\ \|x-y\| \ge \varepsilon$ iken $\|x+y\| \le 2\left(1-\delta(\varepsilon)\right)$ olacak şekilde $\delta(\varepsilon)$ yoktur. Bu durumda

i) $\|x_n\| \le 1,\ \|y_n\| \le 1,$

ii) $\|x_n + y_n\| \ge 2(1-1/n),$

iii) $\|x_n - y_n\| \ge \varepsilon$

olacak şekilde $(x_n),\ (y_n) \in X$ bulabiliriz. $\|x_n - y_n\| \ge \varepsilon$ olduğundan ve (ii), $\lim_{n\to\infty}\|x_n + y_n\| = 2$ olmasını gerektirdiğinden hipotezle çelişki elde edilir. Dolayısıyla X düzgün konvekstir (Agarval, O'Regan ve Sahu [5]).

Örnek 2.5

Her Hilbert uzayı paralelkenar kuralı gereği düzgün konvekstir. Gerçekten de

X bir Hilbert uzayı olmak üzere her $x, y \in S(X)$ ve her $\varepsilon \in [0,2]$ için paralelkenar kuralı uygulandığında

$$\delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}$$

olduğu görülür.

Örnek 2.6

$\|(x,y)\| = |x| + |y|$ veya $\|(x,y)\| = \sup(|x|,|y|)$ normları ile donatılan $\mathbb{R}^2$ düzgün konveks değildir.

Goebel ve Kirk [1990], $\varepsilon \in [0,2)$ olmak üzere $\delta(\varepsilon)$' nin sürekli ve $\varepsilon_0 = \sup\{\varepsilon : \delta(\varepsilon) = 0\}$ olmak üzere $[\varepsilon_0, 2]$ üzerinde kesin artan bir fonksiyon olduğunu göstermişlerdir.

Tanım 2.24 (Kesin Konveks Uzay)

$x, y \in S(X)$ ve $x \ne y$ olmak üzere $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$ ise X Banach uzayı kesin konvekstir denir (Prus [7]).

Örnek 2.7

ℓ_1 uzayı kesin konveks değildir. Bunu görmek için

$\varepsilon = 1$ ve $\bar{x} = (1,0,0,...)$, $\bar{y} = (0,-1,0,0,...)$ olarak alınırsa $\bar{x}, \bar{y} \in \ell_1$ ve $\|\bar{x}\|_{\ell_1} = 1 = \|\bar{y}\|_{\ell_1}$,

$\|\bar{x} - \bar{y}\|_{\ell_1} = 2 > \varepsilon$ olduğu açık bir şekilde görülür. Bununla birlikte $\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| = 1$ dir.

Dolayısıyla ℓ_1 kesin konveks değildir (Chidume [8]).

Örnek 2.8

ℓ_∞ uzayı kesin konveks değildir. Benzer şekilde örnek 2.7' de olduğu gibi

$\bar{u} = (1,1,0,0,...)$, $\bar{v} = (-1,1,0,0,...) \in \ell_\infty$ olarak seçilirse

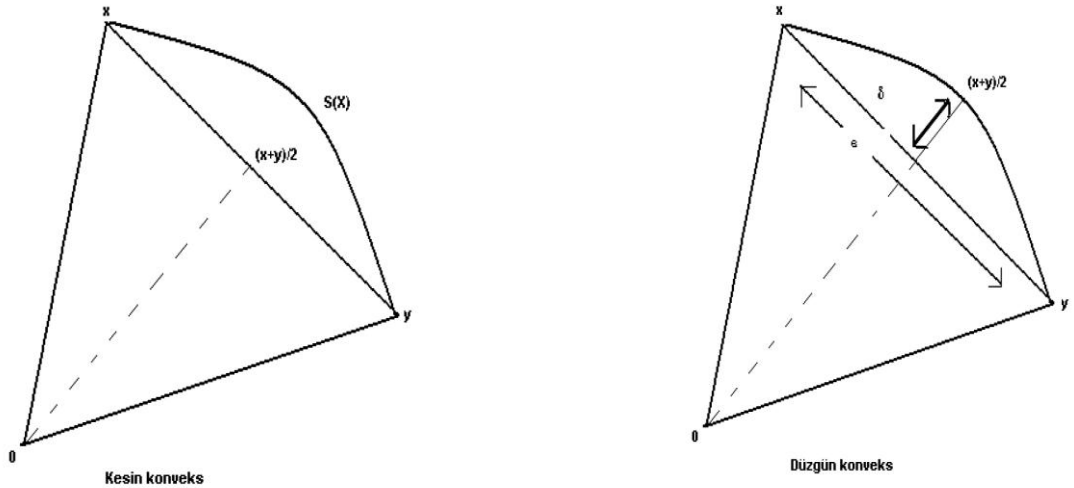
$\|\bar{u}\|_\infty = 1 = \|\bar{v}\|_\infty$ ve $\|\bar{u} - \bar{v}\|_\infty = 2 > \varepsilon$ olduğu açık bir şekilde görülür. Bununla birlikte $\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| = 1$ olduğundan ℓ_∞ uzayının kesin konveks olmadığı görülür [8].

Lemma 2.2

X Banach uzayı kesin konvekstir $\Leftrightarrow$ $\delta(2) = 1$ (Goebel ve Kirk [9]).

Teorem 2.2

Her düzgün konveks uzay kesin konvekstir (Chidume [8]).



Şekil 2.3 Kesin Konveks ve Düzgün Konveks Uzay

Kesin konveks olup da düzgün konveks olmayan Banach uzaylarına ilişkin Goebel ve Kirk aşağıdaki örneği vermişlerdir.

Örnek 2.9

$\mu > 0$ sabit olmak üzere $C[0,1]$,

$$\|x\|_\mu = \|x\|_0 + \mu\left(\int_0^1 x^2(t)\,dt\right)^{1/2}$$

ile tanımlı $\|.\|_\mu$ normuna sahip olsun. Burada $\|.\|_0$ supremum normudur. Bu durumda $x \in C[0,1]$ için

$$\|x\|_0 \le \|x\|_\mu \le (1+\mu)\|x\|_0$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu iki norm yeteri kadar küçük bir μ için eşdeğerdir. Fakat herhangi $\mu > 0$ için $\left(C[0,1], \|x\|_0\right)$ kesin konveks olmadığı halde $\left(C[0,1], \|x\|_\mu\right)$ kesin konvekstir. Diğer taraftan $\varepsilon \in (0,2]$ için $\|x\|_\mu = \|y\|_\mu = 1$, $\|x-y\| = \varepsilon$ ve $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|$ keyfi olarak 1' e yakın olacak şekilde $x, y \in C[0,1]$ fonksiyonları vardır. Dolayısıyla $\left(C[0,1], \|x\|_\mu\right)$ düzgün konveks (Chidume [8]).

Teorem 2.3

X ' in kesin konveks olması için gerek ve yeter koşul

i) $\|x\| = 1 = \|y\|$ olacak şekilde $x \ne y \in X$ için $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$

ve

ii) $1 < p < \infty$ ve $x \ne y \in X$ için $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p < \frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2}$

olmasıdır (Carothers [6]).

Gurarii [1967] tarafından Gurarii konvekslik modülü aşağıda verildiği şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.25 (Guarri modülü)

$0 \le \varepsilon \le 2$ olmak üzere gurarri konvekslik modülü,

$$\beta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \inf_{\alpha\in[0,1]} \|\alpha x + (1-\alpha)y\| : x, y \in S(X), \|x-y\| = \varepsilon\right\}$$

şeklinde tanımlanır (Savaş, Karakaya ve Şimşek [10]).

Tanım 2.26 (Extremum Nokta)

$x \in S(X)$ ve $x = \frac{y+z}{2}$ olacak şekilde her $y, z \in S(X)$ için $z = y =$ ise $x \in S(X)$ noktası extremum nokta olarak adlandırılır [11].

$ExtB(X)$ ile $B(X)$' in tüm extremum noktaları gösterilmiştir.

Örnek 2.10

$K=[0,1]$ olsun. Bu durumda 0 ve 1 noktaları bu küme için birer extremum noktadır.

Örnek 2.11

$K=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$ kümesi için $ExtK=\{(x,y): x^2+y^2=1\}$.

Örnek 2.12

$K=\{(x,y): x^2+y^2<1\}$ açık diski hiçbir extreme noktaya sahip değildir.

Tanım 2.27 (Rotund Uzay)

Birim küre üzerindeki herbir nokta kapalı birim yuvar için bir extremum nokta ise, yani $ExtB(X)=S(X)$ ise X rotund uzay olarak adlandırılır [12].

Denk bir tanım olarak;

$x\neq y$ olacak şekilde $x,y\in S(X)$ olsun.

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|<1$$

ise X Banach uzayı rotund uzaydır.

Örnek 2.13

e_1 ve e_2, c_0 uzayının iki standart bazı olmak üzere;

$x_1=e_1+e_2$ ve $x_2=e_1-e_2$ olarak alındığı taktirde

$$\|x_1\|_\infty=\|x_2\|_\infty=\left\|\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right\|=1$$

olduğundan c_0 rotund bir uzay değildir. Benzer şekilde ℓ_∞' da rotund bir uzay değildir.

Tanım 2.28

$\|x+y\|=2$ olacak şekilde herhangi $y\in S(X)$ için $x=y$ oluyorsa $x\in S(X)$ noktası kuvvetli U-noktası (SU-noktası) olarak adlandırılır (Cui, Hudzik ve Meng [13]).

Ayrıca;

X Banach uzayının rotund olması için gerek ve yeter koşul her $x\in S(X)$ noktasının bir SU-noktası olmasıdır.

Tanım 2.29 (Yerel Düzgün Rotunt Nokta)

$n \to \infty$ için $\|x_n + x\| \to 2$ olacak şekilde herhangi $(x_n) \in B(X)$ için $\|x_n - x\| \to 0$ ise $x \in S(X)$ noktası yerel düzgün rotund nokta olarak adlandırılır (Şimşek ve Karakaya [14]).

Tanım 2.30 (Yerel Düzgün Rotund Uzay)

Her $x \in S(X)$ noktası $B(X)$ için bir yerel düzgün rotund nokta ise X Banach uzayı yerel düzgün rotund (LUR) uzay olarak adlandırılır.

Diğer bir ifadeyle;

$\lim_{n\to\infty} \|x_n + x\| = 2$ olacak şekilde herbir $x \in S(X)$ ve herbir $(x_n) \subset S(X)$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ ise X Banach uzayı yerel düzgün rotund uzaydır, denir.

X Banach uzayı (LUR) olduğu taktirde rotund olma ve Kadec-Klee özelliklerine sahiptir (Şimşek ve Karakaya [14]).

Tanım 2.31 (Kompakt Yerel Düzgün Rotund Nokta)

$x \in S(X)$ olmak üzere $\|x_n + x\| \to 2$ olacak şekilde her $(x_n) \in S(X)$ dizisi $S(X)$'de kompakt ise $x \in S(X)$ noktası kompakt yerel düzgün rotund nokta olarak adlandırılır (Cui, Hudzik ve Meng [15]).

Tanım 2.32 (Zayıf Yerel Düzgün Rotund Nokta)

$\|x_n + x\| \to 2$ olacak şekilde herhangi $(x_n) \in S(X)$ için $x_n' \xrightarrow{w} x'$ olacak şekilde $x' \in S(X)$ ve (x_n') alt dizisi varsa $x \in S(X)$ noktası zayıf yerel düzgün rotund nokta olarak adlandırılır (Cui, Hudzik ve Meng [15]).

Tanım 2.33 (Orta noktada Yerel Düzgün Rotund olma)

$\|x_n\| \le 1,\ \|y_n\| \le 1,\ \|x\| = 1$ olmak üzere herhangi $x,\ (x_n),\ (y_n) \in X$ için

$\lim_{n\to\infty} \|2x - (x_n + y_n)\| = 0$ iken $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ ise X orta noktada yerel düzgün rotund bir uzaydır (Luh, Lin ve Troyanski [16]).

Tanım 2.34 (Kadec-Klee noktası)

$n \to \infty$ için $\|x_n\| \to 1$ olacak şekilde $(x_n) \in X$ için $x_n \xrightarrow{w} x$ iken $\|x_n - x\| \to 0$ ise $x \in S(X)$ noktası Kadec-Klee noktası (H-noktası) olarak adlandırılır (Şimşek ve Karakaya [14]).

Tanım 2.35 (Değme Noktası)

$x_0 \in S(X)$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$x_0 \notin \overline{conv}\left\{B(X) - \left(x_0 + \varepsilon B(X)\right)\right\}$$

ise x_0 noktası değme noktası olarak adlandırılır.

Tanım 2.36 ((G)-özelliği)

$S(X)$' in her noktası bir değme noktası ise X , (G) özelliğine sahiptir, denir.

Tanım 2.37 (Kadec-Klee)

$S(X)$' in her noktası $B(X)$ için bir H-noktası ise X Banach uzayı Kadec-Klee özelliğine sahiptir, denir (Şimşek ve Karakaya [14]).

Örnek 2.14

c_0 uzayı Kadec-Klee özelliğine sahip değildir.

Luh, Lin ve Troyanski (1988),

K bir Banach uzayının sınırlı, kapalı konveks bir kümesi olmak üzere;

$x \in K$' nın bir değme noktası olması için gerek ve yeter koşulun x' in K için bir extreme ve Kadec-Klee noktası olması gerektiğini göstermişlerdir.

Tanım 2.38

$(x_n) \subset X$ olmak üzere $\varepsilon > 0$ için

$$sep(x_n) = \inf\left\{\|x_n - x_m\| : n \neq m\right\} > \varepsilon$$

ise (x_n) dizisi ε -ayrılabilir bir dizidir (Şimşek [17]).

Huff [1980], düzgün Kadec-Klee özelliğini tanım 2.39' da verildiği şekilde tanımlamıştır.

Tanım 2.39 (Düzgün Kadec-Klee)

$sep(x_n) > \varepsilon$ ve $x_n \overset{w}{\to} x$ olmak üzere her $(x_n) \in S(X)$ ve her $\varepsilon > 0$ için $\|x\| < 1 - \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ varsa X Banach uzayı düzgün Kadec-Klee (UKK) özelliğine sahiptir, denir (Cui ve Hudzik [18]).

Huff [1980], düzgün Kadec-Klee özelliğine sahip her Banach uzayının Kadec-Klee özelliğine sahip olduğunu göstermiştir.

Tanım 2.40 (Yaklaşık olarak Düzgün Konvekslik)

$\forall \varepsilon > 0$ ve $sep(x_n) > \varepsilon$ olacak şekilde her $(x_n) \subset B(X)$ için

$$conv(x_n) \cap (1 - \delta) B(X) \neq \varnothing$$

olacak şekilde $\delta \in (0,1)$ varsa X Banach uzayı yaklaşık olarak düzgün konvekstir (NUC) denir (Şimşek [17]).

Huff [1980], bir X Banach uzayının NUC olabilmesi için gerek ve yeter koşulun X ' in refleksif ve (UKK) özelliğine sahip olması gerektirdiğini ispatlamıştır.

Tanım 2.41

X normlu bir uzay olmak üzere $C \subset X$ boştan farklı ve $T : C \to X$ olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ için

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

ise T genişlemeyen dönüşüm olarak adlandırılır (Agarval, O'Regan ve Sahu [5]).

Tanım 2.42

X normlu bir uzay olmak üzere X ' in her kapalı sınırlı ve konveks [zayıf kompakt konveks] bir K alt kümesi üzerinde tanımlı genişlemeyen dönüşüm bir sabit noktaya sahipse X uzayı sabit nokta özelliğine (FPP) [zayıf sabit nokta $(WFPP)$] özelliğine sahiptir, denir.

Goebel ve Kirk [1990] tarafından (NUC) Banach uzaylarının sabit nokta özelliğine (FPP) sahip olduğu verilmiştir.

Banach ve Saks [1930] tarafından Banach-Saks özelliği tanım 2.43' de verildiği şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.43 (Banach-Saks)

X Banach uzayındaki her sınırlı (zayıf null) (x_n) dizisi,

$$t_k(z) = \frac{1}{k}(z_1 + z_2 + ... + z_k)$$

olmak üzere $(t_k(z))$, X ' de norm yakınsak olacak şekilde $z = (z_n)$ alt dizisine sahipse X uzayı Banach-Saks (zayıf Banach-Saks) özelliğine sahiptir, denir (Cui, Meng ve Pluciennik [19]).

Diestel (1984), Banach-Saks özelliğine sahip her Banach uzayının refleksif olduğunu; fakat tersinin her zaman doğru olmadığını göstermiştir.

Kakutani (1938), herhangi düzgün konveks bir Banach uzayının Banach-Saks özelliğine sahip olduğunu ispatlamıştır. Ayrıca;

X refleksif bir Banach uzayı ve $x_n \overset{w}{\to} 0$ olacak şekilde her $(x_n) \in S(X)$ için $\|x_{n_1} + x_{n_2}\| < \theta$ olacak şekilde $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}$ $\theta \in (0,2)$ varsa X ' in Banach-Saks özelliğine sahip olduğunu ispatlamıştır (Cui, Meng ve Pluciennik [19]).

Knaust [1992], p-tipte Banach-Saks özelliğini aşağıda verildiği şekilde tanımlamıştır.

Tanım 2.44 (p-tipte Banach-Saks)

$1 < p < \infty$ olmak üzere $C > 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için her zayıf null (x_k) dizisi $\left\| \sum_{i=0}^{n} x_{kl} \right\| < C(n+1)^{1/p}$ olacak şekilde bir (x_{kl}) alt dizisine sahip ise Banach uzayı p-tipte Banach-Saks özelliğine sahiptir denir (Savaş, Karakaya ve Şimşek [10]).

Tanım 2.45

Herhangi $x \notin B(X)$ için x ile belirlenen drop;

$$D(x, B(X)) = conv(\{x\} \cup B(X))$$

kümesidir (Mongkolkeha ve Kumam [20]).

Tanım 2.46 (Drop Özelliği)

$B(X)$ ile ayrık olan her kapalı C kümesi için

$$D(x, B(X)) \cap C = \{x\}$$

olacak şekilde $x \in C$ varsa X , drop özelliğine sahiptir, denir (Mongkolkeha ve Kumam [20]).

Rolewicz (1987), bir X Banach uzayının drop özelliğine sahip olduğu taktirde refleksif olduğunu ispatlamıştır.

Montesinos (1987) bir X Banach uzayının drop özelliğine sahip olması için gerek ve yeter koşulun X ' in refleksif ve Kadec-Klee özelliğine sahip olması gerektiğini göstererek bu sonucu genişletmiştir.

Rolewicz (1987), yaklaşık olarak düzgün konvekslik (NUC) ve drop özelliği arasındaki ilişkiyi çalışırken (β)-özelliğini tanım 2.48' de verildiği şekilde tanımlamıştır.

Tanım 2.47 (Kuratowsky Kompaktlık Ölçüsü)

X ' in herhangi bir C alt cümlesi için C ' nin kuratowsky kompaktlık ölçüsü $\alpha(C)$ ile gösterilip,

$\alpha(C) = \inf \{\varepsilon > 0 : C,$ yarıçapı ε' dan küçük sonlu sayıda kümeler ile örtülür $\}$

şeklinde tanımlanır (Mongkolkeha ve Kumam [20]).

Tanım 2.48 (β -özelliği)

Herhangi $\varepsilon > 0$ için $1 < \|x\| < 1+\delta$ olduğunda

$$\alpha\left(D\left(x, B\left(X\right)\right) - B\left(X\right)\right) < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ varsa X Banach uzayı $\left(\beta\right)$-özelliğine sahiptir, denir (Cui, Meng ve Pluciennik [19]).

Kutzarova (1990), X Banach uzayının $\left(\beta\right)$ özelliğine sahip olması için gerek ve yeter koşulun her $\varepsilon > 0$ için $sep\left(x_n\right) \geq \varepsilon$ olan $\left(x_n\right) \in B\left(X\right)$ ve her bir $x \in B\left(X\right)$ için $\left\| \frac{x + x_k}{2} \right\| \leq 1 - \delta$ eşitsizliğini sağlayan bir k indisi olacak şekilde $\delta > 0$ ın var olması gerektiğini göstermiştir.

Aşağıda bazı geometrik özellikler arasındaki gerektirmeler verilmiştir.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \left(D\right) & \Rightarrow & \left(Rfx\right) \\ & & & & \Uparrow & & \\ \left(UC\right) \Rightarrow \left(\beta\right)-\text{özelliği} & \Rightarrow & \left(NUC\right) & \Rightarrow & \left(UKK\right) & \Rightarrow & \left(H\right)-\text{özelliği} \end{array}$$

(Mongkolkeha ve Kumam [20]).

Goebel ve Sekowsky [1984], tanım 2.49' da verildiği üzere Δ-düzgün konveks Banach uzayını tanımlayarak düzgün konveksliğin tanımını genişletmişlerdir.

Tanım 2.49 (Δ -Düzgün Konveks Uzay)

$\alpha\left(E\right) > \varepsilon$ olacak şekilde herhangi $\varepsilon > 0$ ve her bir konveks $E \subset B\left(X\right)$ için

$$\inf\left\{\|x\| : x \in E\right\} < 1 - \delta$$

olacak şekilde $\delta > 0$ varsa X Banach uzayı Δ-düzgün konveks olarak adlandırılır.

Kutzarova [1991], yaklaşık olarak düzgün konvekslik kavramının bir genellemesi olan $k-$yaklaşık olarak konvekslik tanımını vermiştir.

Tanım 2.50 (k-yaklaşık olarak düzgün konvekslik)

$k \geq 2$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $sep\left(x_n\right) > \varepsilon$ olan herhangi $\left(x_n\right) \subset B\left(X\right)$ dizisi için

$$\left\| \frac{x_{n_1} + x_{n_2} + ... + x_{n_k}}{k} \right\| < 1 - \delta$$

olmak üzere $n_1, n_2, ..., n_k$ var olacak şekilde $\delta > 0$ varsa X Banach uzayı $k-$yaklaşık olarak konvekstir $\left(k - NUC\right)$, denir.

Kutzarova (1991), k-yaklaşık olarak düzgün konveks Banach uzaylarının yaklaşık olarak düzgün konveks olduğunu; fakat tersinin her zaman doğru olmadığını göstermiştir.

Fan ve Glicksberg [1955] tarafından tamamen k-rotund uzaylar tanım 2.51' de verildiği şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.51 (Tamamen k-Rotund Uzay)

Her $(x_n) \subset B(X)$ için $n_1, n_2, ..., n_k \to \infty$ iken $\|x_{n_1} + x_{n_2} + ... + x_{n_k}\| \to k$ olması (x_n)' nin yakınsak olmasını gerektiriyorsa X Banach uzayı tamamen k-rotund (fully k-rotund) olarak adlandırılır.

$UC \Rightarrow kR \Rightarrow (k+1)R$ gerektirmesi geçerli olup kR uzaylar refleksif ve rotund uzaylardır ayrıca;

$k - NUC \Rightarrow kR$ gerektirmesi de doğrudur (Sanhan ve Suantai [21]).

Opial [1970] tarafından Banach uzaylarının geometrisinde önemli derecede rol oynayan Opial ve düzgün Opial özelliği tanım 2.52 ve 2.53' de verildiği şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.52 (Opial)

Her $x \neq 0$ ve herhangi zayıf null bir (x_n) dizisi için

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\|$$

ise X Banach uzayı Opial özelliğine sahiptir, denir (Şimşek ve Karakaya [22]).

Opial [1967], $1 < p < \infty$ olmak üzere ℓ_p uzaylarının Opial özelliğini sağladığı halde $Lp[0, 2\pi]$ $(p \neq 2, 1 < p < \infty)$ uzaylarının bu özelliği sağlamadığını ispatlamıştır.

Franchetti [1981], herhangi sonsuz boyutlu bir Banach uzayının Opial özelliğini sağlayan eşdeğer bir norma sahip olduğunu ispatlamıştır.

Örnek 2.15

Her Hilbert uzayı Opial koşulunu sağlar (Agarval, O'Regan ve Sahu [5]).

İspat

H bir Hilbert uzayı ve $(x_n) \in H$, $x_n \xrightarrow{w} x \in H$ olmak üzere her zayıf yakınsak dizinin sınırlı olması gerektiğinden $\limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\|$ ve $\limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\|$ sonludur.

$$\|x_n - y\|^2 = \|x_n - x + x - y\|^2 = \|x_n - x\|^2 + \|x - y\|^2 + 2\langle x_n - x, x - y\rangle$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla $\limsup_{n\to\infty}\|x_n - y\|^2 > \limsup_{n\to\infty}\|x_n - x\|^2$ dir.

Gossez, Lami [1972], Opial özelliğine sahip bir Banach uzayının zayıf sabit nokta özelliğine sahip olduğunu göstermişlerdir.

Tanım 2.53 (Düzgün Opial Özelliği)

Her $\varepsilon > 0$ için $(x_n) \in S(X)$ herhangi zayıf null bir dizi ve $\|x\| \geq \varepsilon$ olacak şekilde $x \in X$ için

$$1 + \tau \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\|$$

ise X Banach uzayı düzgün Opial özelliğine sahiptir, denir (Şimşek ve Karakaya [22]).

Kuratowski [1930] tarafından kompaktlık yuvar ölçüsü aşağıda verildiği şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.54 (Kompaktlık Ölçüsü)

$A \subset X$ sınırlı bir küme olmak üzere kompaktlığın yuvar ölçüsü,

$\beta(A) = \inf\{\varepsilon > 0 : A$ yarıçapı ε'dan küçük sonlu sayıda yuvar ile örtülebilir$\}$

ile tanımlanmıştır (Mongkolkeha ve Kumam [20]).

Goebel ve Kirk [1990], kompakt konvekslik modülünü tanım 2.55' de verildiği şekilde tanımlamışlardır.

Tanım 2.55 (Kompakt Konvekslik Modülü)

Herbir $\varepsilon > 0$ için

$\Delta(\varepsilon) = \inf\{1 - \inf[\|x\| : x \in A] : \beta(A) \geq \varepsilon, A \subset B(X), A$ kapalı ve konveks$\}$

fonksiyonu kompakt konvekslik modülü olarak adlandırılır (Mongkolkeha ve Kumam [20]).

Tanım 2.56 ((L) özelliği)

X bir Banach uzayı olmak üzere

$$\lim_{\varepsilon\to 1^-} \Delta(\varepsilon) = 1$$

ise X, (L) özelliğine sahiptir denir (Mongkolkeha ve Kumam [20]).

Prus (1992), X Banach uzayının (L) özelliğine sahip olması için gerek ve yeter koşulun X' in düzgün Opial özelliğine sahip ve refleksif olması gerektiğini göstermiştir.

BÖLÜM 3

MODÜLER VE NORMLU UZAYLARDA BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLER

Çalışmamızın bu bölümünde modüler uzayların genel yapısı verilmiştir. Daha sonra modüler yapı ile oluşturulan bazı dizi uzayları üzerinde incelenen çeşitli geometrik özellikler (Bölüm 2.2) literatür gelişimine göre takdim edilmiştir.

3.1 Modüler Uzayların Yapısal Özellikleri ve Uygulamaları

X herhangi bir reel vektör uzayı olmak üzere $\rho : X \to [0,\infty]$ şeklinde tanımlanan fonksiyonel aşağıdaki şartları sağladığı taktirde modüler olarak adlandırılır:

(i) $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\alpha \in IF$, $|\alpha| = 1$ olmak üzere $\rho(\alpha x) = \rho(x)$

(iii) $\forall x, y \in X$ ve $\alpha + \beta = 1$ olacak şekilde $\alpha, \beta \geq 0$ için $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

Ayrıca,

(iv) $\forall x, y \in X$ ve $\alpha + \beta = 1$ olacak şekilde $\alpha, \beta \geq 0$ için

$\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\rho(x) + \beta\rho(y)$

eşitsizliği sağlandığı taktirde ρ konveks modüler olarak adlandırılır.

ρ, X üzerinde bir modüler olmak üzere;

$$X_\rho = \{x \in X : \lambda \to 0^+ \text{ iken } \rho(\lambda x) \to 0\}$$

uzayı modüler uzay olarak adlandırılır (Musielak [23]).

Tanım 3.1 (Modüler yakınsaklık)

$x,\ (x_n) \in X_\rho$ olsun. $n \to \infty$ için $\rho(\lambda(x_n - x)) \to 0$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ varsa (x_n) dizisi $x \in X_\rho$' ya modüler yakınsaktır denir (Musielak [23]).

Musielak (1983), ρ bir konveks modüler olduğu taktirde

$$\|x\| = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$$

ile tanımlı fonksiyonun X_ρ üzerinde bir norm olduğunu göstermiş ve Luxemburg normu olarak adlandırmıştır.

Önerme 3.1

$(x_n) \in X_\rho$ olsun. Bu durumda;

$$\|x_n\| \to 0 \Leftrightarrow \text{ her } \lambda > 0 \text{ için } \rho(\lambda(x_n)) \to 0 \text{ (Şimşek ve Karakaya [22]).}$$

Orlicz [1992], Δ_2 ve kuvvetli Δ_2 koşulunu tanım 3.2 ve tanım 3.3' de ifade edildiği şekilde tanımlamıştır.

Tanım 3.2

Herhangi $\varepsilon > 0$ için $\rho(u) \le a$ olacak şekilde her $u \in X_\rho$ için

$$\rho(2u) \le K\rho(u) + \varepsilon$$

olacak şekilde $K \ge 2$ ve $a > 0$ sabitleri varsa ρ modüleri Δ_2-koşulunu sağlar denir $(\rho \in \Delta_2)$ (Sanhan ve Suantai [21]).

Tanım 3.3

ρ, Δ_2-koşulunu $K \ge 2$, a' ya bağlı olacak şekilde herhangi $a > 0$ için sağlıyorsa ρ kuvvetli Δ_2-koşulunu sağlar denir $(\rho \in \Delta_2^s)$ (Sanhan ve Suantai [21]).

Cui ve Hudzik [1998] tarafından bölüm 2.2' de verilen bazı geometrik kavramların incelenmesinde yardımcı olacak bazı lemmalar aşağıda verilmiştir.

Lemma 3.1

$\rho \in \Delta_2^s$ ise herhangi $L > 0$ ve $\varepsilon > 0$ için $\rho(u) \le L$ ve $\rho(v) \le \delta$ olmak üzere $u, v \in X_\rho$ için

$$|\rho(u+v) - \rho(u)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta(L, \varepsilon) > 0$ vardır (Petrot ve Suantai [24]).

Lemma 3.2

$\rho \in \Delta_2^s$ ise $\varepsilon \in (0,1)$ için $\rho(x) \le 1 - \varepsilon$ iken $\|x\| \le 1 - \delta$ olacak şekilde $\delta \in (0,1)$ vardır (Sanhan ve Suantai [21]).

Lemma 3.3

$\rho \in \Delta_2^s$ ise herhangi $(x_n) \in X_\rho$ için

$$\|x_n\| \to 0 \Leftrightarrow \rho(x_n) \to 0$$

İspat

Her bir $\lambda > 0$ için $\|x_n\| \to 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\rho(\lambda x_n) \to 0$ olmasıdır. $\rho \in \Delta_2^s$ olduğundan yeterince küçük bir L için lemma 3.1' de verilen özellik sağlanır. $\rho(x_n) \to 0$ olduğu kabul edildiğinde her $n > m$ için $\rho(x_n) \le L_0$ olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla $\varepsilon \in (0,1)$ ve yeterinde büyük n için $\rho\left(\frac{x_n}{\varepsilon}\right) \le K_\varepsilon \rho(x_n) + \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $K_\varepsilon > 0$ vardır. $n > n_0$ için $\rho(x_n) \le 1/(2K_\varepsilon)$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ olsun. Dolayısıyla yeterince büyük $n < n_0$ için $\rho(x_n/\varepsilon) \le K_\varepsilon \rho(x_n) + \frac{1}{2} \le 1$ dir. Bu durumda yeterince büyük n için $\|x_n\| \le \varepsilon$ dir. $\|x\| \le 1$ ise $\rho(x_n) \le \|x_n\|$ olduğundan ters gerektirme de sağlanır.

Lemma 3.4

$\rho \in \Delta_2^s$ ise herhangi $\varepsilon \ge 0$ için $\rho(x) \ge 1+\varepsilon$ olduğunda $\|x\| \ge 1+\delta$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır (Petrot ve Suantai [24]).

Son zamanlarda dizi uzaylarının topolojik ve diğer bazı özelliklerinin yanı sıra geometrik özellikleri de birçok çalışmada incelenmiştir. Çalışmamızın bu kısmında bu alanda yapılan bazı çalışmalara yer verildi.

Shue (1970), matris operatör teorisinde oldukça kullanışlı olan cesaro dizi uzayını normla birlikte aşağıdaki şekilde tanımlamıştır (Cui, Meng ve Pluciennik [19]).

$p \in (1,\infty)$ olmak üzere

$$ces_p = \left\{ x \in \ell^0 : \|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x(i)| \right)^p \right)^{1/p} < \infty \right\} \tag{3.1}$$

Cui, Meng ve Pluciennik [19], her $(x_n) \subset X$ dizisi için

$$A((x_n)) = \liminf_{n\to\infty} \{ \|x_i + x_j\| : i, j \ge n,\ i \ne j \}$$

ve Kakutani (1938)' nin sonucunu kullanarak

$$C(X) = \sup \{ A((x_n)) : (x_n)\ ,\ S(X)\ \text{'de bir zayıf null dizisidir} \}$$

geometrik sabitini tanımlayarak $C(X) < 2$ olduğu taktirde herhangi bir Banach uzayının zayıf Banach-Saks özelliğine sahip olduğunu göstermişlerdir.

Aynı yazarlar tarafından ces_p uzayı üzerinde (β) özelliğinin incelenmesinde yardımcı olan lemma aşağıda şekilde verilmiştir.

Lemma 3.5

$x, y \in ces_p$ olsun. Bu durumda herhangi $\varepsilon > 0$ ve $L > 0$ için $\|x\|^p \le L$ ve $\|y\|^p \le \delta$ olduğunda

$$\left| \|x+y\|^p - \|x\|^p \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ vardır.

Bu çalışmada ces_p uzayının (β)-özelliğine sahip olduğu gösterilerek ces_p ve $(ces_p)^*$ uzaylarının da Banach-Saks özelliğine sahip olduğu sonucuna varılmıştır. Ayrıca $C(ces_p) = 2^{1/p}$ olduğunu gösterilmiştir.

Cui ve hudzik [18], ces_p uzayının $k \ge 2$ için $k-NUC$ ve $p \in (1,\infty)$ için düzgün Opial özelliklerine sahip olduğunu göstererek bu uzayın aynı zamanda (L) ve sabit nokta özelliğine sahip olduğu sonucuna varmışlardır.

Suantai [25] tarafından her n için $p_n \ge 1$, $p = (p_n)$ pozitif reel sayıların bir dizisi olmak üzere genelleştirilmiş cesaro dizi uzayı

$$\rho(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x(i)| \right)^{p_n}$$

olmak üzere

$$ces(p) = \{ x \in w : \lambda > 0 \text{ için } \rho(\lambda x) < \infty \}$$

şeklinde tanımlanarak,

$$\|x\| = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \le 1 \right\} \tag{3.2}$$

Luxemburg normu ile donatıldı. $p = (p_k)$ sınırlı olduğunda

$$ces(p) = \left\{ x = x(i) : \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x(i)| \right)^{p_n} < \infty \right\}$$

ile tanımlanmıştır.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n = q$ olduğunda $ces(p) = ces_q$ olduğu ve $ces(p)$ üzerinde (3.2) ile tanımlanan normun (3.1)‘ de verilen norma eşit olduğu ifade edildi.

Ayrıca bu uzay üzerinde ρ fonksiyonelinin bir konveks modüler olduğu gösterilerek bu modülere ilişkin aşağıda verilen bazı temel özellikler ifade ve ispat edilmiştir.

Önerme 3.2

$x \in ces(p)$ için $p_k \geq 1$, p_k sınırlı ve $M = \sup p_k$ olmak üzere $ces(p)$ üzerinde tanımlanan ρ modüleri aşağıdaki özellikleri sağlar:

(1) $0 < a < 1$ ise $a^M \rho(x/a) \leq \rho(x)$,
(2) $a \geq 1$ ise $\rho(x) \leq a^M \rho(x/a)$,
(3) $a \geq 1$ ise $\rho(x) \leq a\rho(x) \leq \rho(ax)$.

Bu çalışmada $ces(p)$ uzayı üzerinde ρ modüleri ile Luxemburg normu arasındaki bazı ilişkiler aşağıdaki önermelerle ifade ve ispat edilmiştir.

Önerme 3.3

Herhangi $x \in ces(p)$ için

(i) $\|x\| < 1$ ise $\rho(x) \leq \|x\|$,

(ii) $\|x\| > 1$ ise $\rho(x) \geq \|x\|$,

(iii) $\|x\| = 1 \Leftrightarrow \rho(x) = 1$,

(iv) $\|x\| < 1 \Leftrightarrow \rho(x) < 1$,

(v) $\|x\| > 1 \Leftrightarrow \rho(x) > 1$,

(vi) $0 < a < 1$ ve $\|x\| > a$ ise $\rho(x) > a^M$,

(vii) $a \geq 1$ ve $\|x\| < a$ ise $\rho(x) < a^M$.

Önerme 3.4

$(x_n) \in ces(p)$ olmak üzere;

$$(i)\ n \to \infty \text{ için } \|x_n\| \to 1 \Rightarrow \rho(x_n) \to 1$$
$$(ii)\ n \to \infty \text{ için } \rho(x_n) \to 0 \Rightarrow \|x_n\| \to 0$$

Lemma 3.6

$x \in ces(p)$ ve $(x_n) \subseteq ces(p)$ olsun. $n \to \infty$ için $\rho(x_n) \to \rho(x)$ ve her $i \in \mathbb{N}$ için $x_n(i) \to x(i)$ ise $x_n \to x$ dir.

Yukarıda ifade edilen önermeler yardımıyla $ces(p)$ uzayının rotund olma ve Kadec-Klee özelliklerine sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca Luh, Lin, Troyanski (1988)' nin sonucunu kullanarak $ces(p)$ uzayının (G) özelliğine sahip olduğu ve her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = p$ olduğu

taktirde ces_p uzayının Kadec-Klee, rotund olma ve (G) özelliklerine sahip olduğu olduğu sonuçlarına varılmıştır.

Sanhan ve Suantai [21], lemma 3.1, lemma 3.2 ve lemma 3.3' de verilen ifadeler yardımıyla $ces(p)$ uzayının $k \geq 2$ için $k-NUC$ özelliğine sahip olduğunu göstermişlerdir.

$k-NUC$ olmak kR olmayı, kR olmak R ve refleksif olmayı gerektirdiğinden ve aynı zamanda $k-NUC$ olmak NUC olmayı ve NUC olmak da refleksiflik ve Kadec-Klee özelliğini gerektirdiğinden $ces(p)$ uzayının kR, NUC ve drop özelliklerine ces_p uzayının da $k-NUC$, kR, NUC ve drop özelliklerine sahip olduğu sonucuna varmışlardır.

Petrot ve Suantai [24], $\limsup_{j\to\infty} p_j < \infty$ olmak üzere $ces(p)$ uzayının düzgün Opial özelliğine sahip olduğunu göstermiş ve $1 < p < \infty$ için ces_p uzayının da düzgün Opial özelliğine sahip olduğu sonucuna varmışlardır.

Fredman [1978] , kuvvetli yakınsak Lacunary N_θ uzayını,

$$N_\theta = \left\{ x = (x_k) : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |x_k - l| = 0, \text{ bazı } l \text{ için} \right\}$$

şeklinde tanımlamıştır. Burada $\theta = (k_r)$ Lacunary dizisi ile $k_0 = 0$ ve $r \to \infty$ iken $k_r - k_{r-1} \to \infty$ olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisi temsil edilmiştir. θ ile $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ aralıkları belirlenmiştir. $h_r = k_r - k_{r-1}$ ve $q_r = k_r / k_{r-1}$ ile temsil edilmiştir.

Pehlivan, Fisher [1995] ve Das, Patel [1989] Lacunary kuvvetli yakınsak dizilerin uzayı ile kuvvetli toplanabilir cesaro dizi uzayları arasında çok yakın bir ilişki olduğunu göstermişlerdir. Bu yakın ilişkiden dolayı cesaro dizi uzaylarının birçok geometrik özelliği Lacunary dizi uzaylarına genelleştirilebilmiştir.

Karakaya [27], $p = (p_r)$ pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olmak üzere

$$\ell(p,\theta) = \left\{ x = (x_k) : \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |x_k| \right)^{p_r} < \infty \right\}$$

Lacunary içerikli dizi uzayını tanımlayarak $H = \sup_r p_r$ olmak üzere $\ell(p,\theta)$ üzerinde

$$\|x\|_{\ell(p,\theta)} = \left(\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |x_k| \right)^{p_r} \right)^{1/H}$$

paranormunu tanımlamıştır.

Ayrıca her r için $p_r = p$ ise $\ell(p,\theta)$ yerine $\ell_p(\theta)$ notasyonunu kullanarak $\ell_p(\theta)$ üzerindeki normu

$$\|x\|_{\ell_p(\theta)} = \left(\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k| \right)^p \right)^{1/p}$$

ile tanımlamış ve

$\theta = (2^r)$ ise $\ell(p,\theta) = ces(p)$.

$\theta = (2^r)$ ve her r için $p_r = p$ ise $\ell(p,\theta) = ces_p$

olduğu gösterilerek

$x \in \ell(p,\theta)$ için $\sigma(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k| \right)^{p_r}$ olmak üzere;

$\ell(p,\theta)$ üzerinde

$$\|x\| = \inf \left\{ \rho > 0 : \sigma\left(\frac{x}{\rho} \right) \le 1 \right\}$$

Luxemburg normu tanımlanmıştır.

Bu çalışmada $\liminf q_r > 1$ ise $ces(p) \subset \ell(p,\theta)$ ve $1 < \limsup q_r < \infty$ ise $\ell(p,\theta) \subset ces(p)$ olduğu gösterilerek iki uzay arasındaki ilişki verilmiş ve önerme 3.2, önerme 3.3, önerme 3.4 ve lemma 3.6' da verilen modüler fonksiyonu ile Luxemburg normuna ilişkin önermeler kullanılarak $\ell(p,\theta)$ uzayının Kadec-Klee özelliğine sahip olduğu gösterilmiş özel halde $\ell_p(\theta)$ uzayının da Kadec-Klee özelliğine sahip olduğu sonucuna varılmıştır.

Sanhan ve Suantai [21], Luxemburg normu ile donatılmış $ces(p)$ uzayının ne rotund ne de LUR olduğunu göstermiştir. Dolayısıyla Karakaya [27], $ces(p) \subset \ell(p,\theta)$ olduğundan $\ell(p,\theta)$ uzayının ne rotund ne de LUR olduğunu belirtmiştir.

Khan ve Rahman (1997) tarafından $Q_{2^r} = q_{2^r} + q_{2^r+1} + ... + q_{2^{r+1}-1}$ ve $\sum_r$, $2^r \le k < 2^{r+1}$ aralığı üzerindeki toplamı göstermek üzere;

$$ces[(p_n),(q_n)] = \left\{ x \in w : \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{Q_{2^r}} \sum_r q_k |x_k| \right)^{p_r} < \infty \right\}$$

genelleştirilmiş cesaro dizi uzayı tanımlanmıştır.

Her n için $q_n = 1$ ise $ces\left[\left(p_n\right),\left(q_n\right)\right]$ uzayı $ces\left(p_n\right)$ [Lim 1977] uzayına indirgendiği ve her n için $p_n = p$ ise $ces\left[\left(p_n\right),\left(q_n\right)\right]$ uzayının ces_p [Lim 1974] uzayına indirgendiği gösterilmiştir.

$H = \sup_r p_r < \infty$ ve $M = \max\left(1, H\right)$ olmak üzere $ces\left[\left(p_n\right),\left(q_n\right)\right]$ uzayı;

$$g\left(x\right) = \left[\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_r}\sum_{r} q_k \left|x_k\right|\right)^{p_r}\right]^{1/M}$$

ile paranormlandırılmıştır.

Şimşek ve Karakaya [14], $\rho\left(x\right): ces\left[\left(p_n\right),\left(q_n\right)\right] \to \left[0,\infty\right]$ olmak üzere

$$\rho\left(x\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_r}\sum_{r} q_k \left|x_k\right|\right)^{p_r}$$

modülerini ve $ces\left[\left(p_n\right),\left(q_n\right)\right]$ üzerinde Luxemburg normunu

$$\left\|x\right\| = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_{r} q_k \left|x_k\right|\right)^{p_r}\right\} \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlamışlardır.

(3.3)' de verilen Luxemburg normu, her $n \in \mathbb{N}$ için $q_n = 1$ ise Lim (1977) tarafından verilen

$$\left\|x\right\|_{ces\left(p_n\right)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{k=1}^{r}\left|\frac{x_k}{\lambda}\right|\right)^{p_r} \le 1\right\}$$

normuna ve her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n = p$ ve $q_n = 1$ ise Lim (1974) tarafından verilen

$$\left\|x\right\|_{ces_p} = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r}\left|\frac{x_k}{\lambda}\right|^{p}\right)^{1/p} \le 1\right\}$$

normuna indirgenmiştir.

Şimşek ve Karakaya [14], ρ fonksiyonelinin $ces\left[\left(p_n\right),\left(q_n\right)\right]$ üzerinde bir konveks modüler olduğunu göstererek $ces\left[\left(p_n\right),\left(q_n\right)\right]$ uzayı üzerinde önerme 3.2 ve önerme 3.3' de verilen ρ modülerine ve Luxemburg normuna ilişkin bazı özellikleri ifade ve ispat etmişlerdir.

Ayrıca $ces\left[\left(p_n\right),\left(q_n\right)\right]$ uzayının Luxemburg normuna göre bir Banach uzayı olduğunu ve lemma 3.6' da verilen ifadeyi benzer şekilde kullanarak $ces\left[\left(p_n\right),\left(q_n\right)\right]$ uzayının Kadec-Klee özelliğine sahip olduğunu fakat; rotund olmadığı göstermişlerdir. Buna bağlı olarak $ces\left[\left(p_n\right),\left(q_n\right)\right]$ uzayının ve $q_n=1$ özel durumunda $ces\left(p\right)$ uzayının $\left(LUR\right)$ özelliğine sahip olmadığı sonucuna varmışlardır.

Mursaleen ve Khan [2005], $ces\left[\left(p_n\right),\left(q_n\right)\right]$ dizi uzayını vektör değerli dizi uzayına genelleştirmişlerdir.

Şimşek ve Karakaya [26] tarafından $ces\left(X,p_n,q_n\right)$ genelleştirilmiş vektör değerli dizi uzayını, $Q_{2^r}=q_{2^r}+q_{2^r+1}+...+q_{2^{r+1}-1}$ ve $\sum_r$, $2^r\le k<2^{r+1}$ aralığı üzerindeki toplamı göstermek üzere;

$$ces\left(X,p_n,q_n\right)=\left\{x=\left(x_k\right):\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_r q_k\left\|x\left(k\right)\right\|\right)^{p_r}<\infty\right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Aynı yazarlar, her $n\in\mathbb{N}$ için $q_n=1$ ise $ces\left(X,p_n,q_n\right)$ uzayının Sudsukh (2004) tarafından tanımlanan $ces\left(X,p_n\right)$ uzayına indirgendiğini ve her $n\in\mathbb{N}$ için $q_n=1$ ve $p_n=p$ ise $ces\left(X,p_n,q_n\right)$ uzayının

$$ces_p\left(X\right)=\left\{x=\left(x_k\right):\sum_{r=0}^{\infty}\left(2^{-r}\sum_r\left\|x\left(k\right)\right\|\right)^{p}<\infty\right\}$$

uzayına indirgendiğini göstermişlerdir.

$H=\sup p_r<\infty$ ve $M=\max\left(1,H\right)$ olmak üzere $ces\left(X,p_n,q_n\right)$ dizi uzayı üzerinde

$$h\left(x\right)=\left[\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_r q_k\left\|x\left(k\right)\right\|\right)^{p_r}\right]^{1/M}$$

ile verilen paranormu ve $\rho\left(x\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_r q_k\left\|x\left(k\right)\right\|\right)^{p_r}$ olmak üzere;

$$\left\|x\right\|_L=\inf\left\{\lambda>0:\rho\left(\frac{x}{\lambda}\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{1}{Q_{2^r}}\sum_r q_k\left\|\frac{x\left(k\right)}{\lambda}\right\|\right)^{p_r}\le 1\right\}$$

ile tanımlı Luxemburg normunu tanımlanmıştır.

Bu çalışmada $ces(X, p_n, q_n)$ üzerinde tanımlı ρ fonksiyonelinin konveks bir modüler olduğu ve önerme 3.2, önerme 3.3, önerme 3.4 ve lemma 3.6' da verilen ρ fonksiyoneli ile Luxemburg normu arasındaki bazı ilişkiler verilmiştir. $ces(X, p_n, q_n)$ uzayının;

$$\|x\|_L = \inf\left\{\tau > 0 : \rho\left(\frac{x}{\tau}\right) \le 1\right\}$$

ile tanımlı Luxemburg normuna göre bir Banach uzayı ve Kadec-Klee özelliğine sahip olduğunu; fakat rotund olmadığını göstermişlerdir.

Mongkolkeha ve Kumam [20], aşağıda verilen lemma ve önermeleri vererek $\ell(p,\theta)$ uzayının (β) ve düzgün Opial özelliklerine sahip olduğunu göstermişlerdir.

Lemma 3.7

Herhangi $x \in \ell(p,\theta)$ ve $k \ge k_0$ olacak şekilde her $k \in \mathbb{N}$ için

$$x^k = \left(\overbrace{0,0,...,0}^{k-1}, x(k), x(k+1), ...\right)$$

olmak üzere

$$\rho\left(\frac{x^k}{2}\right) \le \frac{1-k}{2}\rho\left(x^k\right)$$

olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \in (0,1)$ vardır.

Lemma 3.8

Herhangi $x \in \ell(p,\theta)$ ve $\varepsilon \in (0,1)$ için $\rho(x) \le 1-\varepsilon$ iken $\|x\| \le 1-\delta$ olacak şekilde $\delta \in (0,1)$ vardır.

Ayrıca $\ell_p(\theta)$ uzayının (β), (NUC), drop, Kadec-Klee, (UKK), düzgün Opial, (L), sabit nokta ve refleksif olma özelliklerine; $\ell(p,\theta)$ uzayının da (NUC), drop, Kadec-Klee, (UKK), (L), sabit nokta ve refleksif olma özelliklerine sahip olduğu sonucuna varmışlardır.

Öztürk ve Başarır [28],

$$\ell(p,s,\theta) = \left\{x = (x_k) : \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} k^{-s}|x_k|\right)^{p_r} < \infty,\ s \ge 0\right\}$$

dizi uzayını ve bu uzay üzerinde $H = \sup p_r$, $M = \max(1, H)$ olmak üzere;

$$\|x\|_{\ell(p,s,\theta)} = \left(\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} k^{-s} |x_k| \right)^{p_r} \right)^{1/M}$$

paranormunu tanımlamış ve $\ell(p,s,\theta)$ uzayında Lacunary dizisinin özelliklerini kullanarak;

$\theta = 2^r$ ise $\ell(p,s,\theta) = C(s,p)$ [Bilgin 1997].

$\theta = 2^r$ ve $s = 0$ ise $\ell(p,s,\theta) = Ces(p)$ [Lim 1974]

sonuçlarını elde etmişlerdir. Ayrıca

$\ell(p,s,\theta)$ üzerinde, $\rho(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} k^{-s} |x_k| \right)^{p_r}$ olmak üzere

$$\|x\| = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \rho\left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \le 1 \right\}$$

Luxemburg normu tanımlanmış ve $\liminf q_r > 1$ ise $C(s,p) \subset \ell(p,s,\theta)$ olduğu gösterilerek $\ell(p,s,\theta)$ ve $C(s,p)$ arasındaki ilişki verilmiştir. Aynı zamanda tezimizin önerme 3.2, önerme 3.3, önerme 3.4, lemma 3.1, lemma 3.3 lemma 3.4' de verilen özelliklerini $\ell(p,s,\theta)$ üzerinde incelemişler ve $\ell(p,s,\theta)$ uzayının $k-NUC$ olduğu göstermişlerdir. Aynı çalışmada diğer geometrik özellikler olarak $\ell(p,s,\theta)$ uzayının NUC, UC, Kadec-Klee ve (UKK) özelliklerine sahip olduğu ayrıca $s \ge 0$ için refleksif olduğu, sabit nokta ve drop özelliklerine sahip olduğu sonuçlarına varmışlardır.

Altay ve Başar [2007], Malkowsky ve Savaş [2004] tarafından tanımlanan dizi uzayını kullanarak;

$$\ell(u,v;p) = \left\{ x = (x_k) \in \ell^0 : \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{j=0}^{k} u_k v_j x_j \right|^{p_k} < \infty \right\}$$

dizi uzayını tanımlamış ve $\ell(u,v;p)$ uzayının,

$$h(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{j=0}^{k} u_k v_j x_j \right|^{p_k} \right)^{1/M}$$

ile bir tam lineer metrik uzay olduğunu göstermişlerdir.

Şimşek ve Karakaya [22],

$$\rho(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} u_k v_j |x_j| \right)^{p_k}$$

olmak üzere;

$$\ell_\rho(u,v;p)=\left\{x\in\ell^0:\rho(\lambda x)<\infty,\ \text{bazı } \lambda>0 \text{ için}\right\}$$

ile genelleştirilmiş $\ell_\rho(u,v;p)$ modüler dizi uzayını ve $\ell_\rho(u,v;p)$ üzerinde

$$\|x\|_L=\inf\left\{\lambda>0:\rho\left(\frac{x}{\lambda}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}u_k v_j\left|\frac{x(j)}{\lambda}\right|\right)^{p_k}\le 1\right\}$$

Luxemburg normunu tanımlamışlardır. Bu çalışmada bazı özel durumlar için aşağıdaki alt uzaylarını elde etmişlerdir.

Her $k,j\in\mathbb{N}$ için $u_k=1/(k+1)$ ve $v_j=1$ ise $\ell_\rho(u,v;p)$ uzayının

$$\|x\|_{L,ces(p)}=\inf\left\{\lambda>0:\rho\left(\frac{x}{\lambda}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\left|\frac{x(j)}{\lambda}\right|\right)^{p_k}\le 1\right\}$$

ile normlandırılmış $ces(p)$ modüler uzayına ve her $k,j\in\mathbb{N}$ için $u_k=1/p_k$, $v_j=p_j$, $P_k=\sum_{j=0}^{k}p_j$ ise $\ell_\rho(u,v;p)$ uzayının

$$\|x\|_{L,N_\rho(p)}=\inf\left\{\lambda>0:\rho\left(\frac{x}{\lambda}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{P_k}\sum_{j=0}^{k}p_j\left|\frac{x(j)}{\lambda}\right|\right)^{p_k}\le 1\right\}$$

ile normlandırılmış $N_\rho(p)$ [Wang 1978] modüler uzayına indirgendiğini göstermişlerdir. Ayrıca yazarlar, $\ell_\rho(u,v;p)$ üzerinde ρ modülerinin konveksliğine ve Luxemburg normu ile ilişkisine dair önermeler (önerme 3.2, önerme 3.3, önerme 3.4 ve lemma 3.6' da ifade edildiği gibi) vermişlerdir. Ayrıca $\ell_\rho(u,v;p)$ uzayının bu norm altında bir Banach uzayı olduğu verilerek bu uzayın Kadec-Klee özelliğine sahip olduğu gösterilmiştir.

Leindler [1965],

$$[V,\lambda]_0=\left\{x\in w:\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x_j|=0\right\}$$

$$[V,\lambda]=\left\{x\in w:x-le\in[V,\lambda]_0,l\in\mathbb{C}\right\}$$

ve

$$[V,\lambda]_\infty=\left\{x\in w:\sup_k\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x_j|<\infty\right\}$$

ile de la Vallee-Poussin metodu ile kuvvetli sıfır toplanabilir, kuvvetli toplanabilir ve kuvvetli sınırlı dizi uzaylarını tanımlamıştır.

Maddox [1968], $k=1,2,...$ için $\lambda_k = k$ özel durumunda $[V,\lambda]_0$, $[V,\lambda]$ ve $[V,\lambda]_\infty$ uzaylarını w_0, w ve w_∞ uzaylarına indirgemiştir.

Savaş, Şimşek ve Karakaya [29] tarafından,

$$V(\lambda;p)=\left\{x=(x_j)\in w:\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x_j|\right)^{p_k}<\infty\right\}$$

paranormlu dizi uzayı tanımlanmış ve $\lambda_k = k$ ise $ces(p)$, $\lambda_k = k$ ve her $k\in\mathbb{N}$ için $p_k = p$ durumunda ces_p uzayı elde edilmiştir.

$V(\lambda;p)$ dizi uzayının

$$h(x)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x_j|\right)^{p_k}\right)^{1/M}$$

ile bir tam paranormlu uzay olduğu gösterilerek $p_k = p$ özel durumunda $V(\lambda;p)$ dizi uzayının

$$\|x\|_{V_p(\lambda)}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x_j|\right)^{p}\right)^{1/p}\qquad(1<p<\infty)$$

ile bir tam normlu uzay olan

$$V_p(\lambda)=\left\{x=(x_j)\in l^0:\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x_j|\right)^{p}<\infty\right\}$$

uzayına indirgendiği ispat edilmiştir. Daha sonra geometrik yapıların incelenmesine uygunluk anlamında

$$\rho(x)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_0}\sum_{j\in I_k}|x_j|\right)^{p_k}\right)$$

olmak üzere;

$$V_\rho(\lambda;p)=\{x\in w:\rho(\lambda x)<\infty,\lambda>0\}$$

genelleştirilmiş modüler dizi uzayını ve $V_\rho(\lambda;p)$ üzerinde

$$\|x\|_L=\inf\left\{\lambda>0:\rho\left(\frac{x}{\lambda}\right)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j\in I_k}|x_j|\right)^{p_k}\right)\le 1\right\}$$

Luxemburg normunu tanımlamışlardır. Bu çalışmada $V_\rho(\lambda;p)$ üzerinde ρ modülerinin konvekliğini ve önerme 3.2, önerme 3.3, önerme 3.4 ve lemma 3.6' da verilen Luxemburg normu ile arasındaki ilişkiyi vererek $V_p(\lambda;p)$ uzayının Kadec-Klee özelliğine; $V_p(\lambda)$ uzayının ise p-tipte Banach-Saks özelliğine sahip olduğunu göstermişlerdir.

Şimşek [17], $V_p(\lambda)$ uzayı üzerinde lemma 3.1' i uygulayarak $k \geq 2$ için bu uzayın $k-NUC$ ve düzgün Opial özelliklerine sahip olduğunu göstermiştir.

Huff [1980] tarafından $k-NUC$ Banach uzaylarının NUC olduğu ve NUC olmanın Kadec-Klee özelliğini ve refleksifliği gerektirdiği, ayrıca bir X Banach uzayının NUC olması için gerek ve yeter koşulun X ' in refleksif olması ve (UKK) özelliğine sahip olması gerektiği ispatlamıştır.

Diğer taraftan;

$$(UC) \Rightarrow (kR) \Rightarrow (k+1)R$$

gerektirmesi geçerli olup ayrıca (kR) uzaylar refleksif ve rotund olup $k-NUC$ özelliği (kR) olmayı gerektirdiğinden $V_p(\lambda)$ $(1<p<\infty)$ uzayının NUC ve dolayısıyla refleksif, (kR), rotund uzay olduğu ve (UKK) özelliğini sağladığı sonuçlarına varılmıştır.

Maddox [1967] , $\sup p_k = H$ ve $M = \max\{1, H\}$ olmak üzere,

$$g(x) = \left(\sum_n |x_n|^{p_n} \right)^{1/M}$$

ile bir tam paranormlu uzay olan

$$\ell(p) = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_n |x_n|^{p_n} < \infty \right\}$$

lineer uzayını tanımlamıştır.

Savaş, Karakaya ve Şimşek [10],

$$\ell(\hat{A};p) = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_n \left| \left(\hat{A}x\right)_n \right|^{p_n} < \infty \right\}$$

şeklinde $\ell(p)$-tipte yeni bir dizi uzayı tanımlamışlardır.

Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = p$ ise $\ell\left(\hat{A};p\right)$ uzayı,

$$\ell_p\left(\hat{A}\right)=\left\{x=(x_k)\in w:\sum_n\left|\sum_{v=0}^{\infty}\hat{a}_{nv}\,x_v\right|^p<\infty\right\}$$

ile gösterilen $\ell_p\left(\hat{A}\right)$ normlu uzayına,

$A=(C,1)$ (1 mertebeden cesaro matrisi) ise $\ell\left(\hat{A};p\right)$ uzayı

$$\ell\left(\hat{C};p\right)=\left\{x=(x_k)\in w:\sum_n\left|\left(\hat{C}\,x\right)_n\right|^{p_n}<\infty\right\}$$

ile gösterilen $\ell\left(\hat{C};p\right)$ uzayına (Burada $\left(\hat{C}\,x\right)_n=n\geq 1$ için $\left(1/n(n+1)\right)\sum_{k=1}^{n}kx_k$ ve $\left(\hat{C}\,x\right)_0=x_0$ dir),

$A=(N,p_n)$ Nörlund tipte bir matris ise $\ell\left(\hat{A};p\right)$ uzayı $\left(\hat{N}\,x\right)_n=n\geq 1$ için $\left(p_n/P_nP_{n-1}\right)\sum_{k=1}^{n}P_{k-1}x_k$ ve $\left(\hat{N}\,x\right)_0=x_0$ olmak üzere,

$$\ell\left(\hat{N};p\right)=\left\{x=(x_k)\in w:\sum_n\left|\left(\hat{N}\,x\right)_n\right|^{p_n}<\infty\right\}$$

ile gösterilen $\ell\left(\hat{N};p\right)$ [Bhardwaj, Singh 1999] uzayına indirgendiği gösterilmiştir.

Her $k\in\mathbb{N}$ için $p_k=p$ ise $\ell\left(\hat{C};p\right)$ ve $\ell\left(\hat{N};p\right)$ uzaylarının sırasıyla $\ell_p\left(\hat{C}\right)$ ve $\ell_p\left(\hat{N}\right)$ uzaylarına indirgendiği belirtilmiştir.

Bu çalışmada $\ell\left(\hat{A};p\right)$ uzayının

$$h(x)=\left(\sum_n\left|(Ax)_n\right|^{p_n}\right)^{1/M}$$

paranormu ile bir tam lineer metrik uzay olduğu ayrıca (p_n) sabit bir dizi ve $p_n\geq 1$ ise $\ell_p\left(\hat{A}\right)$ uzayının

$$\|x\|_{\ell_p\left(\hat{A}\right)} = \left(\sum_n \left|(Ax)_n\right|^p\right)^{1/p}$$

normu ile bir Banach uzayı olduğu gösterilmiştir.

Ayrıca $\ell\left(\hat{A}; p\right)$ uzayının $\ell(p)$ uzayına lineer olarak izomorfik olduğu gösterilmiştir.

Aynı zamanda $\ell_p\left(\hat{A}\right)$ uzayının p-tipte Banach-Saks özelliğine sahip olduğu gösterilerek; $0 \le \varepsilon \le 2$ olmak üzere gurarri konvekslik modülü;

$$\beta_{\ell_p\left(\hat{A}\right)}(\varepsilon) \le 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p}$$

şeklinde hesaplanmıştır. Buna bağlı olarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

ε=2 ise $\beta_{\ell_p\left(\hat{A}\right)}(\varepsilon) \le 1$ ve dolayısıyla $\ell_p\left(\hat{A}\right)$ kesin konvekstir.

$0 < \varepsilon < 2$ ise $0 < \beta_{\ell_p\left(\hat{A}\right)}(\varepsilon) < 1$ ve dolayısıyla düzgün konvekstir.

$\alpha = 1/2$ ise $\delta_{\ell_p\left(\hat{A}\right)}(\varepsilon) = \beta_{\ell_p\left(\hat{A}\right)}(\varepsilon)$.

Altay, Başar ve Mursaleen [2006]; Altay ve Başar [2005]; Altay ve Başar [2006]; Polat ve Başar [2007], $1 \le p < \infty$ olmak üzere sırasıyla e_p^r ve e_∞^r; e_0^r ve e_c^r; $e_0^r(\Delta)$, $e_c^r(\Delta)$ ve $e_\infty^r(\Delta)$; $e_0^r\left(\Delta^{(m)}\right)$ ve $e_c^r\left(\Delta^{(m)}\right)$ euler dizi uzaylarını tanımlamışlardır.

Kara, Öztürk ve Başarır [30], E^r-dönüşümleri $\ell(p)$ uzayında olan

$$e^r(p) = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_k \left| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1-r)^{k-j} r^j x_j \right|^{p_k} < \infty \ \left(0 < p_k \le H < \infty\right) \right\}$$

dizi uzayını tanımlamışlardır.

Burada her $k \in \mathbb{N}$ için

$$e_{nk}^r = \begin{cases} \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k, & (0 \le k \le n) \\ 0 \qquad\qquad\quad , & (k > n) \end{cases}$$

olmak üzere E^r ile $E^r = \left(e_{nk}^r\right)$ ile tanımlanan r mertebeden euler ortalamalarının metodu gösterilmiştir.

Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = p$ durumunda e_p^r dizi uzayı elde edilmiştir.

$e^r(p)$ dizi uzayının

$$g(x)=\left(\sum_k\left|\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(1-r)^{k-j}r^j x_j\right|^{p_k}\right)^{1/M} \qquad (0<p_k\le H<\infty)$$

ile bir tam lineer paranormlu uzay olduğu ve $\ell(p)$ uzayına lineer izomorfik olduğu gösterilmiştir.

Her $k\in\mathbb{N}$ için $p_k\ge 1$ olmak üzere $e^r(p)$ üzerinde

$$\rho(x)=\sum_k\left|\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(1-r)^{k-j}r^j x_j\right|^{p_k}$$

ile tanımlı fonksiyonelin bir konveks modüler olduğu gösterilerek

$$\|x\|=\inf\left\{\varepsilon>0:\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\le 1\right\},\ x\in e^r(p)$$

Luxemburg normu tanımlanmıştır. Önerme 3.1, önerme 3.2, önerme 3.3 ve Lemma 3.6' da verilen özellikler kullanılarak $e^r(p)$ uzayının Kadec-Klee özelliğine sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca $1\le p<\infty$ için $\left(e_p^r,\|x\|_{e_p^r}\right)$ uzayının da Kadec-Klee özelliğine sahip olduğu sonucuna varılmıştır.

Bu çalışmada $e^r(p)$ üzerinde

$x=x_k(r)=\left(\left(1+\frac{1}{r}\right)^k\right)$, $y=y_k(r)=\left(\left(k\frac{(r-1)^{k-1}}{r^k}\right)\right)$ olmak üzere

$\rho\left(\frac{x+y}{2}\right)=1$ iken $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|=1$ olduğu görülerek $e^r(p)$ dizi uzayının ne rotund ne de yerel düzgün rotund olduğu ters bir örnekle ispatlanmıştır.

BÖLÜM 4

YENİ BİR PARANORMLU DİZİ UZAYI ve BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Üç bölüm olarak tasarlanan bu tez çalışmasının ilk iki bölümünde literatür bildirişi, modüler uzayların yapısı ve uygulamaları verildikten sonra, son bölümde yeni bir operatörle tanımlanmış paranormlu yeni bir dizi uzayı üzerinde, 1. ve 2. bölümde genel olarak bahsedilmiş kavramlar orijinal bir problem üzerinde uygulanmış ve Kadec-Klee, $k-NUC$, düzgün Opial gibi bazı geometrik sonuçlar elde edilmiştir.

Polat, Karakaya ve Şimşek [31] tarafından $V=(v_{nk})$ matrisi,

$$v_{nk}=\begin{cases} u_n\left(v_{k-1}-v_k\right), & k<n \\ u_n v_n, & k=n \\ 0, & k>n \end{cases} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Şimdi (4.1)' de verilen matrisi kullanarak

$$\ell_{\Delta}(u,v,p)=\left\{x\in w:(y_k)=\left(\sum_{i=1}^{k}u_k v_i \Delta x_i\right)\in \ell(p)\right\}$$

şeklinde yeni bir dizi uzayı tanımlayalım.

Teorem 4.1

$\ell_{\Delta}(u,v,p)$ dizi uzayı

$$g(x)=\left(\sum_{n}\left|\sum_{k=1}^{n}u_n v_k \Delta x_k\right|^{p_k}\right)^{1/M}$$

paranormu ile bir tam lineer metrik uzaydır.

İspat

Öncelikle $\ell_\Delta(u,v,p)$ nin toplama ve skaler çarpıma göre lineerliğini görmeye çalışalım.

$x, y \in \ell_\Delta(u.v.p)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ alalım.

$$\left(\sum_n \left|\sum_{k=1}^{n} u_n v_k \left(\Delta x_k + \Delta y_k\right)\right|^{p_k}\right)^{1/M} \leq \left(\sum_n \left|\sum_{k=1}^{n} u_n v_k \Delta x_k\right|^{p_k}\right)^{1/M} + \left(\sum_n \left|\sum_{k=1}^{n} u_n v_k \Delta y_k\right|^{p_k}\right)^{1/M} \tag{4.2}$$

ve

$$|\alpha|^{p_k} \leq \max\left\{1, |\alpha|^M\right\} \tag{4.3}$$

Her $x \in \ell_\Delta(u,v,p)$ için $g(\theta) = 0$ ve $g(x) = g(-x)$ olduğu açıktır. (4.2) ve (4.3) eşitisizliklerinden g ' nin alt toplamsallığı ve $g(\alpha x) \leq \max\left\{1, |\alpha|^M\right\} g(x)$ olduğu görülür.

$g\left(x^m - x\right) \to 0$ olacak şekilde $x^m \in \ell_\Delta(u,v,p)$ ve $\alpha_m \to \alpha$ olacak şekilde (α_m), skalerlerin bir dizisi olsun. g 'nin alt toplamsallığı gereği

$$g\left(x^m\right) \leq g(x) + g\left(x^m - x\right)$$

olup $\left(g\left(x^m\right)\right)$ sınırlıdır. Dolayısıyla $n \to \infty$ için

$$g\left(\alpha_m x^m - \alpha x\right) = \left(\sum_n \left|\sum_{k=1}^{n} u_n v_k \left(\alpha_m \Delta x_k^m - \alpha \Delta x_k\right)\right|^{p_k}\right)^{1/M}$$

$$\leq |\alpha_m - \alpha|^{p_k/M} \, g\left(x^m\right) + |\alpha|^{p_k/M} \, g\left(x^m - x\right)$$

olduğundan skalerle çarpım süreklidir. Dolayısıyla g, $\ell_\Delta(u,v,p)$ üzerinde bir paranormdur. Şimdi $\ell_\Delta(u,v,p)$ nin tamlığını göstermeye çalışalım.

$\left(x^j\right) \in \ell_\Delta(u,v,p)$ bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ için her $i, j > m_0(\varepsilon)$ olduğunda $g\left(x^i - x^j\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. g ' nin tanımı gereği herbir sabit $n \in \mathbb{N}$ ve her $i, j > m_0(\varepsilon)$ için

$$\left|V_n\left(x^i\right) - V_n\left(x^j\right)\right|^{p_k/M} \leq \left(\sum_n \left|V_n\left(x^i\right) - V_n\left(x^j\right)\right|^{p_k}\right)^{1/M} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Her sabit $n \in \mathbb{N}$ için $\left\{V_n\left(x^0\right), V_n\left(x^1\right), V_n\left(x^2\right), ...\right\}$ $\mathbb{R}$ ' de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan $i \to \infty$ için $V_n(x_i) \to V_n(x)$ dir. $(Vx)_0, (Vx)_1, (Vx)_2, ...$ sonsuz limitlerini kullanarak $\{V_0x, V_1x, V_2x, ...\}$ dizisini yazabiliriz.

$i \to \infty$ iken $j \geq m_0(\varepsilon)$ olduğunda her sabit $n \in \mathbb{N}$ için $\left|V_n\left(x^j\right) - V_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ dir.

Her $j \in \mathbb{N}$ için $x^j = \left(x_k^j\right) \in \ell_\Delta(u,v,p)$ olduğundan her $j \geq m_0(\varepsilon)$ ve herbir $n \in \mathbb{N}$ için $\left|V_n\left(x^j\right)\right|^{p_k/M} < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. Sabit bir $j \geq m_0(\varepsilon)$ alındığında her $j \geq m_0(\varepsilon)$ için

$$\left|V_n(x)\right|^{p_k/M} \leq \left|V_n\left(x^j\right) - V_n(x)\right|^{p_k/M} + \left|V_n\left(x^j\right)\right|^{p_k/M} < \varepsilon$$

elde edilir. Dolayısıyla $x \in \ell_\Delta(u,v,p)$ olup $\ell_\Delta(u,v,p)$ uzayı tamdır.

Yeni dizi uzayı mutlak olmayan tipten olduğu için geometrik özelliklerin incelenmesi amacıyla mutlak tipe dönüştürmek için $\ell_{\rho\Delta}(u,v,p)$ ile göstereceğimiz

$$\ell_{\rho\Delta}(u,v,p) = \left\{x \in w : \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i \left|x_i\right| + u_k v_k \left|x_k\right|\right)^{p_k} < \infty\right\}$$

dizi uzayını tanımlayalım.

Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k \geq 1$ olacak şekilde $p = (p_k)$ pozitif sayıların bir dizisi olsun.

$$\rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i \left|x_i\right| + u_k v_k \left|x_k\right|\right)^{p_k}$$

olacak şekilde $\rho : \ell_{\rho\Delta}(u,v,p) \to [0,\infty]$ fonksiyoneli ile,

$\ell_{\rho\Delta}(u,v,p)$ üzerinde her $x \in \ell_{\rho\Delta}(u,v,p)$ için

$$\|x\| = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \le 1\right\}$$

Luxemburg normunu tanımlayalım.

Teorem 4.2

ρ fonksiyonu $\ell_{\rho\Delta}(u,v,p)$ üzerinde bir konveks modülerdir.

İspat

i) $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i |x_i| + u_k v_k |x_k|\right)^{p_k} = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

ii) $|\alpha| = 1$ olacak şekilde $\alpha \in F$ için

$$\begin{aligned}\rho(\alpha x) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i |\alpha x_i| + u_k v_k |\alpha x_k|\right)^{p_k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i |\alpha||x_i| + u_k v_k |\alpha||x_k|\right)^{p_k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha|^{p_k}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i |x_i| + u_k v_k |x_k|\right)^{p_k} \\ &= \rho(x).\end{aligned}$$

iii) $\alpha, \beta \ge 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\rho(\alpha x + \beta y) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i |\alpha x_i + \beta y_i| + u_k v_k |\alpha x_k + \beta y_k|\right)^{p_k} \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i |\alpha x_i| + u_k v_k |\alpha x_k| + \left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i |\beta y_i| + u_k v_k |\beta y_k|\right)\right)^{p_k} \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha|^{p_k}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i |x_i| + u_k v_k |x_k|\right)^{p_k} + \sum_{k=1}^{\infty}|\beta|^{p_k}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i |x_i| + u_k v_k \beta |x_k|\right)^{p_k} \\ &\le \alpha\rho(x) + \beta\rho(y).\end{aligned}$$

Önerme 4.1

$p = (p_k)$, her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k \ge 1$ olacak şekilde pozitif sayıların sınırlı bir dizisi ve $M = \sup_k p_k$ olmak üzere $x \in \ell_{\rho\Delta}(u,v,p)$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $0<\alpha<1$ ise $\alpha^M \rho\left(\frac{x}{\alpha}\right) \le \rho(x)$ ve $\rho(\alpha x) \le \alpha\rho(x)$,

ii) $\alpha>1$ ise $\rho(x) \le \alpha^M \rho\left(\frac{x}{\alpha}\right)$,

iii) $\alpha \ge 1$ ise $\rho(x) \le \alpha\rho(x) \le \rho(ax)$.

$\ell_{\rho\Delta}(u,v,p)$ uzayı üzerinde ρ modüleri ile Luxemburg normu arasındaki ilişki aşağıdaki önermelerle verilmiştir.

Önerme 4.2

i) $\|x\|<1$ ise $\rho(x) \le \|x\|$,

ii) $\|x\|>1$ ise $\rho(x) \ge \|x\|$,

iii) $\|x\|=1 \Leftrightarrow \rho(x)=1$,

iv) $\|x\|<1 \Leftrightarrow \rho(x)<1$,

v) $\|x\|>1 \Leftrightarrow \rho(x)>1$.

İspat

i) $0<\varepsilon<1-\|x\|$ olacak şekilde $\varepsilon>0$ alınsın. $\|.\|$ tanımından $\|x\|+\varepsilon>\lambda$ ve $\rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \le 1$ olacak şekilde $\lambda>0$ vardır.

Önerme 4.2 (i) ve (ii) den

$$\begin{aligned}\rho(x) &\le \rho\left(\frac{(\|x\|+\varepsilon)}{\lambda}x\right)\\ &= \rho\left((\|x\|+\varepsilon)\frac{x}{\lambda}\right)\\ &\le (\|x\|+\varepsilon)\rho\left(\frac{x}{\lambda}\right)\\ &\le \|x\|+\varepsilon\end{aligned}$$

Dolayısıyla her $\varepsilon \in (0,1-\|x\|)$ için $\rho(x) \le \|x\| + \varepsilon$ dir. $A = \{\|x\| + \varepsilon : 0 < \varepsilon < 1 - \|x\|\}$ olarak alındığında $\|x\| = \inf A$ olduğu görülür. $\rho(x)$, A nın bir alt sınırı olduğundan $\rho(x) \le \|x\|$ dir.

ii) $0 < \varepsilon < \dfrac{\|x\|-1}{\|x\|}$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ alındığında $1 < (1-\varepsilon)\|x\| < \|x\|$ olacaktır. $\|.\|$ tanımından,

$$1 < \rho\left(\frac{x}{(1-\varepsilon)\|x\|}\right)$$
$$\le \left(\frac{1}{(1-\varepsilon)\|x\|}\right)\rho(x),$$

olduğundan her $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{\|x\|-1}{\|x\|}\right)$ için $(1-\varepsilon)\|x\| < \rho(x)$ dir.

$A = \left\{(1-\varepsilon)\|x\| : 0 < \varepsilon < \dfrac{\|x\|-1}{\|x\|}\right\}$ olsun. Bu durumda $\|x\| = \sup A$ dir. $\rho(x)$, A'nın bir üst sınırı olduğundan $\|x\| \le \rho(x)$ dir.

iii) $\varepsilon > 0$ verlsin. $\|x\| = 1$ olarak kabul edildiğinde $1 + \varepsilon > \lambda > \|x\|$ ve $\rho\left(\dfrac{x}{\lambda}\right) \le 1$ olacak şekilde $\lambda > 0$ vardır. Önerme 4.2 (ii) den $M = \sup p_k$ olmak üzere;

$$\rho(x) \le \lambda^M \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$
$$\le \lambda^M$$
$$< (1+\varepsilon)^M$$

Dolayısıyla her $\varepsilon > 0$ için $\left(\rho(x)\right)^{1/M} < 1 + \varepsilon$ olduğundan $\rho(x) \le 1$ dir.

$\rho(x) < 1$ olduğunu kabul edelim. $\rho(x) < \alpha^M < 1$ olacak şekilde $\alpha \in (0,1)$ olsun. Önerme 4.2 (i) den $\rho\left(\dfrac{x}{\alpha}\right) \le \dfrac{1}{\alpha^M}\rho(x) < 1$ olacağından $\|x\| \le \alpha$ dir. $\alpha < 1$ olduğundan $\|x\| < 1$ olur ve bu da bir çelişkidir. Dolayısıyla $\rho(x) = 1$ dir. Aksine $\rho(x) = 1$ olsun. $\|.\|$ tanımından $\|x\| \le 1$ dir.

$\|x\|<1$ ise $\rho(x)\le\|x\|<1$ olur ve bu da kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla $\|x\|=1$ dir.

(iv) $\|x\|<1$ ise $\rho(x)<\|x\|<1$ dir.

$\rho(x)<1$ ise (ii) ve (iii) gereği $\|x\|<1$ dir.

(v) (iii) ve (iv) den görülebilir.

Önerme 4.3

$(x_n)\in\ell_{\rho\Delta}(u,v,p)$ olmak üzere;

$i)$ $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=1$ ise $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n)=1$,

$ii)$ $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n)=0$ ise $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=0$.

İspat

$i)$ $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=1$ olsun. $\varepsilon\in(0,1)$ alındığında her $n\ge N$ için $1-\varepsilon<\|x_n\|<1+\varepsilon$ olacak şekilde $N\in\mathbb{N}$ vardır. Her $n\ge N$ için $(1-\varepsilon)^M<\rho(x_n)<(1+\varepsilon)^M$ olduğundan $(\rho(x_n))^{1/M}\to 1$ elde edilir. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n)=1$ dir.

$ii)$ $\|x_n\|\not\to 0$ olsun. Bu durumda her $n\in\mathbb{N}$ için $\|x_{n_k}\|>\varepsilon$ olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisi ve bir $\varepsilon\in(0,1)$ vardır. Her $k\in\mathbb{N}$ için $\rho(x_{n_k})>\varepsilon^M$ olduğundan $\rho(x_{n_k})\not\to 0$ dir.

Önerme 4.4

$L>0$ ve $\varepsilon>0$ olmak üzere $\rho(u)\le L$ ve $\rho(v)\le\delta$ olacak şekilde $u,v\in\ell_{\rho\Delta}(u,v,p)$ için

$$|\rho(u+v)-\rho(u)|<\varepsilon$$

olacak şekilde $\delta>0$ vardır.

İspat

$p=(p_n)$ sınırlı olduğundan $\rho\in\Delta_2^s$ dir. Dolayısıyla lemma 3.1' den önermenin doğruluğu görülür.

Önerme 4.5

Her $(x_n) \in \ell_{\rho\Delta}(u,v,p)$ için

$$\|x_n\| \to 0 \Leftrightarrow \rho(x_n) \to 0$$

İspat

$\rho \in \Delta_2^s$ olduğunda lemma 3.3' den önermenin doğruluğu görülür.

Teorem 4.3

$x \in \ell_{\rho\Delta}(u,v,p)$ ve $\varepsilon \in (0,1)$ olmak üzere;

$\rho(x) \le 1-\varepsilon$ iken $\|x\| \le 1-\delta$ olacak şekilde $\delta \in (0,1)$ vardır.

İspat

$\rho \in \Delta_2^s$ olduğundan lemma 3.2' den önermenin doğruluğu görülür.

Teorem 4.4

$p = (p_k)$ pozitif sayıların sınırlı bir dizisi olmak üzere $\ell_{\rho\Delta}(u,v,p)$ uzayı

$$\|x\| = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) \le 1\right\}$$

Luxemburg normu altında bir Banach uzayıdır.

İspat

$(x_n) \in \ell_{\rho\Delta}(u,v,p)$ bir cauchy dizisi ve $\varepsilon \in (0,1)$ olsun. Bu durumda her $m,n \ge n_0$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in N$ vardır. Önerme 4.2 (i)' den her $n,m \ge n_0$ için

$$\rho(x_n - x_m) < \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i \left|x_n(i) - x_m(i)\right| + u_k v_k \left|x_n(k) - x_m(k)\right|\right)^{p_k} < \varepsilon \qquad (4.2)$$

Sabit bir k için $\left|x_n(i) - x_m(i)\right| < \varepsilon$ dir. Buradan $(x_n(i))$' nin $\mathbb{R}$' de bir cauchy dizisi olduğu görülür. $\mathbb{R}$ tam olduğundan $m \to \infty$ için $x_m(i) \to x(i)$ dir. Dolayısıyla $m \to \infty$

iken sabit bir k ve her $n \geq n_0$ için $\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i \left| x_n(i) - x(i) \right| + u_k v_k \left| x_n(k) - x(k) \right| \right) < \varepsilon$ dir.

(4.2)' den $m \to \infty$ iken her $n \geq n_0$ için $\rho(x_n - x_m) \to \rho(x_n - x)$ elde edilir. Dolayısıyla her $n \geq n_0$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i \left| x_n(i) - x_m(i) \right| + u_k v_k \left| x_n(k) - x_m(k) \right| \right)^{p_k} \to \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i \left| x_n(i) - x(i) \right| + u_k v_k \left| x_n(k) - x(k) \right| \right)^{p_k}$$

olduğundan önerme 4.2 (i)' den her $n \geq n_0$ için $\rho(x_n - x) < \|x_n - x\| < \varepsilon$ dir. Buradan $n \to \infty$ için $x_n \to x$ olduğu görülür. Dolayısıyla $(x_n - x) \in \ell_{\rho\Delta}(u, v, p)$. $\ell_{\rho\Delta}(u, v, p)$ bir lineer uzay olduğundan $x = x_n - (x_n - x) \in \ell_{\rho\Delta}(u, v, p)$ şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak $\ell_{\rho\Delta}(u, v, p)$ uzayı Luxemburg normu altında bir Banach uzayıdır.

Önerme 4.6

$x \in \ell_{\rho\Delta}(u, v, p)$, $(x_n) \subseteq \ell_{\rho\Delta}(u, v, p)$ olsun. $n \to \infty$ iken $\rho(x_n) \to \rho(x)$ ve her $i \in \mathbb{N}$ için $x_n(i) \to x(i)$ ise $x_n \to x$ dir.

İspat

$\varepsilon > 0$ verilsin. $\rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i \left| x_i \right| + u_k v_k \left| x_k \right| \right)^{p_k} < \infty$ olduğundan

$$\rho(x) = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i \left| x_i \right| + u_k v_k \left| x_k \right| \right)^{p_k} < \frac{\varepsilon}{6M} \tag{4.3}$$

$$\rho(x_n) - \sum_{k=1}^{k_0} \left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i \left| x_n(i) \right| + u_k v_k \left| x_n(k) \right| \right)^{p_k} \to \rho(x) - \sum_{k=1}^{k_0} \left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i \left| x(i) \right| + u_k v_k \left| x(k) \right| \right)^{p_k}$$

olduğundan her $n \geq n_0$ için

$$\left| \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i \left| x_n(i) \right| + u_k v_k \left| x_n(k) \right| \right)^{p_k} - \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i \left| x(i) \right| + u_k v_k \left| x(k) \right| \right)^{p_k} \right| < \frac{\varepsilon}{3M} \tag{4.4}$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Her $i \in \mathbb{N}$ için $x_n(i) \to x(i)$ olduğundan her $n \geq n_0$ için

$$\sum_{k=1}^{k_0} \left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i \left| x_n(i) - x(i) \right| + u_k v_k \left| x_n(k) - x(k) \right| \right)^{p_k} < \frac{\varepsilon}{3} .$$

(4.3) ve (4.4)' den her $n \geq n_0$ için

$$\rho(x_n - x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i \left|x_n(i) - x(i)\right| + u_k v_k \left|x_n(k) - x(k)\right|\right)^{p_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{k_0}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i \left|x_n(i) - x(i)\right| + u_k v_k \left|x_n(k) - x(k)\right|\right)^{p_k}$$

$$+ \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i \left|x_n(i) - x(i)\right| + u_k v_k \left|x_n(k) - x(k)\right|\right)^{p_k}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + M\left[\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i |x_n(i)| + u_k v_k |x_n(k)|\right)^{p_k}\right]$$

$$+ M\left[\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i \left|x(i)\right| + u_k v_k \left|x(k)\right|\right)^{p_k}\right]$$

$$= \frac{\varepsilon}{3} + M\left[\rho(x_n) - \sum_{k=1}^{k_0}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i |x_n(i)| + u_k v_k |x_n(k)|\right)^{p_k}\right]$$

$$+ M\left[\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i |x(i)| + u_k v_k |x(k)|\right)^{p_k}\right]$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + M\left[\rho(x) - \sum_{k=1}^{k_0}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i \left|x(i)\right| + u_k v_k \left|x(k)\right|\right)^{p_k} + \frac{\varepsilon}{3M}\right]$$

$$+ M\left[\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i \left|x(i)\right| + u_k v_k \left|x(k)\right|\right)^{p_k}\right]$$

$$= \frac{\varepsilon}{3} + M\left[\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i |x(i)| + u_k v_k |x(k)|\right)^{p_k} + \frac{\varepsilon}{3M}\right]$$

$$+ M\left[\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i |x(i)| + u_k v_k |x(k)|\right)^{p_k}\right]$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + M\left[\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M}\right] = \varepsilon$$

Dolayısıyla $n \to \infty$ için $\rho(x_n - x) \to 0$. Önerme 4.3 (ii)' den $n \to \infty$ için $\|x_n - x\| \to 0$ dir. Yani $x_n \to x$ dir.

Teorem 4.5

$\ell_{\rho\Delta}(u,v,p)$ uzayı Kadec-Klee özelliğine sahiptir.

İspat

$x \in S\left(\ell_{\rho\Delta}(u,v,p)\right)$, $\|x_n\| \to 1$ ve $x_n \xrightarrow{w} x$ olacak şekilde $(x_n) \subseteq B\left(\ell_{\rho\Delta}(u,v,p)\right)$ alalım. Önerme 4.2 (iii)' den $\rho(x_n) = 1$ dir. Dolayısıyla önerme 4.3 (i)' den $n \to \infty$ için $\rho(x_n) \to \rho(x)$ dir. $x_n \xrightarrow{w} x$ olduğundan ve $\pi_i(x) = x(i)$ ile tanımlı $\pi_i : \ell_{\rho\Delta}(u,v,p) \to \mathbb{R}$ $i.$ koordinat dönüşümü $\ell_{\rho\Delta}(u,v,p)$ üzerinde sürekli lineer bir fonksiyon olduğundan her $i \in \mathbb{N}$ için $n \to \infty$ iken $x_n(i) \to x(i)$ dir. Dolayısıyla önerme 4.6' dan $n \to \infty$ için $x_n \to x$ dir.

Teorem 4.6

$k \geq 2$ için $\ell_{\rho\Delta}(u,v,p)$ uzayı $k - NUC$ özelliğine sahiptir.

İspat

$\varepsilon > 0$ verilsin. $sep(x_n) \geq \varepsilon$ olacak şekilde $(x_n) \in B\left(\ell_{\rho\Delta}(u,v,p)\right)$ alalım. Her bir $m \in \mathbb{N}$ için $x_n^{(m)} = (0,0,...,0,x_n(m),x_n(m+1),...)$ olsun. Her bir $i \in \mathbb{N}$ için $\left(x_n(i)\right)_{n=1}^{\infty}$ sınırlıdır. Her bir $m \in \mathbb{N}$ için $1 \leq i \leq m$ olmak üzere $\left(x_{n_j}(i)\right)$ yakınsak olacak şekilde bir $\left(x_{n_j}\right) \subset (x_n)$ alt dizisi bulabiliriz. Dolayısıyla $sep\left(\left(x_{r_m}^m\right)_{j>t_m}\right) \geq \varepsilon$ olacak şekilde pozitif sayıların artan bir (t_m) dizisi vardır. Bu nedenle $\left\|x_{r_m}^m\right\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $r_1 < r_2 < ...$ olan $(r_m)_{m=1}^{\infty}$ pozitif sayıların bir dizisi vardır. Önerme 4.5 gereği her $m \in \mathbb{N}$ için $\rho\left(x_{r_m}^m\right) \geq \mu$ olacak şekilde $\mu > 0$ vardır.

$1 < \alpha < \liminf_{n\to\infty} p_n$ olacak şekilde $\alpha > 0$ alalım. Sabit bir $k \geq 2$ için $\varepsilon_1 = \frac{k^{\alpha-1}-1}{(k-1)k^{\alpha}}\left(\frac{\mu}{2}\right)$ olsun. Önerme 4.4 gereği $\rho(u) \leq 1$ ve $\rho(v) \leq 1$ olduğunda $\left|\rho(u+v) - \rho(u)\right| < \varepsilon_1$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. Önerme 4.2 (i) gereği her $n \in \mathbb{N}$ için $\rho(x_n) \leq 1$

olduğundan $\rho\left(x_i^{m_i}\right) \le \delta$ olacak şekilde $m_1 < m_2 < ... < m_{k-1}$ olan m_i pozitif sayıları vardır. Her $j \ge m_{k-1}$ için $\alpha \le p_j$ dir. $m_k = m_{k-1} + 1$ olarak tanımlayalım. Her $m \in \mathbb{N}$ için $\rho\left(x_{r_m}^m\right) \ge \mu$ olduğundan $\rho\left(x_i^{m_i}\right) \ge \mu$ dir. $1 \le i \le k-1$ için $s_i = i$ ve $s_k = r_{m_k}$ olsun. Bu durumda $f_i(u) = |u|^{p_i}$ fonksiyonunun konveksliğinden her $m \in \mathbb{N}$ için $\rho\left(x_{r_m}^m\right) \ge \mu$ ve $\left|\rho(u+v) - \rho(u)\right| < \varepsilon_1$ gerçeklerinden;

$$\rho\left(\frac{x_{s_1} + x_{s_2} + ...x_{s_k}}{k}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1} u_n \Delta v_i \left|\frac{x_{s_1}(i) + x_{s_2}(i) + ... + x_{s_k}(i)}{k}\right| + u_n v_n \left|\frac{x_{s_1}(n) + x_{s_2}(n) + ... + x_{s_k}(n)}{k}\right|\right)^{p_n}$$

$$= \sum_{n=1}^{m_1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} u_n \Delta v_i \left|\frac{x_{s_1}(i) + x_{s_2}(i) + ... + x_{s_k}(i)}{k}\right| + u_n v_n \left|\frac{x_{s_1}(n) + x_{s_2}(n) + ... + x_{s_k}(n)}{k}\right|\right)^{p_n}$$

$$+ \sum_{n=m_1+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1} u_n \Delta v_i \left|\frac{x_{s_1}(i) + x_{s_2}(i) + ... + x_{s_k}(i)}{k}\right| + u_n v_n \left|\frac{x_{s_1}(n) + x_{s_2}(n) + ... + x_{s_k}(n)}{k}\right|\right)^{p_n}$$

$$+ \sum_{i=m_1+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1} u_n \Delta v_i \left|\frac{x_{s_2}(i) + ... + x_{s_k}(i)}{k}\right| + u_n v_n \left|\frac{x_{s_2}(n) + ... + x_{s_k}(n)}{k}\right|\right)^{p_n} + \varepsilon_1$$

$$= \sum_{n=1}^{m_1} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n-1} u_n \Delta v_i \left|x_{s_j}(i)\right| + u_n v_n \left|x_{s_j}(n)\right|\right)^{p_n}$$

$$+ \sum_{n=m_1+1}^{m_2} \frac{1}{k} \sum_{j=2}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n-1} u_n \Delta v_i \left|x_{s_j}(i)\right| + u_n v_n \left|x_{s_j}(n)\right|\right)^{p_n}$$

$$+ \sum_{n=m_2+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1} u_n \Delta v_i \left|\frac{x_{s_2}(i) + x_{s_3}(i) + ... + x_{s_k}(i)}{k}\right| + u_n v_n \left|\frac{x_{s_2}(n) + x_{s_3}(n) + ... + x_{s_k}(n)}{k}\right|\right)^{p_n} + \varepsilon_1$$

$$\le \sum_{n=1}^{m_1} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n-1} u_n \Delta v_i \left|x_{s_j}(i)\right| + u_n v_n \left|x_{s_j}(n)\right|\right)^{p_n}$$

$$+ \sum_{n=m_1+1}^{m_2} \frac{1}{k} \sum_{j=2}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n-1} u_n \Delta v_i \left|x_{s_j}(i)\right| + u_n v_n \left|x_{s_j}(n)\right|\right)^{p_n}$$

$$+\sum_{n=m_2+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}u_n\Delta v_i\left|\frac{x_{s_3}(i)+\ldots+x_{s_k}(i)}{k}\right|+u_nv_n\left|\frac{x_{s_3}(n)+\ldots+x_{s_k}(n)}{k}\right|\right)^{p_n}+2\varepsilon_1$$

$$\le\sum_{n=1}^{m_1}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n-1}u_n\Delta v_i\left|x_{s_j}(i)\right|+u_nv_n\left|x_{s_j}(n)\right|\right)^{p_n}$$

$$+\sum_{n=m_1+1}^{m_2}\frac{1}{k}\sum_{j=2}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n-1}u_n\Delta v_i\left|x_{s_j}(i)\right|+u_nv_n\left|x_{s_j}(n)\right|\right)^{p_n}$$

$$+\sum_{n=m_2+1}^{m_3}\frac{1}{k}\sum_{j=3}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n-1}u_n\Delta v_i\left|x_{s_j}(i)\right|+u_nv_n\left|x_{s_j}(n)\right|\right)^{p_n}$$

$$+$$

$$\vdots$$

$$+\sum_{n=m_{k-2}+1}^{m_{k-1}}\frac{1}{k}\sum_{j=k-1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n-1}u_n\Delta v_i\left|x_{s_j}(i)\right|+u_nv_n\left|x_{s_j}(n)\right|\right)^{p_n}$$

$$+\sum_{n=m_{k-1}+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}u_n\Delta v_i\left|\frac{x_{s_k}(i)}{k}\right|+u_nv_n\left|\frac{x_{s_k}(n)}{k}\right|\right)^{p_n}+(k-1)\varepsilon_1$$

$$\le\frac{\rho\left(x_{s_1}\right)+\rho\left(x_{s_2}\right)+\ldots+\rho\left(x_{s_k}\right)}{k}+\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{m_k}\left(\sum_{i=1}^{n-1}u_n\Delta v_i\left|x_{s_k}(i)\right|+u_nv_n\left|x_{s_k}(n)\right|\right)^{p_n}$$

$$+\sum_{n=m_k+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}u_n\Delta v_i\left|\frac{x_{s_k}(i)}{k}\right|+u_nv_n\left|\frac{x_{s_k}(n)}{k}\right|\right)^{p_n}+(k-1)\varepsilon_1$$

$$\le\frac{k-1}{k}+\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{m_k}\left(\sum_{i=1}^{n-1}u_n\Delta v_i\left|x_{s_k}(i)\right|+u_nv_n\left|x_{s_k}(n)\right|\right)^{p_n}$$

$$+\frac{1}{k^{\alpha}}\sum_{n=m_k+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}u_n\Delta v_i\left|x_{s_k}(i)\right|+u_nv_n\left|x_{s_k}(n)\right|\right)^{p_n}+(k-1)\varepsilon_1$$

$$\le 1-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\left[1-\sum_{n=m_k+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}u_n\Delta v_i\left|x_{s_k}(i)\right|+u_nv_n\left|x_{s_k}(n)\right|\right)^{p_n}\right]$$

$$+\frac{1}{k^{\alpha}}\sum_{n=m_k+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}u_n\Delta v_i\left|x_{s_k}(i)\right|+u_n v_n\left|x_{s_k}(n)\right|\right)^{p_n}+(k-1)\varepsilon_1$$

$$=1-\frac{k^{\alpha}-1}{k^{\alpha}}\sum_{n=m_k+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}u_n\Delta v_i\left|x_{s_k}(i)\right|+u_n v_n\left|x_{s_k}(n)\right|\right)^{p_n}+(k-1)\varepsilon_1$$

$$\le 1+(k-1)\varepsilon_1-\frac{k^{\alpha-1}-1}{k^{\alpha}}\mu$$

$$=1-\frac{k^{\alpha-1}-1}{k^{\alpha}}\frac{\mu}{2}$$

Teorem 4.1' den $\left\|\frac{x_{s_1}+x_{s_2}+\ldots+x_{s_k}}{k}\right\|<1-\gamma$ olacak şekilde $\gamma>0$ vardır. Dolayısıyla $\ell_{\rho\Delta}(u,v,p)$ $k-NUC$ özelliğine sahiptir.

Teorem 4.7

$\ell_{\rho\Delta}(u,v,p)$ uzayı düzgün Opial özelliğine sahiptir.

İspat

$x\in\ell_{\rho\Delta}(u,v,p)$ olmak üzere $\|x\|\ge\varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon>0$ alalım. $(x_n)\in S\left(\ell_{\rho\Delta}(u,v,p)\right)$ bir zayıf null dizisi olsun. $\limsup_{r\to\infty}p_r<\infty$ olduğundan $\rho\in\Delta_2^s$ dir. Dolayısıyla lemma 3.2' den $\rho(x)>\delta$ olacak şekilde $\delta\in(0,1)$ vardır.

$\rho\in\Delta_2^s$ olduğundan lemma 3.1' den $\rho(y)\le 1$ ve $\rho(z)\le\delta_1$ iken

$$\left|\rho(y+z)-\rho(y)\right|<\frac{\delta}{4} \tag{4.5}$$

olacak şekilde $\delta_1\in(1,\delta)$ vardır.

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1}u_k\Delta v_i\left|x_i\right|+u_k v_k\left|x_k\right|\right)^{p_k}<\frac{\delta_1}{4} \tag{4.6}$$

olacak şekilde $k_0\in\mathbb{N}$ alalım.

$$\delta<\sum_{k=1}^{k_0}\left(\sum_{i=1}^{k-1}u_k\Delta v_i\left|x_i\right|+u_k v_k\left|x_k\right|\right)^{p_k}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1}u_k\Delta v_i\left|x_i\right|+u_k v_k\left|x_k\right|\right)^{p_k}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{k_0}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i |x_i| + u_k v_k |x_k|\right)^{p_k} + \frac{\delta_1}{4} \tag{4.7}$$

Dolayısıyla ;

$$\sum_{k=1}^{k_0}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i |x_i| + u_k v_k |x_k|\right)^{p_k} > \delta - \frac{\delta_1}{4}$$

$$> \delta - \frac{\delta}{4} \tag{4.8}$$

$$= \frac{3\delta}{4}$$

$x_n \overset{w}{\to} 0$ olduğundan her $n > n_0$ için

$$\frac{3\delta}{4} \leq \sum_{k=1}^{k_0}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i |x_n(i) - x(i)| + u_k v_k |x_n(k) - x(k)|\right)^{p_k} \tag{4.9}$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca $x_n \overset{w}{\to} 0$ olduğundan her $n > n_1$ için

$$\left\| x_{n|k_0} \right\| < 1 - \left(1 - \frac{\delta}{4}\right)^M \tag{4.10}$$

olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Üçgen eşitsizliğinden,

$$\left\| x_{n|\mathbb{N}-k_0} \right\| > \left(1 - \frac{\delta}{4}\right)^M \tag{4.11}$$

dir. Norm tanımından,

$$1 < \rho\left(\frac{x_{n|_{\mathbb{N}-k_0}}}{\left(1-\frac{\delta}{4}\right)^M}\right)$$

$$= \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i \left|\frac{x_n(i)}{\left(1-\frac{\delta}{4}\right)^M}\right| + u_k v_k \left|\frac{x_n(k)}{\left(1-\frac{\delta}{4}\right)^M}\right|\right)^{p_k} \tag{4.12}$$

$$\leq \frac{1}{\left(1-\frac{\delta}{4}\right)^M} \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1} u_k \Delta v_i |x_n(i)| + u_k v_k |x_n(k)|\right)^{p_k}$$

Dolayısıyla her $n > n_1$ için

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1}u_k\Delta v_i\left|x_n(i)\right|+u_k v_k\left|x_n(k)\right|\right)^{p_k}>\left(1-\frac{\delta}{4}\right)^{M^2} \tag{4.13}$$

(4.5), (4.6), (4.9) ve (4.13)' dan her $n>n_1$ için

$$\rho(x_n-x)=\sum_{k=0}^{k_0}\left(\sum_{i=1}^{k-1}u_k\Delta v_i\left|x_n(i)-x(i)\right|+u_k v_k\left|x_n(k)-x_n(k)\right|\right)^{p_k}$$

$$+\sum_{l=k_0+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1}u_k\Delta v_i\left|x_n(i)-x(i)\right|+u_k v_k\left|x_n(k)-x(k)\right|\right)^{p_k}$$

$$\geq\frac{3\delta}{4}+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k-1}u_k\Delta v_i\left|x_n(i)\right|+u_k v_k\left|x_n(k)\right|\right)^{p_k}-\frac{\delta}{4}$$

$$\geq\frac{3\delta}{4}+\left(1-\frac{\delta}{4}\right)^{M^2}-\frac{\delta}{4}$$

$\rho\in\Delta_2^s$ olduğundam lemma 3.4' den

$\|x_n-x\|\geq 1+\tau$ Üçgen eşitsizliğinden olacak şekilde δ ' ya bağlı $\tau>0$ vardır.

Dolayısıyla $\liminf_{n\to\infty}\|x_n-x\|\geq 1+\tau$ elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] Maddox, I.J., (1988). Element of Functional Analysis, Cambridge University Press.

[2] Kreyszig, E., (1978). Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, Canada.

[3] Malkowsky, E. ve Savaş, E., (2000). "Some Sequence Spaces Defined by a Modulus", Archivium Math. Tom (36): 219-228.

[4] Clarkson, J., (1936). "Uniformly Convex Spaces", Trans. Amer. Math. Soc. (American Mathematical Society), 40 (3): 396-414.

[5] Agarwal, R.P., O'Regan ve Sahu, D.R., (2009). Fixed Point Theory for Lipschitzian-Type Mappings with Applications, Springer, New York.

[6] Carothers, N.L., (2005). A Short Course on Banach Spaces Theory, Cambridge University Press, Cambridge.

[7] Prus, S., (2001). "Geometrical Background of Fixed Point Theory", Handboook of Fixed Point Theory, Kluwer Acad., 93-132.

[8] Chidume, C., (2009), Geometric Properties of Banach Spaces and nonlinear İterations, Springer-Verlag London Limited.

[9] Goebel, K. ve Kirk, W.A, (1990), Topics in Metric Fixed Point Theory, Cambridge University Press.

[10] Savaş, E., Karakaya, V. ve Şimşek, N., (2009). "Some $\ell(p)$-type New Sequence Spaces and Their Geometric Properties", Abstract and Applied Analysis, 2009 (69697): 1-12.

[11] Şimşek, N. ve Karakaya, V., (2008). "Structure and Some Geometric Properties of Generalized Cesaro Sequence Spaces", Int. J. Contemp. Math. Saciences, 3 (8): 389-399.

[12] Suantai, S., (2003), "On Some Convexity Properties of Generalized Cesaro Sequence Spaces", Georgian Mathematical Journal, 10 (1): 193-200.

[13] Cui, Y., Hudzik, H. ve Meng, C., (1998). "On Some Local Geometry of Orlicz Sequence Spaces Equipped With The Luxemburg Norm", Acta Math Hungar.

[14] Şimşek, N. ve Karakaya, V., (2008). "Structure and Some Geometric Properties of Generalized Cesaro Sequence Spaces", Int. J. Contemp. Math. Saciences, 3(8): 389-399.

[15] Cui, Y., Hudzik, H., Meng, C., (1998), "On Some Local Geometry of Orlicz Sequence Spaces Equipped With The Luxemburg Norm", Acta Math. Hungar., 80 (1-2): 143-154.

[16] Lin, B.L., Lin, P.K. ve Troyanski, S.L., (1986). "Some Geometric and Topolojical Properties of The Unit Sphere in a Banach Space" Springer, 274 (4): 613-616.

[17] Şimşek, N., (2011). "On Some Geometric Properties of Sequence Space Defined by de la Vallee-Poussin Mean", Journal of Computational Analysis and Applications, 13 (3): 565-573.

[18] Cui, Y. ve Hudzik, H., (1999). "Some Geometric Properties Related to Fixed Point Theory in Cesaro Spaces", Collect. Math., 50 (3): 277-288.

[19] Cui, Y., Meng, C. ve Pluciennik, R., (2000). "Banach-Saks Property and Property (β) in Cesaro Sequence Spaces", Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 24: 201-210.

[20] Mongkolkeha, C., Kumam, P., (2011). "Some Geometric Properties of Lacunary Sequence Spaces Related to Fixed Point Property", Abstract and applied Analysis, 2011 (903736).

[21] Sanhan, W. ve Suantai, S., (2003). "On k-Nearly Uniformly Convex Property in Generalized Cesaro Sequence Spaces", Hindawi Publishing Corporation, 3599-3607.

[22] Şimşek, N. ve Karakaya, V., (2009). "On Some Geometrical Properties of Generalized Modular Spaces of Cesaro Type Defined by Weighted Means", Journal of Inequalities and Applications, 2009 (932734).

[23] Musielak, J., (1983). Orlicz Sequence Spaces and Modular Spaces, Lecture Notes in Math., 1034 Springer-Verlag.

[24] Petrot, N. ve Suantai, S., (2005). "Uniform Opial Properties in Generalized Cesaro Sequence Spaces", Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 63 (8): 1116-1125.

[25] Suantai, S., (2003). "On H-Property of Some Banach Sequence spaces", Archivum Mathematicum, Tomus 39: 309-316.

[26] Şimşek, N. ve Karakaya, V., (2010). "On Some Geometrical Properties of Certain Vector-Valued Sequence Spaces", Far East Journal of Mathematical Sciences, 40: 189-200.

[27] Karakaya, V., (2007). "Some Geometric Properties of Sequence Spaces Involving Lacunary Sequence", Journal of Inequalities and Applications, 2007 (81028): 1-8.

[28] Öztürk, M. ve Başarır, M., (2007). "On k-NUC Property in Some Sequence spaces Involving Lacunary Sequences", Thai J. Math., 5: 127-136.

[29] Savaş, E., Şimşek, N. ve Karakaya, V., (2010). "Some Geometric and Topolojical Properties of A New Sequence Spaces Defined By de la Vallee-Poussin Mean", Journal of Computational Analysis and Applications, 12 (4)

[30] Kara, E. E, Öztürk, M. ve Başarır, M., (2010). "Some Topolojical and Geometric Properties of Generalized Euler Sequence Spaces", Mathematica Slovaca, 60 (3): 385-398.

[31] Polat, H., Karakaya, V. ve Şimşek, N., (2011). "Difference Sequence Spaces Derived by Using A Generalized Weighted Mean", Applied Mathematics Letters, 24: 608-614.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :Fatma ALTUN

Doğum Tarihi ve Yeri :29.10.1987

Yabancı Dili :İngilizce

E-posta :f.zeynep63@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans			
Lisans	Matematik	Harran Üniversitesi	2009
Lise	Fen Bilimleri	Hüseyin Özbuğday Lisesi	2005