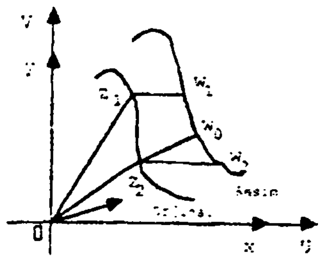
DÖRDÜNCÜ BÖLÜM
DÖNÜŞÜMLER

4.1. Elementer Fonksiyonlarla Yapılan Dönüşümler

z düzleminde x ile y arasındaki bir bağıntı bize o düzlemde bir eğri verir. $w=u+iv$ düzlemindeki u ve v arasındaki bağıntı da w düzleminde bir eğri gösterir. $u=u(x,y)$ ve $v=v(x,y)$ olduğu düşünülürse, bu eğriler arasında bir münasebet olacaktır. Daha doğrusu birinciden haraket ederek ikinciyi bulmaya çalışacağız. İlk eğriye orijinal (1.eğri), ikinci eğriye de resim diyeceğiz. Özel olarak, $w=f(z)$ fonksiyonu ile verilen dönüşümleri incelerken, z ve w düzlemlerini çakışık kabul edeceğiz.

4.2. $w=\alpha z+\beta$ ile gösterilen Tam Lineer Fonksiyonlar Vasıtasıyla Yapılan Dönüşümler

1. $w=\alpha z+\beta$, $\alpha\in R$ ve $\alpha=1$ olarak alınırsa, $w=z+\beta$ olur.



Şekil 4.1

Bu durumda z nin resmi z vektörüne göre β sabit vektörünün ilavesi ile elde edilir. O halde bu dönüşüm, düzlemin her bir noktasına β paralel kaydırması veya dönüşümünü tatbik edeceğeni ifade eder. Bu dönüşümde genel olarak z düzleminin doğru ve daireleri, w düzleminin doğru ve dairelerine dönüşürler. Karşılık gelme bire-bir olur.

2. $\beta=0$ ise, $w=\alpha z$ olur. Bu halde,

a) $\alpha=[1,\varphi]$, $|\alpha|=1$, $\alpha=e^{i\varphi}$

b) $\alpha=[\rho,0]$

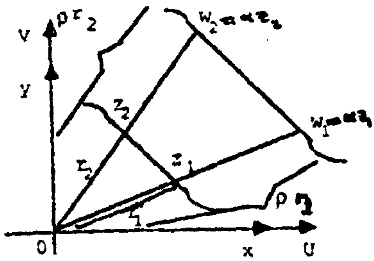
durumları söz konusudur.

a) $\alpha=[1,\varphi]$ olsun. Buradan, $w=\alpha z=[r,\varphi+\theta]$ olur.

Bu dönüşümde orijinalin noktaları, başlangıç noktasına olan uzaklıkları değişmeden φ açısı kadar bir dönmeye tabi tutulmaktadır. Resim ile orijinal kongruenttir. Karşılık gelme bire-birdir.

b) $\alpha=[\rho,0]$ ise, $w=\alpha z=[\rho,0]\,[r,\theta]=[\rho.r,\theta]$ ve buradan $w=\rho z$ olur.

Burada z vektörü ρ reel sayısı ile çarpılmıştır. Yani z vektörü bir uzama veya kısalmaya tabi tutulmuştur. O halde dönüşüm bir homotetiden ibarettir. Orijinal ile resim eşit şekiller değillerdir. Elementer geometriden bilindiği gibi doğruların homotetiği doğrular, daireleꞔin homotetiği de dairelerdir. Bu analitik olarak belirtilebilir.



Şekil 4.2

Ax+By+C=0 doğru denklemini göz önüne alalım. $w=\rho z$ verilmiş olsun. $u+iv=\rho(x+iy)$ den,

$$u=\rho x \Rightarrow x=\frac{u}{\rho},$$

$$v=\rho y \Rightarrow y=\frac{v}{\rho}$$

ve

$$A\left(\frac{u}{\rho}\right)+B\left(\frac{v}{\rho}\right)+C=0$$

bulunur.

Madem ki bu dönüşümde doğrular kendilerine paralel doğrulara dönüşüyorlar, o halde açılar da muhafaza edilmektedir. Yani iki eğri hangi açı altında kesişirlerse,resimleri de aynı açı altında kesişirler. Bu sonuçlara göre, a ile b yi birleştirebiliriz.

$$w=\alpha z, \alpha=[\rho,\varphi] \text{ , } z'=[1,\varphi]z, w=\rho z'$$

dönüşümlerini göz önüne alalım ve bunları arka arkaya tatbik edelim.

$$w=\rho z'=\rho\ [1,\varphi]\ z=[\rho,\varphi]z=\alpha z$$

bulunur ki bu bir dönme ile bir dilatasyon (uzama -kısalma) ifade eder. Şimdi de 1) ve 2) arka arkaya tatbik edilirse yani,

$$w'=\alpha z, \quad w=w'+\beta$$

dönüşümleri tatbik edilirse,

$$w=\alpha z+\beta$$

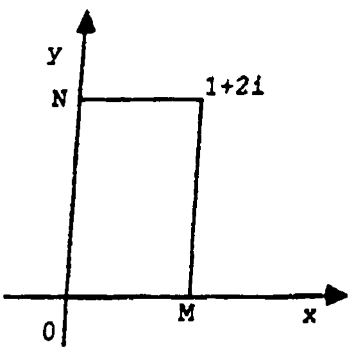
dönüşümü elde edilir. Bu dönüşümlere tam lineer dönüşümler denir. 1) ve 2) den görüleceği gibi bu dönüşümler,

a) Dönme (revülation)

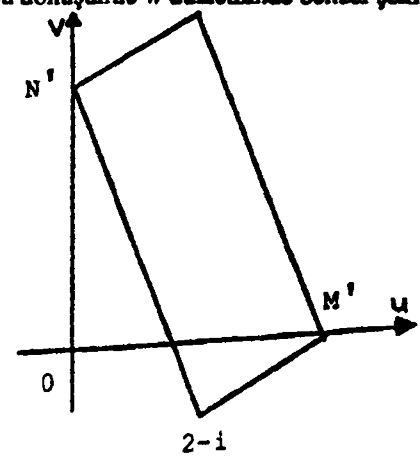
b) Uzama (dilation)

c) Kayma (translation)

ifade eder. O halde, z düzlemindeki şekiller bu dönüşümle w düzleminde benzer şekillere dönüşürler. Açılar invaryant (sabit) kalır.



Şekil 4.3 a



Şekil 4.3b

Örneğin, Şekil 4.3a'da verilen dikdörtgen $w=(1+i)z+2-i$ dönüşümü ile Şekil 4.3b'deki dikdörtgene dönüşür.

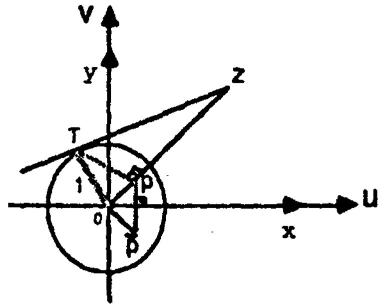
4.3. w= 1/z Dönüşümü (Transformasyonu)

$$w=\frac{1}{z}=\left[\frac{1,0}{r,\theta}\right]=\left[\frac{1}{r},-\theta\right]$$

yazılabileceği aşikardır. O halde, z=[r,θ] noktası bu dönüşümle $w=\left[\frac{1}{r},-\theta\right]$ noktasına dönüşür.

$$P=\left[\frac{1}{r},\theta\right],\ \bar{P}=\left[\frac{1}{r},-\theta\right]$$

Birim çember ile z=[r,θ] noktasını göz önüne alalım. $(\widehat{OTP})\sim(\widehat{OzT})$ olduğundan $\overline{OP}.\overline{Oz}=1$. O halde $\overline{OP}=1/r$ dir. Yani P noktası z noktasının birim çembere göre tersidir. Bu şekilde P noktası bulunmuş olur. P nin OX eksenine göre simetriği (P nin eşleniği) olan $\bar{P}$ sayısına karşılık gelen nokta z=[r,θ] nın resmi olan w noktasıdır. O halde w=1/z dönüşümü birim çembere göre bir akis (invers), OX eksenine göre bir simetri belirtir. w=1/z veya z=1/w dönüşümü z=0, w=0 noktası hariç bire-bir dönüşümdür. Görüldüğü gibi bir çemberin dışındaki noktalar birim çemberin içine dönüşüyor (tersi de doğrudur). Birim çember üzerindeki noktalar, reel eksene göre simetrik noktalara dönüşüyorlar. w=u+iv ve z=x+iy alırsak,

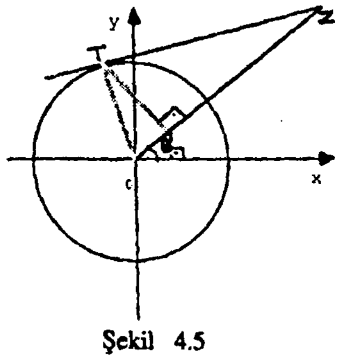


Şekil 4.4.

$$u+iv=\frac{1}{x+iy}\Rightarrow u=\frac{x}{x^2+y^2},\ v=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$x=\frac{u}{u^2+v^2},\ y=-\frac{v}{u^2+v^2}$$

olur.



Şekil 4.5

a,b,c,d ∈ R ise

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0 \qquad ...(1)$$

ifadesinin bir çember veya doğru temsil ettiği bilinir (a=0 veya a≠0). $w=1/z$ dönüşümü altında (1) denklemi,

$$d(u^2+v^2)+bu+cv+a=0 \qquad ...(2)$$

durumuna gelir. Aynı şekilde (2) denkleminden de (1) denklemi elde edilir.

a) Bundan dolayı eğer a ve d sıfırdan farklı ise , orijinal ve resmin her ikisi de çemberdir. Bu çemberler z=0 ve w=0 noktalarından geçmezler. Yani orijinden geçmeyen çemberler (akis merkezinden geçmeyen) yine çemberlere dönüşürler.

b) Akis merkezinden geçmeyen çemberler , akis merkezinden geçmeyen doğrulara,

c) Akis merkezinden geçmeyen doğrular, akis merkezinden geçen çemberlere,

d)Akis merkezinden geçen doğrular, akis merkezinden geçen doğrulara (kendilerine) dönüşürler.

e) Akis çemberi olan birim çember, yine kendisine dönüşür.

f) Akis (orijin) merkezinin aksi sonsuzdaki nokta olduğundan, z düzlemindeki başlangıç noktasının resmi sonsuzdur.

Eğer doğruları çemberlerin limiti gibi düşünecek olursak, bu dönüşüm çemberleri çemberelere dönüştürür. Özel olarak $x=c_1$ doğrusunu göz önüne alalım. O zaman,

$$x=\frac{u}{u^2+v^2} \Rightarrow u^2+v^2-\frac{u}{c_1}=0 \qquad ,(c_1\neq 0)$$

olur ve bu bir çember denklemidir. Aynı zamanda orijinde v eksenine teğettir.

$y=c_2$ olarak alınırsa.

$$y=-\frac{v}{u^2+v^2} \Rightarrow u^2+v^2+\frac{v}{c_2}=0 \qquad (c_2\neq 0)$$

olur.

$x>c_1$ (yarı düzlem), $\frac{u}{u^2+v^2}>c_1$ bölgesine dönüşür. $c_1>0$ alınırsa,

$$(u-\frac{1}{2c_1})^2+v^2<(\frac{1}{2c_1})^2$$

yazılır. O halde, $x>c_1$ yarı düzlemi içindeki her nokta yukarıdaki çemberin iç noktalarına dönüşür. Yani, bu dönüşüm yarı düzlemi çemberin içine dönüştürür. Aynı şekilde bunun tersi de doğrudur.

$$(u-\frac{1}{2c_1})^2+v^2<(\frac{1}{2c_1})^2$$

eşitliğini sağlayan her u,v için $\frac{u}{u^2+v^2}>c_1$ ise, $x>c_1$ bulunur. Yani çemberin içindeki her nokta $x>c_1$ yarı düzleminin iç noktalarına dönüşür.

Sonsuzdaki nokta : $w=1/z$ veya $e^{i\emptyset}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$ dönüşümü altında r=R yarıçaplı çemberin dışındaki z noktaları $\rho=1/R$ yarıçaplı çemberin içindeki w noktalarına dönüşür. $w=0$ noktası sonlu z düzlemindeki hiç bir noktanın görüntüsü değildir. Bununla beraber, R yarıçapını uygun büyüklükte seçerek r=R yarıçaplı çemberin dışındaki bütün noktaların görüntüsü $w=0$ noktasının küçük bir komşuluğunun içine düşürülür. Bazen sonsuzdaki nokta yerine $z=\infty$ koymak uygun olur. Formal olarak bu nokta $w=0$ noktasının tam görüntüsüdür. Tabii, $w=1/z$ dönüşümü altında fonksiyonun sonsuzdaki durumunu ifade etmek için $z'=1/z$ alınarak $z'=0$ noktasındaki durumu incelenebilir.

$w=\frac{4z^2}{(1-z)^2}$ fonksiyonu, $z\to\infty$ daki noktayı $w=4$ noktasına götürür. $z=1/z'$ alırsak,

$$w=\frac{4}{(z'-1)^2}$$

fonksiyonu bulunur. O zaman $z'=0$ alabiliriz. $z'=0$ için $w=4$ olur.

4.4. Bilineer Dönüşümler (Mobius Dönüşümleri)

$$w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

şeklindeki dönüşümlere bilineer dönüşümler(=kesirli lineer dönüşümler=Mobius dönüşümler) denir.

$$w=\frac{\alpha}{\gamma}\;\frac{z+\dfrac{\beta}{\alpha}}{z+\dfrac{\delta}{\gamma}}=\frac{\alpha}{\gamma}\;\frac{z+\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\delta}{\gamma}-\dfrac{\delta}{\gamma}}{z+\dfrac{\delta}{\gamma}}=\frac{\alpha}{\gamma}\left[1+\frac{\dfrac{\beta}{\alpha}-\dfrac{\delta}{\gamma}}{z+\dfrac{\delta}{\gamma}}\right]$$

$$=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\dfrac{\beta}{\gamma}-\dfrac{\alpha\delta}{\gamma^{2}}}{\gamma\left(z+\dfrac{\delta}{\gamma}\right)}=\frac{\alpha}{\gamma}+\left(\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma}\right)\frac{1}{\gamma z+\delta}$$

şeklinde yazılabilir.

$$z'=\gamma z+\delta\;,\;z''=\frac{1}{z}\;,$$

alınacak olursa,

$$w=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma}z''$$

elde edilir. Burada $\beta\gamma-\alpha\delta\neq0$ dır (daha doğrusu w nin bir anlamı olabilmesi için katsayılar matrisinin determinantı $\Delta\neq0$ olmalıdır). Bu şart altında,

$$w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

dönüşümünü arka arkaya üç dönüşüm tatbik ederek elde ederiz.

a) $z'=\gamma z+\delta$, z düzleminden z'düzlemine

b) $z''=\dfrac{1}{z}$, z'düzleminden z" düzlemine

c) $w=\dfrac{\alpha}{\gamma}+\dfrac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma}z''$, z" düzleminden w düzlemine

geçişi gösterir. Bunların hepsi tatbik ettiğimiz dönüşümlerdir. O halde,

$$w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

bilineer dönüşümleri, bu dönüşümlerin özelliklerine haizdir. Genel olarak bu dönüşümlerde daireler dairelere, özel olarak doğrulara dönüşürler, açılar değişmezler.

1.TANIM : z_1,z_2,z_3,z_4 farklı dört nokta verilmiş olsun. Bu dört noktanın çifte oranı (z_1,z_2,z_3,z_4) şeklinde gösterilir. Bu oran,

$$(z_1,z_2,z_3,z_4)=\frac{z_4-z_1}{z_4-z_3}:\frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}$$

demektir.

1.TEOREM : Tam lineer dönüşümlerde çifte oran değişmez (invaryant kalır).

İSPAT : z_1,z_2,z_3,z_4 noktalarının tasvirleri sırasıyla w_1,w_2,w_3,w_4 olsun.

O halde,

$$(z_1,z_2,z_3,z_4)=(w_1,w_2,w_3,w_4)$$

olduğunu göstermeliyiz. Bu dönüşümler,

$$w_1=\alpha z_1+\beta,\quad w_2=\alpha z_2+\beta,\qquad w_3=\alpha z_3+\beta,\qquad w_4=\alpha z_4+\beta$$

şeklinde olsunlar. O zaman,

$$\frac{z_4-z_1}{z_4-z_3}:\frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}=\frac{\dfrac{w_4-\beta}{\alpha}-\dfrac{w_1-\beta}{\alpha}}{\dfrac{w_4-\beta}{\alpha}-\dfrac{w_3-\beta}{\alpha}}:\frac{\dfrac{w_2-\beta}{\alpha}-\dfrac{w_1-\beta}{\alpha}}{\dfrac{w_2-\beta}{\alpha}-\dfrac{w_3-\beta}{\alpha}}$$

$$=\frac{w_4-w_1}{w_4-w_3}:\frac{w_2-w_1}{w_2-w_3}$$

yazılır.

1.SONUÇ : i) $w=\frac{1}{z}$ dönüşümü altında çifte oran değişmez kalır.

ii) $w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ bilineer dönüşümde çifte oran değişmez kalır.

Bir tam lineer dönüşümü l ile gösterelim. $w=l(z)$, z düzleminden w düzlemine geçileceğini gösterir.

2.TANIM : $w=l_1(z), w'=l_2(z)$ sırasıyla z düzleminden w düzlemine, w düzleminden w' düzlemine geçilen iki tam lineer dönüşüm olsunlar. Bu iki dönüşümün arka arkaya tatbikine bu iki dönüşümün terkibi veya sembolik çarpımı denir. Sembolik çarpım,

$$w'' = l_3(z)=l_2.l_1(z)$$

ile gösterilir.

2.TEOREM : Tam lineer dönüşümler bileşke işlemi altında bir grup teşkil eder.

İSPAT : $w=\alpha z+\beta \quad ...l_1\,(z)$

$$w'= \alpha' w+\beta' \quad ...\; l_2\,(w)$$

$$w''= \alpha'' w'+\beta'' \quad ...\; l_3\,(w')$$

tam lineer dönüşümlerinin bileşke işlemi altında grup olma özelliklerine bakalım.

i) $l_2.l_1\,(z) = \alpha'\,(\alpha z+\beta) + \beta' = \alpha'\alpha z+\alpha'\beta+\beta'$

ii) $l_3.(l_2.l_1) = (l_3.l_2)\,l_1$

$w'' = l_3.(l_2.l_1) = l_3.\,(l_2\,(w)\,) = l_3[\alpha\alpha' z+(\alpha'\beta+\beta')\,] = \alpha''\alpha'\alpha z+\alpha''\alpha'\beta+\alpha''\beta'+\alpha''$

$l_3.l_2\,(w)= \alpha''\alpha' w+\alpha''\beta'+\beta''$

$(l_3.l_2).l_1 = \alpha''\alpha'\alpha z + \alpha''\alpha'\beta+\alpha''\beta'+\beta''$

bulunur. Buradan,

$$l_3.(l_2.l_1) = (l_3.l_2).l_1$$

sonucu elde edilir. Öyleyse asosyatiflik vardır.

iii) $\alpha=1$ ve $\beta=0$ alınırsa, $w=z=I$ ve

$$I.l_1=l_1.I = l_1$$

bulunur. Birim eleman vardır.

iv) $l_1(z) = w = \alpha z+\beta$ ise, $l_1^{-1} = \frac{1}{\alpha} w - \frac{\beta}{\alpha}$ elde edilir.

$$l_1\,(z).l_1^{-1} = \frac{1}{\alpha}\,(\alpha z+\beta) - \frac{\beta}{\alpha} = z$$

ise,

$$I = l_1 . l_1^{-1}$$

olur. Ters eleman vardır.

2.SONUÇ : **Bilineer dönüşümler bileşke işlemi altında bir grup teşkil ederler.**

3.TEOREM : **Bilineer dönüşümler, z düzlemindeki bir çembere nazaran simetrik noktaları w düzlemindeki bu çemberin resmi olan çembere göre simetrik noktalara dönüştürürler.**

İSPAT : $w = \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ bilineer dönüşümü,

$$z' = \gamma z+\delta, \quad z'' = \frac{1}{z'}, \qquad w = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{-A}{\gamma} z'', \quad A = \alpha\delta-\beta\gamma$$

dönüşümlerinin terkibi olduğundan ispatımızı bu dönüşümlere göre yapabiliriz.

a) $w=\alpha z+\beta$ için ispat edelim : z_1 ve z_2 noktaları birim çembere göre simetrik olsunlar. Öyleyse,

$$|z_1||z_2| = 1$$

yazılır. Yani,

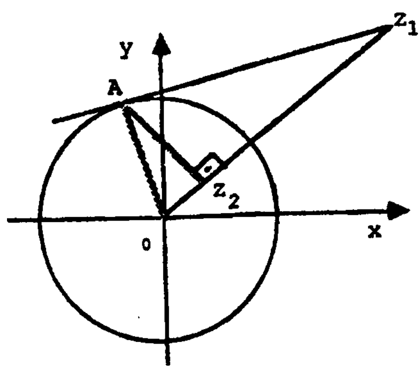
$$w_1 = \alpha z_1+\beta,$$
$$w_2 = \alpha z_2+\beta$$

olmak üzere,

$$\alpha z_1 = w_1-\beta,$$
$$\alpha z_2 = w_2-\beta$$

ise,

$$|\alpha||z_1||\alpha||z_2| = |w_1-\beta||w_2-\beta|$$



Şekil 4.6

olur . Buradan,

$$|w_1-\beta||w_2-\beta| = |\alpha|^2$$

olacağından w_1 ve w_2 noktası, yarıçapı $|\alpha|$ olan β merkezli çembere göre simetriktir. Bu çember ise w düzleminde ve birim çemberin resmidir.

b) $w = \dfrac{1}{z}$ alalım. $|z_1||z_2| = 1$ ise ve $w_1 = \dfrac{1}{z_1}$, $w_2 = \dfrac{1}{z_2}$ resimleri ,

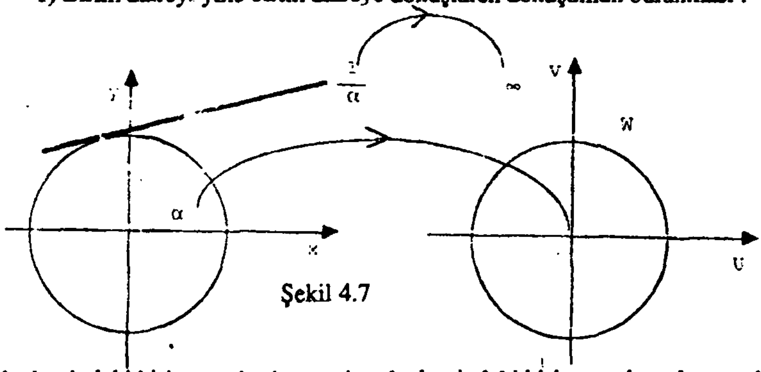
$$|w_1||w_2| = |\frac{1}{z_1}||\frac{1}{z_2}| = \frac{1}{|z_1||z_2|} = 1$$

olacaktır. O halde w_1 ve w_2 noktaları w düzleminde birim çembere göre simetrik noktalardır. w düzlemindeki birim çember ise z düzlemindeki birim çemberin resmidir.

3.SONUÇ : Bu iki dönüşümün terkibi olan bilineer dönüşümler simetriği bozmaz.

4.5. Bazı Özel Dönüşümler

1) Birim daireyi yine birim daireye dönüştüren dönüşümün bulunması :



Şekil 4.7

z düzlemindeki birim çemberin resmi w düzlemindeki birim çember olsun. z düzlemindeki birim çemberin içinde $|\alpha|<1$ noktasını alalım. $|\alpha|<1$ olan α noktasının resmi w düzleminde w=0 olsun. Yani $z=\alpha$ için w=0 alalım. Lineer dönüşümlerin simetriği bozmadığını biliyoruz. α nın birim çembere göre simetriği olan $1/\bar{\alpha}$ nın resmi w=0 ın simetriği olan $w=\infty$ noktasıdır. Öyle ise, $z=1/\bar{\alpha}$ için $w=\infty$ olacaktır. Bahsedilen dönüşüm birim çemberi yine birim çembere dönüştürdüğünden, z=-1 için $|w|=1$ olacaktır.

$$w = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\beta} = a.\frac{z+b}{z+c}$$

yazalım.

$z=\alpha$ için $w=0$ ise, $z=-b$, $b=-\alpha$

ve