Teorem: X ve Y birer küme ov $f: X \to Y$ fonk. olsun.

f birebir ve örten $\iff \exists\, g: Y \to X$ fonk öyle ki: $f(g(y)) = y,\ y \in Y.$
$g(f(x)) = x,\ x \in X.$

İspat:

$(\Rightarrow)$ f birebir ve örten olsun.

f örten old;

$\forall y \in Y$ için $\exists x \in X$ öyle ki: $f(x) = y$.

y ~~değeri~~ elemanı için var olan x ~~değeri~~ elemanı, f birebir old. tek türlüdür.

(Yani, $\forall y \in Y$ için $\exists!\, x \in X$ öyle ki $f(x) = y$)

Şimdi g fonksiyonunu her $y \in Y$ elemanı için tek türlü belirlenen x ~~ele~~ elemanına götüren fonk. olarak alalım;

$$g(y) := x$$

Not: Her y elemanı için x'in tek türlü oluşu g'nin fonk. oluşunu garanti eder.

Ayrıca $f(g(y)) = y$ ve $g(f(x)) = x$ oldukları g'nin kurgusundan açıktır.

$(\Leftarrow)$ Teoremdeki sağ tarafın sağlandığını kabul edelim.

f birebirdir

$f(x_1) = f(x_2)$ ele alalım

$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$

$x_1 = x_2$

f örtendir

$\forall y \in Y$ elemanı için g fonk. olduğundan $g(y) = x \in X$ mevcut olup $f(x) = f(g(y)) = y$ dur.

NOT: Teoremdeki "g" fonk. tek türlü vardır.

Varsayalım ki h diğer bir fonk. olsun.

$y \in Y$ için $(f(x) = y)$

$h(y) = h(f(x)) = x = g(f(x))$
$= g(y)$

$\Rightarrow h \equiv g$ dur.

Tanım: Teoremdeki (sağda) tek türlü olan g fonksiyonuna f'nin ters fonk. denir ve "f^{-1}" olarak gösterilir.

Soru: f fonk. terslenebilir olsun. $f: X \to Y$

$(f^{-1})^{-1} = f$ olduğunu araştırınız.

Çözüm.

İlk olarak f^{-1} fonk. tersinin mevcut olup olmadığı sorgulanmalı!!

- f^{-1} birebir

$$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) \Rightarrow f(f^{-1}(y_1)) = f(f^{-1}(y_2))$$

$$\Rightarrow y_1 = y_2$$

- f^{-1} örten

$\forall x \in X$ için $\exists\, y \in Y$ $(y = f(x))$ öyle ki

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

O halde f^{-1} birebir ve örten old. tersi vardır. ($(f^{-1})^{-1}$ ile gösteriyoruz)

$f^{-1}(f(x)) = x$, $f(f^{-1}(y)) = y$ olduğundan

$\Leftarrow$ f fonk, f^{-1}'in ters fonksiyonudur.

Ayrıca ters fonk. tek türlü olduğundan

$$(f^{-1})^{-1} = f \text{ olur.}$$

Soru: $g: A \to B$ ve $f: B \to C$ iki terslenebilir fonk olsun.

$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ old. gösteriniz.

Çözüm:

f ve g terslenebilir old. $f \circ g$'de terslenebilir (Nasıl?)

$f \circ g : A \to C$

1. yol

$(f \circ g)^{-1}(c) = a \Rightarrow (f \circ g)(a) = c \Rightarrow f(g(a)) = c$

$\Rightarrow f^{-1}(c) = g(a) \Rightarrow a = g^{-1}(f^{-1}(c)) = (g^{-1} \circ f^{-1})(c)$

Yani, $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ olur.

2. yol.

$(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = ((g^{-1} \circ f^{-1}) \circ f) \circ g = (g^{-1} \circ (f^{-1} \circ f)) \circ g$

$= (g^{-1} \circ I_B) \circ g = g^{-1} \circ g = I_A$

ayrıca

$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = ((f \circ g) \circ g^{-1}) \circ f^{-1} = (f \circ (g \circ g^{-1})) \circ f^{-1}$

$= (f \circ I_B) \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = I_B$.

$g^{-1} \circ f^{-1}$ fonksiyonu $f \circ g$ fonksiyonun tersi niteliğinde olup ve ters fonk. tek türlü olduğundan

$g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$ olur.

Soru: $f: X \to Y$ bir fonk. olsun.

f birebir $\iff$ $\forall A \subseteq X$ için $f(X \setminus A) \subseteq Y \setminus f(A)$ dır.

Çözüm:

($\Rightarrow$) f birebir olsun. $A \subseteq X$ ele alalım.

$y \in f(X \setminus A) \Rightarrow \exists x \in X \setminus A$ öyleki $f(x) = y$

$\Rightarrow x \notin A$ ve $f(x) = y$

(g.g./ $y \notin f(A)$) Varsayalım ki $y = f(a)$ o.ş. $a \in A$ olsun.

$f(x) = f(a) \underset{f \text{ birebir}}{\Rightarrow} x = a \in A$ $\Big\}$ $x \notin A$ olması ile çelişir.

O halde varsayım yanlış olup $\forall a \in A$ için $y \neq f(a)$

buradan $y \notin f(A) \Rightarrow y \in Y \setminus f(A)$

dolayısı ile $f(X \setminus A) \subseteq Y \setminus f(A)$ olur.

($\Leftarrow$) $f(x_1) = f(x_2)$ ele alalım.

$A = X \setminus \{x_1\}$ olarak düşünürsek;

$f(X \setminus A) = f(\{x_1\}) \underset{\text{(hipotezden kabulden)}}{\subseteq} Y \setminus f(X \setminus \{x_1\})$

$f(x_2) = f(x_1) \in f(\{x_1\}) \subseteq Y \setminus f(X \setminus \{x_1\})$ olup

$f(x_2) \notin f(X \setminus \{x_1\}) \Rightarrow x_2 \notin X \setminus \{x_1\}$

$\Rightarrow x_2 \in \{x_1\} \Rightarrow x_1 = x_2$, yani f birebir.

Soru (Bernoulli Eşitsizliği): $a > -1$ reel sayısı ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$(1+a)^n \geq 1+na$ old. gösteriniz.

Çözüm:

$n=1$ için $(1+a) \geq 1+a$ old. doğrudur.

$n=k$ için doğru olsun.

$n=k+1$ için bakalım;

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k.(1+a) \overset{\text{kabulden } (n=k \text{ ayağı})}{\geq} (1+ka).(1+a) = 1+(k+1)a+ka^2$$

$(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$ eşitsizliğini elde ederiz ki

Tümevarımdan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(1+a)^n \geq 1+na$ gerçeklenir.

Soru: Her $n \in \mathbb{N}$ için

$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ old. gösteriniz.

Çözüm:

$n=1$ için $1^2 = \dfrac{1.2.3}{6}$ doğru

$n=k$ için doğru olsun.

$n=k+1$ için bakalım;

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 = \frac{k.(k+1).(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{(k+1)\left[k.(2k+1)+6(k+1)\right]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\left[2k^2+7k+6\right]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Tümevarımdan $\forall n \in \mathbb{N}$ için verilen eşitlik gerçeklenir.

☆ $n,k \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq k \leq n$ olsun.

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \text{ dir}$$

Kombinasyon tanımından;

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k+1)!\cdot(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

$$= \frac{n!\cdot k + n!\cdot(n-k+1)}{(n-k+1)!\cdot k!}$$

$$= \frac{n!\,.(n+1)}{(n-k+1)!\cdot k!} = \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!\cdot k!} = \binom{n+1}{k}$$

Soru: (Binom Formülü)

$a,b \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ dir.

Çözüm:

$n=1$ için eşitliğin doğru old. açıktır.
$n=p$ için doğru olduğunu kabul edelim
$n=p+1$ için bakalım;

$$(a+b)^{p+1} = (a+b)(a+b)^p = (a+b)\left(\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^{p-k}b^k\right)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^{p-k+1}b^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^{p-k}b^{k+1}\right)$$

$$= \left(a^{p+1} + \sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}a^{p-k+1}b^k\right) + \left(b^{p+1} + \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}a^{p-k}b^{k+1}\right)$$

$k=i-1$ dönüşümü ile $\sum\limits_{i=1}^{p}\binom{p}{i-1}a^{p-i+1} \times b^i$ dur.

$$= a^{p+1} + \sum_{k=1}^{p}\underbrace{\left[\binom{p}{k}+\binom{p}{k-1}\right]}_{=\binom{p+1}{k}}a^{p-k+1}b^k + b^{p+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{p+1}\binom{p+1}{k}a^{p+1-k}b^k \text{ olup}$$

Tümevarımdan $\forall n \in \mathbb{N}$ için eşitlik gerçeklenir.