T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARDY-LİTTLEWOOD MAKSİMAL OPERATÖRÜNÜN DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYINDA SINIRLILIĞI

MÜBERRA DİKMEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
DOÇ. DR.YUSUF ZEREN

İSTANBUL, 2017

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARDY-LİTTLEWOOD MAKSİMAL OPERATÖRÜNÜN DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYINDA SINIRLILIĞI

Müberra DİKMEN tarafından hazırlanan tez çalışması 21.12.2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK

İstanbul Ticaret Üniversitesi _____

Doç. Dr. Erdal GÜL

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında bilimsel fikirleri, tecrübesi ve düşünceleriyle çalışmalarımda yardımcı olan ve bana çok emeği geçen tez danışmanım sayın Doç.Dr.Yusuf Zeren'e teşekkürlerimi sunarım. Tez çalışmam boyunca desteklerini esirgemeyen aileme de teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Aralık, 2017

Müberra DİKMEN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ..... vi

ÖZET vii

ABSTRACT.....viii

BÖLÜM 1

GİRİŞ..... 1

1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 3
1.3 Hipotez 3

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE TEOREMLER 4

2.1 Tanım ve Teoremler 4

BÖLÜM 3

HARDY-LİTTLEWOOD MAKSİMAL OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI..... 13

3.1 Hardy-Littlewood maksimal operatörü 13

BÖLÜM 4

MAKSİMAL OPERATÖRÜNÜN DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYINDA SINIRLILIĞI 34

4.1 Değişken üslü lebesgue uzayları..... 34
4.2 Log-Hölder süreklilik koşulu..... 38
4.3 A_p Muckenhoupt Ağırlığı.....42
4.4 Kesirli maksimal operatörünün ağırlıklı değişken üslü lebesgue uzayında sınırlılığı.....46

SONUÇ VE ÖNERİLER.....57

KAYNAKLAR..... 58

ÖZGEÇMİŞ..... 60

SİMGE LİSTESİ

$\|A\|, \mu(A), m(A)$	A kümesinin lebesgue ölçüsü
$B(x,r)$	x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$C(\Omega)$	Ω üzerinde sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^{\infty}(\Omega)$	Ω üzerinde sonsuz mertebeden sürekli türevli fonksiyonlar uzayı
$C_0^{\infty}(\Omega)$	Ω üzerinde kompakt desteğe sahip $C^{\infty}(\Omega)$ fonksiyonlar uzayı
$D^a f$	f fonksiyonunun α basamaktan klasik türevi
$D_{\omega}^a f$	f fonksiyonunun α basamaktan zayıf türevi
$Q(x,r)$	x merkezli r kenar uzunluklu küp
L_{loc}^1	Lokal integallenebilir fonksiyonlar sınıfı
$L^p(\Omega)$	Lebesgue uzayı
L_{loc}^1	1. mertebeden lokal integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı
$L^{p(.)}(\Omega)$	Değişken üslü lebesgue uzayı
$L_{\omega}^p(\Omega)$	Ağırlıklı lebesgue uzayı
$L_{\omega}^{p(.)}(\Omega)$	Ağırlıklı değişken üslü lebesgue uzayı
M	Hardy-Littlewood maksimal operatör
M_a	Kesirli maksimal operatör
Mf	Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu
R^n	n-boyutlu öklid uzayı
Ω	R^n nin bir alt bölgesi
S^{n-1}	Birim küre
$Suppf$	f fonksiyonun desteği
μ, m	Ölçü
μ^*, m^*	Dış ölçü
ω	Ağırlık fonksiyonu
WL_P	Zayıf lebesgue uzayı
$W_p^k(\Omega)$	Sobolev uzayı
ω_{n-1}	Birim kürenin hacmi
X^*	X uzayının duali
X_A	A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$\|.\|_{W_p^k(\Omega)}$	Sobolev uzayında standart norm

ÖZET

HARDY-LİTTLEWOOD MAKSİMAL OPERATÖRÜNÜN DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYINDA SINIRLILIĞI

Müberra DİKMEN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmını içermektedir. İkinci bölümde temel tanım ve teoremlere değinilmiştir. Üçüncü bölümde Hardy-Littlewood maksimal operatörünün tanım ve teoremlerine ve Hardy-Littlewood maksimal operatörünün klasik lebesgue uzaylarında sınırlılığına değinilmiştir. Dördüncü bölümde Hardy-Littlewood maksimal operatörünün değişken üslü lebesgue uzayında sınırlılığına ve kesirli maksimal operatörünün ağırlıklı değişken üslü lebesgue uzayında sınırlılığına değinilmiştir. Son bölümde sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hardy-Littlewood maksimal operatör, Kesirli maksimal operatör, Klasik lebesgue uzayları, Değişken üslü lebesgue uzayı, Ağırlıklı değişken üslü lebesgue uzayı

ABSTRACT

THE BOUNDEDNESS OF THE HARDY-LITTLEWOOD MAXIMAL OPERATOR IN THE VARIABLE EXPONENT LEBESGUE SPACE

Müberra DİKMEN

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Doç. Dr. Yusuf ZEREN

This thesis work consists of five chapters. The first chapter includes the introduction chapter. In the second chapter basic definitions and theorems are mentioned. In the third chapter definition and theorems of the Hardy-Littlewood maximal operator and the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator in the classical lebesgue spaces are mentioned. In the fourth chapter the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator in the variable exponent lebesgue space and the boundedness of the fractıonal maximal operator in the weighted variable exponent lebesgue space are mentioned. In the last chapter the results and proposals are given.

Keywords: Hardy-Littlewood maximal operator, Fractıonal maximal operator, Classical lebesgue spaces, Variable exponent lebesgue space,Weighted variable exponent lebesgue space

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Bu tez çalışmasında Hardy-Littlewood maksimal operatör, Hardy-Littlewood maksimal operatörünün lebesgue ve değişken üslü lebesgue uzayında sınırlılığı üzerinde çalışılmıştır. Giriş bölümünde literatür özeti, ikinci bölümünde temel tanım ve teoremler, üçüncü bölümde Hardy-Littlewood maksimal operatörünün tanımından, teoremlerinden ve lebesgue uzayında sınırlılığından, dördüncü bölümde Hardy-Littlewood maksimal operatörünün değişken üslü lebesgue uzayında sınırlılığından ve ağırlıklı değişken üslü lebesgue uzayındaki sınırlılığından bahsedilmektedir.

Hardy-Littlewood maksimal operatör harmonik analizde kullanılan önemli bir operatördür. Bu operatör singular integraller ve kısmi differansiyel denklemler teorisinde ve matematiksel fizikte kullanılır. Maksimal operatörünün bir boyutlu durumu ilk kez 1930'da Hardy-Littlewood tarafından n boyutlu durumu ise 1939'da Wiener tarafından çalışılmıştır.

$f: R^n \to R$ lokal olarak integrallenebilir $(f \in L_1^{loc}(R^n))$, f'in maksimal fonksiyonu $Mf: R^n \to [0, \infty]$ olmak üzere

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

şeklinde tanımlanır. $x \in R^n$, $0 < r < dist(x, \partial\Omega)$ ayrıca $M: f \to Mf$ operatörü Hardy-Littlewood maximal operatörüdür.

Maksimal operatörünün güçlü ve zayıf tip sınırlılığına değinilmiştir. Maksimal operatör $L^1(R^n)'$ de sınırlı bir operatör olmamasına rağmen $L^1(R^n)$'den $L^1(R^n)'$ e zayıf sınırlıdır.

Diening(2004), D-Cruz-Uribe, Fiorenza ve Neugebauer(2003) , Nekvinda(2004), Pick ve Ruzicka(2001) , B.Muckenhoupt (1972), S.G.Samko, C.Fefferman ve daha bir çok matematikçi maksimal operatörünün sınırlılığı üzerinde çalışmışlardır. Daha sonra Zeren Yusuf, Mamedov Farman (2016) ağırlıklı değişken üslü lebesgue uzayında kesirli maksimal operatörünün sınırlılığı üzerine araştırmalar yapmışlardır bu tez çalışmamızda bu çalışmalar incelenmiştir.

Diening(2004), Nekvinda(2004) değişken üslü lebesgue uzayında temel olan log-hölder koşuluna ve temel teoremlerine değinmişlerdir.

$\Omega \subset R^n$ ve $p: \Omega \to [1, \infty)$ için p fonksiyonu aşağıdaki koşul için log-hölder sürekli olur, her $x, y \in \Omega$ olmak üzere

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{-\ln(|x-y|)} \text{ ve } |x - y| < \frac{1}{2}$$

koşulu için bir C sabiti vardır.

$p(\infty) > 1$ ve her $x \in \Omega$ için

$$|p(x) - p(\infty)| \leq \frac{C}{-\ln(e+|x|)}$$

olmak üzere bir C sabiti vardır ve p üzerinde ikinci log-hölder koşuludur.

ikinci koşul Nekvinda tarafından genelleştirilerek $c > 0$ için;

$$\int_{E_n} c^{\frac{1}{|p(x)-p(\infty)|}} dx < \infty$$

elde edilmiştir.

Pick ve Ruzicka, 2001 yılında değişken üslü lebesgue uzayında log-hölder süreklilik koşulunun sağlanmadığına dair örnek vermişlerdir.

B.Muckenhoupt değişken üslü lebesgue uzayında gerekli olan bir diğer koşul Muckenhoupt sınıfından, A_p ağırlık fonksiyonlarından bahsetmiştir.

Farman Mamedov ve Yusuf Zeren 2016 yılındaki makalelelerinde iki ağırlıklı eşitsizlik, kesirli maksimal operatörünün ağırlıklı değişken üslü lebesgue uzayında sınırlılığı üzerine çalışmışlardır.

$f \geq 0$ olmak üzere

$$\left\| v^{\frac{1}{p(.)}} M_{\alpha} f \right\|_{L^{p(.)}} \leq C \left\| \omega^{\frac{1}{p(.)}} f \right\|_{L^{p(.)}}$$

eşitsizliği elde edilmiştir. Bu makaledeki ana teoreme tezimizde değinilmiş ve gerekli koşullar incelenmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Harmonik analizde önemli bir yeri olan Hardy-Littlewood maksimal operatörünün güçlü ve zayıf sınırlılığından, değişken üslü lebesgue uzayında sınırlılığından bahsedilerek, kesirli maksimal operatörünün ağırlıklı değişken üslü lebesgue uzayındaki sınırlılığında iki ağırlıklı eşitsizliğinin sağlanması için gerekli teoreme değinilmiştir. Değişken ve değişken olmayan fonksiyonların sınırlılığı nasıl etkilediği önemlidir. L_p ve $L_{p(x)}$ uzayları tam, banach, refleksivdir, fakat L_p yoğunken $L_{p(x)}$'de düzgün fonksiyonlar yoğun değildir. Bu farklılık sınırlılığı etkilemektedir. Matematiksel fizik, istatistik, bilimsel hesaplama ve mühendislikteki bir çok dalda bu sınırlılıklardan yararlanılır. Gelişen teknoloji ve matematiksel çalışmalarla beraber matematik dünyasında önemi artmaktadır.

1.3 Hipotez

Bu tez çalışmamızda Hardy-Littlewood maksimal operatörün sınırlılığı için klasik lebesgue uzayı, değişken üslü lebesgue uzayı ve ağırlıklı değişken üslü lebesgue uzaylarının temel tanımları ve bazı teoremleri verilerek yapılan çalışmalar tarihsel olarak ele alınmıştır. Bu uzaylar arasındaki farklılıklar için Hardy-Littlewood maksimal operatör önemli bir araçtır ve bir çok eşitsizliğin elde edilmesinde kullanılmıştır. Araştırmamızın konusuna yardımcı olmak üzere lebesgue differansiyellenebilme teoremi, marcinkiewicz interpolasyon teoremi, calderon-zygmund parçalanışı, log-hölder süreklilik koşulu ve muckenhoupt ağırlık sınıflarından yararlanılmıştır. Yapılan araştırmalarda görülmüştür ki bu konuyla ilgili düzenlemelere gidilmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tezde kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1 Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1 $(X, \leq)$ kısmen sıralı bir küme $A \subset X$ olsun. $\forall a \in A$ için $\alpha \leq x$ olacak şekilde bir $x \in X$ elemanına A kümesinin bir üst sınırı denir. A'nın üst sınırlarının kümesinin en küçük elemanı varsa bu L elemanına A' nın en küçük üst sınırı (sup veya eküs) denir ve $L = \sup A$ (veya $L = ek\ddot{u}s\ A$) ile gösterilir. O halde eğer varsa $L = sup\ A$ aşağıdaki iki karakteristik özelliğe sahiptir.

$L = \sup A \Leftrightarrow$ 1) $\forall a \in A$ için $a \leq L$ dir; yani L , A nın bir üst sınırıdır

2) $L' < L$ olacak şekilde $\forall L' \in X$ elemanı için $a' > L'$ olacak şekilde bir $a' \in A$ elemanı vardır; yani L, A'nın üst sınırlarının en küçüğüdür.

Tanım 2.2 $(X, \leq)$ kısmen sıralı bir küme $A \subset X$ olsun. $\forall a \in A$ için $y \leq \alpha$ olacak şekilde bir $y \in X$ elemanına A kümesinin bir alt sınırı denir. A'nın alt sınırlarının kümesinin en büyük elemanı varsa bu l elemanına A'nın en büyük alt sınırı (inf veya ebas) denir ve $l = \inf A$(veya $l = ebas\ A$) ile gösterilir. O halde eğer varsa $l = inf\ A$ aşağıdaki iki karakteristik özelliğe sahiptir.

$l = \inf A \Leftrightarrow$ 1) $\forall a \in A$ için $l \leq a$ dir; yani l , A'nın bir alt sınırıdır.

2) $l < l'$ olacak şekilde $\forall l' \in X$ elemanı için $a' > l'$ olacak şekilde bir $a' \in A$ elemanı vardır; yani l, A'nın üst sınırlarının en büyüğüdür.

Tanım 2.3 $(X, \leq)$ kısmen sıralı bir küme $A \subset X$ olsun. Eğer $\forall x \in A$ için $x \leq b$ $(x \geq a)$ olacak şekilde bir $b \in A$ $(a \in A)$ elemanı varsa b ye (a ya) A'nın maksimal (minimal) (veya en büyük (en küçük) elemanı denir ve $b = maxA$ $(a = \min A)$ ile gösterilir.

Örnek 2.4 A ={-2,-1,0,1,2,3} kümesinde $maxA = supA = 3$, $minA = infA = -2$ olduğu açıktır.

$A = \{x \in R: -2 < x < 3\}$ kümesinin minimal ve maksimal elemanı yoktur. $infA = -2$ $supA = 5$ olduğu açıktır.

Tanım 2.5 X , K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\|.\|: X \to R_+$ fonksiyonu $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in K$ için,

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2) $\|ax\| = |a|\|x\|$
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde bir norm adını alır ve bu durumda $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir.

Tanım 2.6 $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve bunun içinde bir dizi (x_n) olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, $m, n > n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε'a bağlı bir n_ε doğal sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.7 $(X, \|.\|)$ normlu uzay içinde bir dizi x_n ve $x_0 \in X$ olsun $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x_0\|$=0 ise (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve $x_n \to x_0$ ya da $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ olarak ifade edilir. Normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya norma göre yakınsama adı verilir.

Tanım 2.8 Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzaydaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite yakınsıyorsa, bu $(X, \|.\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya banach uzayı denir.

Tanım 2.9 $f: X \to Y$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in X$, $x_0 \in X$ için $\|x - x_0\| < \delta$ iken $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu x_0 da süreklidir.

Tanım 2.10 X ve Y normlu uzaylar olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in X$ için $\exists \delta(\varepsilon) > 0$,

$\|x - x_0\|_x < \delta$ iken $\|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon$ oluyorsa f 'ye x_0 da düzgün süreklidir denir.

Tanım 2.11 $A \subset X$, $d(A) = \sup\{d(x,y): x,y \in A\}$ olacak şekilde $d(A) < \infty$ ise A kümesi sınırlı bir kümedir.

Tanım 2.12 $\forall n \in N$ için $|x_n| < K$ olacak şekilde K sayısı bulunabiliyorsa dizi sınırlıdır.

Tanım 2.13 X ve Y boş olmayan kümeler ve $D \subset X$ olsun. D'nin her elemanına Y'nin bir elemanını karşılık getiren bir kurala D'den Y'ye bir operatör veya dönüşüm denir. T operatörünün x'e karşılık getirdiği eleman $T(x)$ ile gösterilir. T operatörünün $x \in D$ yi $T(x) \in Y$'ye götürdüğünü belirtmek için, $T: D \subset X \to Y$ gösterimi kullanılır. bu durumda D' ye T operatörünün tanım kümesi denir ve genellikle $D(T)$ ile gösterilir.

Tanım 2.14 X ve Y normlu uzayları ve $T: X \to Y$ operatörü verilsin. Aşağıdakiler sağlandığında T operatörü $x_0 \in D(T)$ noktasında süreklidir denir.

a) $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ ve $\ni \forall x \in D(T)$ olmak üzere $\|x - x_0\| < \delta$ iken $\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$ dir.

b) x_0 noktasına yakınsayan $\forall (x_n) \subset D(T)$ dizisi için; $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0)$

olduğu söylenir.

Tanım 2.15 X ve Y normlu uzaylar ve T tanım kümesi $D(T) \subset X$ ve görüntü kümesi $R(T) \subset Y$ olan bir operatör olsun. Eğer T operatörü $D(T)$'nin X de sınırlı her kümesini $R(T)$'nin Y de sınırlı bir kümesine karşılık getiriyorsa T operatörüne sınırlı bir operatör adı verilir. $\forall x \in D(T)$ için $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ olacak şekilde sabit bir $C > 0$ sayısı varsa T operatörü sınırlı bir operatördür.

X, Y normlu uzay $T: X \to Y$ operatör olsun. $\forall x \in X$ için $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ olacak şekilde $C > 0$ sayısına T operatörü sınırlıdır. Bu eşitsizliği sağlayan C'lerin infimumu

$$\lim_{x\in X, \|x\|\leq 1} \{x: \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X\}$$

olur . T operatörünün normu

$$\|T\| = \sup_{x\in X, \|x\|\neq 0} \frac{\|T_x\|_Y}{\|x\|_X} = \sup\{\|Tx\|: \|x\| \leq 1\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.16 X ve Y aynı bir K cismi üzerinde iki lineer uzay ve $T: X \to Y$ operatörü verilsin. $D(T)$, X' in bir alt uzayı olmak üzere $\forall x, y \in D(T)$, $\forall \alpha, \beta \in K$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

şartı sağlanıyorsa T operatörüne lineer operatör denir.

T ölçülebilir fonksiyonlar kümesinde $T: X \to Y$ bir operatör olsun her f, g ve $\lambda > C$ için $T(f+g) = T(f) + T(g)$ ve $T(\lambda f) = \lambda T(f)$ ise lineer operatördür.

$|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)|$ ve $|T(\lambda f)| \leq |\lambda||T(f)|$ ise altlineer operatör olur.

$C > 0$ olmak üzere $|T(f+g)| \leq C(|T(f)| + |T(g)|)$ ve $|T(\lambda f)| \leq |\lambda||T(f)|$ ise quasi lineer operatör olur.

Tanım 2.17 (X,‖. ‖) normlu uzayı $Y \subset X$ olmak üzere $\bar{Y}$=X ise Y, X de yoğundur. Q, R üzerinde yoğundur. $\bar{Q} = Q \cup Q' = R$ olduğu söylenir.

Tanım 2.18 Bir (X,‖. ‖) normlu uzayı, bir $x_0 \in X$ noktası ve pozitif r sayısı verilsin. $B(x,r) = \{x \in X: \|x - x_0\| < r\}$ kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar, $\bar{B}(x,r) = \{x \in X: \|x - x_0\| \leq r\}$ kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar denir. $\forall\, x \in A$ için $A \subset X$ olmak üzere $B(x,r) \subset A$ olacak şekilde $r > 0$ varsa A kümesine açık küme denir.

Tanım 2.19 X vektör uzayı olmak üzere $X^* = L(X,K) = \{f: f: X \to K, lineer\}$ kümesine X'in cebirsel duali denir X^* ile gösterilir.

X normlu uzay ise $X^x = B(X,K) = \{f: f: X \to K, f\ lineer, sınırlı\}$ kümesine X'in topolojik duali ya da sürekli duali denir. [1]

Tanım 2.20 Katlı integraller kutupsal ifade edilirse $r = |x|$, $S^{n-1} = \{x: |x| = 1\}$ birim küre olmak üzere hacim için $dx = r^{n-1} dr d\sigma$ olduğu söylenir. $d\sigma$ yüzey ölçüsüdür. $f(x) \geq 0$ olmak üzere

$\int_{R^n} f(|x|)\, dx_1 \ldots\ldots dx_n = \int_0^\infty S^{n-1} f(r) r^{n-1} dr$ dir. S^{n-1} birim kürenin yüzey alanıdır.

$$\int f(x)dx = \int_0^\infty \left\{ \int_{S^{n-1}} f(x) d\sigma \right\} r^{n-1} dr = \int_{S^{n-1}} \left\{ \int_0^\infty f(x) r^{n-1} dr \right\} d\sigma$$

$$|B(0,2)| = \int_0^{\infty} \int_{S^{n-1}} r^{n-1} dr d\sigma = \int_{S^{n-1}} d\theta \int_0^2 r^{n-1} d\sigma = |S^{n-1}| \frac{2^n}{n} = S^n 2^n$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.21 X bir normlu uzay ve $M \subset X$ olsun. Eğer M'nin her bir dizisinin yakınsak bir alt dizisi varsa M kümesine kompakttır denir.

Tanım 2.22 X bir normlu uzay olsun. Bu uzayın sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa ayrılabilir uzaydır.

Teorem 2.23 (Heine-Borel Teoremi)

E, R^n nin alt kümesi olmak üzere kompakt olabilmesi için gerek ve yeter şart E kümesinin kapalı ve sınırlı olmasıdır. [2]

Tanım 2.24 X bir küme olsun. Σ , X'in alt kümelerinin bir sınıfı olmak üzere,

1) $X \in \Sigma$
2) Her $A \in \Sigma$ için $A^c = X/E \in \Sigma$
3) n=1,2,…,k için $A_n \in \Sigma$ ise $\bigcup_{k=1}^{n} A_n \in \Sigma$
4) n=1,2,…,k için $A_n \in \Sigma$ ise $\cap_{k=1}^{n} A_n \in \Sigma$
5) her $n \in N$ için $A_n \in \Sigma$, $\bigcup_{k=1}^{n} A_n \in \Sigma$ şartları sağlanıyorsa Σ sınıfına $\sigma -$ cebiri denir.

Tanım 2.25 X bir küme Σ, X üzerinde bir $\sigma -$ cebiri olsun. Bu durumda (X,Σ)'ya ölçülebilir uzay Σ daki her bir kümeyede ölçülebilir küme adı verilir.

Tanım 2.26 Σ üzerinde düzenlenen $\mu: \Sigma \to R^+$, Σ sınıfındaki ayrık kümelerinin $\{A_n\}_{n \in k}$ topluluklarının bir birleşimi olsun

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

olmak üzere μ fonksiyonununa Σ sınıfı bir ölçüm denir.

Tanım 2.27 (X, Σ) bir ölçülebilir uzay olsun. Σ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

1) $\mu(\emptyset)$ =0

2) Her $A \in \Sigma$ için $\mu(A) \geq 0$

3) Ayrık A_n dizisi için $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

4) $A, B \in \Sigma$ için $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$

özellikleri sağlanıyorsa bu fonksiyona ölçü denir. $\mu(A) < \infty$ ise sonlu ölçüdür.

Tanım 2.28 X'in alt kümeleri Σ , σ-cebiri ve Σ üzerinde tanımlı bir μ ölçüsünden oluşan (X, Σ, μ)' ya ölçüm uzayı denir.

Tanım 2.29 $P(x)$, X in kuvvet kümesi olmak üzere üzerinde tanımlı μ^* fonksiyonu

1) $\mu^*(\emptyset)$=0
2) $\forall E \in P(x)$ için μ^*(E)≥ 0
3) $A \subset B \subset X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
4) $\forall n \in N$ için $A_n \in P(x)$ olmak üzere $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

ise μ^*, X üzerinde dış ölçüdür.

Tanım 2.30 I açık alt aralıkların bir dizisi $(I = x: a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \ldots., n\}$ olmak üzere bu aralıkların hacimleri $u(I) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ olsun. $E \subset R^n$ in lebesgue dış ölçüsü

$\mu^*(E) = \inf \{\sum_{k=1}^{\infty} u(I_n) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_n\}$

olup $\forall A \subset R^n$ için $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap (R^n - E)$ eşitliği sağlanırsa E kümesine lebesgue ölçülebilirdir denir. Σ sınıfının elemanlarına R^n nin Lebesgue ölçülebilir alt kümeleri μ ölçüm fonksiyonuna R^n de Lebesgue ölçümü ve $A \in \Sigma$ için μ(A) gösterimine de A kümesinin ölçümü denir. $A \subset R^n$ ölçülebilir küme olmak üzere A kümesinin Lebesgue ölçüsü $\left|A = \int_{\Omega} dx\right|$ ile tanımlanır.

Tanım 2.31 (X, Σ) ölçülebilir uzay ve $f: X \to R$ bir fonksiyon olmak üzere, $\forall \lambda \in R$ için $f^{-1} = \{x \in X: f(x) < \lambda\} \in \Sigma$ ise f fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon denir.

Tanım 2.32 (Chebichev Eşitsizliği)

(X, A, μ) bir ölçüm uzayı olmak üzere $f \geq 0$ fonksiyonu integrallenebilir ve $a > 0$ için $E_a = \{x \in X : f(x) \geq a\}$ olduğundan

$$\mu(E_a) \leq \frac{1}{a}\int_E f dx \leq \frac{1}{a}\int_X f dx$$

eşitsizliği söylenir.[2]

Tanım 2.33 $A \subset R^n$ kümesinin karakteristik fonksiyonu $X_A = \begin{cases} 1, \text{ eğer } x \in A \\ 0, \text{ eğer } x \notin A \end{cases}$ şeklindedir.

Tanım 2.34 X bir küme ve K da X kümesinin boş olmayan bir sınıfı olsun K sınıfını kapsayan σ cebirlerinin en küçüğüne K'nın ürettiği σ cebiri denir. B^n üzerinde bütün açık (a, b) aralıklarının oluşturduğu σ cebirine Borel Cebiri denir. $B(R^n)$ ile gösterilir.

Tanım 2.35 Bir f fonksiyonunun desteği sıfırdan farklı olduğu noktaların kümesinin kapanışıdır. $suppf = \overline{\{x \in R^n : f(x) \neq 0\}}$, $suppf$ sınırlı bir küme ise f fonksiyonuna kompakt desteğe sahiptir denir.

Tanım 2.36 f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere, kompakt K kümesi üzerinde $\int_K |f|\, dx < \infty$ ise f fonksiyonu lokal olarak integrallenebilirdir ve kümesi

$$L_1^{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to R, K \subset \Omega, K\ kompakt, f\ \text{ölçü}lebilir, \int_K |f|\, dx < \infty\}$$

şeklinde gösterilir. Lokal olarak integrallenebilir $L_p^{loc}(\Omega)$ fonksiyonlarının kümesi ise;

$$L_p^{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to R; K \subset \Omega, kompakt, f\ \text{ölçü}lebilir\ ve\ \int_K |f(y)|^p dy < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.37 f ölçülebilir ve negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere $f^+ = \max(f, 0)$ ve $f^- = -\min(f, 0)$ fonksiyonları $f = f^+ - f^-$ şeklinde yazılıp, $\int_\Omega f^+(x)dx$ ve $\int_\Omega f^-(x)dx$ integrallerinin en az biri sonlu ise

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_\Omega f^+(x)dx - \int_\Omega f^-(x)dx$$

eşitliği söylenir. Eğer her ikiside sonlu ise f fonksiyonu Ω bölgesinde lebesgue integrallenebilir ve sınıfı L^1 (Ω) ile gösterilir.

Tanım 2. 38 Ω, R^n nin ölçülebilir bir alt kümesi $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$L_p(\Omega) = \{f: \Omega \to R, f \text{ ölçü}lebilir, \int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx < \infty\}$$

uzayına Lebesgue uzayı denir. Bu uzayın normu $\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$ şeklindedir. Lebesgue uzayı L_p, $1 \leq p \leq \infty$ için vektör uzayı, banach uzay ve tam uzaydır. $1 < p < \infty$ için refleksiv uzaydır, $1 \leq p < \infty$ için ayrılabilirdir ve $1 \leq p < \infty$ için düzgün fonksiyonlar L_p 'de yoğundur.

$$WL_p(\Omega) = \{f: \Omega \to R, f \text{ ölçü}lebilir, \|f\|_{WL_p} = \{sup_{\lambda>0} \lambda \left|\{x \in \Omega: |f(x) > \lambda\}\right|^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

uzayına zayıf lebesgue uzayı denir. $L_p(\Omega) \subset WL_p(\Omega)$ ve $\|f\|_{WL_p} \leq 1. \|f\|_{L_p}$ eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.39 Ω bölgesinde hemen her x için $f(x) \leq C$ olacak şekilde bir C sabiti bulunuyorsa f fonksiyonu hemen her yerde sınırlıdır. Böyle C sabitlerinin en büyük alt sınırına da $|f|$ fonksiyonunun Ω bölgesinde esas supremumu bir başka deyişle esas sınırı denir. Hemen hemen her $x \in \Omega$ için $f: \Omega \to R$ esas sınırlı,

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf\{C: |f(x)| \leq C\}$$

olduğu söylenir. $p = \infty$ olduğunda,

$$L_\infty(\Omega) = \{ f: \Omega \to R, f \text{ ölçü}lebilir\ ve\ |f(x)| \leq C\ h.h.h., x \in \Omega\ için\ C > 0\}$$

şeklinde tanımlanıp, L^∞ uzayının normu $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.40 $L_p(0, \infty) = \left\{f: (0, \infty) \to R; f \text{ ölçü}lebilir\ \int_0^\infty |f(x)|^p \, dx < \infty\right\}$ ile tanımlanan uzay $L_p(0, \infty)$ lebesgue uzayıdır. Özellikleri şu şekildedir.

1) $L_p(0, \infty)$ tam normlu bir uzaydır. (Banach uzayıdır) , $\|f\|_{L_{p(0,\infty)}} = (\int_0^\infty |f(x)|^p \, dx)^{\frac{1}{p}}$ normudur. f_n cauchy dizisi o halde $\|f_n - f\| \to 0$ dır.

2) $L_p(0,\infty)$ uzayının duali vardır ve duali $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ olmak üzere , $L_{p'}(0,\infty)$ uzayıdır.

3) Bu uzay $1<p<\infty$ için refleksiv uzaydır. (Dualin duali kendisidir)

4) Bu uzayda düzgün fonksiyonlar $C^0_{(0,\infty)}$ her yerde yoğundur. $\forall f \in L_p(0,\infty)$ için $\exists\{\varphi_k\} \subset C^0_{(0,\infty)}$ vardır. Öyle ki $k \to \infty$ için, $\|f-\varphi_k\|_{L_{p(0,\infty)}} \to 0$ olur.

Tanım 2.41 $1< p$, $q<\infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere $f \in L^p(\Omega)$, $f \in L^q(\Omega)$ ise $f.g \in L^1(\Omega)$ ve

$$\int_\Omega f.g dx \le \|f\|_p.\|g\|_q$$

eşitsizliğine hölder eşitsizliği denir.

Tanım 2.42 $1 \le p < \infty$ için $f,g \in L^p(\Omega)$ ve $(f+g) \in L^p(\Omega)$ olmak üzere

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

eşitsizliğine minkowski eşitsizliği denir.

Tanım 2.43 ((p,q) tipli operatör)

T suplineer operatör $1 \le p,q \le \infty$ için T, $L_p(R^n)$' den $L_{q,\infty}(R^n)$' e sınırlı bir operatör ise zayıf (p,q) tiplidir. $\lambda>0$ ve $f \in L_p(R^n)$ için

$$|\{x \in R^n : |Tf(x)|>\lambda|\} \le \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_p\right)^q$$

olacak şekilde $C>0$ sabiti bulunur. $f \in L_p(R^n)$ için $\|Tf\|_q \le C\|f\|_p$ olacak şekilde $C>0$ sabiti bulunur. Bu durumda T, $L_p(R^n)$'den $L_p(R^n)$'e (p,q) tipli sınırlı operatördür. $p=q$ ise T zayıf (p,p) tiplidir.

BÖLÜM 3

HARDY-LİTTLEWOOD MAKSİMAL OPERATÖRÜNÜN SINIRLILIĞI

Hardy-Littlewood maksimal operatör harmonik analizde kullanılan önemli bir operatördür. Bu operatör singular integraller , kısmi differansiyel denklemler teorisinde matematiksel fizik, istatistik, bilimsel hesaplama ve mühendislikteki bir çok dalda kullanılmaktadır. Bu bölümde Hardy-Littlewood maksimal operatörü ve sınırlılığına ilişkin tanım ve teoremler verilecektir.

3.1 Hardy-Littlewood Maksimal Operatörü

Maksimal operatörünün bir boyutlu durumu ilk kez 1930'da Hardy-Littlewood tarafından n boyutlu durumu ise 1939'da Wiener tarafından çalışıldı.

Tanım 3.1 $\mathrm{f}: \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \rightarrow \mathrm{R}$ lokal olarak integrallenebilir ($\mathrm{f} \in {\mathrm{L}_1}^{\mathrm{loc}}\ (\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$), f'in maksimal fonksiyonu $\mathrm{Mf}: \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \rightarrow [0, \infty]$ olmak üzere

$$\mathrm{Mf(x)} = \sup_{r>0} \frac{1}{m\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy \qquad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. $\mathrm{x} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}},\ 0 < r < dist(x, \partial\Omega)$ ayrıca $\mathrm{M}: \mathrm{f} \rightarrow \mathrm{Mf}$ operatörü Hardy-Littlewood maximal operatörüdür. $B(x,r)$ x merkezli r yarıçaplı açık yuvar ve $\mathrm{m(B(x,r))}$ bu yuvarın ölçüsüdür. [2],[3]

daha genel olarak $Q(x,r)$, x merkezli r yarıçaplı küp için maksimal fonksiyon

$\mathrm{f} \in {\mathrm{L}_1}^{\mathrm{loc}}\ (\mathrm{R}^{\mathrm{n}})$, $x \in R^n$ için

$$\mathrm{M'f(x)} = \sup_{\mathrm{r}>0} \frac{1}{\mathrm{m\big(Q(x,r)\big)}} \int_{\mathrm{Q(x,r)}} |\mathrm{f(y)}|\, \mathrm{dy} \qquad (3.2)$$

olarak tanımlanır.

$$\mathrm{M}^{"}\mathrm{f(x)} = \sup_{\mathrm{Q}\ni\mathrm{x}} \frac{1}{\mathrm{m}(Q)} \int_{\mathrm{Q}} |\mathrm{f(y)}|\,\mathrm{dy} \tag{3.3}$$

burada x'i içeren yuvarlar üzerinden supremum alınır.[2]

$M"f(x) \leq CM'f(x)$ olduğu söylenir.

$x \in R^n$ için merkezil olmayan maksimal fonksiyon;

$$\mathrm{M'''f(x)} = \sup_{m(B)} \int_B |f(y)|\,\mathrm{dy}$$

olarak gösterilir. Burada supremum x noktasını içeren B yuvarları üzerinden alınır.

$0 \leq a < n$ ve $x \in R^n$ için kesirli maksimal operatör

$$M_\alpha f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy$$

şeklinde tanımlanır.

$0 < r < \delta(x)$ için $d(x, \delta(x))$ olmak üzere $(x-r, x+r)$ için

$$\mathrm{Mf(x)} = \sup_{\mathrm{r>0}} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(y)|dy$$

olduğu söylenir.

$Q(x,r)$ küpü için ise $(x-r, x+r)^n$ ve $x \in R^n$ olmak üzere

$$\mathrm{M'f(x)} = \sup_{\mathrm{r>0}} \frac{1}{(2r)^n} \int_{x-r}^{x+r} |f(y)|dy$$

elde edilir.

Yani maksimal fonksiyon ortalama değer üzerinden tanımlanır . Ortalama değer $\bar{f}(x_0) = \frac{1}{|a-b|} \int f(y)dy$ idi yani $(x-r, x+r)$ için $|x+r-(x-r)| = |2r|$ lebesgue ölçüsünü belirtir.

Maksimal fonksiyon temel lebesgue teoremi ile bağlantılıdır. Temel lebesgue teoremine göre f, R^n de lokal integrallenebilir olmak üzere ,

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x) \qquad (3.4)$$

eşitliği hemen her x için tanımlanır. Burada $\lim_{r\to 0}$ yerine $\sup_{r>0}$ alınıp , f yerine $|f|$ alınarak maksimal fonksiyon tanımlanır. [2],[3]

Hardy-Littlewood Maksimal operatörünün özellikleri

$f, g \in {L_1}^{loc}(R^n)$ için Hardy-Littlewood maksimal operatörünün temel özellikleri

1. Sublineerlik: $M(f+g)(x) \leq Mf(x) + Mg(x)$

2. Homojenlik : $a \in R$, $M(af)(x) = |a|Mf(x)$

3. Pozitiflik: $Mf(x) \geq 0$ tüm$x \in R^n$ için.

4. $\forall f, x \in R^n$ için $|f(x)| \leq Mf(x)$

5. Eger $f(x) \neq 0$ sıfıra denk değilse, o zaman $Mf(x) \notin L^1(R^n)$

6. Eğer $f \in L^\infty(R^n)$, o zaman $Mf \in L^\infty(R^n)$ ve $\|Mf\|_\infty = \|f\|_\infty$

[2],[4]

Tanım 3.2 Maksimal operatör lineer değildir fakat suplineerdir. f ve g iki fonksiyon olmak üzere f g'den daha yavaş büyüyor ise sublineerdir. $\sqrt{|x+y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}$ buna örnek verilebilir.

$M(af+bg)(x) \leq aMf(x) + bMg(x)$

$$\sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |(af+bg)|dy \leq \sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |(af)|\,dy + \sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |(bg)|dy$$

$M(af_1 + \beta f_2) \leq aMf_1 + \beta Mf_2$

Teorem 3.3 $\mathrm{f} \in {\mathrm{L}_1}^{\mathrm{loc}}(\mathrm{R^n})$, $x \in R^n$ için

$|f(x)| \leq Mf(x)$

f x' de sürekli, temel lebesgue teoremi kullanılarak

$$|f(x)| = \lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy \leq \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy = Mf(x)$$

olduğu görülür.[2]

Lemma 3.4 (Vitali örtme lemması sonlu versiyonu**)**

Varsayalım $B = \{B_1, B_2, \dots \dots, B_N\}$, sonlu R^n üzerinde açık yuvarların koleksiyonu olsun. $B_{j_1}, B_{j_2}, \dots \dots, B_{j_k}$ açık yuvarlar olmak üzere

$$m(\bigcup_{l=1}^{N} B_i) \leq 3^n \sum_{i=1}^{k} m(B_{j_i})$$

eşitsizliği söylenir.

Tanım 3.5 (Aşağı (Alt) Yarı Sürekli)

Herhangi bir x topolojik uzayı üzerinde bir $f: X \to [-\infty, \infty]$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $\lambda \in R$ için $\{x \in X : f(x) \leq \lambda\}$ olarak tanımlanan küme kapalı küme ise veya buna denk olarak $\{x \in X : f(x) > \lambda\}$ kümesi açık ise f fonksiyonu aşağı yarı sürekli denir.[6]

Tanım 3.6 (Yukarı Yarı Sürekli)

Eğer her $\beta \in R$ için $\{x \in X: f(x) \geq \beta\}$ olarak tanımlanan küme kapalı küme ise veya buna denk olarak $\{x \in X: f(x) < \beta\}$ kümesi açık ise f fonksiyonuna yukarı yarı sürekli denir. [6]

Tanım 3.7 (Dağılım Fonksiyonu) Eğer $g \in L^p$ ise

$$\int_{R^n} |g(y)|^p dy = -\int_0^p a^p d\lambda\,(x)$$

ve eğer $g \in L^\infty$ ise $\|g\|_\infty = \inf\{a, \lambda\,(a) = 0\}$ dır. O zaman g integrallenebilir $\lambda(a) \leq \frac{C}{a}$ ve $C = \int_{R^n} |g(y)|dy$ olmak üzere

$$\int_{R^n} |g(y)|dy \geq \int_{|g|>a} |g(y)|\, dy \geq a\lambda(a)$$

eşitsizliği sağlanır. [3]

Tanım 3.8 $f \in L^1(R)$ ve $ln^+|f(x)| = \begin{cases} ln|f(x)|, & |f(x)| > 1 \\ 0, & |f(x)| \leq 1 \end{cases}$ olmak üzere eğer $\int_{R^n} |f(x)| ln^+|f(x)| dx < \infty$ ise $Mf \in L^1_{loc}(R^n)$ dir. Eğer f nin desteği (support) bir B yuvarında ve $Mf \in L^1(B)$ ise bu durumda $\int_B |f(x)| ln^+|f(x)| dx < \infty$ sağlanır.[2]

Teorem 3.9 f , R^n üzerinde bir fonksiyon olsun.

(i) $f \in L^p(R^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ ise Mf maksimal fonksiyonu hemen her yerde sonludur.

(ii) Eğer $f \in L^1(R^n)$ ise her $\lambda > 0$ için

$$m(\{x: Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1$$

burada C sadece n boyutuna bağlı bir sabittir. (örneğin C=3^n) $Mf: L_1 \to WL_1$, $\|Mf\|_{WL_1} \leq C\|f\|_{L_1}$ olup M zayıf sınırlıdır.

(iii) Eğer $f \in L^p(R^n)$, $1 < p \leq \infty$ ise, $M f \in L^p(R^n)$ ve $\|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p$ burada C_p p ve n boyutuna bağlıdır, M güçlü sınırlı $C = C(n,p) < \infty$ eşitsizliği sağlanır. $Mf: L_p \to L_p$ dir.

(örneğin $C_p = \frac{5^n p}{p-1} + 1)$, $p \in (1, \infty)$ için $C_\infty = 1$ [3]

İspat: ilk olarak (ii) ifadesini ispatlayalım.

$E_\lambda = \{x: Mf(x) > \lambda\}$

her $x \in E_\lambda$ ve $0 < \varepsilon < Mf(x) - \lambda$, $r > 0$ vardır öyle ki

$$\sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy \; > Mf(x) - \varepsilon > \lambda$$

x merkezli her bir B_x yuvarı için

$$m(B_x) < \frac{1}{\lambda} \int_{B_x} |f(y)| dy \qquad (3.5)$$

$\{B_x\}$, E_λ üzerinde bulunan ayrık yuvarların bir dizisi olsun. K , E_λ'nın kompakt altkümesi $K \subset \bigcup_{l=1}^N B_l$, bu durumda

$$m(\bigcup_{l=1}^N B_l) \leq 3^n \sum_{i=1}^k m(B_{j_i}) \qquad (3.6)$$

$B_{j_1}, \dots, B_{j_k}$ ayrık yuvarlar ve (3.5) ve (3.6)'dan

$$m(K) \leq m\left(\bigcup_{l=1}^{N} B_l\right) \leq 3^n \sum_{i=1}^{k} m(B_{j_i}) \leq \frac{3^n}{\lambda} \sum_{i=1}^{k} \int_{B_{j_i}} |f(y)|\, dy$$

$$= \frac{3^n}{\lambda} \int_{\bigcup_{l=1}^{N} B_l} |f(y)|\, dy \leq \frac{3^n}{\lambda} \int_{R^n} |f(y)|\, dy$$

bu ispat zayıf tip (ii) için tamamlanır.

$p = \infty$ için (iii) sağlanmaktadır. $1 < p < \infty$ ve $A = \frac{1}{C}$ olsun $f \in L^p(R^n)$. $|f(x)| \geq \frac{\lambda}{2}$ durumunda $f_1(x) = f(x)$, eğer $|f(x)| < \frac{\lambda}{2}$ ise $f_1(x) = 0$ olur. $f_1 \in L^1(R^n)$ olmak üzere $|f(x)| \leq |f_1(x)| + \frac{\lambda}{2}$ ve $Mf(x) \leq Mf_1(x) + \frac{\lambda}{2}$ böylece

$$\{x: M(f)(x) > \lambda\} \subset \{x: M(f_1)(x) > \frac{\lambda}{2}$$

$$m(E_\lambda) = m\{x: Mf(x) > \lambda\} \leq \frac{2A}{\lambda} \|f_1\|_1$$

$$m(E_\lambda) = m\{x: Mf(x) > \lambda\} \leq \frac{2A}{\lambda} \int_{|f| > \frac{\lambda}{2}} |f|\, dx \qquad (3.7)$$

g dağılım fonksıyonu olsun $g_*(\lambda) = m\{x \in R^n: |g(x)| > \lambda\}$

$$\int_{R^n} |g(y)|^p dy = \int_0^\infty \lambda^p dg_*(\lambda)$$

$$m(E_\lambda) = m[x: |Mf(x)| > \lambda\} = g_*(\lambda)$$

olmak üzere

$$\int_{R^n} (Mf)^p\, dx = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} m(E_\lambda) d\lambda$$

özellikle (3.7) nedeniyle

$$\|Mf\|_p^p = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} m(E_\lambda) d\lambda \leq p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \left(\frac{2A}{\lambda} \int_{|f| > \frac{\lambda}{2}} |f(x)|\, dx\right) d\lambda$$

integrali hesaplamak için integrasyon sırasını değiştirdiğimizde ilk integrali λ'ya göre iç integral $p > 1$ olduğunda

$$\int_0^{2|f(x)|} \lambda^{p-2} d\lambda = (\frac{1}{p-1})|2f(x)|^{p-1}$$

olup,iç integral $p > 1$ için

$$\frac{2A_p}{p-1}\int_{R^n} |f|\,|2f|^{p-1}dx = (A_p)^p \int_{R^n} |f|^p\,dx$$

çift katlı integral değeri

$$\frac{2A_p}{p-1}\int_{R^n} |f||2f|^{p-1}dx = (A_p)^p \int_{R^n} |f|^p\,dx$$

elde edilir. Böylece (iii) ispatlanmış olur. $1 < p < \infty$ için A_p sabiti A_p=$2(\frac{3^n p}{p-1})^{\frac{1}{p}}$ şeklinde yazılır.

(i)'nin ispatı (ii) ve (iii)'nin sonucudur.

$A_p = \mathrm{o}(\frac{1}{p-1}),\ p \to 1$

$p = 1$ durumunda $\mathrm{L}^1(\mathrm{R}^n)$ üzerinde $M\colon \mathrm{f} \to \mathrm{Mf}$ operatörü sınırlı değildir, fakat $\mathrm{L}^1(\mathrm{R}^n)$'den $\mathrm{L}^1(\mathrm{R}^n)$'e zayıf sınırlıdır ve 0 da integrallenemez. f fonksiyonunun integralinin sonlu, sınırlı ve integrallenebildiği halde $Mf(x)$ operatörünün integralinin ∞ olduna dair örnek verilebilir. [2],[3]

Örnek 3.10 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\ln^2(x)}, & x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \\ 0\,, & x \notin \left(0, \frac{1}{e}\right) \end{cases}$ fonksiyonu $L^1(R)$ uzayına aittir ancak $Mf \notin L^1(R)$ 'dir.

$f(x) = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x\ln^2(x)}$ integralinde $lnx = u,\ \frac{1}{x}dx = du$ dönüşümü uygulanırsa

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{du}{u^2} = \lim_{A\to-\infty} \int_A^{-1} \frac{du}{u^2} = \lim_{A\to-\infty} \left(-\frac{1}{u}\right) \Big|_A^{-1} = 1 + \frac{1}{A} = 1$$

sabit $f(x) \in L^1$(R)'dir.

$Mf(x)dx = \infty$ ve $Mf \notin L^1(R)$ elde edilir.

Teorem 3.11 Eğer $f \in L^1(R^n)$ 0'da integrallenemezse, o zaman Mf, R^n de integrallenemez $Mf \notin L^1(R^n)$.

İspat: $d\mu$ merkezi orjinde bir direkt ölçüm olmak üzere $\int_{B(x,r)} d\mu = 1$

$$M(d\mu)(x) = \sup_{r>0, 0\in B(x,r)} \frac{1}{m(B(x,r))} = (V_n|x|^n)^{-1}$$

bu durumda r=$|x|$ dir. Daha büyük bir N seçeriz öyle ki ;

$$\int_{B(0,N)} |f(x)|dx \geq \frac{1}{2}\|f\|_1$$

o zaman $x \in R^n$ öyle ki $|x| \geq N$. Eğer $r = 2(|x| + N)$ alınırsa

$$Mf(x) \geq \frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f(y)|dy = \frac{1}{V_n(2(|x|+N))^n}\int_{B(x,r)}|f(y)|\,dy$$

$$\geq \frac{1}{V_n(2(|x|+N))^n}\int_{B(x,N)}|f(y)|\,dy \geq \frac{1}{2V_n(2(|x|+N))^n}\|f\|_1$$

$$\geq \frac{1}{2V_n(4|x|)^n}\|f\|_1$$

yeterince büyük $|x|$ için

$Mf(x) \geq c|x|^{-n}$, $c = (2V_n 4^n)^{-1}\|f\|_1$

olduğu söylenir böylece $Mf \notin L^1(R^n)$ dir.[2]

Teorem 3.12 (Lebesgue diferansiyelleme teoremi) f lokal olarak integrallenebilir $f \in L^1_{loc}(R^n)$, hemen her $x \in R^n$ için,

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x) \qquad (3.8)$$

elde edilir. Burada $B(x,r)$, x merkezli, r yarıçaplı yuvarları göstermektedir.

İspat: $\lambda > 0$ için,

$$E_\lambda = \{x: \limsup_{r\to 0}\left|\frac{1}{m(B(x,r)}\int_{B(x,r)} f(y)dy - f(x)\right| > 2\lambda$$

sıfır ölçüsü vardır. Çünkü bu iddia $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{\frac{1}{k}}$ kümesinin ölçüsünün sıfıra sahip olduğunu kabul eder ve (3.8) eşitsizliğindeki limit değerlerinin E^c nin tüm noktalarında olduğunu kabul eder.

her $\varepsilon > 0$ için g $L^1(R^n)$ 'de kompakt sürekli bir fonksiyon ve $\|f - g\|_1 < \varepsilon$, her x için

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} g(y) = g(x)$$

farklı olarak $\frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)dy - f(x)$ olarak yazarsak

$$\frac{1}{m(B(x,r)} \int_{B(x,r)} \big(f(y) - g(y)\big)dy$$
$$+ \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} g(y)dy - g(x) + g(x) - f(x)$$

durumunu buluyoruz.

$$\limsup_{r \to 0} \left| \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)dy - f(x) \right| \leq M(f-g)(x) + |g(x) - f(x)|$$

sonuç olarak eğer

$F_\lambda = \{x : M(f-g)(x) > \lambda\}$ ve $G_\lambda = \{x : |f(x) - g(x)| > \lambda\}$ ise o zaman $E_\lambda \subset F_\lambda \cup G_\lambda$ olur. eğer u_1 ve u_2 pozitifse, o zaman $u_i > \lambda$ en az bir u_i için $u_1 + u_2 > 2\lambda$ elde edilir. Diğer taraftan chebychev eşitsizliği yardımıyla $m(G_\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\|f - g\|_1$ ve ayrıca maksimal fonksiyon için tahmini zayıf tip $m(F_\lambda) \leq \frac{3^n}{\lambda}\|f - g\|_1$ eşitsizliğinde fonksiyon g seçildiğinden $\|f - g\|_1 < \varepsilon$,

$$m(E_\lambda) \leq \frac{3^n}{\lambda}\varepsilon + \frac{1}{\lambda}\varepsilon = \frac{3^n + 1}{\lambda}\varepsilon$$

elde edilir ve keyfi ε için $m(E_\lambda) = 0$ ve $p = 1$ için ispat tamamlanır.

Teoremdeki sınır x noktasına kadar küçülen yuvarlar üzerinden alınır. Bu nedenle f'in x'den uzaktaki davranışı önemsizdir. Her yuvar üzerinde f'in integrallenebildiğini varsayarsak sonucun geçerli olduğu görülür.

$p \in (1, \infty]$ için hölder eşitsizliğinden yararlanırsak herhangi bir B yuvarı için $f \in L^1_{loc}(R^n)$ olmak üzere

$$\int_B |f(x)|\, dx \leq \|f\|_{L^p(B)} \|1\|_{L^{p'}(B)} \leq m(B)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_p$$

eşitsizliği yazılır. Böylece teoremin kanıtı tamamlanır.[2]

Tanım 3.13 $r > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılırsa ;

$$f_r(x) = \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)dy$$

$r \to 0$, $\|f_r - f\|_1 \to 0$ olmak üzere $f \in L^1(R^n)$'dir. Böylece $f_{r_k} \to f$ hemen hemen her yerde uygun bir $\{r_k\} \to 0$ dizisi için $\lim_{r\to 0} f_r(x)$ vardır. $g \in L^1$ ve $x \in R^n$ için

$$\Omega g(x) = \left| \limsup_{r\to 0} g_r(x) - \lim_{r\to 0} g_r(x) \right|$$

olduğu söylenir. Burada g_r , f_r gibi tanımlanmıştır. Eğer g kompakt sürekli ise $g_r \to g$ ve böylece Ωg sıfırdır. Eğer g , $L^1(R^n)$ üzerinde ise

$$m\{x: 2M(g) > \varepsilon\} \leq \frac{2C}{\varepsilon} \|g\|_1$$

elde edilir. Açıkça görülür ki $\Omega g(x) \leq 2Mg(x)$ eşitsizliği söylenir g $\in L^1(R^n)$ için

$$m\{x: \Omega g(x) > \varepsilon\} \leq \frac{2C}{\varepsilon} \|g\|_1$$

elde edilir. $f \in L^1(R^n)$ ise $f = g + h$ dir. Böylece h kompakt destek ile süreklidir.

$\Omega f = \Omega g + \Omega h$ *ve* $\Omega h = 0$'dır. Böylece

$$m\{x: \Omega g(x) > \varepsilon\} \leq \frac{2C}{\varepsilon} \|g\|_1$$

elde edilir. Çünkü g normu keyfi olarak küçük seçilebilir.

$\Omega f = 0$, $\lim_{r\to 0} f_r(x)$ dir.

$f \in L_p(R)$ için $f_r(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-r}^{x+r} f(t)dt$ olduğu söylenir.

$f_r \to f$,$\|f_r - f\|_{L_p} \to 0$ için

$$\lim_{r\to 0}\|f_r - f\|_p = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_r - f|^p \, dx = 0$$

$|f_r - f| \le |f_r| + |f| \le Mf + |f| \le 2Mf$ eşitsizliğinden $|f_r - f|^p \le 2^p (Mf)^p$

$$\int (Mf)^p dx \le C_p \int |f|^p \, dx$$

eşitsizliği söylenir. [3]

Lemma 3.14 E ölçülebilir bir küme ve $x \in R^n$ için x'in E üzerinde yoğunluk fonksiyonu olduğunu söylenir.

$$\lim_{r\to 0} \frac{m\{E \cap B(x,r)\}}{m\{B(x,r)\}} = 1 \qquad (3.9)$$

şeklinde ifade edilir. Genel x için sınır 1 değerine sahip değildir ve hatta var olmayabilir. Eğer sınır değeri (3.9)'da 0 değerine sahipse tanımımıza göre x , E'nin bir yoğunluk fonksiyonudur. [3]

Teorem 3.15 $f \in L^p(R^n)$ olmak üzere ve $p \in (1, \infty]$ ise;

$\|f\|_p \le \|Mf\|_p \le C_p \|f\|_p$

eşitsizliği sağlanır.[2]

Teorem 3.16 Eğer $f \in L^\infty(R^n)$ ise o zaman $Mf \in L^\infty(R^n)$ ve

$\|Mf\|_\infty \le C\|f\|_\infty$

eşitsizliği söylenir.[2]

Teorem 3.17 (A_n interpolasyon teoremi)

T, $L^p(R^n)$'den $L^q(R^n)$' e olmak üzere $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$ için T, (p,q) tiplidir.
$\|T(f)\|_q \le C\|f\|_p$

eşitsizliği sağlanır.Burada C sabiti f'e bağlı değildir.

benzer şekilde zayıf (p,q) tipli eğer $\lambda > 0$ ise;

$$m\{x: |Tf(x)| > \lambda\} \le \left(\frac{c\|f\|_p}{\lambda}\right)^q$$

eşitsizliği sağlanır. Burada C , f veya λ'ya bağlı değildir.

eğer $q = \infty$ zayıf tip (p, q) ise T' nin (p, q) tipli olduğu söylenir. Eğer $q < \infty$ ise

$$\lambda^q m\{x: |Tf(x)| > \lambda\} \leq \int_{R^n} |Tf|^q \, dx = \|Tf\|_q^q \leq (C\|f\|_p)^q$$

olup L^p uzaylarında T tanımlanır. Böylece f fonksiyonlarının uzayı $L^{p_1}(R^n) + L^{p_2}(R^n)$ $f = f_1 + f_2$ ile $f_1 \in L^{p_1}(R^n)$ ve $f_2 \in L^{p_2}(R^n)$ olsun. Varsayalım $p_1 < p_2$ o zaman $L^p(R^n) \subset L^{p_1}(R^n) + L^{p_2}(R^n)$'dir. Her p için $p_1 \leq p \leq p_2$, $f \in L^p(R^n)$ ve γ pozitif bir sabit olsun.

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & eğer \ \ |f(x)| > \gamma \\ 0 & eğer \ \ |f(x)| \leq \gamma \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) & eğer \ \ |f(x)| \leq \gamma \\ 0 & eğer \ \ |f(x)| > \gamma \end{cases}$$

o zaman

$$\int |f_1(x)|^{p_1} \, dx = \int |f_1(x)|^p \, |f_1(x)|^{p_1 - p} dx \leq \gamma^{p_1 - p} \int |f(x)|^p \, dx$$

$p_1 - p \leq 0$ için benzer şekilde

$$\int |f_2(x)|^{p_2} \, dx = \int |f_2(x)|^p \, |f_2(x)|^{p_2 - p} dx \leq \gamma^{p_2 - p} \int |f(x)|^p \, dx$$

eşitsizliği söylenir. $f_1 \in L^{p_1}$ ve $f_2 \in L^{p_2}$ olup $f = f_1 + f_2$ dir. [3]

Teorem 3.18 (Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi)

Varsayalım ki $1 \leq p_i \leq q_i \leq \infty$, $p_0 < p_1, q_0 \neq q_1$ ve T suplineer olsun $L^{p_0} + L^{p_1}$'de zayıf tip (p_0, q_0) ve (p_1, q_1) için

$\|Tf\|_{L^{q_0,\infty}} \leq A_0 \|f\|_{p_0}$ ve $\|Tf\|_{L^{q_1,\infty}} \leq A_1 \|f\|_{p_1}$

eşitsizlikleri söylenir. Eğer $0 < \theta < 1$ ve

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \ \ \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

ise o zaman T, (p, q) tiplidir.

$\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p$, $f \in L^p$

$C = C(C_i, p_i, q_i, \theta)$ değerlerine bağlıdır, ancak f ve T'ye bağlı değildir.[2]

Teorem 3.19 Farzedelim ki $1 < r \leq \infty$ için $L^1(R^n) + L^r(R^n)$'de zayıf tip (1,1) ve zayıf (r, r) ise o zaman T (p, p) tipli olur. T suplineer f, g ölçülebilir iki fonksiyon ve

$f, g \in L^1(R^n) + L^r(R^n)$, $1 < r < \infty$ için

(i) $|T(f+g)(x)| \leq |Tf(x)| + |Tg(x)|$

(ii) m{x:$|Tf(x)| > \lambda\} \leq \frac{C_1}{\lambda}\|f\|_1$, $f \in L^1(R^n)$

(iii) m{x:$|Tf(x)| > \lambda\} \leq (\frac{C_r}{\lambda}\|f\|_r)^r$ $f \in L^r(R^n)$, $r < \infty$ için

($r = \infty$ olduğunda $\|T(f)\|_q \leq C_p\|f\|_p$ eşitsizliği sağlanır.)

o zaman $f \in L^p(R^n)$, $1 < p < r$ için

$\|T(f)\|_p \leq C_p\|f\|_p$

eşitsizliği söylenir burada C_p sabiti C_1, C_2, p ve r ye bağlıdır. [3]

İspat : $f \in L^p(R^n)$ olsun dağılım fonksiyonu $m\{x: |Tf(x)| > \lambda\}$ olmak üzere

$f_1 \in L^1(R^n)$ ve $f_2 \in L^r(R^n)$ için $f = f_1 + f_2$ olmak üzere $|f|$ kesilerek keyfi bir $\gamma > 0$ için λ'ya göre düzenlenirse $|T(f)(x)| \leq |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)|$ eşitsizliği sağlanır.

$$\{x: |Tf(x)| > \lambda\} \subset \{x: |Tf_1(x)| > \frac{\lambda}{2}\} \cup \{x: |Tf_2(x)| > \frac{\lambda}{2}\}$$

böylece

$$\alpha(\lambda) = m\{x: |Tf(x)| > \lambda\} \leq m\left\{x: |Tf_1(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\} + m\{x: |Tf_2(x)| > \frac{\lambda}{2}\}$$

ve dolayısıyla (ii) ve (iii) varsayımından

$$\alpha(\lambda) \leq \frac{C_1}{\frac{\lambda}{2}} \int |f_1(x)|dx + \frac{C_r^r}{\frac{\lambda^r}{2}} \int |f_2(x)|^r dx$$

eşitsizliği sağlanır, f_1 ve f_2 tanımları nedeniyle

$$\alpha(\lambda) \leq \frac{2C_1}{\frac{\lambda}{2}} \int_{|f|>\lambda} |f|\, dx + \frac{(2C_r)^r}{\lambda^r} \int_{|f|\leq\lambda} |f(x)|^r\, dx$$

ve böylece

$$\int_{R^n} |Tf|^p dx = -\int_0^\infty \lambda^p d\alpha(\lambda) = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\alpha(\lambda) d\lambda$$

olduğundan dolayısıyla iki tarafı $p\lambda^{p-1}$ ile çarpmamız yeterlidir. Bunu yapmak için $p > 1$ için

$$\int_0^\infty \lambda^{p-1}\lambda^{-1}\{\int_{|f|>\lambda} |f|\, dx\} d\lambda = \int_{R^n} |f| \int_0^{|f|} \lambda^{p-2}\, d\lambda dx = \frac{1}{p-1}\int_{R^n} |f||f|^{p-1}\, dx$$

benzer şekilde $p < r$ için

$$\int_0^\infty \lambda^{p-1}\lambda^{-1}\{\int_{|f|\leq\lambda} |f|^r\, dx\} d\lambda = \int_{R^n} |f|^r \int_{|f|}^\infty \lambda^{p-1-r}\, d\lambda dx = \frac{1}{r-p}\int_{R^n} |f||f|^{p-r}\, dx$$

eşitsizliği sağlanır . İkisini beraber toplayalım ve sonuçta

$\|T(f)\|_p \leq C_p \|f\|_p$ eşitsizliği söylenir. $(C_p)^p = \frac{2C_1}{p-1} + \frac{(2C_r)^r}{r-p}$ dir. buradan $C_p \leq \frac{C}{(p-1)}$, $p \to 1$ olduğu söylenir.[3]

Tanım 3.20 (BMO Uzayı) Tüm fonksiyonlar bu uzay içindedir. BMO uzayı L_∞ uzayını içerir.

$f: R^n \to R$ ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere $f_B = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(x)dx$ ve normu

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{B\subset R^n, r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} (f(x) - f_B)dx < \infty$$

$$\|f\|_{L_\infty} = \operatorname*{esssup}_{x\in R^n} |f(x)| = \operatorname*{infsup}_{|e|=0, x\in R^n/e,} |f(x)| < \infty$$

şeklindedir. $L_p \to L_q$, $L_1 \to L_\infty$, $L_\infty \to BMO$'ya sınırlılıkları sağlanır.

Tanım 3.21 (Calderón-Zygmund Parçalanışı)

Lebesgue diferansiyellenebilirliğini kullanarak harmoniz analizde kullanışlı olan R^n in parçalanışı yöntemi verilebilir.

Teorem 3.22 $f \in L^1(R^n)$ ve $\lambda > 0$ için R^n in parçalanışı vardır öyle ki

(i) $R^n = F \cup \Omega$, $F \cap \Omega = \emptyset$.

(ii) $|f(x)| \leq \lambda$ h.h. $x \in F$.

(iii) Ω küplerin birleşimidir, $\bigcup_k Q_k$, ayrık diyadik küpler ve köşeleri koordinat eksenine paralel her Q_k için

$$\lambda < \frac{1}{m(Q_k)} \int_{Q_k} |f(x)|\, dx \leq 2^n \lambda$$

şeklinde tanımlanır.

İspat : $Q_k^{(0)}$ $(k = 1,2, \dots)$, koordinat eksenine paralel, ayrık diyadik küplerin dizisi olsun. $f \in L^1$ olduğundan her bir $Q_k^{(0)}$ kübünü 2^n tane eşit parçalara bölelim ve bu küplere $Q_k^{(1)}$, (k=1,2,…) diyelim.

$$\frac{1}{m(Q_k^{(1)})} \int_{Q_k^{(1)}} |f(x)| dx \leq \lambda \text{ veya } \frac{1}{m(Q_k^{(1)})} \int_{Q_k^{(1)}} |f(x)| dx > \lambda$$

olmak üzere iki durum vardır. Birinci durumda

$$\lambda < \frac{1}{m(Q_k^{(1)})} \int_{Q_k^{(1)}} |f(x)| dx \leq \frac{1}{2^{-n} m(Q_k^{(0)})} \int_{Q_k^{(0)}} |f(x)| dx \leq 2^n \lambda$$

elde edilir. Burada $Q_k^{(1)}$ 'i daha fazla bölemiyeceğiz için Q_k dizisi olarak seçeriz.

İkinci durumda $Q_k^{(1)}$'i 2^n tane eşit parçalara bölmeye devam edersek Q_k şeklinde diziler izlemeye devam ederiz.

eğer $x \notin \Omega =: \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ ise o zaman $x \in Q_{k_j}^{(j)}$ (j=0,1,2,…) olmak üzere m($Q_{k_j}^{(j)}$)→ 0, $j \to \infty$ için

$$\frac{1}{m(Q_{k_j}^{(j)})} \int_{Q_{k_j}^{(j)}} |f(x)| dx \leq \lambda$$

olduğu görülür. Böylece lebesgue differansiyellenebilme teoremi kullanılarak

$x \in F = \Omega^c$ den $|f(x)| \leq \lambda$ olduğu söylenir ve ispat tamamlanır. [2], [3]

Sonuç 3.23 Teorem (3.5)'den yararlanak A ve B iki sabit olmak üzere aşağıdaki eşitsizlikler verilebilir.

(i) $m(\Omega) \leq \frac{A}{\lambda}\|f\|_1$

(ii) $\frac{1}{m(Q_k)}\int_{Q_k}|f|\,dx \leq B\lambda$

İspat 1: Teorem (3.5) den yararlanarak $B = 2^n$ olduğunu söyleyebiliriz.

$$m(\Omega) = \sum_k m(Q_k) < \frac{1}{\lambda}|f(x)|dx \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_1$$

eşitsizliği $A = 1$ $B = 2^n$ için sağlanır.

İspat 2: F de $|f(x)| \leq \lambda$, $M|f(x)| \leq \lambda$ olmak üzere $F = \{x: M|f(x)| \leq \lambda\}$ ve $\{x: M|f(x)| \leq \lambda\}$ seçersek $m(\Omega) \leq \frac{3^n}{\lambda}\|f\|_1$ olduğundan A=3^n alabiliriz. Tanım gereği F kapalı , küpleri Q_k seçersek $\Omega = \bigcup_k Q_k$ küplerin birleşimi ve küplerin çapları F mesafesine orantılıdır. Q_k bu küplerden biri olsun ve p_k, F in bir noktası öyle ki

$$dist(F, Q_k) = dist(p_k, Q_k)$$

B_k merkezi p_k olan en küçük yuvar ve Q_k nın iç kısmını içeren

$$\gamma_k = \frac{m(B_k)}{m(Q_k)}$$

olsun ve $p_k \in \{x: Mf(x) \leq \lambda\}$ öyle ki,

$$\lambda \geq Mf(p_k) \geq \frac{1}{m(B_k)}\int_{B_k}|f(x)|\,dx \geq \frac{1}{\gamma_k m(Q_k)}\int_{Q_k}|f(x)|dx$$

B' nin değeri olarak γ_k'nın üst sınırını alabiliriz. Bu durumda

$$radius(B_k) \leq dist(p_k, Q_k) + diam(Q_k) = dist(F, Q_k) + diam(Q_k)$$
$$\leq (c_2 + 1)diam(Q_k)$$

ve

$m(B_k) = V_n(radius(B_k))^n \leq V_n(c_2+1)^n\big(diam(Q_k)\big)^n = V_n(c_2+1)^n n^{\frac{n}{2}} m(Q_k)$

sağlanır. $m(Q_k) = (diam(Q_k/\sqrt{n})^n$ olduğundan her bir k için $\gamma_k \leq V_n(c_2+1)^n n^{\frac{n}{2}}$ olduğu söylenir. $A = 3^n$ ve $B = V_n(c_2+1)^n n^{\frac{n}{2}}$ değerlerini alarak ispat sonlanır.

Calderon-Zygmund parçalanışı singular integrallerin reel analizinde önemlidir. Keyfi bütünleşebilir bir fonksiyonun küçük ve büyük parçalara bölünmesinde kolaylık sağlar.[2],[3]

Teorem 3.24 (Fonksiyonlar için Calderón-Zygmund Parçalanışı)

$f \in L^1(R^n)$ ve $\lambda > 0$ olmak üzere R^n de g ve b fonksiyonları vardır öyle ki $f = g + b$ ve

(i) $\|g\|_1 \leq \|f\|_1$ ve $\|g\|_\infty \leq 2^n$

(ii) $b = \sum_j b_j$, her b_j , Q_j ayrık diyadik küpünde $\int_{Q_j} b_j\,(x)dx = 0$ ve

$\|b_j\|_1 \leq 2^{n+1}\lambda m(Q_j)$ durumlarını sağlar. Ayrıca $j \neq k$ olduğundan $Q_j\ ve\ Q_k$ ayrık iç diyadik küplerdir

(iii) $\sum_j m(Q_j) \leq \lambda^{-1}\|f\|_1$

İspat:

1) $R^n = F \cup \Omega$, $F \cap \Omega$=∅

2) $|f(x)| \leq \lambda$, $\forall . x \in F$;

3) Ω küplerin birleşimi $\Omega = \cup_{j=1}^{\infty} Q_j$ dir. (içleri birbirinden ayrı Q_j için)

4) $m(\Omega) \leq \lambda^{-1}\int_{R^n}|f(x)|\,dx$ ve $\lambda < \frac{1}{m(Q_j)}\int_{Q_j}|f(x)|dx \leq 2^n\lambda$

tanımdan

$$b_j = (f - \frac{1}{m(Q_j)}\int_{Q_j} f(x)dx)\chi_{Q_j}$$

$b = \sum_j b_j$ ve $g = f - b$, sonuç olarak

$$\int_{Q_j} |b_j|\, dx \le \int_{Q_j} |f(x)|dx + m(Q_j)\left|\frac{1}{m(Q_j)}\int_{Q_j} f(x)dx\right|$$

$$\le 2\int_{Q_j} |f(x)|dx \le 2^{n+1}\,\lambda m(Q_j)$$

eşitsizliklerini kanıtlayan $\|b_j\|_1 \le 2^{n+1}\lambda m(Q_j)$ dir. F, $R^n = \bigcup_j Q_j \cup F$ de kapalı küme olmak üzere F'de

$b = 0$ ve Q_j küplerinde $f - b_j = \frac{1}{m(Q_j)}\int_{Q_j} f(x)dx$ olduğundan

$$g = \begin{cases} f, & F \\ \frac{1}{m(Q_j)}\int_{Q_j} f(x)dx & Q_j \end{cases} \qquad (3.10)$$

g sabit $\frac{1}{m(Q_j)}\int_{Q_j} f(x)dx$ 'e eşittir ve $2^n\lambda$ tarafından sınırlandırılmıştır. (4. ve 2. Koşullar kullanılarak) ve sonuç olarak (3.10)'dan $\|g\|_1 \le \|f\|_1$ olduğu söylenir ve ispat tamamlanır. [2],[3]

Tanım 3.25 (Zayıf Türev)

$\Omega \subset R^n$ açık bir küme olsun $f \in L_{1,loc}(\Omega)$, $\forall\, G \in \Omega$ için, $f \in L_1(G)$ dir. $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için, $v \in L_{1,loc}(\Omega)$ vardır ki $\int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega v.\varphi dx$ koşulu sağlanıyorsa v'ye f'nin sobolev anlamında zayıf türevi denir ve v fonksiyonu

$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = v$ ile gösterilir.

u, v yerel integrallenebilir $\int_\Omega uD^a\varphi dx = (-1)^{|a|}\int_\Omega \varphi v dx$

$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için v, u'nun zayıf a-ıncı kısmi türevidir. $D^a u = v$ ile ifade edilir.

kısmi integrasyondan yaralanılarak işlem yapılır.

$\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = f(x)\varphi(x)\ |_a^b - \int_a^b f'(x)\varphi(x)dx = -\int_a^b f'(x)\varphi(x)dx$

$\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = \int_a^b g(x)\varphi(x)dx$

eşitliği sağlanır. [6]

Örnek 3.26 $f(x)=|x| \Longrightarrow f'(x)=sgnx=\begin{cases}1\,,x\geq 0\\-1,x<0\end{cases}$ bu fonksiyonun 0 noktasında klasik anlamda türevi yoktur.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,.\,\varphi' dx=-\int_{-\infty}^{\infty}\varphi sgnxdx$$

bu fonksiyonun 0 noktasında klasik anlamda türevi yoktur.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|\varphi'(x)dx=-\int_{-\infty}^{0}(x)\varphi'(x)dx+\int_{0}^{\infty}x\varphi'(x)dx$$

$$=-\left[x\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)dx\right]+x\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0}-\varphi(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0}1.\varphi(x)dx-\int_{0}^{\infty}1\varphi(x)dx$$

elde edilir. 0 noktasında klasik anlamda türevi yoktur. Çünkü sobolev uzayı olması için mutlak sürekli olmalıdır, o zaman türevli olur, $x=0$ da sürekli değildir.

Tanım 3.27 (Sobolev Uzayı)

Sobolev uzay fonksiyonun hem kendisinin L^p nomları hem de belirli bir sıraya kadar türevlerinin birleşimi olan bir norm ile donatılmış bir fonksiyon vektör uzayıdır.

$W^{1,p}(\Omega)$ olmak üzere $f\in L_p(\Omega)$ ve $\frac{\partial f}{\partial x_i}$; i=1,2,….,n zayıf türevleri için $\frac{\partial f}{\partial x_i}\in L_p(\Omega)$'dır. yani sobolev uzayı i =1,2,3,….,n için ilk zayıf kısmi D_if türevleri ve kendisi $L^p(\Omega)$'da olan $D_if\in L^p(\Omega)$ ve $f\in L^p(\Omega)$ fonksiyonlarından oluşur. $Df=D_1f,D_2f,\dots,D_nf$ olmak üzere f 'nin zayıf gradyeni bu sobolev uzayındaki bir fonksiyonun normu

$$\|f\|_{1,p}=\|f\|_p+\|Df\|_p$$

şeklindedir. $1\leq p\leq\infty$, $k\in N_0$ olmak üzere

$$W_p^k(\Omega)=\{f:\Omega\to R, f\in L_1^{loc}(\Omega),\forall|i|\leq k\ \ için\ D_if\in L_p(\Omega)\}$$

ile tanımlanan küme $L_p(\Omega)$ uzayının alt uzayıdır. Bu uzay $W_p^k(\Omega)$ sobolev uzayıdır.[7]

Özellikleri:

1) Bu uzay lineer uzaydır yani vektör uzayıdır.
2) Bu uzay normlu uzaydır. Norm,$1\leq p$ için

$$\|f\|_{w^{1,p}(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_{L_p(\Omega)}$$

ile tanımlanır.

3) Düzgün fonksiyonlar bu uzayda yoğundur. $C^{\infty}(\Omega)$ fonksiyonları yoğundur.

4) $1 < p < \infty$ için duali vardır. $g \in (W^{1,p}(\Omega))^*$ ise $g = f_0 + \frac{\partial f_\prime}{\partial x_i}$ yazılabilir.

$f_0 \in L_{\frac{pn}{p-n+pn}}(\Omega)$; $f_i \in L_p$,(Ω), i=1,2,….n için $\frac{\partial f^i}{\partial x_i}$ distirbutional türev olarak

bilinir ve zayıf türevden farklıdır.

5) Sobolev uzayı tamdır.

6) Sobolev uzayı banachtır. f_n cauchy dizisi olmak üzere $f_n \in W^{1,p(x)}(\Omega)$,

$f \in W^{1,p(x)}$ için n→ 0 iken $\|f_n - f\|_{1,p(x)} \to 0$ dır.

7) Sobolev uzayı ayrılabilirdir.

Sobolev uzay sınırlılığı, $W^{1,p}(R^n)$ ve $1 \le p < \infty$ için $u \in L^p(R^n)$ olan zayıf birinci dereceden kısmi türevler $D_i u = 1,2, \ldots, n$ olmak üzere $W^{1,p}$ normu

$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|Du\|_p$ şeklindedir . $1 < p \le \infty$ olmak üzere $h \in R^n$ için

$\|u_h - u\|_p \le C\|D_u\|_{p,(h)}$ ve $|M(u_h) - Mu| \le M(u_h - u)$

$\|(M_u)_h - M_u\|_p = \|M(u_h) - M_u\|_p \le \|u_h - u\|_p \le C\|D_u\|_{p,(h)}$

eşitsizliği söylenir.

$1 < p < \infty$, $k \in N_o$ için ağırlıklı sobolev uzayı $W_p^k(\omega)$ dir ve $f \in L_p(\omega)$ öyle ki

$D^a f \in L_p(\omega)$ ve $|a| \le k$ olmak üzere $\left\||f|W_p^k(\omega)\right\|$=$\left(\sum_{|a|\le k}\left\||D^a f|L_p(\omega)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

olarak adlandırılır.

Teorem 3.28 Kinnuen Hardy-Littlewood maksimal operatörünün $1 < p \le \infty$ için $W^{1,p}(R^n)$ de sınırlı olduğunu göstermiştir. $1 < p \le \infty$ için $f \in W^{1,p}(R^n)$ ve $Mf \in W^{1,p}(R^n)$ olmak üzere i=1,2,…,n için R^n de hemen hemen her yerde

$|D_i Mf| \leq MD_i f$ eşitsizliğinden Tanakanın teorisine göre $\|D_i Mf\|_p \leq c_{n,p}\|D_i M\|_p$ olacak şekilde bir C sabiti vardır. [8]

BÖLÜM 4

Maksimal Operatörünün Değişken Üslü Lebesgue Uzayında Sınırlılığı

Bu bölümde Hardy-Littlewood maksimal operatörünün değişken üslü $L^{p(.)}$ uzayında sınırlılığından bahsedilecektir. İlk olarak değişken üslü lebesgue uzayından daha sonra sınırlılıkta gerekli olan koşullar log-hölder süreklilik koşulundan, Muckenhoupt sınıfından, Kesirli maksimal operatörünün ağırlıklı değişken üslü lebesgue uzayında sınırlılığından bahsedilecektir.

4.1. Değişken üslü lebesgue uzayları

Tanım 4.1 $p: \Omega \to [1, \infty)$ ölçülebilir fonksiyonuna değişken üs denir.

$1 \leq inf p(x) = p^- \leq p(x) \leq p^+ = supp(x) < \infty$ olmak üzere

$L_{p(x)}(\Omega) = \{f: \Omega \to R, f \text{ ölçü}lebilir, \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx < \infty\}$ ile gösterilen değişken üslü lebesgue uzayı $\lambda > 0$ için $\mathrm{I}_{p(.)} = \int_\Omega |f(x))|^{p(x)} dx < \infty$ şartını sağlayan fonksiyonlardan oluşur ve bu uzayın normu

$\|f\|_{L_{p(x)}}(\Omega) = \inf\{\lambda > 0: \int_0^\infty I_{p(.)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) dx \leq 1\}$ (Lüksemburg normu olarak bilinir.)

şeklinde yazılır.

$L_{p(x)}(\Omega)$ uzayının özellikleri:

1) $L_{p(x)}(\Omega)$ bir tam normlu uzaydır.

$\|f_m - f_n\|_{L_{p(x)}} \to 0$; $m, n \to \infty$ öyle ki $\exists f \in L_{p(x)}$ olmak üzere $\|f_n - f\|_{L_{p(x)}} \to 0$ dır. yani $L_{p(x)}$ tamdır yani banach uzayıdır.

2) Bu uzayın duali vardır $\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{p\prime(x)}=1$ olmak üzere $L_{p'(x)}(0,\infty)$ uzayıdır.

3) Bu uzay $1<p<\infty$ için refleksiv uzaydır. $p^-=\inf_{x>0}p(x)$, $p^+=\sup_{x>0}p(x)$ olmak üzere dualin duali kendisidir.

4) Bu uzayda düzgün fonksiyonlar yoğun değildir. $\forall f\in L_{p(x)}$ için $\exists\{\varphi_n\}\in C_0^\infty(\Omega)$ olmak üzere $n\to\infty$, $\|\varphi_n(x)-f(x)\|\nrightarrow 0$ dır. Bu özelliğin sağlanması için $p(x)$ için gerekli ve yeterli koşul henüz bulunamamıştır. Ancak yeterlilik koşulu vardır. Bu koşul local-logaritmik regülarity koşulu olarak bilinir. $\forall\, x,y\ \in(\Omega)$ için,

$|p(x)-p(y)|\leq\frac{C}{\ln(\frac{1}{|x-y|})}$; $|x-y|\leq\frac{1}{2}$ dir.

Tanım 4.2 Değişken üslü lebesgue uzayı $L^{p(.)}(\Omega)$, (A,Σ,m) bir ölçüm uzayı olmak üzere $p\colon \mathrm{A}\to[1,\infty)$ ve ölçülebilir fonksiyonlar kümesi $P(A,m)$ olsun. $p\in P(A,m)$ fonksiyonu değişken üsttür.$p^+=\sup\{p(x)\colon x\in\Omega\}<\infty$ ve $p^-=\inf\{p(x)\colon x\in\Omega\}\geq 1$ olur. $p^+<\infty$ ise p' ye sınırlı değişken üst denir. $p\in P(A,m)$ ve $p'\in P(A.m)$ için $\frac{1}{\infty}=0$ ise $\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{p\prime(x)}=1$ şeklinde tanımlanır. p', p nin dual değişken üstüdür. eşitsizliği $1\leq p^-\leq p(x)\leq p^+\leq\infty$ şeklindedir.

Teorem 4.3 ($L^{p(x)}(\Omega)$ uzayı tamdır)

A= $\{x\in\Omega\colon p(x)=1\}$ ve B= $\{x\in\Omega\colon p(x)=\infty\}$ olmak üzere

$$p'(x)=\begin{cases}\infty & eğer\quad x\in A\\ 1 & eğer\quad x\in B\\ \frac{p(x)}{(p(x)-1)} & eğer\quad x\in\Omega\end{cases}$$

$I_{p(.)}(f)=\int_\Omega|f(x)|^{p(x)}\,dx+esssup|f(x)|$ olmak üzere $\forall\epsilon>0$ için $f_m\in L^{p(.)}(\Omega)$ cauchy dizisi olsun. $m,n>n_0$ için $n_0\in N$ vardır. $I_{p'}(g)\leq 1$ için g fonksiyonu mevcuttur ve $\int_\Omega|f_m(x)-f_n(x)|\,|g(x)|dx<\varepsilon$ olsun. Ω kümesini S_k altkümelerine parçalayalım. $k\in N$ için $g_k=(1+|S_k|)^{-1}\chi_{S_k}$ olmak üzere eşitsizlikte yerine yazarsak $m,n\geq n_0$

$\int_{S_k}|f_m(x)-f_n(x)|\,dx<\varepsilon(1+|S_k|)$ elde edilir, Böylece $\{f_m\}$ bir cauchy dizisi her cauchy dizisi yakınsaktır. $x\in S_k$ ve $k\in N$ için $f_m^k(x)\to f^k(x)$ olacak şekilde $f_m^k(x)$

alt dizisi bulunur. $f_n^n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f^k(x)\chi_{S_k}(x)$ ve $\forall n_0 \in N$ için;

$$\int_\Omega |f_m(x) - f_n(x)|\,|g(x)|dx \le \sup_m \int_\Omega |f_m(x) - f_n^n(x)|\,|g(x)|dx \le \varepsilon$$

$\|f_m - f\|_{p(\Omega)} < \varepsilon$ olduğu söylenir ve tamdır uzaydaki her cauchy dizisi tam olduğundan banachtır.

Teorem 4.4 (Genelleştirilmiş Hölder Eşitsizliği)

$p, q, h \in P(\Omega)$ öyle ki $\frac{1}{h(x)} = \frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)}$ olmak üzere $f \in L^{p(.)}(\Omega)$ ve $g \in L^{q(.)}(\Omega)$ olmak üzere $I_{h(.)}(fg) \le I_{p(.)}(f) + I_{q(.)}(g)$ ve $\|fg\|_{s(.)} \le 2\|f\|_{p(.)}\|g\|_{q(.)}$ eşitsizlikleri söylenir.

Teorem 4.5 $f \in L^{p(.)}(\Omega)$ ve $n = 1,2, \ldots$ için $\{f_n\} \in L^{p(.)}(\Omega)$ ise, bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{p(.)} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} I_{p(.)}(f_n - f) = 0$$

olmak üzere Ω bölgesindeki ölçüme göre $f_n \to f$ iken, $\lim_{n\to\infty} I_{p(.)}(f_n) = I_{p(.)}(f)$ dir. [9]

Teorem 4.6 $p: \Omega \to [1, \infty)$ ve $1 < p^- \le p^+ < \infty$ için $L^{p(.)}(\Omega)$ refleksivdir.

Tanım 4.7 $1 < p < \infty$ ve $1 < p' < \infty$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olacak şekilde yazılırsa p' ye p nin eşleniği denir. $1 < p < \infty$ ve $T(L^p(\Omega))'$ alınırsa $f \in L^p(\Omega)$ olmak üzere $T(f) = \int_\Omega f(x)v(x)dx$ olacak şekilde $v \in L^{p'}(\Omega)$ bulunur.

Teorem 4.8 Ω , R^n de olmak üzere E kümesi $\chi_E(x)$, E'nin karakteristik fonksiyonudur. $f \in L^{p(.)}(\Omega)$ için $lim_{|E|\to 0} \|f(x)\chi_E(x)\|_{p(.)} = 0$ dır.

Tanım 4.9 (Ağırlıklı Lebesgue uzayları $L^p_\omega(\Omega)$)

ω fonksiyonu her $x \in R^n$ için $\omega(x) \ge 0$ olmak üzere R^n de lokal integrallenebiliyor ise ω'ya ağırlık fonksiyonu denir. $x \in \Omega \subset R^n$ için a reel sayı olmak üzere

$\omega(x) = (d(x))^a$ kuvvet tipli ağırlık fonksiyonudur. burada $d(x) = \inf_{y\in\partial\Omega}|x - y|$ olarak gösterilir. Ω, R^n de bir açık bölge ve ω ağırlık fonksiyonu $\int_\Omega \omega|f(x)|^p\,dx < \infty$ olmak üzere ölçülebilir fonksiyonlar kümesine ağırlıklı lebesgue uzayı ($L^p_\omega(\Omega)$) denir.

$1 \leq p < \infty$ için ω ağırlık fonksiyonu ve ölçülebilir f fonksiyonu için $L_p(\omega)$ ağırlıklı lebesgue uzayı

$$\|f\|_{L_{p,\omega}} = \left(\int_{R^n} |f(x)|^p \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

normuna sahiptir $p = \infty$ durumunda ise $L_\infty(\omega)$ uzayının normu;

$$\|f\|_{L_{\infty,\omega}} = \operatorname*{esssup}_{x \in R^n} |f(x)| \omega(x)$$

ile gösterilir .

Tanım 4.10 Her $\omega(x) \geq 0$ için $\omega f \in \mathrm{L}_{\omega}^{\mathrm{p}(.)}(\Omega)$ olacak şekilde Ω'da tanımlanan $\mathrm{L}_{\omega}^{\mathrm{p}(.)}(\Omega)$ uzayınının normu

$$\|f\|_{p(.),\omega} = inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} \left| \frac{\omega(x) f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}$$

şeklindedir. $\omega(x) = 1$ ise $\mathrm{L}_{\omega}^{\mathrm{p}(.)}(\Omega) = L^{p(.)}(\Omega)$ olur. $\mathrm{L}_{\omega}^{\mathrm{p}(.)}(\Omega)$ uzayında tanımlanan modüler fonksiyon ω ağırlık fonksiyonu ise $I_{p(.),\omega(f)} = \int_{\Omega} |\omega(x) f(x)|^{p(x)} dx$ şeklindedir. Ağırlık fonksiyonuna $\omega = e^{-\pi |x|^2}$ (gaussian kernel) örnek verilebilir.

$\omega\sqrt{2\pi t}$, $\omega t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-|x|^2}{4t^2}}$, $t = \sigma$, $\omega t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-|x|^2}{4t^2}}$

Tanım 4.11 ω ağırlık fonksiyonu için B herhangi bir yuvar olmak üzere eğer eşitsizlik $\omega(2B) \leq C\omega(B)$ olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti varsa ω doubling şartını sağlar. μ bir borel ölçüm olmak üzere $\exists C > 0$ her küp Q ve $Q^* = 2Q$ için $\mu(Q^*) = C\mu(Q)$ özelliği sağlanıyorsa bu ölçüme iki kat doubling ölçüm denir.

Teorem 4.12 $L_{\omega}^{p}(\Omega)$ uzayında $\int_{\Omega} |\omega f|^p \, dx < \infty$ ölçülebilir fonksiyon olmak üzere $\omega^{1/p} = v$ olmak üzere $1 < p < \infty$ ve $L^{p(.)}(\Omega)$ uzayının duali $L^{p'(.)}(\Omega)$ için

$$\sup_B \frac{1}{B} \|f\|_{L^p(B)} \left\| \frac{1}{v} \right\|_{L^{p'}(B)} < \infty$$

eşitsizliği söylenir.

4.2 Log-Hölder Süreklilik Koşulu

Tanım 4.13 (log-hölder süreklilik koşulu)

$\Omega \subset \mathrm{R^n}$ ve $p: \Omega \to [1, \infty)$ için p fonksiyonu aşağıdaki koşul için log- hölder sürekli olur, her $\mathrm{x, y} \in \Omega$ için

$$|\mathrm{p(x) - p(y)}| \leq \frac{\mathrm{C}}{-\ln(|\mathrm{x-y}|)} \text{ ve } |\mathrm{x - y}| < \frac{1}{2} \tag{4.1}$$

koşulu için bir C sabiti vardır.

$\mathrm{p}(\infty) > 1$ ve her $\mathrm{x} \in \Omega$ için

$$|\mathrm{p(x) - p}(\infty)| \leq \frac{\mathrm{C}}{-\ln(\mathrm{e}+|\mathrm{x}|)} \tag{4.2}$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır p üzerinde ikinci log-hölder koşuludur.[10]

ikinci koşul (4.2) Nekvinda tarafından genelleştirilerek 0<c< 1 için;

$$\int_{\mathrm{E_n}} \mathrm{c}^{\frac{1}{|p(x)-p(\infty)|}} \mathrm{dx} < \infty$$

koşulunu sağlar. [11]

Lemma 4.14 $|\Omega \cap B(x,r)| > 0$ olmak üzere $B(x,r) \subset R^n$ açık yuvarı için $B(x,r)^{p^- - p^+ = p(x)} \leq C$

olacak şekilde $C > 0$ sabiti vardır ve $|B(x,r)| \leq boyut = dimA^n$ dir. n=1 için lebesgue ölçüsü bir aralık (x,y) olur. $y - x = |B(x,r)| = dimB(x,r)$. n=2 için iki boyutlu olur ve alana dönüşür. $|A| = \pi r^2$, $dimA = r$ ise $|A| \leq \pi r^2 = (dimA)^2$ olur. $n = 3$ için üç boyutlu olur ve hacime dönüşür. $dimA = r$ ise $|A| \leq \frac{4}{3}\pi r^3 = (dimA)^3$ böylece tümevarımla $B(x,r)^{p^- - p^+ = p(x)} \leq C$ elde edilir.

Teorem 4.15 p fonksiyonu R^n de sınırlı bir üst olsun. Bu durumda her $\|f\|_{p(x)} \leq 1$ için

$$Mf(x)^{\frac{p(x)}{p^-}} \leq C|B|^{p^- - p^+}(M\left(|f|^{\frac{p}{p^-}}\right)(x) + 1$$

olacak şekilde C sabiti vardır. [4]

Teorem 4.16 $1 < p^- \leq p(.) \leq p^+ < \infty$ ve $f \in L^{p(.)}(\Omega)$ için

$\|Mf\|_{p(.)} \leq c(\Omega, p)\|f\|_{p(.)}$

$c(\Omega, p) > 0$ sabiti vardır. [10]

Teorem 4.17 $p(.) \in L^{p(.)}(R^n)$ ve $f \in L^{p(.)}(R^n)$ için Mf iyi tanımlı ve h.h.h.y $Mf(x) < \infty$, f lokal integrallenebilir, böylece Mf iyi tanımlı $f = f_1 + f_2$ ve sağ taraf hemen hemen her yerde sonludur.

Teorem 4.18 $1 < p^- \leq p(.) \leq p^+ < \infty$ için

a)Tüm $f \in L^{p(.)}(R^n)$ için;

$\|Mf\|_{p(.)} \leq c\|f\|_{p(.)}$

olacak şekilde $c > 0$ sabiti vardır.[10]

Teorem 4.19 $1 < p^- \leq p(.) \leq p^+ < \infty$ ve $f \in L^{p(.)}(R^n)$ için $\int_{R^n} |f(x)|^{p(x)} dx \leq 1$ durumunda $\int_{R^n} |Mf(x)|^{p(x)} dx < \infty$ olduğu söylenir. [11]

Örnek 4.20 $n = 1$ için $\Omega = (-1,1) \subset R^1$ ve $1 < p_0 < \infty$ olmak üzere φ, [0,1) üzerinde pozitif artan bir fonksiyon öyle ki $\varphi(0^+)$=0 ve

$$\lim_{x \to 0^+} \varphi(\frac{x}{2}) \log\left(\frac{1}{x}\right) = \infty$$

için varsayalım ki her $x \in (-1,0)$ için $p(x) \leq p_0$ ve $x \in [0,1)$ için $p(x) = p_0 + \varphi(x)$ olsun. O zaman maksimal operatör $L^{p(x)}$(Ω) de sınırlı değildir.

$$\lim_{x \to 0^+} (\frac{1}{p\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{p_0}). \log\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

olduğundan

$$\lim_{x \to 0^+} (\frac{1}{x})^{\frac{1}{p(\frac{x}{2})} - \frac{1}{p_0}} = 0$$

bu nedenle, $k \in N$ için $b_k \in (0, 1/4)$ yı seçeriz. $p(x)$ i yeterince küçük seçmeliyiz. $p(x)$ çok hızlı artarsa M sınırlı olmaz.

$$(\frac{1}{b_k})^{\frac{1}{p(\frac{b_k}{2})}-\frac{1}{p_0}} \leq 2^{-\frac{k}{p_0}}$$

ve aynı zamanda $0 < b_{k+1} < \frac{b_k}{2}$ olmak üzere

$a_k = \frac{b_k}{2}$ ve $\lambda_k = (\frac{1}{b_k})^{\frac{1}{p(a_k)}}$, $\lambda_k > 1$ için şimdi söylenir ki küme;

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \chi_{(a_k,b_k)}$$

ve $h(x) = \begin{cases} g(-x) & x \in (-1,0) \\ 0 & x \in [0,1) \end{cases}$

$p(x) \leq p_0$ ve her $k \in N$ için;

$$\int_{-1}^{0} h(x)^{p(x)} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} {\lambda_k}^{p(-x)}\, dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) {\lambda_k}^{p(0)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty$$

bunun yanısıra x ∈ (a_k, b_k) ise o zaman 2x+b_k <1 , $b_k < \frac{1}{4}$ olduğundan ve

$$(Mh)(x) \geq \frac{1}{2(x+b_k)} \int_{-b_k}^{x+b_k} h(y)dy \geq \frac{1}{4b_k} \int_{-b_k}^{-a_k} h(y)dy = \frac{1}{4b_k} \int_{-b_k}^{-\frac{b_k}{2}} \lambda_k dy = \frac{\lambda_k}{8}$$

sağlanır ve

$$(Mh)(x) \geq \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \chi_{(a_k,b_k)}(x)$$

olduğundan, böylece

$$\int_0^1 (Mh)(x)^{p(x)}\, dx \geq \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} {\lambda_k}^{p(x)}\, dx \geq \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} {\lambda_k}^{p(a_k)} dx = \infty$$

elde edilir.[12]

Tanım 4.21 $p(.) \in p(\Omega)$ ve $\frac{1}{p(.)}$ log hölder sürekli, $\left\| tX_{\{x:Mf(x)>t\}} \right\|_{L^{p(.)}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^{p(.)}(\Omega)}$

olmak üzere $p^- > 1$ ise

$\|Mf\|_{L^{p(.)}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^{p(.)}(\Omega)}$ eşitsizliği söylenir. [4]

Örnek 4.22 $\Omega = R$ ve $p(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 3 & x \geq 0 \end{cases}$ ise o zaman $L^{p(.)}(R)$ de güçlü ve zayıf tip eşitsizliği gösterelim.

$0 < x < 1$, $f \in L^{p(.)}(R)$ için

$$Mf(x) \geq \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}|f(y)|dy = \frac{1}{2x}\int_{0}^{x} y^{-\frac{2}{5}}dy = \frac{5}{6}x^{-\frac{2}{5}} \notin L^3(0,1)$$

$t > 0$ için $t^3|\{x \in R^n : Mf(x) > t\}| \geq t^3(\frac{5}{6t})^{5/2}$ bu yüzden

$$\|t\chi\{x: Mf(x) > t\}\|_{p(.)} \geq p(t\chi\{x: Mf(x) > t\})^{1/3} \geq t(\frac{5}{6t})^{5/6}$$

sağ taraf sınırsız $t \to \infty$, $p(Mf) = \infty$ olduğundan $Mf \notin L^{p(.)}(\Omega)$ elde edilir. 2 ve 3 değerleri önemli bir rol oynamaz herhangi $p_1 \neq p_2$ ile değiştirilebilir. [4]

Örnek 4.23 p(x)=$2 + 3\sin(x)$ olmak üzere $L^{p(.)}(\Omega)$'de güçlü ve zayıf tip eşitsizliği gösterelim.

$k \geq 1$ de küme tanımlayalım $A_k = [\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi]$, $B_k = [\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi]$

$a = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ ve $b = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ise $x \in A_k$, $p(x) \geq a$ ve $x \in B_k, p(x) \leq b$ fonksiyonlarını tanımlayalım. $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}|x|^{-\frac{1}{3}}\chi_{A_{k(x)}}$ olur.

$\frac{a}{3} > 1$ için

$$p(f) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}|x|^{-\frac{p(x)}{3}}dx \leq \int_{\frac{\pi}{4}+2\pi}^{\infty} x^{-\frac{a}{3}}dx < \infty$$

böylece $f \in L^{p(.)}(R)$ dir. Diğer yandan $x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi]$ için

$Mf(x) \geq \frac{1}{2\pi}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(y)dy \geq C|x|^{-\frac{1}{3}}$

$\frac{b}{3} < 1$ için

$$p(Mf) \geq \sum_{k=1}^{\infty} C \int_{B_k} |x|^{-\frac{p(x)}{3}} dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} C \int_{B_k} |x|^{-\frac{b}{3}} dx \geq C \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right)^{-\frac{b}{3}} = \infty$$

böylece $Mf \notin L^{p(.)}(R)$ elde edilir. Eşitsizlikte $t_k = C(2(k+1)\pi)^{-\frac{1}{3}}$ ise

$$p(t_k \chi_{\{x:Mf(x)>t_k\}}) \geq \sum_{j=1}^{k} \int_{B_j} t_k^{p(x)} dx \geq \sum_{j=1}^{k} |B_j| \left[c(2(k+1)\pi)^{-\frac{1}{3}}\right]^b \geq c_k (k+1)^{-\frac{b}{3}}$$

eşitsizliği sağlanır.

$\frac{b}{3} < 1$ için $k \to \infty$ ise $\left\| t_k \chi_{\{x:Mf(x)>t_k\}} \right\|_{p(.)} \to \infty$ olur. Böylece log-hölder şartları geçerli değildir.[4]

4.3 A_p Muckenhoupt Ağırlığı

Tanım 4.24 (A_p Muckenhoupt Ağırlığı)

ω, R^n de pozitif ve lokal integrallenebilir bir fonksiyon olsun $1 < p < \infty$ için ω Muckenhoupt sınıf A_p'ye aittir. $0 < A < \infty$ için tüm B yuvarları için

$$[\omega]_{A_p} = \sup_B \left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega(x) dx\right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega(x)^{1-p'} dx\right)^{p-1} \leq C$$

eşitsizliği kullanılır. p' , p nin dualidir $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ve |B| bildiğimiz lebesgue ölçüsüdür

Limit durumunda $p = 1$ ve $p = \infty$ olup Hölder eşitsizliği kullanılır.

$1 = \frac{1}{|B|} \int_B \omega(x)^{\frac{1}{p}} \omega(x)^{-\frac{1}{p}} dx \leq \left[\omega(x)^{\frac{1}{p}}\right] A_p$ (Muckenhoupt.1972)

ağırlık fonksiyonu ω Muckenhoupt sınıf A_1'e aitse o zaman sabit $0 < A < \infty$, hemen her $x \in R^n$ için $M\omega(x) \leq C\omega(x)$ eşitsizliği söylenir.

$$M\omega(x) = \sup_B \frac{1}{|B|} \int_B \omega(y) dy$$

$\frac{1}{|Q|} \int_Q \omega(x) dx \leq C \inf_{x \in Q} \omega(x)$

olduğu söylenir.

$1 < p < \infty$ için $-n < a < n(p-1)$ iken $\omega(x) = |x|^a$ fonksiyonu $\omega \in A_p$'dir. $-n < a \leq 0$ ise $\omega \in A_1$'dir.

$0 < s < 1$ ise $\omega(x) = |x|^{-n(1-s)} \in A_1$ ve $\omega(x) = |x|^{-n(p-1)(1-s)} \in A_p$'dir.

$p \to \infty$ iken $\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx \leq C\left(\frac{1}{|B|}\int_B log\omega(x)dx\right)$ sağlanır ve bu durumda

$\omega \in A_\infty$'dir. $A_\infty = \bigcup_{1\leq p<\infty} A_p$ yani A_p'lerin birleşimleridir. [13]

Tanım 4.25 Maksimal operatör M'nin $L^{p(.)}(\omega, \Omega)$'de sınırlı olması için gerek ve yeter koşulu veren,

$$\sup_{x\in\Omega, r>0}\left(\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}\omega dx\right)\left(\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}\omega^{-\frac{1}{p^- -1}}dx\right)^{p^- -1} \leq C$$

eşitsizliğinden yararlanılır. Burada ağırlık fonksiyonuna güçlü durum

ω(x)=$|x - x_0|^{\gamma p(x)}$, $x_0 \in \Omega$, $\gamma = const$ örnek verilebilir γ için gereli durum

$-\frac{n}{p(x_0)} < \gamma < \frac{n}{p'(x_0)}$ eşitsizliğidir.

Özellikleri:

1) $1 \leq p < q$ için $A_p \subset A_q$ dur. $1 < p < \infty$ için $A_p = \bigcup_{p>q} A_q$ dur.
2) $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olmak üzere $\omega \in A_p$ olması için yeterli koşul $\omega^{1-p'} \in A_p$, olur.
3) $\omega_0, \omega_1 \in A_1$ ise $\omega_0\omega_1^{1-p} \in A_p$ olur.
4) $1 \leq p < \infty$, $\omega \in A_p$ için $\omega^{1+\varepsilon} \in A_p$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır.
5) $\omega \in A_p$ ise $\omega \in A_{p-\varepsilon}$ olmak üzere $[\omega]_{A_{p-\varepsilon}} \leq C[\omega]_{A_p}$ olacak şekilde $C > 0$ vardır.
6) ω ağırlık fonksiyonu B yuvarı için $\omega(2B) \leq C\omega(B)$ olmak üzere $C > 0$ varsa ω doubling şartını sağlar. $\omega \in \nabla_2$ olarak söylenir.
7) $1\leq p < \infty$, $\omega \in A_p$ için $\omega \in \nabla_2$ olur. Her $\lambda > 1$ için $\omega(\lambda B) \leq \lambda^{np}[\omega]_{A_p}\omega(B)$ dir.

8) $1 \leq p < \infty$, $\omega \in A_\infty$ ise Her $\lambda > 1$ için $\omega(\lambda B) \leq 2^{\lambda^n}[\omega]_{A_\infty}^{\lambda^n}\omega(B)$ elde edilir.

9) B yuvarı için $E \subset B$ ve $\frac{\omega(E)}{\omega(B)} \leq C\left(\frac{|E|}{|B|}\right)^{\alpha}$ olacak şekilde $C > 0$ ve $a > 0$ vardır bu durumda $\omega \in A_\infty$ olur. $|E|$ kümesi uygun kümenin lebesgue ölçüsünü verir. $\cup_{1\leq p<\infty} A_p = A_\infty$ olduğu söylenir.

10) ω ağırlık fonksiyonu için $M_\omega f(x) = \sup_{B\ni x} \omega(B)^{-1} \int_B |f(y)|\, \omega(y)dy$ olacağı söylenir.

11) $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\omega \in A_p$ ise herhangi bir $0 < \varepsilon < 1$ için $\omega^\varepsilon \in A_p$'dir.

12) $1 \leq p < \infty$ için $\omega \in A_p$ olsun $\varepsilon > 0$ için

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1+\varepsilon}dx\right)^{1/(1+\varepsilon)} \leq \frac{C}{|Q|}\int_Q \omega(x)dx$$

olacak şekilde bir C sabiti varsa bu eşitsizliğe ters hölder eşitsizliği denir.

M Hardy-Littlewood maksimal operatörü için ağırlıklı zayıf L^p ve güçlü L^p sınırlılığı ile ilgili $\omega = 1$ iken ağılıklı lebesgue için L^p uzayına dönüşür. Ağırlıklı zayıf (p,p) tipli karakterizasyon teoremi için $1 \leq p < \infty$ ise M Hardy-Littlewood maksimal operatörü için ağırlıklı zayıf $(L^p(\omega dx), L^p(\omega dx))$ olması için gerek ve yeter koşul $\omega \in A_p$ olmasıdır. $\exists C > 0$, herhangi bir $\lambda > 0$ ve $1 \leq p < \infty$ için $f(x) \in L^p(\omega dx)$ olmak üzere $\int_{\{x\in R^n : Mf(x)>\lambda\}} \omega(x)dx \leq \frac{C}{\lambda^p}\int_{R^n}|f(x)|^p\, \omega(x)dx$ olması için gerek ve yeter şart $\omega \in A_p$ olmasıdır. Ağırlıklı güçlü (p,p) tipli $1 < p < \infty$ olmak üzere M Hardy-Littlewood maksimal operatörünün güçlü $(L^p(\omega dx), L^p(\omega dx))$ olması için gerek ve yeter koşul $\omega \in A_p$ olmasıdır. Eğer $\omega \in A_1$ ise $\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)dx . \sup_{x\in Q}(\omega(x)^{-1}) \leq C$

$p \to 1$ için $\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1-p'}\right)^{p-1} \to \|\omega^{-1}\|_{\infty,Q} = \sup_{x\in Q}(\omega(x)^{-1})$ sağlanır. Bu yüzden A_1 ağırlıkları $p \to 1$ için A_p ağırlıklarının limiti olur. $\omega_1, \omega_2 \in A_1$ ise $\omega_1, {\omega_2}^{1-p} \in A_p$ dir. [13]

Tanım 4.26 ω, R^n de hardy-littlewood sınırlı $f \in L^p\omega(x)dx,\ 1 \leq p < \infty$ ve

$\omega: R^n \to [0,\infty)$ olmak üzere

$$\int |Mf(x)|^p \, \omega(x)dx \leq C \int |f(x)|^p \, \omega(x)dx$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.27 (Fefferman-Stein Eşitsizliği)

$p \in (1, \infty)$ için R^n de ölçülebilir her bir f, $\varphi(x) \geq 0$ için $C = C_{n,p}$ sabiti vardır.

$$\int_{R^n} \big(Mf(x)\big)^p \varphi(x)dx \leq C \int_{R^n} |f(x)|^p \, M\varphi(x)dx \qquad (4.3)$$

eşitsizliği söylenir.

İspat. $M\varphi(x) = \infty$ durumunda (4.3) eşitsizliğini söyleyemeyiz. μ pozitif bir ölçüm $x \in R^n$ ve $M\varphi(x) > 0$ olmak üzere $M\varphi(x) < \infty$ olduğu varsayılır. $d\mu(x) = M\varphi(x)dx$ ve $dv(x) = \varphi(x)dx$ olmak üzere Marcinkiewicz interpolasyon teoreminden M nin $(L^\infty(\mu), L^\infty(v))$ tipli ve zayıf tipli $(L^1(\mu), L^1(v))$ olduğunu ispatlanır.

ilk olarak M'nin $(L^\infty(\mu), L^\infty(v))$ tipli olduğunu gösterelim. Eğer $\|f\|_{L^\infty(\mu)} \leq \lambda$ ise o zaman

$$\int_{\{x \in R^n : |f(x)| > \lambda\}} M\varphi(x)dx = m(\{x \in R^n : |f(x)| > \lambda\}) = 0$$

olur. Her bir $x \in R^n$ için $M\varphi(x) > 0$ olduğu için $(\{x \in R^n : |f(x)| > \lambda\}) = 0$'dır , denk olarak $x \in R^n$ de $|f(x)| \leq \lambda$'dır. Böylece $x \in R^n$ de $Mf(x) \leq \lambda$ ve $\|Mf\|_{L^\infty(v)} \leq \lambda$ olur ve sonuç olarak $\|Mf\|_{L^\infty(v)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mu)}$ sağlanır. [2]

Tanım 4.28 İki ağırlıklı eşitsizlik $\|Mf\|_{p(.),v} = C\|f\|_{p(.),\omega}$ olması için $p: E_n \to [1, \infty)$ bir ölçülebilir fonksiyon $p^- > 1$ için ölçülebilir fonksiyonlar $v, \omega : E_n \to (0, \infty)$, $v, \sigma = \omega^{\frac{-1}{(p(x)-1)}}$ olmak üzere

1) $\sigma \in A_\infty$

2) $(1 + |x|)^{-m}\sigma \in A_\infty$

3) $\exists C > 0$,$\forall B \subset E_n$ için

$\int_B v(x) \left(\frac{1}{|B|} \int_B Q dy\right)^{p(x)} dx \leq C \int_B \sigma dx$ şartı sağlanır.

4) $\exists C > 0$,$\forall B \subset E_n$ için

$$\int_B v(1+|x|)^{-m}\left(\frac{1}{|B|}\int_B \sigma dy\right)^{p(x)} dx \le C\int_B (1+|x|)^{-m}\sigma dx$$

şartları sağlanır. O zaman öyle bir C_1 sabiti vardır ki maksimal fonksiyon için iki ağırlıklı eşitsizlik doğru olur ve $\left\|v^{1/p(.)}Mf\right\|_{L^{p(.)}} \le C_1 \left\|w^{1/p(.)}Mf\right\|_{L^{p(.)}}$ eşitsizliğinden bahsedilir. [14]

4.4 Kesirli Maksimal Operatörünün Ağırlıklı Değişken Üslü Lebesgue Uzayında Sınırlılığı

Tanım 4.29 E_n, $(x = x_1, x_2 \dots\dots, x_n)$ n boyutlu öklid uzayı, χ_E ölçülebilir E kümesinin karakteristik fonksiyonu olsun. $|E|$, E nin lebesgue ölçüsünü belirtir ve $\omega(E) = \int_E \omega dx$ ile gösterilir.

Açık küme Ω için $p: \Omega \to [1,\infty)$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $L^{p(.)}(\Omega)$'yi $f: \Omega \to E_n$'nin ölçülebilir bir sınıfı olarak tanımlarız. Modular $I_{p(.)}(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)}dx$ sonlu olmak üzere $p^+ = \sup\{p(x): x \in E_n\} < \infty$ ve $p^- = \inf\{p(x): x \in E_n\} \ge 1$ eşitsizlikleri için $L^{p(.)}(\Omega)$ nın normu $\|f\|_{p(.)} = \inf\{\lambda > 0: I_{p(.)}(\frac{f}{\lambda}) \le 1\}$ şeklindedir. [15]

Ağırlıklı değişken üstlü $L^{p(.)}$ uzayının normuna göre iki ağırlıklı eşitsizlik , $f \ge 0$ için

$$\left\|v^{\frac{1}{p(.)}}M_\alpha f\right\|_{L^{p(.)}} \le C\left\|\omega^{\frac{1}{p(.)}}f\right\|_{L^{p(.)}} \tag{4.4}$$

ile gösterilir.

Kesirli maksimal operatör, $0 \le \alpha < n$ olmak üzere;

$$M_\alpha f(x) = \sup_{Q \ni x} |Q|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_Q |f(y)|dy$$

şeklinde gösterilir. $Q \in E_n$ için bütün küplerin üstünde x'i içeren ve koordinat eksenine paralel supremum alınır. $\alpha = 0$ olduğunda M_α , Hardy-Littlewood maximal operatördür.

$$\left\| v^{\frac{1}{p(.)}}Mf \right\|_{L^{p(.)}} \le C\left\|\omega^{\frac{1}{p(.)}}f\right\|_{L^{p(.)}} \tag{4.5}$$

şeklindedir. ($v = w = 1$ için maksimal operatör değişken üslü lebesgue uzayı $L^{p(.)}(E_n)$ de sınırlı olur ve $\|Mf\|_{L^{p(.)}} \leq C\|f\|_{L^{p(.)}}$ olacağı söylenir.

p, q üsleri sabit ve $q \geq p > 1$ olmak üzere kesirli maksimal operatörünün $L^P \to L^q$ sınırlılığı için gerekli ve yeter koşul

$$\int_Q v(M_\alpha \chi_Q \sigma)^q \, dx \leq C\left(\int_Q \sigma dx\right)^{\frac{q}{p}}$$

şeklindedir. Tüm küpler için Q , R^nnin içinde ayrıca $q > p$ ve ağırlık fonksiyonu $\sigma = \omega^{-\frac{1}{p-1}}$ alınarak aşağıdaki koşul sağlanır.

$$|Q|^{\frac{a}{n}-1}\left(\int_Q v(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_Q \sigma(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \tag{4.6}$$

log- hölder sürekilik koşulundan;

fonksiyon $p: E_n \to [1, \infty)$, p(.) local log-Hölder sürekli bir C sabiti vardır. $x, y \in E_n$ için

$$|\mathrm{p(x)} - \mathrm{p(y)}| \leq \frac{\mathrm{C}}{-\ln(|\mathrm{x-y}|)} \text{ ve } |\mathrm{x} - \mathrm{y}| < \frac{1}{2} \tag{4.7}$$

$x \in E_n$ için C ve $p(\infty)$ vardır, öyle ki

$$|\mathrm{p(x)} - \mathrm{p}(\infty)| \leq \frac{\mathrm{C}}{-\ln(\mathrm{e}+|\mathrm{x}|)} \tag{4.8}$$

β>1, $p(\infty) > 1$ için;

$$\int_{\mathrm{E_n}} \beta^{-\frac{1}{|p(x)-p(\infty)|}} \mathrm{dx} < \infty \tag{4.9}$$

olduğunu söyleriz.

Güçlü ağırlık durumu $v = \omega = |x - x_0|^{\gamma p(.)}$ olmak üzere $-\frac{n}{p(x_0)} < \gamma < \frac{n}{p\prime(x_0)}$ için p(.) (4.7) ve (4.8)' i sağlarsa $v = \omega$ ve $\alpha = 0$ için (4.5) eşitsizliliğini sağladığı görülür.

$$\left\|\omega^{\frac{1}{p(.)}}\chi_Q\right\|_{p(.)} \left\|\omega^{\frac{1}{p(.)}}\chi_Q\right\|_{p\prime(.)} \leq C|Q|$$

eşitsizliği aşağıdaki bazı koşullar altında bunu sağlar.Bu koşulların;

$$\omega(Q)\left\|\omega^{-1}\chi_Q\right\|_{\frac{p\prime(.)}{p(.)}} \leq C|Q|^{\bar{P}_Q}$$

$\frac{1}{\bar{P}_Q} = \frac{1}{|Q|}\int_Q \frac{1}{p(x)}dx$ olduğu söylenir.

1. durum: her $x, y \in Q$ ve $\sigma(Q) < \frac{1}{2}$ için

$$|\mathrm{p(x)} - \mathrm{p(y)}| \leq \frac{\mathrm{C}}{-\ln\sigma(\mathrm{Q})} \tag{4.10}$$

olacak şekilde $C > 1$ sabiti vardır. p(.)' nin lokal düzenlilik durumunu karakterize etmek için söylenir.

2. durum: β>1 sabiti vardır öyle ki;

$$\int_{E_n} \beta^{-r(x)}\, \sigma dx < \infty \tag{4.11}$$

$r(x) = \frac{p(x)p(\infty)}{|p(x)-p(\infty)|}$, $\sigma = \omega(x)^{-\frac{1}{p(x)-1}}$ olur. [15]

Teorem 4.30 $0 \leq \alpha < n$ için $p: E_n \to [1, \infty)$ ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere $1 < p^- \leq p(.) \leq p^+ < \infty$ için v, ω E_n'de ölçülebilir pozitif fonksiyonlar öyle ki $v\,, \sigma = \omega(x)^{-\frac{1}{(p(x)-1)}} \in L^{1,loc}$ ve p, (4.10) ve (4.11) durumlarını sağlamak üzere $C > 0,\ \beta > 1$ vardır , $Q \subset E_n$ için her iki koşulda sağlanırsa

$$\int_Q M_\alpha\left(\sigma\chi_Q\right)^{p(x)} v(x)\, dx \leq C \int_Q \sigma dx$$

$$\int_Q M_\alpha\left(\sigma\chi_Q\right)^{p(x)} \beta^{-r(x)} v(x)\, dx \leq C \int_Q \sigma(x)\beta^{-r(x)} dx$$

olduğu söylenir . O zaman (4,4) eşitsizliği $f \geq 0$ için sağlar. [15]

Sonuç 4.31 $0 \leq \alpha < n$, $p: E_n \to [1, \infty)$ ölçülebilir fonksiyon $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ olmak üzere v, E_n'de ölçülebilir pozitif fonksiyon öyle ki $v \in L^{1,loc}$ ve p, (4.7) ve (4.9) durumlarını sağlarsa, $C > 0, \beta > 1$ vardır .Her $Q \subset E_n$ için her iki koşulda sağlanırsa

$$\int_Q M_\alpha(\chi_Q)^{p(x)}\, v(x)dx \leq C|Q| \tag{4.12}$$

$$\int_Q M_\alpha(\chi_Q)^{p(x)} \beta^{-r(x)}\, v(x)dx \leq C \int_Q \beta^{-r(x)} dx$$

olduğu söylenir.O zaman eşitsizlik $f \geq 0$ için geçerlidir ve

$\left\|v^{1/p(.)}M_\alpha f\right\|_{L^{p(.)}} \leq C\|f\|_{L^{p(.)}}$

eşitsizliği sağlanır. ((4,4) eşitsizliğinde $\omega = 1$ alınmıştır.)

İspat 4.30 $f \geq 0$ keyfi bir fonksiyon olsun

$$\left\|f\omega^{\frac{1}{p(.)}}\right\|_{L_{p(.)}} \leq 1 \tag{4.13}$$

o zaman

$$I_{p(.)}\left(\omega^{\frac{1}{p(.)}}f\right) \leq 1 \tag{4.14}$$

eşitsizliğini ispatlamak için $\left\|v^{\frac{1}{p(.)}}M_\alpha f\right\|_{L^{p(.)}} \leq C\left\|\omega^{\frac{1}{p(.)}}f\right\|_{L^{p(.)}}$ eşitsizliğini göstermeliyiz.

$$I_{p(.)}\left(v^{\frac{1}{p(.)}}f\right) \leq C \tag{4.15}$$

f'nin kompakt bir desteği olduğunu varsayalım f fonksiyonu için

$f_1 = f\chi_{f\geq\sigma}$, $f_2 = f\chi_{f<\sigma}$

$f = f_1 + f_2$ olmak üzere

$$M_\alpha f(x) \leq M_\alpha f_1(x) + M_\alpha f_2(x) \tag{4.16}$$

olmak üzere f_1 fonksiyonunu varsayarsak her nokta için $x \in E_n$'i küp Q_x ile ilişkilendirelim. Sabit bir Q_x küpü için

$$|Q_x|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{Q_x} f_1 dy = (Q_x{}^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{3Q_x}\sigma dy)(\frac{1}{\sigma(3Q_x)}\int_{Q_x}(\frac{f_1}{\sigma})\sigma dx)$$

$p_x^- = essinf\{p(y): y \in Q_x\}$ olduğundan

$\frac{f_1(y)}{\sigma(y)} \leq \left(\frac{f_1(y)}{\sigma(y)}\right)^{\frac{p(y)}{p_x^-}}$, $y \in Q_x$

hölder eşitsizliği sayesinde

$$|Q_x|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{Q_x} f_1 dy = 3^{n-\alpha}(|3Q_x|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{3Q_x}\sigma dy)(\frac{1}{\sigma(3Q_x)}\int_{Q_x}(\frac{f_1}{\sigma})^{p(y)/p_x^-}\sigma dx)$$

$$\leq 3^{n-\lambda}\sigma(Q_x)^{1-p^-/p_x^-}(|3Q_x|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{3Q_x}\sigma dy)\frac{1}{\sigma(3Q_x)}(\int_{Q_x}(\frac{f_1}{\sigma})^{p(y)/p_x^-}\sigma dx)^{p^-/p_x^-}$$

$\sigma(Q_x)^{1-p^-/p_x^-} \leq \sigma(3Q_x)^{1-p^-/p_x^-}$ olduğundan $(|Q_x|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{Q_x} f_1\, dy)^{p(x)}$ terimi tarafından

$$3^{(n-\lambda)p^+}(|3Q_x|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{3Q_x}\sigma dy)^{p(x)}[(\frac{1}{\sigma(3Q_x)}\int_{Q_x}(\frac{f_1}{\sigma})^{\frac{p(y)}{p^-}}\sigma dx)^{p^-}]^{p(x)/p_x^-}$$

olduğu söylenir. Hölder eşitsizliği ve (4.15)'den

$$\left(\frac{1}{\sigma(3Q_x)}\int_{Q_x}(\frac{f_1}{\sigma})^{\frac{p(y)}{p^-}}\sigma dx\right)^{p^-}$$

$$\leq (\frac{1}{\sigma(3Q_x)})^{p^-}(\sigma(Q_x))^{p^--1}\int_{Q_x} f_1^{p(y)}\sigma^{1-p(y)}dy \leq (\sigma(3Q_x))^{-1}$$

o zaman

$$\sigma(3Q_x)(\frac{1}{\sigma(3Q_x)}\int_{Q_x}(f_1/\sigma)^{p(y)/p^-}\sigma dx)^{p^-} \leq 1$$

böylece önceki eşitsizlik ve $p(x) \geq p_x^-$ den

$$[(\tfrac{1}{\sigma(3Q_x)}\textstyle\int_{Q_x}(f_1/\sigma)^{p(y)/p^-}\sigma dx)^{p^-}]^{p(x)/p_x^-} \qquad (4.17)$$

$$\leq (\sigma(3Q_x))^{1-p(x)/p_x^-}(\frac{1}{\sigma(3Q_x)}\int_{Q_x}(f_1/\sigma)^{p(y)/p^-}\sigma dx)^{p^-}$$

olur ve 1. durumundan $(\sigma(3Q_x))^{1-p(x)/p_x^-} \leq C$ olduğu görülür. (4.17) eşitsizliği sağ tarafı geçemez.

$$C(\frac{1}{\sigma(3Q_x)}\int_{Q_x}(f_1/\sigma)^{p(y)/p^-}\sigma dx)^{p^-}$$

bu nedenle

$$\left(|Q_x|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{Q_x} f_1\, dy\right)^{p(x)}$$

$$\leq C(\int_{3Q_x} \sigma dy \left(|3Q_x|^{\frac{\alpha}{n}-1} C(\int_{3Q_x} \sigma dy \right)^{p(x)} \left(\frac{1}{\sigma(3Q_x)} \int_{Q_x} \left(\frac{f_1}{\sigma}\right)^{\frac{p(y)}{p^-}} \sigma dx \right)^{p^-} \qquad (4.18)$$

her $k \in$ Z için,

$\Omega_k = \{x \in E_n : 2^k < M_\alpha f \leq 2^{k+1}\}$

her $x \in \Omega_k$ için x'i içeren Q_x^k küpü vardır öyle ki $|Q_x^k|^{\frac{a}{n}-1} \int_{Q_x^k} f_1(x)dx \geq 2^k$ dır. Lemmaya göre P_x^k diyadik küpü vardır öyle ki $Q_x^k \subset 3P_x^k$ ve $|P_x^k|^{\frac{a}{n}-1} \int_{P_x^k} f_1(x)dx \geq C_{n,a}2^k$ dır. Çünkü P_x^k diyadik ve boyutları sınırlıdır. (f_1'in kompackt desteği olduğundan). Her bir x için maksimal ayrık alttoplam $\{P_j^k\}$'yı geçebiliriz. Bazı j'ler için $Q_x^k \subset 3P_x^k$ dır. Bu nedenle $\Omega_k \subset \bigcup_j 3P_j^k$ olur. E_j^k tümevarımsal düşünürsek

$E_1^k = 3P_1^k \cap \Omega_k$, $E_2^k = \left(3P_2^k \backslash 3P_1^k\right) \cap \Omega_k$, $E_3^k = \left(3P_3^k \backslash 3P_2^k \cup 3P_1^k\right)) \cap \Omega_k$ olur biliyoruz ki $\Omega_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^k$ ve yukarıdaki tahminleri uygulayarak Q_x küpü yerine $\{P_j^k\}$ alınarak,

$$\int_{E_n} (M_\alpha f_1(x))^{p(x)} v(x)dx = \sum_k \int_{\Omega_k} M_\alpha f_1(x)^{p(x)} v dx \leq \sum_k \int_{\Omega_k} (2^{k+1})^{p(x)} v dx$$

$$\leq 2^{p^+} C_n \sum_{k,j} \int_{E_j^k} \left(\left|P_j^k\right|^{\frac{\lambda}{n}-1} \int_{P_j^k} f_1 \, dy\right)^{p(x)} v(x)dx$$

Q_x küpü yerine $\{P_j^k\}$ için (4.17) kullanılarak

$$\leq C \sum_{k,j} (\int_{E_j^k} v(x) ((\left|3P_j^k\right|^{\frac{\alpha}{n}-1} \int_{3P_j^k} \sigma dy)^{p(x)} dx) (\frac{1}{\sigma(3Q_x)} \int_{P_j^k} (\frac{f_1}{\sigma})^{\frac{p(y)}{p^-}} \sigma dx)^{p^-}$$

$$= \int_X T[\left(\frac{f(y)}{\sigma(y)}\right)^{\frac{p(y)}{p^-}}]^{p^-} \mathrm{d}\zeta, \qquad (4.19)$$

olduğu söylenir ve $X = N \times Z$ de ve X üzerinde ζ ölçüsü;

$$\zeta(j,k) = \int_{E_j^k} ((\left|3P_j^k\right|^{\frac{\alpha}{n}-1} \int_{3P_j^k} \sigma dy)^{p(x)} v(x)dx$$

ve tüm negatif olmayan, ölçülebilir fonksiyonlar h olsun

$$Th(j,k) = \frac{1}{\sigma(3P_j^k)} \int_{P_j^k} h\sigma dx$$

eğer $T: L^{p^-}(E_n, \sigma) \to L^{p^-}(X, \zeta)$ sınırlı operatörse o zaman (4.16)'dan

$$\int_X (T(\frac{f}{\sigma})^{\frac{p}{p^-}})^{p^-} d\zeta$$

$$\leq C \int_{E_n} (\left|\frac{f}{\sigma}\right|^{\frac{p}{p^-}})^{p^-} \sigma dx = C \int_{E_n} \left|\frac{f}{\sigma}\right|^{p(x)} \sigma dx = C \qquad (4.20)$$

T operatörünün sınırlı olduğunu gösterilir. Çünkü T L^{∞} da sınırlandırılmıştır. Marcinkiewicz interpolasyon teoremi T'nin zayıf tipte olduğunu göstermek için yeterlidir. Sınırlı olan h'ı alıp , kompakt destekli $a > 0$ ve

$F_\lambda = \{(j,k) \in X: Th(j,k) > a$ alınırsa ve $E_j^k \subset 3P_j^k$ dan

$$\zeta(F_\lambda) = \sum_{(j,k)\in F_\lambda} \int_{E_j^k} v(x)(\left|3P_j^k\right|^{\frac{\alpha}{n}-1} \int_{3P_j^k} \sigma dy)^{p(x)} dx$$

$$\leq \sum_{(j,k)\in F_a} \int_{E_j^k} v(x) M_a \left(\sigma \chi_{3P_j^k}\right)^{p(x)} dx \qquad (4.21)$$

$\{P_i\}$,$\{P_j^k: (j,k) \in F_a\}$ 'nin maksimal ayrık alt toplamı olsun. E_j^k çifti ayrıktır.

$$\leq \sum_i \sum_{P_j^k \subset P_i} \int_{E_j^k} v(x) M_\alpha \left(\sigma \chi_{3P_j^k}\right)^{p(x)} dx \leq \sum_i \int_{3P_i} v(x) M_\alpha \left(\sigma \chi_{3P_j^k}\right)^{p(x)} dx$$

ve (4.12)'den

$$\leq C \sum_i (\int_{3P_i} \sigma dx)$$

her bir i için , $(j,k) \in F_a$ vardır, öyle ki $P_i = P_j^k$ dolayısıyla F_λ ve ayrık P_i'ler ve $p^- > 1$'den

$$\leq C \frac{1}{\alpha} \sum_i \int_{P_i} h\sigma dx \leq C \frac{1}{a} \int_{E_n} h\sigma dx$$

böylece T zayıf (4.4) ve (4.20) gösterilmiş olur. Buradan

$$\int_{E_n} (M_\alpha f_1)^{p(x)} v(x) dx \leq C \qquad (4.22)$$

f_2 fonksiyonunun tahmini Q_x sabit bir küp olsun. $r(x) = \frac{p(\infty)p(x)}{|p(\infty)-p(x)|}$ olduğu ifade edilip, eğer $\frac{1}{\sigma(3Q_x)}\int_{Q_x}(f_2/\sigma)\sigma dx \leq \beta^{-\frac{r(x)}{p(x)}}$ ise,

$$(|Q_x|^{\frac{\lambda}{n}-1}\int_{Q_x} f_2\,dy)^{p(x)} = (|Q_x|^{\frac{\lambda}{n}-1}\int_{3Q_x}\sigma\,dy)^{p(x)}(\frac{1}{\sigma(3Q_x)}\int_{Q_x}\frac{f_2}{\sigma}\sigma dx)^{p(x)}$$

$$\leq (|3Q_x|^{\frac{\lambda}{n}-1}\int_{3Q_x}\sigma dy)^{p(x)}\beta^{-r(x)},$$

buradan;

$$(|Q_x|^{\frac{a}{n}-1}\int_{Q_x} f_2\,dy)^{p(x)} \leq C\beta^{-r(x)}(|3Q_x|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{3Q_x}\sigma dy)^{p(x)} \qquad (4.23)$$

eğer $\frac{1}{\sigma(3Q_x)}\int_{Q_x}(\frac{f_2}{\sigma})\sigma dx > \beta^{-\frac{r(x)}{p(x)}}$ ve $p(x) < p(\infty)$ ise o zaman

$$(|3Q_x|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{3Q_x} f_2\,dy)^{p(x)} = \left(|3Q_x|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{3Q_x}\sigma dy\right)^{p(x)}(\frac{1}{\sigma(3Q_x)}\int_{Q_x}\frac{f_2}{\sigma}d\mu)^{p(\infty)}$$

$$\times(\frac{1}{\sigma(3Q_x)}\int_{Q_x}\frac{f_2}{\sigma}\sigma\,d\mu)^{p(x)-p(\infty)} \qquad (4.24)$$

$$\leq C\beta^{p(\infty)}\left(|3Q_x|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{3Q_x}\sigma dy\right)^{p(x)}(\frac{1}{\sigma(3Q_x)}\int_{Q_x}\frac{f_2}{\sigma}d\mu)^{p(\infty)}$$

böylece;

$$(|3Q_x|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{3Q_x} f_2\,dy)^{p(x)}$$

$$\leq C\beta^{p(\infty)}\left(|3Q_x|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{3Q_x}\sigma dy\right)^{p(x)}\left(\frac{1}{\sigma(3Q_x)}\int_{Q_x}\frac{f_2}{\sigma}d\mu\right)^{p(x)} \qquad (4.25)$$

eğer $p(x) \geq p(\infty)$ ise $\frac{1}{\sigma(3Q_x)}\int_{Q_x}(\frac{f_2}{\sigma})\sigma dx \leq 1$ sayesinde

$$(|Q_x|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{3Q_x} f_2\,dy)^{p(x)} \leq C\left(|3Q_x|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{3Q_x}\sigma dy\right)^{p(x)}\left(\frac{1}{\sigma(3Q_x)}\int_{Q_x}\frac{f_2}{\sigma}d\mu\right)^{p(\infty)} \qquad (4.26)$$

(4.23) ve (4.26) eşitsizliklerini birleştirirsek ,

$$(|Q_x|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{3Q_x} f_2\,dy)^{p(x)} \leq C\beta^{p(\infty)}\left(|3Q_x|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{3Q_x}\sigma dy\right)^{p(x)} \qquad (4.27)$$

$$+C\left(|3Q_x|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{3Q_x}\sigma dy\right)^{p(x)}\left(\frac{1}{\sigma(3Q_x)}\int_{Q_x}\frac{f_2}{\sigma}d\mu\right)^{p(\infty)}$$

olduğu söylenir ve f_2 fonksiyonu için önceki mantığımız tekrarlanırsa Q_x küpleri P_j^k yuvarları ile değiştirirsek $k \in Z$, $j \in N$ olduğunda;

$$\int_{E_n}\left(M_\alpha f_2(x)\right)^{p(x)}v(x)dx=\sum_k\int_{\Omega_k}(2^{k+1})^{p(x)}v(x)dx$$

$$\leq 2^{p^+}3^{p^+n}C_{n,\alpha}\sum_{k,j}\int_{E_j^k}\left(\left|P_j^k\right|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{P_j^k}f_2\,dy\right)^{p(x)}v\,(x)dx$$

(4.27) kullanılarak,

$$\int_{E_n}\left(M_\alpha f_2(x)\right)^{p(x)}v(x)dx$$

$$\leq C\sum_{k,j}(\int_{E_j^k}v(x)\left(\left|3P_j^k\right|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{3Q_x}\sigma dy\right)^{p(x)}\beta^{-r(x)}dx)$$

$$+C\sum_{k,j}[\int_{E_j^k}v(x)\left(\left|3P_j^k\right|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{3Q_x}\sigma dy\right)^{p(x)}]dx\left(\frac{1}{\sigma(3Q_x)}\int_{Q_x}\frac{f_2}{\sigma}d\mu\right)^{p(\infty)}$$

$=I_1+I_2$

yukarıdaki prosüdürü uygulayarak (4.20) eşitsizliğinin elde edilmesinde olduğu gibi

$$\bar{\zeta}(j,k)=\int_{E_j^k}v(x)\left(\left|3P_j^k\right|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{3Q_x}\sigma dy\right)^{p(x)}\beta^{-r(x)}dx$$

$\bar{T}h(j,k)=\frac{1}{\eta\left(3P_j^k\right)}\int_{P_j^k}h\eta dx$, $\eta=\sigma\beta^{-r(x)}$ de

olur ve daha fazlası, I_1'i aşmaz.

$$\leq C\sum_{k,j}(\int_{E_i^k}v\beta^{-r(x)}\left(\left|3P_j^k\right|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{3Q_x}\sigma dy\right)^{p(x)}dx)\left(\frac{1}{\sigma\left(3P_j^k\right)}\int_{P_j^k}1\eta dx\,dx\right)^{p(\infty)} \quad (4.28)$$

$$=\int_X\bar{T}\,(1)^{p(\infty)}d\bar{\zeta}\leq C\int_{R^n}\frac{\sigma}{\beta^{-r(x)}}dx<\infty$$

$\bar{T}$ operatörünün $L^{p(\infty)}(E_n,\eta)$ 'den $L^{p(\infty)}(X,\bar{\zeta})$'a sınırlanmış olduğunu görülmüştü bu durum benzer şekilde (4.21)'den doğrulanır.

$$\bar{\zeta}(F_a) = C\left(\sum_{k,j}\left(\int_{E_i^k} v(x)\beta^{-r(x)}\left(\left|3P_j^k\right|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{3Q_x}\sigma dy\right)^{p(x)}dx\right)\right.$$

$$\leq C\sum_{k,j}\left(\int_{E_i^k} v(x)\beta^{-r(x)}M_\alpha(\sigma\chi_{3P_j^k})^{p(x)}dx\right.$$

$$\leq \sum_i\sum_{P_j^k\subset P_i}\left(\int_{E_i^k} v(x)\beta^{-r(x)}M_\alpha(\sigma\chi_{3P_j^k})^{p(x)}dx\right.$$

$$\leq \sum_i\int_{3P_i} v(x)\beta^{-r(x)}M_\alpha(\sigma\chi_{3P_j^k})^{p(x)}dx$$

ve (4.12)'den

$$\leq \sum_i C\int_{3P_i}\beta^{r(x)}\sigma dx = C\sum_i\int_{3P_i}\eta dx$$

$$\leq \sum_i\frac{C}{\alpha}\int_{P_i} h\eta dx \leq \frac{C}{\alpha}\int_{E_n} h\eta dx$$

$\bar{T}$ operatörü sınırlı olduğu yani (4.16) eşitsizliğindeki tahmin doğrudur.(4.12) eşitsizliğini kullanarak $I_2{}'$nin tahmini elde edilir.

$$I_2 = C\sum_{k,j}\left(\int_{E_i^k} v(x)\left(\left|3P_j^k\right|^{\frac{\alpha}{n}-1}\int_{3Q_x}\sigma dy\right)^{p(x)}dx\right)\left(\frac{1}{\mu\left(3P_j^k\right)}\int_{P_j^k}\left(\frac{f_2}{\sigma}\right)\sigma\, dx\right)^{p(\infty)}$$

$$\int_X\left(T\left(\frac{f_2}{\sigma}\right)\right)^{p(\infty)}d\zeta \leq C\int_{E_n} f_2^{p(\infty)}\sigma^{1-p(\infty)}dx = C\int_{E_n}\left(\frac{f_2}{\sigma}\right)^{p(\infty)}\sigma dx$$

dahası,

$$I_2 \leq C\int_{E_n}\left(\frac{f_2}{\sigma}\right)^{p(\infty)}\sigma dx$$

$$= C\int_{p(x)\leq p(\infty)}\left(\frac{f_2}{\sigma}\right)^{p(\infty)}\sigma dx + C\int_{p(x)>p(\infty)}\left(\frac{f_2}{\sigma}\right)^{p(\infty)}\sigma dx$$

$= j_1 + j_2$

$p(x) < p(\infty)$ ve $f_2 \leq \sigma$ oduğundan ilk integral (4.14)'den

$$J_1 \leq C \int_{E_n} \left(\frac{f_2}{\sigma}\right)^{p(\infty)} \sigma \leq C$$

$$j_2 = C \int_{\{x:p(x)>p(\infty), \frac{f_2}{\sigma} > \beta^{-\frac{r(x)}{p(\infty)}}\}} \left(\frac{f_2}{\sigma}\right)^{p(x)} \left(\frac{f_2}{\sigma}\right)^{p(\infty)-p(x)} \sigma dx$$

$$+C \int_{\{x:p(x)>p(\infty), \frac{f_2}{\sigma} > \beta^{-\frac{r(x)}{p(\infty)}}\}} \left(\frac{f_2}{\sigma}\right)^{p(\infty)} \sigma dx$$

$$\leq C_1 \int_{E_n} \beta^{-r(x)} \sigma dx + C\beta^{p^+} \int_{E_n} \left(\frac{f_2}{\sigma}\right)^{p(x)} \sigma dx \leq C_2$$

(4.2) ve (4.14) kullanılarak teorem tamamlanır.[15]

Lemma 4.32 f fonksiyonu Q'de negatif olmayan yerel olarak integrallenebilir bir fonksiyon ve $t > 0$ için

$$|Q|^{\frac{\alpha}{n}-1} \int_Q f dy > t$$

eşitsizliği söylenir. O zaman bir diyadik küp P vardır, öyle ki $Q \subset 3P$ ve pozitif sabit $C_{n,\alpha}$ sadece n, α'ya bağlıdır ve

$$|P|^{\frac{\alpha}{n}-1} \int_P f dy > C_{n,\alpha} t$$

olduğu söylenir. [15]

o zaman eşitsizlik $f \geq 0$ için geçerlidir.

$$\left\| v^{1/p(.)} M_\alpha f \right\|_{L^{p(.)}} \leq C \|f\|_{L^{p(.)}}$$

olduğu söylenir.

L_p ve $L_{p(x)}$ uzayları tam, banach, refleksivdir. Fakat L_p uzayı yoğunken $L_{p(x)}$ uzayında düzgün fonksiyonlar yoğun değildir. Teorem (4.30)' daki sınırlılıkta bu farklılık etkilidir.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında Hardy-Littlewood maksimal operatörünün klasik lebesgue uzayında sınırlılığından ve değişken üslü lebesgue uzayında sınırlılığından bahsedilmiş ve tanım ve teoremler verilmiştir. L_p ve $L_{p(x)}$ uzaylarının benzer ve farklı özelliklerine değinilerek, kesirli maksimal operatörünün ağırlıklı değişken üslü lebesgue uzayında sınırlılığına ve iki ağırlıklı eşitsizliğinin sağlanması için gerekli teoreme değinilmiştir. Diening(2004), D-Cruz-Uribe, Fiorenza ve Neugebauer(2003) , Nekvinda(2004), Pick ve Ruzicka(2001) ,B.Muckenhoupt(1972), S.G.Samko, C.Fefferman ve Zeren Y., Mamedov F. (2016) gibi birçok araştırmacının çalışmalarından yaralanılmış ve örnekler verilmiştir. Bu konuyla ilgili çalışma yapılacak benzer çalışmalarda gerekli ve yeterli koşullar araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Musayev, B. ve Alp, M., (2000).Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları,Kütahya.

[2] Hao,C.,(2012). Lecture Notes on Introduction to Harmonic Analysis , 47-62.

[3] Stein, E.M., (1970). Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press, Princeton, N.J., 3-24.

[4] David V.,Cruz-Uribe ve Alberto Fiorenza, Applied and Numerical Harmonic Analysis Variable Lebesgue Spaces Foundations and Harmonic Analysis , 79-127

[5] Bogachev, V.I.,(2006).Measure Theory.Springer Heidelberg

[6] Ziemer, W.P. ,(1989). Weakly differentiable functions. Springer-Verlag, 53p., New York.

[7] Kinnunen J. ve Lindqvist P., (1998).'' the derivative of the maximal function'' J. Reine Angew. Math. 503, 161-167.

[8] Kinnunen J. (1997).''The Hardy-Littlewood Maxımal Function of a Sobolev Functıon'' Israel J.Math. 100 ,117-124.

[9] O.Kovacık ve J.Rakosnik, (1991). On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{L^{p(x)}}$, Czechoslovak Math.J.41 (116),592-618

[10] Diening, L., (2004).''Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(.)}$.''Math. Inequal. App. 7,2.

[11] Nekvinda, A.,(2004).''Hardy-Littlewood maximal operator on $L^{p(.)}(R^n)$'',Math. Inq. and App. Vol. 7, Number 2, 255-265.

[12] Pick,L. ve Ruzicka, M.,(2001).''An example of a Space $L^{p(x)}$ on which the Hardy-Littlewood maximal operat or is not bounded''. Expo. Math.19:369-371.

[13] Muckenhoupt, B., (1972).''Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function'', Trans.Amer.Soc., 165, 207-226.

[14] Mamedov F.I. ve Zeren Y., (2011), ‘’Two-weight inequalities for the maximal operatör in a Lebesgue space with variable exponent’’, J . Math. Sci. 173,6 701-716.

[15] Mamedov Farman I.ve Zeren Yusuf, (2016).’’on boundedness of fractional maximal operator in weighted variable exponent Lebesgue spaces’’. Math İnequal Apply. 19

[16] Lerner A.K., (2005).’’some remarks on the Hardy-Littlewood maximal function on variable L^p spaces’’,Math. Z. 241, 3, 509-521.

[17] Diening L. ve Hasto P.,(2010).’’Muckenhoupt weights in variable exponent spaces’’, Preprint.

[18] Cruz-Urıbe D., Fıorenza A. ve Neugebauer C.J., (2012).’’Weighted norm inequalities fort he maximal operatör on variable Lebesgue spaces’’, J. Math. Anal. Appl. 394 744-760.

[19] Cruz-Urıbe D. , Fıorenza A. ve Neugebauer C.J., (2003). ‘’ The maximal function on variable L^p spaces’’, Ann. Acad. Scient. Fenn. Mathematics. 28, 223-238.

[20] Diening L., (2005). Maximal functions on Musielak-Orclicz spaces and generalized Lebesgue spaces. Bulletindes Sciences Mathematiques 129, 8, 657-700.

[21] Kokılashvılı V. ve Samko S., (2008).’’The maximal operatör in weighted variable exponent spaces on metric spaces’’ , Georgian Math. J. 15 p . 683-712.

[22] Kokılashvılı V.M. ve Samko S.G., (2007).’’The maximal operatör in weighted variable exponent spaces on metric spaces’’ , Proc. A . Razmadze Math.Inst., 144,134-137.

[23] Harman A. ve Mamedov F.I., (2010). On boundedness of weighted Hardy operator in $L^{p(.)}$ and regularity condition. J. Ineq.Appl.,14 pages.

[24] Rakotondratsımba Y., (1993). On Muckenhoupt and Sawyer conditions for Maximal operators, Publ. Mat.37 57 -73.

[25] Diening L .,(2002). Theoretical and Numerical Results for Elektrorheological Fluids. Ph. D. Thesis, University of Freiburg, Germany.

[26] Emanuel Carneıro ve Jose Madrıd, (2016). Derivative bounds for fractional Maximal Functions,Transactions of the American Mathematical Society . Article electronically published on june 10.

[27] Kokılashvılı V.M. ve Meskhı A., (2007). Weighted criteria for generalized Fractional Maximal functions and potentials in Lebesgue spaces with variable Exponent, Integral Transforms and Special Functions, 18, 9, 609-628.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Müberra DİKMEN

Doğum Tarihi ve Yeri : Ceyhan 22.04.1986

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : muberradikmen@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2013
Lise	Fen Bilimleri	Ahmet Kurttepeli Lisesi	2003

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2014-2015	Mehmet Akif Ersoy Ortaokulu	Matematik Öğretmeni

YAYINLARI

Bildiri

1. Dikmen, M., (2017).“ The boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator’’, Operators on Morrey-Type Spaces and Applications (OMTSA-2017), 10-13 Temmuz 2017 ,Kırşehir.