T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KLASİK 1 YUTAN ASAL VE ASALIMSI ALT MODÜLLER

Zeynep YILMAZ UÇAR

DOKTORA TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY

Şubat, 2025

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KLASİK 1 YUTAN ASAL VE ASALIMSI ALT MODÜLLER

Zeynep YILMAZ UÇAR tarafından hazırlanan tez çalışması 28.02.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Ahmet Göksel AĞARGÜN, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Ünsal TEKİR, Üye
Marmara Üniversitesi _____

Doç. Dr. Üyesi Serkan ONAR, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Suat KOÇ, Üye
İstanbul Medeniyet Üniversitesi _____

Danışmanım Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Klasik 1 Yutan Asal ve Asalımsı Alt Modüller başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Zeynep YILMAZ UÇAR

İmza

Aileme

TEŞEKKÜR

Öncelikle, lisansüstü eğitim sürecimin her aşamasında yol gösteren, akademik gelişimime katkı sağlayan, çalışmalarımda ve bu tezin hazırlanmasında desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, bilgi ve tecrübesiyle her daim ilham kaynağı olan, kendisiyle çalışmaktan onur duyduğum kıymetli danışmanım, saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Doktora tez sürecimde anlayışlarını esirgemeyen, kıymetli önerileriyle tezimin gelişmesine katkıda bulunan, bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşarak ufkumu genişleten ve her toplantımızda akademik motivasyonumu artıran tez izleme komite üyelerim Sayın Prof. Dr. Ahmet Göksel AĞARGÜN ve Sayın Prof. Dr. Ünsal TEKİR'e içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, kıymetli vaktini ayırarak birlikte çalışma fırsatı bulduğum, bilgisini ve tecrübesini paylaşarak bana her daim destek olan çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Serkan ONAR'a çok teşekkür ederim. Bu çalışmanın hazırlanma sürecinde kıymetli katkılarıyla bana destek olan, akademik ilerleyişime rehberlik eden ve karşılaştığım sorulara yaratıcı bakış açılarıyla yön veren çok değerli hocalarım Sayın Doç. Dr. Suat KOÇ ve Sayın Doç. Dr. Ece YETKİN ÇELİKEL'e sonsuz minnettarlığımı ifade etmek isterim.

Son olarak, bu uzun ve yorucu süreçte manevi destekleriyle daima yanımda olan, teşvikleriyle bana güç veren kıymetli aileme ve her zaman yanımda hissettiğim dostlarıma gönülden teşekkür ederim.

Zeynep YILMAZ UÇAR

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ **vi**

ÖZET **viii**

ABSTRACT **x**

1 GİRİŞ **1**
1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 2
1.3 Hipotez 3

2 TEMEL KAVRAMLAR **4**
2.1 Klasik Cebirde Halka ve Modül Yapısı 4
2.1.1 Asal İdeallerin Bazı Genelleştirmeleri 5

3 KLASiK 1-YUTAN ASAL ALT MODÜLLER **14**
3.1 Birleşimli Çoğaltım Modüllerinde Klasik Asal Alt Modüller 27

4 ZAYIF KLASİK 1-YUTAN ASAL ALT MODÜLLER **31**

5 KLASİK 1-YUTAN ASALIMSI ALT MODÜLLER **48**

6 SONUÇ **62**

KAYNAKÇA **64**

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR **67**

SİMGE LİSTESİ

$\subseteq$	Alt kümesidir
$\nsubseteq$	Alt kümesi değildir
$\mathfrak{R}$	Birimli değişmeli halka
$\cup$	Birleşim
$\prod$	Direkt çarpım
$\oplus$	Direkt toplam
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$\exists$	En az bir tane vardır
$\text{Çek} f$	f fonksiyonunun çekirdeği
$\Rightarrow$	Gerek koşul
$\Leftrightarrow$	Gerek ve yeter koşul
$\subsetneq$	Has alt kümesi
$\forall$	Her
$\cong$	İzomorftur
$\sqrt{J}$	J idealinin radikali
$S^{-1}M$	Kesir modülü
$\cap$	Kesişim
$Z_{\mathfrak{R}}(M)$	M modülünün sıfır bölenlerinin kümesi
$V(J)$	$\mathfrak{R}$ halkasının J idealini kapsayan tüm asal ideallerinin kümesi
$Spec(\mathfrak{R})$	$\mathfrak{R}$ halkasının tüm asal ideallerinin kümesi
$Jac(\mathfrak{R})$	$\mathfrak{R}$ halkasının tüm maksimal ideallerinin kesişimi

$Ann(M)$	M modülülünün sıfırlayıcısı
$M-rad(א)$	א nin M-radikali
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\Leftarrow$	Yeter şart

ÖZET

Klasik 1 Yutan Asal ve Asalımsı Alt Modüller

Zeynep YILMAZ UÇAR

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY

Bu çalışmada, klasik asal alt modüller ile klasik 2-yutan alt modüller arasında yeni bir sınıf olarak klasik 1-yutan asal alt modüller tanımlanmış ve bu modüllerin temel özellikleri detaylı bir şekilde analiz edilmiştir. Değişmeli halkalardaki 1-yutan asal idealler ile klasik 1-yutan asal alt modüller arasındaki ilişki incelenmiş, elde edilen sonuçlar halka ve modül karakterizasyonunda kullanılmıştır. Klasik 1-yutan asal alt modül olup klasik asal alt modül olmayan modüllerin özellikleri irdelenmiştir. Bunun yanı sıra Krull Ayrışım Lemması'nın klasik 1-yutan asal alt modüller için geçerli olduğu gösterilmiştir. Birleşimli çoğaltım modüllerinin klasik asal, klasik 1-yutan asal ve klasik 2-yutan alt modülleri araştırılmıştır. Klasik 1-yutan asal alt modülleri genişleten bir kavram olarak zayıf klasik 1-yutan asal alt modüller tanımlanmış ve zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olduğu halde klasik 1-yutan asal olmayan alt modüllerin yapısal özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Her has alt modülü zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olan modüllerin yapısal özellikleri kapsamlı bir şekilde analiz edilmiştir. Daha sonra da klasik asalımsı alt modüllerin bir genellemesi olarak klasik 1-yutan asalımsı alt modüller tanımlanmış ve bu yapının 1-yutan asalımsı idealler ile olan ilişkileri araştırılmıştır. Birleşimli çoğaltım modüllerinin klasik asalımsı ve klasik 1-yutan asalımsı alt modülleri incelenmiştir. Tüm bu yeni yapıların homomorfizma, bölüm modülü, lokalizasyon, tensör çarpım, kartezyen çarpım altındaki davranışları analiz edilmiştir. Bu çalışma, klasik modül teorisindeki birçok yapı arasındaki ilişkilerin derinlemesine anlaşılmasına katkıda bulunmayı amaçlamakta ve yeni kavramların geliştirilmesine katkıda bulunmayı hedeflemektedir.

Anahtar Kelimeler: Klasik 1-yutan asal alt modül, zayıf klasik 1-yutan asal alt modül, klasik 1-yutan asalımsı alt modül, birleşimli çoğaltım modülleri

ABSTRACT

Classical One Absorbing Prime and Primary Submodules

Zeynep YILMAZ UÇAR

Department of Mathematics
Doctor of Philosophy Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY

In this study, a new class of submodules, called classical 1-absorbing prime submodules, is introduced as an intermediate structure between classical prime submodules and classical 2-absorbing submodules. The fundamental properties of these submodules have been analyzed in detail. The relationship between classical 1-absorbing prime submodules and 1-absorbing prime ideals in commutative rings has been examined and the findings have been utilized in the characterization of rings and modules. The characteristics of modules that are classical 1-absorbing prime submodules but not classical prime submodules have been investigated. Additionally, it has been demonstrated that Krull's Seperation Lemma is valid for classical 1-absorbing prime submodules. The behaviour of classical prime, classical 1-absorbing prime and classical 2-absorbing submodules in the context of amalgamated duplication has been investigated. Furthermore, a broader concept, namely weakly classical 1-absorbing prime submodules, has been defined as a generalization of classical 1-absorbing prime submodules. The structural properties of weakly classsical 1-absorbing prime submodules, which are not classical 1-absorbing prime, have been comprehensively studied. Additionally, the structural characteristics of modules in which every proper submodule is a weakly classical 1-absorbing prime submodule have been examined in depth. Subsequently, classical 1-absorbing primary submodules have been conceptualized as a generalization of classical primary submodules, and their relationship with 1-absorbing primary ideals has been explored. Moreover, the behaviour of all these module structures under homomorphisms, factor modules, localization, tensor products and cartesian products has been systematically studied. This study aims to contribute to a deeper understanding of the connections among various structures in classical module theory, paving the way for

the development of new concepts.

Keywords: Classical 1-absorbing prime submodules, weakly classical 1-absorbing prime submodules, classical 1-absorbing primary submodules, classical prime in amalgamated duplication of a module

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Asal alt modüller ve bunların çeşitli genelleştirmeleri, modül teorisinde önemli rol oynamaktadır. Klasik asal alt modül kavramı ilk olarak 2004 yılında M. Behboodi ve H. Koohy tarafından "Weakly Prime Modules" başlıklı makale [1] ile literatüre girmiştir . Bu yapı sayesinde, alt modül yapısı elemanlar üzerinden analiz edilerek kullanım kolaylığı sağlamıştır. Bu durumda, her asal alt modülün aynı zamanda zayıf asal olduğu, ancak tersinin genel olarak doğru olmayacağı söylenebilir. 2006 yılında ise A. Azizi "Weakly prime submodules and prime submodules" isimli makalesiyle [2] düz (flat) ve sadık düz (faithfully flat) $\mathfrak{R}-$modül $\mathscr{F}$ ile $\mathfrak{R}$ üzerinde bir M modülünün tensör çarpımı olan $\mathscr{F} \otimes M$ nin zayıf asal alt modüllerini incelemiştir. Ardından 2008 yılında lokalizasyonla ilgili çalışmalar yaptığı "On prime and weakly prime submodules" isimli ikinci makalesini [3] yayımlamıştır. Yapılan bu ilk çalışmalardan sonra birçok yazar aynı kavramı "klasik asal alt modül" adı altında incelemiştir. 2009 yılına gelindiğinde M. Baziar ve M. Behboodi [4] tarafından klasik asalımsı alt modüller literatüre girdi ve 2010 yılında ise M. Behboodi ve S. H. Shojae [5] klasik asal alt modüllerin Krull boyutu ile ilgili çalışmalarını sundular. 2011 yılında M. Behboodi, R. Jahani ve M. Naderi [6] klasik quasi asalımsı alt modülleri tanıttılar. 2015 yılında, H. Mostafanasab, Ü. Tekir ve H. Oral [7] tarafından klasik asal alt modüller ve 2-yutan alt modüllerin daha geniş bir bağlamda ele alınması amacıyla klasik 2-yutan alt modüller literatüre kazandırılmıştır. Aynı yıl, klasik asal alt modüllerin farklı yaklaşımlarla genelleştirilmiş versiyonları üzerine yoğunlaşılmış ve böylelikle zayıf klasik asal alt modüller, zayıf klasik asalımsı alt modüller ve $\Phi-$klasik asal alt modüller detaylı olarak incelenmiştir; bkz [8–10]. Bu çalışmalar, klasik asal alt modüllerin özelliklerini ve diğer modül yapılarıyla ilişkilerini anlamaya yönelik önemli katkılar sunmuş ve literatürde bu alana ilişkin araştırmaların temelini oluşturmuştur.

Asal ideallerin halka teorisindeki önemi göz önünde bulundurulduğunda, birçok araştırmacı bu yapının çeşitli genelleştirmelerini literatüre kazandırmıştır. 2003 yılında D. D. Anderson ve E. Smith [11] zayıf asal idealleri incelemişlerdir ve bu kavramı

sıfır bölenleri içeren değişmeli halkalarda çarpanlara ayırmayı incelemek amacıyla kullanmışlardır. Ardından 2007 yılında S. E. Atani ve F. Farzalipour [12] zayıf asal idealleri zayıf asal alt modüllere genişleten çalışmalar yapmışlardır. Aynı yıl asal ideallerin genelleştirilmesi bağlamında önemli bir yenilik getiren 2-yutan idealler A. Badawi [13] tarafından tanıtılmış ve bu kavram, Dedekind bölgeleri karakterize etmek için kullanılmıştır. 2020 yılında ise A. Badawi ve E. Yetkin Çelikel [14] tarafından 1-yutan asalımsı idealler tanıtılmış ve bir halkada asalımsı ideal olmayan bir 1-yutan asalımsı ideal varlığı, halkanın lokal olduğunu kanıtlamak için kullanılmıştır. Ayrıca Noetherian halkalarda, sıfırdan farklı her has ideal 1-yutan asalımsı ideal olduğu ve bu ideallerin bir P asal ideal ve $n \geq 1$ için P^n biçiminde olduğu durumlarda, bu halkaların Dedekind bölgesi olduğunu ifade etmişlerdir. Ardından 2021 yılında E. Yetkin Çelikel [15] tarafından 1-yutan asalımsı idealler, 1-yutan asalımsı alt modüllere genişletilmiştir. Aynı yıl A. Yassine, N. J. Nikmehr ve R. Nikandish [16] tarafından asal idealler ile 2-yutan idealler arasında yeni bir sınıf olarak 1-yutan asal idealler tanıtılmıştır. Bu çalışma ile eğer bir halkada asal olmayan 1-yutan asal ideal mevcut ise, halkanın lokal halka olduğunu kanıtlandı. 2023 yılına gelindiğinde S. Koç, Ü. Tekir ve E. Yıldız [17] tarafından 1-yutan asal ideallerin bir genelleştirilmiş formu olarak zayıf 1-yutan asal idealler literatüre kazandırılmıştır. Ayrıca, sürekli reel değerli fonksiyonlar halkası olan $C(X)$ de zayıf 1-yutan asal idealler incelenmiş ve zayıf asal $z-$idealler ile zayıf 1-yutan $z-$asal ideallerin çakıştığı gösterilmiştir. Aynı yıl içinde, E. Arslankarayiğit Uğurlu [18] asal alt modüller ile 2-yutan alt modüller arasında yer alan 1-yutan asal alt modülleri incelemiştir. Bu yeni kavram, lokal halkarın karakterizasyonunda kullanılmıştır ve 1-yutan asal alt modüller için Asaldan Kaçınma teoremine dayanan sonuç elde edilmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Çalışmamızın özgün katkıları üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde sunulmaktadır.

Tezin üçüncü bölümünde klasik asal alt modüller ile klasik 2-yutan alt modüller arasında literatürdeki boşluğu doldurmak amacıyla klasik 1-yutan asal alt modüller tanıtılmıştır. Öncelikle, klasik 1-yutan asal alt modüller ile diğer modül yapıları arasındaki ilişki araştırılmıştır. Bu kavramın kartezyen çarpım, bölüm modüllerinde, modüllerin lokalizasyonu ve homomorfizmalar altındaki davranışları incelenmiştir. Klasik 1-yutan asal alt modüller yardımıyla lokal halkarın karakterizasyonu sunulmuştur. $\mathfrak{R}$ üzerinde bir M modülünün her has alt modülünün klasik 1-yutan asal alt modül olduğu halkalar analiz edilmiştir. Noetherian modüllerdeki minimal klasik 1-yutan asal alt modül sayısı incelenmiş ve Krull Ayrışım Lemması'nın klasik 1-yutan asal alt modüller için geçerli olduğu gösterilmiştir. Son olarak, bir $\mathfrak{R}-$modül M nin bir J ideali boyunca birleşimli çoğaltımı olan $M \bowtie J$ nin klasik asal, klasik 1-yutan ve klasik 2-yutan alt modülleri

belirlenmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde klasik 1-yutan asal alt modüllerin bir genellemesi olarak zayıf klasik 1-yutan asal alt modüller tanımlanmış ve ayrıntılı olarak incelenmiştir. Zayıf klasik 1-yutan asal alt modüllerin, zayıf 1-yutan asal idealler ve diğer modül yapılarıyla arasındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca, bu yapının homomorfizm altında, lokalizasyonda, çarpım modüllerinde korunum özellikleri incelenmiştir. Düz (sadık düz) bir $\mathfrak{R}-$modül $\mathscr{F}$ ile $\mathfrak{R}$ üzerinde bir M modülünün tensör çarpımı olan $\mathscr{F} \otimes M$ nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülleri araştırılmıştır. Bir modülün her has alt modülü zayıf klasik 1-yutan asal alt modül ise $Jac(\mathfrak{R})^3 M = 0$ sağlandığı gösterilmiştir.

Tezin beşinci bölümünde ise klasik asalımsı alt modüller ile 1-yutan asalımsı ideallerin daha genel bir formu olarak klasik 1-yutan asalımsı alt modüller tanıtılarak, detaylı olarak incelenmiş ve örneklerle açıklanmıştır. Klasik 1-yutan asalımsı alt modüllerin homomorfizma altında, bölüm modüllerinde, tensör çarpım ve lokalizasyon süreçlerinde gösterdiği davranışlar analiz edilmiştir. Ayrıca, bir modülün klasik asalımsı ve klasik 1-yutan asalımsı alt modüllerinin örtüşmesi durumu tanımlanmış ve bu yapının özellikleri araştırılmıştır. Son olarak, birleşimli çoğaltım modül yapısı olan $M \bowtie J$ nin klasik asalımsı ve klasik 1-yutan asalımsı alt modülleri incelenmiştir.

1.3 Hipotez

Bu çalışmada, değişmeli halkalardaki 1-yutan asal idealler, zayıf 1-yutan asal idealler ve 1-yutan asalımsı ideallerin modüllere genelleştirilmesi ele alınmıştır. Bu doğrultuda, klasik 1-yutan, zayıf klasik 1-yutan ve klasik 1-yutan asalımsı alt modüller tanımlanarak, temel teoremler çerçevesinde bu yapıların korunum özellikleri incelenmiştir. Bu yapıların diğer modül yapılarıyla ilişkisine dair örnekler sunulmuştur. Bu çalışma, modül teorisi ve cebirsel yapıların daha kapsamlı bir şekilde incelenmesine katkı sağlamayı amaçlamaktadır.

2
TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Klasik Cebirde Halka ve Modül Yapısı

Bu bölümde tezde kullanılan ön bilgilere yer verilmekte ve kaynak belirtilmedikçe verilen temel bilgiler R. Y. Sharp [19] tarafından yazılan Steps in Commutative Algebra adlı kitabından alınmıştır. Tez boyunca $\mathfrak{R}$, değişmeli ve birimli halkayı belirtmektedir. $\mathfrak{R}$ nin kendinden farklı bir J idealine has ideal denmektedir. $\sqrt{J} = \left\{r \in \mathfrak{R} : r^k \in J,\ \exists k \in \mathbb{N}\right\}$ kümesine J idealinin radikali denir ve $\mathfrak{R}$ halkasının J idealini kapsayan tüm asal ideallerinin kesişimini ifade etmektedir. $\mathfrak{R}$ nin herhangi bir Y kümesi için $(J : Y) = \{r \in \mathfrak{R} : ry \in J, \forall y \in Y\}$ kümesine $\mathfrak{R}$ nin bölüm ideali denir. Özel olarak, $J = 0$ alınırsa $(0 : Y)$ idealine Y nin sıfırlayıcısı denir. $Y = \{y\}$ tek elemanlı ise $(0 : \{y\}) = (0 : y) = Ann\ y$ ile gösterilir.

Tanım 2.1. $\mathfrak{R}$, birimli ve değişmeli halka ve S de $\mathfrak{R}$ nin alt kümesi olsun. $1 \in S$ ve her $s_1, s_2 \in S$ için $s_1 s_2 \in S$ oluyorsa, S çarpımsal kapalı alt küme olarak adlandırılır.

Tanım 2.2. J, $\mathfrak{R}$ nin has ideali olsun. Eğer $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$ ve $\alpha\beta \in J$ olduğunda $\alpha \in J$ ya da $\beta \in J$ koşulu sağlanıyorsa, bu durumda J idealine asal ideal adı verilir. $\mathfrak{R}$ halkasının tüm asal ideallerinden oluşan küme ise, $\mathfrak{R}$ nin spekturumu olarak adlandırılır ve bu küme $Spec(\mathfrak{R})$ ile ifade edilir. Bir idealin varyetesi, $\mathfrak{R}$ halkasının J idealini kapsayan tüm asal ideallerinden oluşan küme olarak tanımlanır ve $V(J)$ ile gösterilir. Bu durumda, $V(J) = \{K \in Spec(R) : J \subseteq K\}$ şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 2.3. Bir $J = 0$ ideali için $\sqrt{0} = \{\alpha \in \mathfrak{R} :$ bir $t \in \mathbb{N}$ için $\alpha^t = 0\}$ ideali, halkanın tüm nilpotent elemanlarından oluşan bir kümedir. Bu ideal, nil radikal veya asal radikal olarak adlandırılır [20].

Tanım 2.4. Bir halkada nil radikal sıfır olduğunda, bu halkaya indirgenmiş (reduced) halka denir [20].

Tanım 2.5. J, $\mathfrak{R}$ de bulunan bir has ideal olsun. Her $\beta, \gamma \in \mathfrak{R}$ için $\beta\gamma \in J$ iken $\beta \in J$ ya da $t > 0$ tam sayısı için $\gamma^t \in J$ koşulu sağlanıyorsa J ye asalımsı ideal denir.

Her asal ideal bir asalımsı idealdir. Fakat budurumun tersi genel olarak doğru değildir. Örneğin $\mathbb{Z}$ nin $9\mathbb{Z}$ ideali asalımsı idealdir fakat asal ideal değildir.

Teorem 2.1. *$\Re$ bir halka ve J bir ideal olsun. $J_1, J_2, .., J_k$ de $\Re$ nin en az $k-2$ adedi asal ideali olup $J \subseteq J_1 \cup J_2 \cup ... \cup J_k$ koşulu gerçekleşiyorsa $1 \leq t \leq k$ için $J \subseteq J_t$ dir.*

Tanım 2.6. Eğer M, $\Re$ halkasının bir has ideali olup M yi içeren M den farklı bir has ideal mevcut değilse, M maksimal ideal olarak tanımlanır. $\Re$ deki tüm maksimal ideallerin kesişimi, halkaya ait Jacobson radikali olarak bilinir ve $Jac(\Re)$ ile sembolize edilir.

Önerme 2.1. *J, $\Re$ halkasının bir ideali ve $\sqrt{J} = M$ de $\Re$ halkasının bir maksimal ideali ise J bir asalımsı idealdir.*

İspat. $J \subseteq \sqrt{J} = M \subset \Re$ olduğundan $J \neq \Re$ dir. Bu durumda $x, y \in R$ için $xy \in J$ ve $y \notin \sqrt{J}$ olduğunu kabul edelim. $\sqrt{J} = M$ maksimal ideal ve $y \notin M$ için $M + \Re y = \Re$ dir. Radikaller için $\sqrt{J} + \sqrt{\Re y} = \Re$ ve $J + \Re y = \Re$ bilgisi kullanılırsa $z + \alpha y = 1_{\Re}$ olacak şekilde $z \in J$ ve $\alpha \in \Re$ elemanları mevcuttur. Dolayısıyla, $x = x1_{\Re} = x(z + \alpha y) = xz + \alpha(xy) \in J$ elde edilir. Böylece, J asalımsı idealdir. ■

Önerme 2.2. *Trivial olmayan her $\Re$ halkasının en az bir maksimal ideali bulunur.*

Önerme 2.3. *$\Re$ bir halka, M ise $\Re$ ye ait bir ideal olarak tanımlansın. M nin maksimal ideal olması adına gerek ve yeter şart $y \notin M$ için, $1 - \alpha y \in M$ koşulunu sağlayan bir $\alpha \in \Re$ nin var olmasıdır.*

Önerme 2.4. *Bir $x \in \Re$, Jacobson radikali içinde bulunması için gerek ve yeter şart $\forall z \in \Re$ için $1 - xz$ nin $\Re$ de tersinir olmasıyla ifade edilir.*

Tanım 2.7. Eğer $\Re$ halkasının yalnızca tek bir maksimal ideali varsa, bu halka lokal (yerel) halka olarak adlandırılır. Lokal bir halkada Jacobson radikali, M maksimal idealine eşittir.

Tanım 2.8. $\Re$ halkasının farklı asal ideallerinin meydana getirdiği zincirlerin en büyük uzunluğuna $\Re$ halkasının Krull boyutu adı verilir. $\Re$ halkasının Krull boyutu $dim(\Re)$ ile ifade edilir. Eğer $\Re$ bir cisim ise, (0) ideali haricinde asal ideal bulunmadığı için boyutu sıfırdır. Temel ideal bölgelerinde ve Dedekind bölgelerinde asal ve maksimal idealler örtüşür. Bu nedenle, bu tür halkaların Krull boyutu 1 dir. Krull boyutu 0 olan Temel ideal bölgeleri ise cisimdir.

2.1.1 Asal İdeallerin Bazı Genelleştirmeleri

Tanım 2.9. (Anderson ve Smith, 2003) J, $\Re$ içerisinde bir has ideal olarak tanımlansın. Her $\beta, \gamma \in \Re$ için $0 \neq \beta\gamma \in J$ olduğunda $\beta \in J$ ya da $\gamma \in J$ sağlanıyorsa J ye $\Re$ nin zayıf asal ideali adı verilir [11].

Her asal ideal bir zayıf asal idealdir; fakat bu durumun tersi geçerli değildir.

Örnek 2.1. $\mathfrak{R} = \mathbb{Z}_9$ *halkasında* (0) *ideali zayıf asal idealdir. Fakat* $3.3 \in (0)$ *iken* $3 \notin (0)$ *olduğundan bir asal ideal değildir.*

Tanım 2.10. (Badawi, 2007) $\mathfrak{R}$ nin bir J has idealini alalım. Her $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{R}$ için $\alpha\beta\gamma \in J$ iken $\alpha\beta \in J$ ya da $\alpha\gamma \in J$ ya da $\beta\gamma \in J$ oluyorsa J idealine 2-yutan ideal denir [13].

Her asal ideal aynı zamanda 2-yutan idealdir. Ancak bu durumun tersi genel olarak doğru değildir.

Örnek 2.2. $10\mathbb{Z}$*, 2-yutan idealdir. Fakat,* $2.5 \in 10\mathbb{Z}$ *iken* $2 \notin 10\mathbb{Z}$ *ve* $5 \notin 10\mathbb{Z}$ *olduğundan* $10\mathbb{Z}$*,* $\mathbb{Z}$ *nin asal ideali değildir.*

Tanım 2.11. (Yassine, Nikmehr ve Nikandish, 2021) J, $\mathfrak{R}$ içerisinde bir has ideal olarak belirlensin. Birimsel olmayan tüm $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{R}$ için eğer $\alpha\beta\gamma \in J$ olduğunda $\alpha\beta \in J$ ya da $\gamma \in J$ koşulu sağlanıyorsa J ye 1-yutan asal ideal denir [16].

Bu durumda, aşağıdaki gibi bir zincir elde edilir.

$$\text{asal ideal} \longrightarrow \text{1-yutan asal ideal} \longrightarrow \text{2-yutan ideal}$$

Fakat bu çıkarımın tersi genel olarak doğru değildir.

Örnek 2.3. $m^2 \neq m$ *olan bir yerel* $(\mathfrak{R}, m)$ *halkasında* m^2*, 1-yutan asal idealdir. Fakat asal ideal değildir.*

Örnek 2.4. $\mathbb{k}$ *bir cisim olmak üzere* $\mathbb{k}[\alpha, \beta]$ *halkasını ele alalım.* $P = (\alpha\beta)$ *2-yutan idealdir, fakat 1-yutan asal ideal değildir.*

Teorem 2.2. ***(Yassine, Nikmehr ve Nikandish, 2021)*** *J, $\mathfrak{R}$ nin asal olmayan bir 1-yutan asal ideali ise bu durumda $\mathfrak{R}$ bir lokal halkadır [16].*

İspat. Kabul edelim ki J, $\mathfrak{R}$ nin asal olmayan 1-yutan asal idealini belirtsin. O halde $\mathfrak{R}$ nin birimsel olmayan α, β elemanları için $\alpha\beta \in J$ ve $\alpha, \beta \notin J$ sağlanır. Şimdi, x birimsel olmayan bir eleman ve y, $\mathfrak{R}$ nin birimsel elemanı olarak ele alalım. Buradan, $x + y$ nin birimsel eleman olduğunu göstereceğiz ve böylece ispat [14, Lemma 1] kullanılarak tamamlanır. Varsayalım ki $x + y$, $\mathfrak{R}$ de birimsel olmayan elemanı göstersin. J, 1-yutan asal ideal ve $x\alpha\beta \in J$ olduğundan $x\alpha \in J$ sonucu ortaya çıkar. Ancak, $(x + y)\alpha\beta \in J$ olduğundan $y \in J$ sonucuna varılır ki bu bir çelişkidir. Bu nedenle $x + y$ birimsel elemandır ve ispat tamamlanır. ■

Yardımcı Teorem 2.1. ***(Khalfi, Issoual, Mahdou ve Reinhart, 2021)*** *$\Re$ bir halka, J ise $\Re$ nin ideali ve $Jac(\Re) = M$ olarak verilsin. Eğer $\Re$ bir lokal halka ise J nin 1-yutan asal ideal olması için gerek ve yeter şart J nin asal ideal olması ya da $M^2 \subseteq J \subseteq M$ koşulunun sağlanmasıdır [21].*

İspat. $\Re$, lokal halka ise M, $\Re$ nin maksimal ideali olur. Kabul edelim ki J, 1-yutan asal ideal olsun fakat asal olmasın. Eğer J, bir has ideal ise $J \subseteq M$ sağlanır. J asal ideal olmadığından $\alpha\beta \in J$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in M \setminus J$ mevcuttur. $M^2 \subseteq J$ kanıtlamak için her $x, y \in M$ için $xy \in J$ olduğunu göstermek yeterlidir. Buradan $xy\alpha\beta \in J$ elde edilir. $xy, \alpha, \beta \in M$ ve $\beta \notin J$ için, J bir 1-yutan asal ideal olduğundan $xy\alpha \in J$ bulunur. Yine $x, y, \alpha \in M$ ve $\alpha \notin J$ olup, J nin 1-yutan asal ideal olduğu bilgisi kullanılırsa $xy \in J$ olduğu sonucuna varılır. Yeterliliğin ispatı için J bir asal ideal ise, J nin 1-yutan asal ideal olduğu açıktır. Şimdi, $M^2 \subseteq J \subseteq M$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, J bir has idealdir. Buradan $\alpha, \beta, \gamma \in M$ için $\alpha\beta\gamma \in J$ alalım. Böylece $\alpha\beta \in M^2 \subseteq J$ olduğu görülür. Dolayısıyla J nin 1-yutan asal ideal olduğu sonucuna varılır. ■

Önerme 2.5. ***(Khalfi, Issoual, Mahdou ve Reinhart, 2021)*** *$\Re$, Jacobson radikali M olan bir halkayı belirtsin. Bu taktirde, $\Re$ nin her has idealinin 1-yutan asal ideal olması için gerek ve yeter şart $\Re$ nin lokal halka olması ve $M^2 = 0$ koşulunun sağlanmasıdır [21].*

Tanım 2.12. (Koç, Tekir ve Yıldız, 2023) Birimsel olmayan $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$ için $0 \neq \alpha\beta\gamma \in J$ iken $\alpha\beta \in J$ ya da $\gamma \in J$ oluyorsa J, $\Re$ nin zayıf 1-yutan asal ideali olarak adlandırılır [17].

Her zayıf asal ideal aynı zamanda zayıf 1-yutan asal idealdir. Ancak bunun tersi genel olarak doğru değildir [17].

Örnek 2.5. ***(Koç, Tekir ve Yıldız, 2023)*** *$\Re = \mathbb{Z}_{12}$ ve $J = (\overline{4})$ olsun. $0 \neq 2.2 \in J = (\overline{4})$ iken $2 \notin J$ olduğundan J, $\Re$ nin zayıf asal ideali değildir. Şimdi J, $\Re$ nin zayıf 1-yutan asal ideal olduğunu göstereceğiz. Bunun için birimsel olmayan $x, y, z \in \Re$ için $\overline{0} \neq \overline{xyz} \in J$ alalım ve $\overline{xy} \notin J$ ve $\overline{z} \notin J$ olduğunu varsayalım. $\overline{xyz} \in J$ olduğundan, $4 \mid xyz$, $4 \nmid xy$ ve $4 \nmid z$ dir. Genelliği bozmadan $2 \nmid x$ olduğunu varsayabiliriz. $4 \mid xyz$ olduğundan, $2 \mid y$ ve $2 \mid z$ dir. $\overline{x}$, $\Re$ nin birimselden farklı elemanı olduğundan ve $2 \nmid x$ bilgisi kullanılırsa $3 \mid x$ sonucuna ulaşılır. Bu durumda $xyz = 0$ olur ki bu bir çelişkidir. Bu nedenle J, $\Re$ nin zayıf 1-yutan asal ideali olur [17].*

Her 1-yutan asal ideal, zayıf 1-yutan asal idealdir. Fakat bu durumun tersi genel olarak doğru değildir [17].

Örnek 2.6. ***(Koç, Tekir ve Yıldız, 2023)*** *p ve q birbirinden farklı asallar olmak üzere $\Re = \mathbb{Z}_{pq}$ ve $J = (\overline{0})$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, J açıkça $\Re$ nin zayıf 1-yutan*

asal idealidir. Fakat $\overline{p}.\overline{p}.\overline{q} = \overline{0}$ *iken* $\overline{p}^2 \neq \overline{0}$ *ve* $\overline{q} \neq \overline{0}$ *olduğu için* J, $\mathfrak{R}$ *nin 1-yutan asal ideali değildir [17].*

Tanım 2.13. (Badawi ve Yetkin Çelikel, 2020) J, $\mathfrak{R}$ içerisinde bir has ideal olarak belirlensin. Birimsel olmayan $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{R}$ için $\alpha\beta\gamma \in J$ olduğundan $\alpha\beta \in J$ ya da $\gamma \in \sqrt{J}$ koşulu sağlanıyorsa J ye $\mathfrak{R}$ nin 1-yutan asalımsı ideali denir [14].

Teorem 2.3. ***(Badawi ve Yetkin Çelikel, 2020)*** $\mathfrak{R}$, *tek maksimal ideali* M *olan bir lokal (yerel) halka olsun. Eğer,* $(x) \neq M$ *koşulunu sağlayan* $0 \neq x \in M$ *asal elemanı için* xM, $\mathfrak{R}$ *nin 1-yutan asalımsı idealidir fakat asalımsı ideali değildir [14].*

Örnek 2.7. ***(Badawi ve Yetkin Çelikel, 2020)*** F *bir cisim olmak üzere* $F[x, y]$ *halkasının* $J = \langle x, y \rangle$ *maksimal ideali ile yerelleştirmesi olan halka* $\widetilde{\mathfrak{R}}$ *olsun.* $K = xM = \langle x^2, xy \rangle$, *Teorem 2.3 göre 1-yutan asalımsı idealdir ve* $\sqrt{K} = x\mathfrak{R}$ *dir. Fakat* $xy \in K$ *iken* $x \notin K$ *ve* $y \notin \sqrt{K}$ *olduğundan asalımsı ideal değildir.*

Teorem 2.4. ***(Badawi ve Yetkin Çelikel, 2020)*** *Eğer* J, *1-yutan asalımsı ideal ise* $\sqrt{J}$ *asal idealdir [14].*

İspat. Kabul edelim ki $x, y \in \mathfrak{R}$ için $xy \in \sqrt{J}$ olsun. Burada x ve y nin birimsel olmadığını varsayabiliriz. Bu durumda $n \geq 2$ çift tamsayıları için $(xy)^n \in J$ olsun. $m \geq 1$ pozitif tam sayı değerleri için $n = 2m$ alalım. Dolayısıyla, $(xy)^n = x^n y^n = x^m x^m y^n \in J$ ve J, bir 1-yutan asalımsı ideal olduğundan $x^m x^m = x^n \in J$ ya da $y^n \in J$ elde edilir. Böylece, $x \in \sqrt{J}$ ya da $y \in \sqrt{J}$ olur ve $\sqrt{J}$, asal ideal olduğu anlaşılır. ■

Yardımcı Teorem 2.2. ***(Badawi ve Yetkin Çelikel, 2020)*** $\mathfrak{R}$ *bir halka olsun.* $\mathfrak{R}$ *nin birimsel olmayan her* w *elemanı ve her birimsel elemanı* u *için,* $w + u$ *birimsel eleman olsun. Bu durumda,* $\mathfrak{R}$ *lokal halkadır [14].*

İspat. Varsayalım ki $\mathfrak{R}$ nin M_1 ve M_2 olarak en az iki maksimal ideali olsun. Bu durumda, $m_1 \in M_1$ ve $m_2 \in M_2$ olmak üzere $m_1 + m_2 = 1$ eşitliği sağlanır. Buradan $1 - m_1 = m_2$, $\mathfrak{R}$ nin birimsel elemanı olduğu anlamına gelir ki bu durum $m_2 \in M_2$ olması nedeniyle çelişkiye yol açar. Dolayısıyla, $\mathfrak{R}$ bir lokal halkadır. ■

Teorem 2.5. ***(Badawi ve Yetkin Çelikel, 2020)*** J, $\mathfrak{R}$ *nin 1-yutan asalımsı ideali olup asalımsı ideali olmasın. Bu durumda* $\mathfrak{R}$, *bir lokal halkadır [14].*

İspat. Kabul edelim ki J, $\mathfrak{R}$ nin asalımsı olmayan 1-yutan asalımsı ideali olsun. Bu durumda, birimsel olmayan $x, y \in \mathfrak{R}$ için $x \notin J$ ve $y \notin \sqrt{J}$ dir. Diğer taraftan birimsel olmayan $w \in \mathfrak{R}$ için $wxy \in J$ olsun. J, $\mathfrak{R}$ nin 1-yutan asalımsı ideali olduğu ve $y \notin \sqrt{J}$ bilgisi kullanılırsa $wx \in J$ elde edilir. Birimsel bir $u \in \mathfrak{R}$ için $w + u$ nun birimselden farklı olduğunu kabul edelim. Bu durumda $(w + u)xy \in J$ iken J, 1-yutan asalımsı ideal

ve $y \notin \sqrt{J}$ olduğundan $(w+u)\,x \in J$ bulunur. Böylece, $x \in J$ sonucuna ulaşılır ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $w+u$, $\mathfrak{R}$ nin birimsel elemanıdır. Sonuç olarak, Yardımcı Teorem 2.2 gereği $\mathfrak{R}$ bir lokal halkadır. ■

Tanım 2.14. Bir değişmeli grup olan $(M,+)$ ve bir halka olan $\mathfrak{R}$ ele alınsın. Eğer M kümesindeki elemanların $\mathfrak{R}$ deki elemanlarla skaler çarpımı, $\mathfrak{R} \times M \longrightarrow M$ biçiminde tanımlanan bir fonksiyon olup aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa M, $\mathfrak{R}$ üzerinde bir $\mathfrak{R}-$modül olarak adlandırılır.

1. Her $\alpha \in \mathfrak{R}$, her $x, y \in M$ için $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$,

2. Her $\alpha, \alpha' \in \mathfrak{R}$, her $x \in M$ için $(\alpha+\alpha')\,x = \alpha x + \alpha' x$,

3. Her $\alpha, \alpha' \in \mathfrak{R}$, her $x \in M$ için $(\alpha\alpha')\,x = \alpha(\alpha' x)$,

4. Her $x \in M$ için, $1_{\mathfrak{R}} x = x$ dir.

Örnek 2.8. *Her $\mathfrak{R}$ halkasında, skaler çarpım halka içindeki çarpım olarak tanımlandığında, $\mathfrak{R}$ kendi üzerinde bir $\mathfrak{R}-$modül yapısı kazanır.*

Tanım 2.15. $\mathfrak{R}-$modül M nin boş olmayan bir $\aleph$ alt kümesi alınsın. Eğer $\aleph$, kendi başına bir $\mathfrak{R}-$modül oluşturuyorsa M nin alt modülü olarak adlandırılır.

Önerme 2.6. *$\mathfrak{R}-$modül M nin boş olmayan bir $\aleph \subseteq M$ alt kümesi alt modüldür ancak ve yalnız her $\alpha, \alpha' \in \mathfrak{R}$ ve her $x, y \in M$ için $\alpha x + \alpha' y \in \aleph$ olmalıdır.*

Tanım 2.16. $\mathfrak{R}-$modül M nin bir $\aleph$ alt modülü, $\mathfrak{R}$ nin bir J ideali ve M nin boştan farklı bir K alt kümesi alınırsa $(\aleph :_{\mathfrak{R}} K) = \{r \in \mathfrak{R} : rK \subseteq \aleph\}$ ile tanımlanan küme $\mathfrak{R}$ nin bir ideali olur. $(\aleph :_M J) = \{\mathfrak{m} \in M : \mathfrak{m}J \subseteq \aleph\}$ alt modülü ise M nin $\aleph$ yi içeren bir alt modülü olur. M modülünün sıfırlayıcısı $\{r \in \mathfrak{R} : rM = 0\}$ kümesi ile tanımlanır ve $Ann(M)$ ya da $(0 :_{\mathfrak{R}} M)$ ile temsil edilir. Eğer $Ann(M) = 0$ koşulu sağlanıyorsa, M ye sadık modül adı verilir.

Tanım 2.17. M bir $\mathfrak{R}-$modül ve $\mathfrak{m} \in M$ olmak üzere, $\{\mathfrak{m}\}$ tarafından üretilen alt modül $(\mathfrak{m}) = \mathfrak{R}\mathfrak{m} = \{\beta\mathfrak{m} : \beta \in \mathfrak{R}\}$ şeklinde tanımlanır ve bu alt modüle $\mathfrak{m}$ ile üretilmiş alt modül adı verilir. Eğer $M = (\mathfrak{m})$ olacak şekilde $\mathfrak{m} \in M$ bulunabiliyorsa, M devirli modül olarak nitelendirilir. Ayrıca, $Y \subseteq M$ sonlu bir alt küme olmak üzere, $M = (Y)$ koşulu sağlanıyorsa, M sonlu üretilmiş alt modül olarak adlandırılır.

Teorem 2.6. ***(Nakayama Lemma)*** *$\mathfrak{R}$ bir halka ve M sonlu üretilmiş $\mathfrak{R}$ üzerinde bir modül belirtsin. J, $\mathfrak{R}$ nin Jacobson radikalinde kapsanan, $J \subseteq Jac(\mathfrak{R})$ bir ideali ve $M = JM$ ise $M = 0$ dır [20].*

Tanım 2.18. M bir $\mathfrak{R}-$modül ve $\mathfrak{m} \in M$ olsun.

1. Eğer $r\mathfrak{m} = 0$ olacak şekilde $0 \neq r \in \mathfrak{R}$ bulunabilirse $\mathfrak{m}$ ye burulmalı (torsion) eleman denir.

2. Eğer M nin tüm elemanları burulmalı ise M ye burulmalı modül adı verilir.

3. Eğer M nin sıfır dışında hiç bir burulmalı elemanı bulunmuyorsa M ye burulmalı olmayan (torsion-free) modül denir.

Tanım 2.19. M, $\mathfrak{R}-$modül olup $\aleph$, M nin bir alt modülü olarak alınsın. $\mathfrak{R} \times M/\aleph \longrightarrow M/\aleph$ skaler çarpımı $(\mathfrak{r}, M + \aleph) \longrightarrow \mathfrak{r}M + \aleph$ olarak tanımlanırsa, $M/\aleph$ bölüm grubu bir $\mathfrak{R}-$modüle dönüşerek $M/\aleph$ bölüm modülü oluşur.

Tanım 2.20. $\mathfrak{R}$ bir halka ve S, $\mathfrak{R}$ nin boştan farklı çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. $M \times S$ üzerinde tanımlanan $\sim$ denklik bağıntısı için $\forall\ \mathfrak{m}, \mathfrak{m}' \in M$ ve $s, s' \in S$ iken

$$(\mathfrak{m}, s) \backsim (\mathfrak{m}', s') \Longleftrightarrow \exists w \in S, w(s'\mathfrak{m} - s\mathfrak{m}') = 0$$

$(\mathfrak{m}, s) \in M \times S$ nin denklik bağıntısına göre gösterdiği denklik sınıfına kesir denilir ve $\frac{\mathfrak{m}}{s}$ ile gösterilir. $S^{-1}M$, tüm kesirlerin kümesini ifade eder ve $\forall a \in \mathfrak{R}$, $\forall \mathfrak{m}, n \in \aleph$ ve $\forall s, t \in S$ için $\frac{\mathfrak{m}}{s} + \frac{n}{t} = \frac{t\mathfrak{m}+sn}{st}$ ve $\frac{a}{s}.\frac{n}{t} = \frac{an}{st}$ işlemleriyle tanımlanan $\left(S^{-1}M, +, .\right)$ bir $S^{-1}\mathfrak{R}$ modüldür ve bu modüle M nin S ye göre yerelleştirmesi (lokalizasyonu) denir.

Tanım 2.21. (El-Bast ve Smith,1988) Bir $\mathfrak{R}-$modül M nin her $\aleph$ alt modülü için, $\aleph = JM$ olacak şekilde $\mathfrak{R}$ nin J ideali bulunabiliyorsa M, çarpımsal modül olarak adlandırılır [22]. Bu durumda, $J \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ ise $\aleph = JM \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)M \subseteq \aleph$ olup $\aleph = (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)M$ sonucuna ulaşılır [23].

$\aleph = JM$ gösterimindeki J idealine $\aleph$ nin takdim ideali denir. Çarpımsal bir M modülünün K ve L alt modülleri için $K = J_1M$ ve $L = J_2M$ olmak üzere K ve L nin çarpımı $KL = J_1J_2M$ ile tanımlanır. Ayrıca, K ve L nin çarpımı takdim ideallerinden bağımsız olduğunu belirtmek gerekir [24].

Tanım 2.22. $\aleph$, M nin sıfırdan farklı has alt modülü olsun. Bu durumda, $\aleph$ yi içeren tüm asal alt modüllerin kesişimine $\aleph$ nin $M-$radikali denir ve $M-\text{rad}(\aleph)$ ile temsil edilir. Eğer $\aleph$ yi içeren hiç bir asal alt modül bulunmuyorsa $M-\text{rad}(\aleph) = M$ olur.

Teorem 2.7. ***(El-Bast ve Smith,1988)*** *Çarpımsal bir $\mathfrak{R}-$modül M nin $\aleph$ alt modülü için $M-rad(\aleph) = \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)}M$ eşitliği sağlanır [23].*

Tanım 2.23. M, $\mathfrak{R}-$modül olarak ele alınsın. M ye ait alt modüllerden elde edilen her $\aleph_1 \subseteq \aleph_2 \subseteq ... \subseteq \aleph_n \subseteq ...$ şeklindeki artan zincir, sonlu bir adımda sabitleniyorsa M modülüne Noetherian modül adı verilir.

Tanım 2.24. M, $\mathfrak{R}-$ modüldür. Eğer $x \in \mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{m} \in M$ için $x^2\mathfrak{m} = 0$ olduğunda $x\mathfrak{m} = 0$ ise, M indirgenmiş modül olarak adlandırılır [25].

Tanım 2.25. M, $\mathfrak{R}-$modül ve $\aleph$, M nin bir has alt modülü olarak varsayılsın. Bu bağlamda

(i) Eğer $x \in \mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{m} \in M$ için $x\mathfrak{m} \in \aleph$ olduğunda $\mathfrak{m} \in \aleph$ ya da $x \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ sağlanıyorsa $\aleph$ ye asal alt modül denir.

(ii) Eğer $x \in \mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{m} \in M$ için $x\mathfrak{m} \in \aleph$ olduğunda $\mathfrak{m} \in \aleph$ ya da $x \in \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)}$ sağlanıyorsa $\aleph$ ye asalımsı alt modül denir [26].

Asal alt modül kavramını daha geniş bir çerçevede ele almak için çeşitli seçeneklerden faydalanılabilir.

Tanım 2.26. (Atani ve Farzalipour, 2007) $\aleph$, M nin bir has alt modülünü belirtsin. Farz edelim ki $\alpha \in \mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{m} \in M$ için $0 \neq \alpha\mathfrak{m} \in \aleph$ olduğunda, $\mathfrak{m} \in \aleph$ ya da $\alpha \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ sağlanıyorsa $\aleph$, M nin zayıf asal alt modülü olarak adlandırılır [12].

Tanım 2.27. (Darani ve Soheilnia, 2011) $\aleph$, M nin has alt modülü olmak üzere $\beta, \gamma \in \mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{m} \in M$ için $\beta\gamma\mathfrak{m} \in \aleph$ iken $\beta\gamma \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ ya da $\beta\mathfrak{m} \in \aleph$ ya da $\gamma\mathfrak{m} \in \aleph$ sağlanıyorsa 2-yutan alt modül olarak adlandırılır [27].

Tanım 2.28. (Arslankarayiğit Uğurlu, 2023) $\aleph$, M nin has alt modülünü belirtsin. Eğer birimsel olmayan $\beta, \gamma \in \mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{m} \in M$ için $\beta\gamma\mathfrak{m} \in \aleph$ olduğunda, $\beta\gamma \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ ya da $\mathfrak{m} \in \aleph$ sağlanıyorsa $\aleph$ ye M nin 1-yutan asal alt modülü denir [18].

Bu durumda değişmeli halkalarda idealler için geçerli olan zincirin benzeri alt modüller için de kurulabilir:

$$\text{Asal Alt Modül} \Longrightarrow \text{1-Yutan Asal Alt Modül} \Longrightarrow \text{2-Yutan Alt Modül}$$

Örnek 2.9. ***(Arslankarayiğit Uğurlu, 2023)*** *$\mathbb{Z}_4-$modül $\mathbb{Z}_4[X]$ modülünün $\aleph = \langle X \rangle$ alt modülünü ele alalım. Bu durumda, $\aleph$ nin 1-yutan asal alt modül olup asal alt modül olmadığı kolayca görülür [18].*

Örnek 2.10. ***(Arslankarayiğit Uğurlu, 2023)*** *$\mathbb{Z}-$modül $\mathbb{Z}_{30}$ u ele alalım. $\aleph = \langle \overline{6} \rangle$ devirli alt modülü düşünülürse , açıkça $\mathbb{Z}_{30}$ un 2-yutan alt modülüdür. Fakat, $2.2.\overline{3} \in \langle \overline{6} \rangle$ iken $\overline{4} \notin (\aleph : \mathbb{Z}_{30})$ ve $3 \notin \langle \overline{6} \rangle$ olduğundan $\aleph$, $\mathbb{Z}_{30}$ un 1-yutan asal alt modülü değildir [18].*

Tanım 2.29. (Groenewald, 2023) $\mathfrak{R}$, bir halka ve $\aleph$, M nin bir has alt modülü olsun. Eğer birimsel olmayan $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{m} \in M$ için $\{0\} \neq \alpha\mathfrak{R}\beta\mathfrak{R}\mathfrak{m} \subseteq \aleph$ ise $\alpha\beta M \subseteq \aleph$ yani $\alpha\beta \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ ya da $\mathfrak{m} \in \aleph$ koşulu sağlanıyorsa $\aleph$, M nin zayıf 1-yutan asal alt modülü olarak adlandırılır [28].

Her 1-yutan asal alt modül, zayıf 1-yutan asal alt modüldür. Fakat, bu durumun tersi genel olarak doğru değildir.

Örnek 2.11. ***(Groenewald, 2023)*** *$\mathfrak{R} = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ ve $N = \{0\}$ olarak alalım. Bu durumda $\aleph$ nin zayıf 1-yutan asal alt modül olduğu açıktır. Fakat,* $2.3.(5 + 30\mathbb{Z}) = 0 \in \aleph$ *iken* $2.3 \notin (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ *ve* $(5 + 30\mathbb{Z}) \notin \aleph$ *olduğundan $\aleph$, M nin 1-yutan asal alt modülü değildir [28].*

Tanım 2.30. (Yetkin Çelikel, 2021) M nin bir $\aleph$ has alt modülü için eğer birimsel olmayan $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{m} \in M$ için $\alpha\beta\mathfrak{m} \in \aleph$ iken $\alpha\beta \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ ya da $\mathfrak{m} \in M-\text{rad}(\aleph)$ sağlanıyorsa $\aleph$ ye 1-yutan asalımsı alt modül denilir [15].

Tanım 2.31. M nin bir $\aleph$ alt modülü için

(i) **(Saraç, 2009)** Eğer $x \in \mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{m} \in M$ için $x^2\mathfrak{m} \in \aleph$ iken $x\mathfrak{m} \in \aleph$ koşulu sağlanıyorsa $\aleph$ ye yarı asal (semiprime) alt modül adı verilir [29].

(ii) **(Ebrahimpour ve Mirzaee, 2017)** Eğer $x \in \mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{m} \in M$ için $0 \neq x^2\mathfrak{m} \in \aleph$ iken $x\mathfrak{m} \in \aleph$ koşulu sağlanıyorsa $\aleph$ ye zayıf yarı asal alt modül denilir [30].

Tanım 2.32. (Quartararo ve Butts, 1975) $\mathfrak{R}$ halkasında eğer bir J ideali sonlu sayıda idealin birleşimi tarafından kapsanıyorken, bu ideallerden biri tarafından da içerilmesi gerekiyorsa böyle halkalara $u-$halka denir. Ayrıca, eğer bir $\mathfrak{R}-$modül M için $M = \bigcup_{i=1}^{n} \aleph_i$ iken $M = \aleph_i$ oluyorsa $\mathfrak{R}$, $um-$halka olarak adlandırılır [31].

Tanım 2.33. (Behboodi ve Koohy, 2005) M bir $\mathfrak{R}-$modül ve $\aleph$, M nin has alt modülü olmak üzere eğer $\beta, \gamma \in \mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{m} \in M$ için $\beta\gamma\mathfrak{m} \in \aleph$ iken $\beta\mathfrak{m} \in \aleph$ ya da $\gamma\mathfrak{m} \in \aleph$ oluyorsa $\aleph$, M nin klasik asal alt modülü olarak adlandırılır [1].

Her asal alt modül aynı zamanda klasik asal alt modüldür. Fakat bu durumun tersinin genel olarak doğru olmadığını belirtmek gerekir. Örneğin, $\mathbb{Z}-$modül $\mathbb{Z}^2$ nin $P = 0 \times 2\mathbb{Z}$ alt modülü klasik asal alt modüldür. Fakat $2.(0,1) \in P$ iken $2 \notin \left(P :_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^2\right) = (0)$ ve $(0,1) \notin P$ olduğundan $0 \times 2\mathbb{Z}$ bir asal alt modül değildir.

Yardımcı Teorem 2.3. ***(Azizi, 2006)*** *M bir $\mathfrak{R}-$modül ve $\aleph$, M nin has alt modülü olsun. Bu durumda, $\aleph$ nin klasik asal alt modül olması için gerek ve yeter şart $\forall \beta, \gamma \in \mathfrak{R}$ için $(\aleph :_M \beta\gamma) = (\aleph :_M \beta)$ ya da $(\aleph :_M \beta\gamma) = (\aleph :_M \gamma)$ olmasıdır [2].*

Yardımcı Teorem 2.4. ***(Mostafanasab, Tekir ve Oral, 2015)*** *$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 \times ... \times \mathfrak{R}_n$ bir ayrışabilir halka ve $M = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ bir $\mathfrak{R}-$modül olsun, burada her $1 \leq i \leq n$ için, M_i sırasıyla bir $\mathfrak{R}_i-$modüldür. Bu durumda M nin bir $\aleph$ has alt modülünün klasik asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul $\aleph = \prod_{i=1}^{n} \aleph_i$ olmak üzere, $k \in \{1, 2, .., n\}$ için $\aleph_k$, M_k nın bir klasik asal alt modül olması ve $i \in \{1, 2, .., n\} \setminus \{k\}$ için $\aleph_i = M_i$ olmasıdır.*

Tanım 2.34. (Mostafanasab, Tekir ve Oral, 2016) $\aleph$, M nin has alt modülü olmak üzere eğer $\beta, \gamma \in \mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{m} \in M$ için $0 \neq \beta\gamma\mathfrak{m} \in \aleph$ iken $\beta\mathfrak{m} \in \aleph$ ya da $\gamma\mathfrak{m} \in \aleph$ koşulu sağlanıyorsa $\aleph$, M nin zayıf klasik asal alt modülü olarak adlandırılır [8].

Herhangi bir modülün sıfır alt modülünün, zayıf klasik asal alt modül olduğu açıktır. Ancak her zayıf klasik asal alt modülün, genel olarak klasik asal alt modül olma zorunluluğu yoktur. Örneğin, $\mathbb{Z}-$modül $\mathbb{Z}_9$ un $\aleph = (0)$ alt modülü zayıf klasik asal alt modüldür Fakat, $3.3.\overline{1} \in \aleph$ iken $3.\overline{1} \notin \aleph$ olduğu için $\aleph$ bir klasik asal alt modül değildir.

Tanım 2.35. (Baziar ve Behboodi, 2009) M nin bir $\aleph$ has alt modülünü alalım. Eğer $\beta, \gamma \in \mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{m} \in M$ için $\beta\gamma\mathfrak{m} \in \aleph$ iken $\beta\mathfrak{m} \in \aleph$ ya da bazı $k \geq 1$ için $\gamma^k\mathfrak{m} \in \aleph$ sağlanıyorsa $\aleph$, M nin klasik asalımsı alt modülü olarak adlandırılır [4].

Tanım 2.36. (Mostafanasab, Tekir ve Oral, 2015) $\aleph$, M nin bir has alt modülünü belirtsin. $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{m} \in M$ için eğer $\alpha\beta\gamma\mathfrak{m} \in \aleph$ iken $\alpha\beta\mathfrak{m} \in \aleph$ ya da $\alpha\gamma\mathfrak{m} \in \aleph$ ya da $\beta\gamma\mathfrak{m} \in \aleph$ koşullarından biri sağlanıyorsa $\aleph$, M nin klasik 2-yutan alt modülü olarak adlandırılır [7].

Teorem 2.8. ***(Mostafanasab, Tekir ve Oral, 2015)*** *M bir $\mathfrak{R}-$modül ve $\aleph$, M nin has alt modülü olsun. Bu durumda, $\aleph$ nin klasik 2-yutan alt modül olması için gerek ve yeter şart $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{R}$ için $(\aleph :_M \alpha\beta\gamma) = (\aleph :_M \alpha\beta) \cup (\aleph :_M \alpha\gamma) \cup (\aleph :_M \beta\gamma)$ olmasıdır [7].*

Her klasik asal alt modül aynı zamanda klasik 2-yutan asal alt modüldür. Fakat, tersinin genel olarak doğru olduğu söylenemez. Örneğin, $\mathfrak{R} = \mathbb{Z}$ ve p asal olmak üzere $\mathbb{Z}-$modül $\mathbb{Z}_{p^2}$ modülünü ele alalım. $P = (0)$ alt modülü klasik 2-yutan alt modül olduğu açıktır. Fakat, $p^2.\overline{1} \in P$ iken $p.\overline{1} \notin P$ olduğundan, P bir klasik asal alt modül değildir.

3
KLASiK 1-YUTAN ASAL ALT MODÜLLER

Bu bölümde değişmeli halkalarda 1-yutan asal ideallerin bir genişlemesi olarak klasik 1-yutan asal alt modüller tanımlanmıştır. Bu yapının temel özellikleri araştırılarak diğer modül yapılarıyla ilişkisi incelenmiştir. Bölüm boyunca tüm halkalar değişmeli, sıfırdan farklı birim elemana sahip olduğu ve tüm modüllerin birimsel olduğu varsayılmaktadır.

Tanım 3.1. M, $\mathfrak{R}$ üzerinde bir modül ve $\aleph$, M nin bir has alt modülünü belirtsin. Eğer birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M$ için $xyzm \in \aleph$ iken $xym \in \aleph$ ya da $zm \in \aleph$ oluyorsa $\aleph$ ye M nin klasik 1-yutan asal alt modülü denir. Bu durumda aşağıda verilen önermedeki zincir ortaya çıkar.

Önerme 3.1. *$\aleph$, $\mathfrak{R}$−modül M nin bir has alt modülü olarak ele alınsın. Bu durumda*

$\aleph$ klasik asal alt modül $\Longrightarrow$ $\aleph$ klasik 1-yutan asal alt modül $\Longrightarrow$ $\aleph$ klasik 2-yutan alt modül olur.

Aşağıdaki örnekler bu zincirin tersinin doğru olmadığını bize gösterir.

Örnek 3.1. *p asal olmak üzere $\mathfrak{R} = \mathbb{Z}_{p^2}$ ve $M = \mathbb{Z}_{p^2}[x]$ alalım. $\aleph = \left(\overline{0}\right)$, M nin sıfır alt modülü olmak üzere $\overline{p}^2 x = \overline{0}$ iken $\overline{p}x \neq \overline{0}$ olduğundan $\aleph$ klasik asal alt modül değildir. Öte yandan birimsel olmayan $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_{p^2}$ ve $f(x) \in M$ için $\alpha\beta\gamma f(x) = \overline{0}$ olduğunu kabul edelim. α, β, γ birimsel olmadığından p; α, β, γ yı böler. Bu durumda $\alpha\beta f(x) = \overline{0}$ elde edilir ki bu da $\aleph = \left(\overline{0}\right)$ alt modülünün klasik 1-yutan asal alt modül olduğunu gösterir.*

Örnek 3.2. *p ve q farklı asal sayılar olmak üzere $\mathbb{Z}$−modül $M = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_q \oplus \mathbb{Z}$ ve $\aleph$, M nin sıfır alt modülü olsun. Bu durumda $ppq\left(\overline{1}, \overline{1}, 0\right) \in \aleph = \left(\overline{0}, \overline{0}, 0\right)$ iken $p^2\left(\overline{1}, \overline{1}, 0\right) \notin \aleph$ ve $q\left(\overline{1}, \overline{1}, 0\right) \notin \aleph$ olduğundan sıfır alt modülü klasik 1-yutan asal alt modül değildir. Fakat klasik 2-yutan alt modül olduğu kolayca görülür.*

Şimdi, klasik 1-yutan asal alt modülü bulunmayan bir $\mathfrak{R}$−modül M varlığından bahsedilecektir. Ancak, sonlu üretilmiş modüllerde ya da çarpımsal modüllerde her

zaman asal alt modül bulunduğundan, bu iki modül sınıfı daima klasik 1-yutan asal alt modül ihtiva ettiğini belirtmek gerekir.

Örnek 3.3. *p bir asal sayı ve $\aleph_0 = \aleph \cup \{0\}$ olmak üzere $E(p) = \left\{\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} : \text{bir } r \in \mathbb{Z} \text{ ve } n \in \aleph_0 \text{ için } \alpha = \frac{r}{p^n} + \mathbb{Z}\right\}$ modülü $\mathbb{Z}$–modül $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ nin sıfırdan farklı bir alt modülü olsun. [19] dan bilindiği üzere $E(p)$ nin tüm alt modülleri $t \in \aleph_0$ olmak üzere, $G(t) = \left\{\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} : \alpha = \frac{r}{p^t} + \mathbb{Z} \text{ olacak şekilde } r \in \mathbb{Z}\right\}$ formundadır. Bu durumda hiçbir $G(t)$, $E(p)$ nin klasik 1-yutan asal alt modülü değildir. Bunu görmek için, $\frac{1}{p^{t+3}} + \mathbb{Z} \in E(p)$ alalım. Buradan $p^3\left(\frac{1}{p^{t+3}} + \mathbb{Z}\right) = \frac{1}{p^t} + \mathbb{Z} \in G(t)$ iken $p^2\left(\frac{1}{p^{t+3}} + \mathbb{Z}\right) = \frac{1}{p^{t+1}} + \mathbb{Z} \notin G(t)$ ve $p\left(\frac{1}{p^{t+3}} + \mathbb{Z}\right) = \frac{1}{p^{t+2}} + \mathbb{Z} \notin G(t)$ olduğundan $G(t)$, klasik 1-yutan asal alt modül değildir.*

Sıradaki önerme klasik 1-yutan asal alt modüller ile 1-yutan asal alt modüller arasındaki bağlantıyı içermektedir.

Önerme 3.2. *Her 1-yutan asal alt modül, klasik 1-yutan asal alt modüldür.*

İspat. Kabul edelim ki $\aleph$, $\mathfrak{R}$ üzerinde tanımlanan bir M modülünün 1-yutan asal alt modülünü belirtsin. Birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M$ için $xyzm \in \aleph$ alalım. $\aleph$, 1-yutan asal alt modül olduğundan $xy \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ ya da $zm \in \aleph$ elde ederiz. Birinci durumdan $xym \in \aleph$ bulunur. İkinci durum ise zaten bizi istediğimiz sonuca götürür. Bu durumda, $\aleph$ bir klasik 1-yutan asal alt modül olur. ■

Sıradaki örnek bize yukarıdaki önermenin tersinin doğru olması gerekmediğini gösterir.

Örnek 3.4. *p asal olmak üzere $\mathbb{Z}$–modül $M = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}$ olarak verilsin. M nin $\aleph = \left(\overline{0}, 0\right)$ alt modülünü düşünelim. Birimsel olmayan $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ ve $(\overline{x}, y) \in M$ durumunda $\alpha\beta\gamma(\overline{x}, y) = \left(\overline{0}, 0\right)$ olsun. Genelliği kaybetmeden $y = 0$ olduğunu varsayalım. Bu taktirde, p; α, β, γ veya x ten birini böler. Böylelikle $\alpha\beta(\overline{x}, y) = \left(\overline{0}, 0\right)$ ya da $\gamma(\overline{x}, y) = \left(\overline{0}, 0\right)$ elde edilir. Dolayısıyla, $\aleph$ klasik 1-yutan asal alt modüldür. Şimdi, 1-yutan asal alt modül olmadığını göstermek için $p^2\left(\overline{1}, 0\right) = \left(\overline{0}, 0\right)$ yazılabilir. Bu durumda $p^2 \notin (\aleph :_{\mathbb{Z}} M) = 0$ ve $\left(\overline{1}, 0\right) \neq \left(\overline{0}, 0\right)$ olduğundan, $\aleph$ nin 1-yutan asal alt modül olmadığı anlaşılır.*

Teorem 3.1. *$f : M_1 \longrightarrow M_2$ bir $\mathfrak{R}$–modül homomorfizması olsun. Bu taktirde*

1. *$\aleph_2$, M_2 nin bir klasik 1-yutan asal alt modülü ise $f^{-1}(\aleph_2) = M_1$ ya da $f^{-1}(\aleph_2)$, M_1 in bir klasik 1-yutan asal alt modülü olur.*

2. *f bir epimorfizma ve $\aleph_1$, M_1 in $\text{Çek}(f)$ yi içeren bir klasik 1-yutan asal alt modülü ise $f(\aleph_1)$, M_2 nin bir klasik 1-yutan asal alt modülü olur.*

İspat. (1) $f^{-1}(\aleph_2) \neq M_1$ olacak şekilde $\aleph_2$, M_2 nin bir klasik 1-yutan asal alt modülü olsun. Birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M_1$ durumunda $xyzm \in f^{-1}(\aleph_2)$ olduğunu varsayalım. Buradan $f(xyzm) = xyzf(m) \in \aleph_2$ bulunur. $\aleph_2$, bir klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan $xyf(m) = f(xym) \in \aleph_2$ ya da $zf(m) = f(zm) \in \aleph_2$ elde edilir. Böylece $xym \in f^{-1}(\aleph_2)$ ya da $zm \in f^{-1}(\aleph_2)$ olduğu görülür. Dolayısıyla $f^{-1}(\aleph_2)$, M_1 in bir klasik 1-yutan asal alt modülü olduğu anlaşılır.

(2) Birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ ve $m' \in M_2$ durumunda $xyzm' \in f(\aleph_1)$ olsun. f örten olduğundan $m' = f(m)$ olacak şekilde $m \in M_1$ mevcuttur. Bu durumda $xyzm' = xyzf(m) = f(xyzm) \in f(N_1)$ yazılabilir. Çek $(f) \subseteq \aleph_1$ olduğundan $xyzm \in \aleph_1$ elde edilir ve $\aleph_1$, klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan $xym \in \aleph_1$ ya da $zm \in \aleph_1$'dir. Böylelikle, $xym' = f(xym) \in f(\aleph_1)$ ya da $zm' = f(zm) \in f(\aleph_1)$ bulunur. Dolayısyla $f(\aleph_1)$, M_2 nin bir klasik 1-yutan asal alt modülü olduğu sonucuna varılır. ■

Sonuç 3.1. *M bir $\mathfrak{R}$−modül ve $L \subseteq \aleph$, M nin iki alt modülü olsun. $\aleph$, M nin klasik 1-yutan asal alt modülü olması için gerek ve yeter koşul $\aleph/L$, M/L nin bir klasik 1-yutan asal alt modülü olmasıdır.*

İspat. Her $m \in M$ için $\pi(m) = m + L$ şeklinde tanımlanan $\pi : M \longrightarrow M/L$ kanonik homomorfizmasını düşünelim. Böylece Teorem 3.1 gereği istenilen sağlanır. ■

Teorem 3.2. *M, $\mathfrak{R}$ üzerinde bir modülü ve $\aleph$ de onun has alt modülünü belirtsin. Bu taktirde aşağıdaki durumlar birbirine denktir:*

1. *$\aleph$, bir klasik 1-yutan asal alt modüldür.*

2. *Birimsel olmayan her $x, y, z \in \mathfrak{R}$ için, $(\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M xy) \cup (\aleph :_M z)$ dir.*

3. *Birimsel olmayan tüm $x, y \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M$ adına $xym \notin \aleph$ ise $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xym) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ dir.*

4. *Birimsel olmayan her $x, y \in \mathfrak{R}$, $m \in M$ ve $\mathfrak{R}$ nin her has J ideali için eğer $xJym \subseteq \aleph$ ise $xJm \subseteq \aleph$ ya da $ym \in \aleph$ dir.*

5. *Birimsel olmayan tüm $x \in \mathfrak{R}$, $m \in M$ ve $\mathfrak{R}$ nin her J has ideali için eğer $xJm \nsubseteq \aleph$ ise $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xJm) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ olur.*

6. *Birimsel olmayan her $x \in \mathfrak{R}$, $m \in M$ ve $\mathfrak{R}$ nin her I, J has idealleri için $xIJm \subseteq \aleph$ ise $xIm \subseteq \aleph$ ya da $Jm \subseteq \aleph$ dir.*

7. *I, J $\mathfrak{R}$ nin has idealleri ve $m \in M$ için $IJm \nsubseteq \aleph$ ise $(\aleph :_{\mathfrak{R}} IJm) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ dir.*

8. I, J, K $\mathfrak{R}$ *nin has idealleri ve* $\mathfrak{m} \in M$ *için* $IJK\mathfrak{m} \subseteq \aleph$ *ise* $IJ\mathfrak{m} \subseteq \aleph$ *ya da* $K\mathfrak{m} \subseteq \aleph$ *dir.*

9. *Her* $\mathfrak{m} \in M \setminus \aleph$ *için* $(\aleph :_{\mathfrak{R}} \mathfrak{m})$, $\mathfrak{R}$ *nin bir 1-yutan asal idealidir.*

İspat. $(1) \Longrightarrow (2)$ $\aleph$, klasik 1-yutan asal alt modül olsun. Birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ için $\mathfrak{m} \in (\aleph :_M xyz)$ kabul edelim. Buradan $xyz\mathfrak{m} \in \aleph$ elde edilir, bu da $xy\mathfrak{m} \in \aleph$ ya da $z\mathfrak{m} \in \aleph$ olduğunu ifade eder. Böylece, $\mathfrak{m} \in (\aleph :_M xy) \cup (\aleph :_M z)$ sonucuna varırız. Yani, $(\aleph :_M xyz) \subseteq (\aleph :_M xy) \cup (\aleph :_M z)$ dir. Tersine kapsama her zaman doğru olduğundan, $(\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M xy) \cup (\aleph :_M z)$ eşitliğini elde ederiz.

$(2) \Longrightarrow (3)$ Varsayalım ki, birimsel olmayan $x, y \in \mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{m} \in M$ durumunda $xy\mathfrak{m} \notin \aleph$ olsun. $z \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} xy\mathfrak{m})$ alalım. Bu durumda $xyz\mathfrak{m} \in \aleph$ dir. Bu nedenle, (2) gereğince $\mathfrak{m} \in (\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M xy) \cup (\aleph :_M z)$ sonucuna varırız. $xy\mathfrak{m} \notin \aleph$ kabulümüz gereğince, $z\mathfrak{m} \in \aleph$ elde edilir ki bu da $z \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} \mathfrak{m})$ olduğu anlamına gelir. Böylelikle, $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xy\mathfrak{m}) \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} \mathfrak{m})$ bulunur. Tersine kapsama her zaman sağlandığından, $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xy\mathfrak{m}) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} \mathfrak{m})$ sonucuna varılır.

$(3) \Longrightarrow (4)$ J, $\mathfrak{R}$ nin has ideali, birimsel olmayan $x, y \in \mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{m} \in M$ durumunda $xyJ\mathfrak{m} \subseteq \aleph$ olsun. Şimdi, $xJ\mathfrak{m} \nsubseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. O halde bir $\alpha \in J$ için $x\alpha\mathfrak{m} \notin \aleph$ dir. $xy\alpha\mathfrak{m} \in \aleph$ olduğundan, (3) gereğince $y \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} x\alpha\mathfrak{m}) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} \mathfrak{m})$ elde ederiz ve bu da, $y\mathfrak{m} \in \aleph$ sonucunu verir.

$(4) \Longrightarrow (5)$ Birimsel olmayan $x \in \mathfrak{R}$, $\mathfrak{m} \in M$ ve $\mathfrak{R}$ nin bir J has ideali için $xJ\mathfrak{m} \nsubseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. $y \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} xJ\mathfrak{m})$ olsun. Bu durumda $xyJ\mathfrak{m} \subseteq \aleph$ elde edilir. O halde (4) gereğince, $xJ\mathfrak{m} \subseteq \aleph$ ya da $y\mathfrak{m} \in \aleph$ bulunur. $xJ\mathfrak{m} \nsubseteq \aleph$ kabulümüz gereği, $y\mathfrak{m} \in \aleph$ olur. Yani, $y \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} \mathfrak{m})$ dir. Dolayısıyla, $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xJ\mathfrak{m}) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} \mathfrak{m})$ ifadesine ulaşılır.

$(5) \Longrightarrow (6)$ $\mathfrak{R}$ nin I, J has idealleri, birimsel olmayan $x \in \mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{m} \in M$ için $xIJ\mathfrak{m} \subseteq \aleph$ ve $xI\mathfrak{m} \nsubseteq \aleph$ olduğunu kabul edelim. $xIJ\mathfrak{m} \subseteq \aleph$ olduğundan, $J \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} xI\mathfrak{m})$ dir. O halde (5) gereği, $J \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} \mathfrak{m})$ elde edilir ve bu da $J\mathfrak{m} \subseteq \aleph$ anlamına gelir.

$(6) \Longrightarrow (7)$ I, J $\mathfrak{R}$ nin iki has ideali ve $\mathfrak{m} \in M$ için $IJ\mathfrak{m} \nsubseteq \aleph$ olduğunu kabul edelim. $x \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} IJ\mathfrak{m})$ olsun. Bu durumda $xIJ\mathfrak{m} \subseteq \aleph$ olur. $IJ\mathfrak{m} \nsubseteq \aleph$ kabulümüzden $I\alpha\mathfrak{m} \nsubseteq \aleph$ olacak şekilde bir $\alpha \in J$ bulunur. Şimdi $J^* = x\mathfrak{R}$ olarak tanımlayalım ve $\alpha IJ^*\mathfrak{m} \subseteq xIJ\mathfrak{m} \subseteq \aleph$ olduğunu belirtelim. Buradan $\alpha I\mathfrak{m} \nsubseteq \aleph$ olduğundan yine (6) gereği $J^*\mathfrak{m} \subseteq \aleph$ elde edilir ve bu da $x\mathfrak{m} \in \aleph$ anlamına gelir. Yani $x \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} \mathfrak{m})$ bulunur. Sonuç olarak $(\aleph :_{\mathfrak{R}} IJ\mathfrak{m}) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} \mathfrak{m})$ ifadesine ulaşırız.

$(7) \Longrightarrow (8)$ I, J, K $\mathfrak{R}$ nin has idealleri ve $\mathfrak{m} \in M$ için $IJK\mathfrak{m} \subseteq \aleph$ ve $IJ\mathfrak{m} \nsubseteq \aleph$ olduğunu kabul edelim. O zaman (7) koşulu gereğince $K \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} IJ\mathfrak{m}) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} \mathfrak{m})$ olur. Buradan da istenilen $K\mathfrak{m} \subseteq \aleph$ sonucu elde edilir.

$(8) \Longrightarrow (9)$ Birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{m} \in M \setminus \aleph$ durumunda $xyz \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} \mathfrak{m})$ olduğunu varsayalım. Buradan $xyz\mathfrak{m} \in \aleph$ elde edilir. Şimdi $I = x\mathfrak{R}$, $J = y\mathfrak{R}$, $K = z\mathfrak{R}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $IJK\mathfrak{m} \subseteq \aleph$ olur ve (8) koşul gereği $xy\mathfrak{m} \in IJ\mathfrak{m} \subseteq \aleph$ ya da $z\mathfrak{m} \in K\mathfrak{m} \subseteq \aleph$ dir. Böylece, $xy \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} \mathfrak{m})$ ya da $z \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} \mathfrak{m})$ bulunur. Sonuç olarak $(\aleph :_{\mathfrak{R}} \mathfrak{m})$ 1-yutan asal ideal olduğu bilgisine ulaşılır.

$(9) \Longrightarrow (1)$ Birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ ve $\mathfrak{m} \in M$ durumunda $xyz\mathfrak{m} \in \aleph$ olsun. $\mathfrak{m} \notin \aleph$ kabul edelim. O zaman (9) gereğince $(\aleph :_{\mathfrak{R}} \mathfrak{m})$, 1-yutan asal idealidir ve $xyz \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} \mathfrak{m})$ olduğundan $xy \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} \mathfrak{m})$ ya da $z \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} \mathfrak{m})$ sonucuna ulaşılır. Bu durumda, $xy\mathfrak{m} \in \aleph$ ya da $z\mathfrak{m} \in \aleph$ elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Sonuç 3.2. *$\mathfrak{R}$ bir halka ve J, $\mathfrak{R}$ nin has ideali olsun. Bu taktirde aşağıdaki durumlar sağlanır.*

1. *J, $\mathfrak{R}-$modül $\mathfrak{R}$ nin klasik 1-yutan asal alt modülü olması için gerek ve yeter koşul J, $\mathfrak{R}$ nin 1-yutan asal ideali olmasıdır.*

2. *M bir $\mathfrak{R}-$modül ve M nin her $\aleph$ has alt modülü için, $\aleph$ nin bir klasik 1-yutan asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul $\mathfrak{R}$ nin tek maksimal ideali m olan ve $m^2 = (0)$ koşulunu sağlayan yerel halka olmasıdır.*

İspat. (1) J, $\mathfrak{R}-$modül $\mathfrak{R}$ nin bir klasik 1-yutan asal alt modülü olsun. O zaman, Teorem 3.2 (9) gereğince $(J :_{\mathfrak{R}} 1) = J$, $\mathfrak{R}$ nin 1-yutan asal idealidir. Tersine J, $\mathfrak{R}$ nin 1-yutan asal ideali olduğunu kabul edelim. Birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ ve $\alpha \in \mathfrak{R}$ durumunda $xyz\alpha = xy(z\alpha) \in J$ olsun. J, 1-yutan asal ideal olduğundan $xy \in J$ ya da $z\alpha \in J$ elde edilir. Böylece $xya \in J$ ya da $za \in J$ sonucuna varılır.

(2) $\mathfrak{R}-$modül M nin her $\aleph$ has alt modülü klasik 1-yutan asal alt modül olsun. $M = \mathfrak{R}$ alalım ve (1) koşulu gereği $\mathfrak{R}$ nin her has ideali 1-yutan asal ideal olur. Bu durumda [21, Önerme 4.5] den bilindiği üzere $\mathfrak{R}$ bir yerel halka ve tek maksimal ideali m olmak üzere $m^2 = (0)$ olur. Şimdi yeterliliğin ispatı için $\mathfrak{R}$ tek maksimal ideali m olan ve $m^2 = (0)$ koşulunu sağlayan bir yerel halka olduğunu varsayalım. $\aleph$, $\mathfrak{R}$ üzerinde tanımlanan M modülünün bir has alt modülü olarak alınsın. Birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M$ için $xyzm \in \aleph$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x, y \in m$ ve $m^2 = (0)$ olduğundan $xym = 0 \in \aleph$ elde edilir ve dolayısıyla $\aleph$, klasik 1-yutan asal alt modül olur. ■

Teorem 3.3. *M, $\mathfrak{R}$ üzerinde bir modül ve $\aleph$, M nin klasik 1-yutan asal alt modülü olup klasik asal alt modülü olmadığını kabul edelim. Bu durumda $\mathfrak{R}$ tek maksimal ideali q olan yerel bir halkadır. Öyle ki bazı $\mathfrak{m} \in M \setminus \aleph$ için $q^2 \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ koşulu sağlanır.*

İspat. Kabul edelim ki $\aleph$, M nin klasik 1-yutan asal alt modülü olsun fakat klasik asal alt modülü olmasın. $\aleph$ klasik asal alt modül olmadığından $m \in M \setminus \aleph$ için $(\aleph :_{\Re} m)$, $\Re$ nin asal ideali değildir. Buna karşılık $\aleph$, M nin klasik 1-yutan asal alt modülü olduğundan Teorem 3.2 ye göre $(\aleph :_{\Re} m)$, $\Re$ nin bir 1-yutan asal idealidir. Bu sebeple $\Re$ nin asal olmayan bir 1-yutan asal ideali vardır. O halde [21, Lemma 2.1] e göre $\Re$ tek maksimal ideali q olan yerel bir halkadır ve $m \in M \setminus \aleph$ için $q^2 \subseteq (\aleph :_{\Re} m)$ dir. ■

Önerme 3.3. *M bir $\Re-$modül ve $\aleph$, M nin bir has alt modülü olsun. Bu durumda $\aleph$ nin klasik asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul $\aleph$ nin klasik 1-yutan asal alt modül ve yarı asal alt modül olmasıdır.*

İspat. Gerek koşulun ispatı, Önerme 3.1 ve her klasik asal alt modülün yarı asal alt modül olduğu gerçeğinden kaynaklanmaktadır. Yeter koşulun ispatı için $\aleph$, klasik 1-yutan asal alt modül ve yarı asal alt modül olduğunu varsayalım. Şimdi, $\aleph$ nin klasik asal alt modül olduğunu göstermek istiyoruz. Kabul edelim ki $\aleph$, klasik asal alt modül olmasın. O halde, Teorem 3.3 gereği $\Re$ yerel bir halkadır. $x, y \in \Re$ ve $m \in M$ durumunda $xym \in \aleph$ olsun. Eğer x ya da y birimsel ise $xm \in \aleph$ ya da $ym \in \aleph$ bulunur. Bu yüzden x ve y nin birimsel olmadığını kabul edelim. $\Re$, yerel bir halka olduğundan $(x+y)$ birimsel değildir. Bu doğrultuda $x(x+y)ym \in \aleph$ yazabiliriz. $\aleph$, klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan $x(x+y)m \in \aleph$ ya da $ym \in \aleph$ elde edilir. Eğer $x(x+y)m$ ise $x^2m + xym \in \aleph$ ve buradan $x^2m \in \aleph$ olur. $\aleph$, bir yarı asal alt modül olduğundan $xm \in \aleph$ dir. İkinci durumda ise, $ym \in \aleph$ bulunur. Bu iki durum da iddiamız ile çelişir. Bu nedenle $\aleph$, bir klasik asal alt modül olduğu sonucuna varılır. ■

Önerme 3.4. *M, $\Re$ üzerinde bir modül ve $\{\aleph_i : i \in \Delta\}$, M nin klasik 1-yutan asal alt modüllerinden oluşan bir azalan zinciri belirtsin. Bu taktirde $\bigcap_{i\in\Delta} \aleph_i$, M nin klasik 1-yutan asal alt modülü olur.*

İspat. Birimsel olmayan $x, y, z \in \Re$ ve $m \in M$ adına $xyzm \in \bigcap_{i\in\Delta} \aleph_i$ olsun. O zaman, $xyzm \in \aleph_i$ her $i \in \Delta$ için doğrudur. Şimdi de $xym \notin \bigcap_{i\in\Delta} \aleph_i$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, öyle bir $t \in \Delta$ vardır ki $xym \notin \aleph_t$ dir. Ancak, $xyzm \in \aleph_t$ ve $\aleph_t$, bir klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan $zm \in \aleph_t$ elde edilir. Şimdi bir $i \in \Delta$ seçelim. Buradan ya $\aleph_t \subseteq \aleph_i$ ya da $N_i \subseteq \aleph_t$ geçerli olur. Eğer $\aleph_t \subseteq \aleph_i$ ise $zm \in \aleph_i$ bulunur. Diğer taraftan $\aleph_i \subseteq \aleph_t$ ise $xym \notin \aleph_i$ ve $xyzm \in \aleph_i$ olur. $\aleph_i$, klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan $zm \in \aleph_i$ sonucuna ulaşılır. Böylece, $zm \in \bigcap_{i\in\Delta} \aleph_i$ elde edilir ve sonuç olarak $\bigcap_{i\in\Delta} \aleph_i$, M nin klasik 1-yutan asal alt modülü olduğu anlaşılır. ■

$\aleph$, M nin klasik 1-yutan asal alt modülü olmak üzere, eğer M nin her klasik 1-yutan asal K alt modülü için $K \subseteq \aleph$ iken $K = \aleph$ oluyorsa $\aleph$ ye bir minimal klasik 1-yutan asal alt

modül denir. Kabul edelim ki L, M nin bir klasik 1-yutan asal alt modülü olmak üzere $\Gamma = \{K : K, M \text{ nin bir klasik 1-yutan asal alt modülü ve } K \subseteq L\}$ olarak tanımlayalım. Eğer $\{K_i : i \in \Delta\}$, Γ içinde herhangi bir zincir ise Önerme 3.4 gereği $\bigcap_{i\in\Delta} K_i$, Γ içindedir. Zorn Lemma gereği, Γ minimal bir elemana sahiptir ve bu eleman açıkça M nin minimal klasik 1-yutan asal alt modülüdür. Şayet M sonlu üretilmiş ya da çarpımsal modül olduğunda M nin minimal klasik 1-yutan asal alt modül içerdiği açıktır. Ayrıca [19] dan hatırlanacağı üzere, her alt modülü sonlu üretilmiş bir $\mathfrak{R}-$modül Noetherian modül olarak adlandırılır.

Şimdi, bir Noetherian modülde sonlu sayıda minimal klasik 1-yutan asal alt modül bulunduğunu sıradaki teorem üzerinden ifade edeceğiz.

Teorem 3.4. *M, Noetherian bir $\mathfrak{R}-$modülü belirtsin. O halde M, sonlu sayıda minimal klasik 1-yutan asal alt modül içerir.*

İspat. İddianın doğru olmadığını varsayalım. Bu durumda M nin her has $\aleph$ alt modülü için, $M/\aleph$ nin sonsuz sayıda minimal klasik 1-yutan asal alt modül içerdiği alt modüllerin kümesi Γ olsun. $0 \in \Gamma$ olduğundan $\Gamma \neq \varnothing$ dır. M, Noetherian bir modül olduğundan Γ nın bir maximal Q elemanı vardır. Eğer Q, klasik 1-yutan asal alt modül ise Sonuç 3.1 gereğince $Q/Q = \left(\overline{0}\right)$, M/Q nun tek minimal klasik 1-yutan asal alt modülü olur. Bu durumda $Q \notin \Gamma$ elde edilir ki bu bir çelişki yaratır. Dolayısıyla Q, M nin klasik 1-yutan asal alt modülü değildir. Bu durumda Teorem 3.2 gereği $\mathfrak{R}$ nin I, J, K has idealleri ve $m \in M$ için $IJKm \subseteq Q$ iken $IJm \nsubseteq Q$ ve $Km \nsubseteq Q$ olur. Q, Γ nın maksimal elemanı olduğundan $Q + IJm$ ve $Q + Km$, Γ nın elemanı değillerdir. Böylece, $M/Q + IJm$ ve $M/Q + Km$ sonlu sayıda minimal klasik 1-yutan asal alt modüle sahip olduğu anlaşılır. Şimdi M/Q nun bir minimal klasik 1-yutan $\aleph^*/Q$ alt modülünü alalım. Bu durumda $IJKm \subseteq Q \subseteq \aleph^*$ ve $\aleph^*$, bir klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan $IJm \subseteq \aleph^*$ ya da $Km \subseteq \aleph^*$ elde edilir. Dolayısıyla, $\aleph^*/(Q + IJm)$, $M/(Q + IJm)$ nin bir minimal klasik 1-yutan asal alt modülü ya da $\aleph^*/(Q + Km)$, $M/(Q + Km)$ nin minimal bir klasik 1-yutan asal alt modülünü belirtir. İfade edilen durum $\aleph^*/Q$ için sonlu sayıda seçenek olduğunu gösterir. Dolayısıyla M/Q sonlu sayıda minimal klasik 1-yutan asal alt modüle sahiptir ve bu yine bir çelişkidir. Sonuç olarak $\Gamma = \varnothing$ dir ve M, sonlu sayıda minimal klasik 1-yutan asal alt modül içerir. ■

Önerme 3.5. *M bir çarpımsal $\mathfrak{R}-$modül ve $\aleph$, M nin bir has alt modülünü ifade etsin. Bu durumda eğer $\aleph$, M nin klasik 1-yutan asal alt modülü ise M nin bir takım K_1, K_2, K_3 has alt modülleri ve $m \in M$ için $K_1K_2K_3m \subseteq \aleph$ iken $K_1K_2m \subseteq \aleph$ ya da $K_3m \subseteq \aleph$ olur. Tersi ise , M sonlu üretilmiş sadık çarpımsal modül olduğunda geçerli olur.*

İspat. $(\Longrightarrow)$ $\aleph$, M nin klasik 1-yutan asal alt modülü ve M nin bir takım K_1, K_2, K_3 has alt modülleri ile $m \in M$ için $K_1K_2K_3m \subseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. M, bir çarpımsal modül

olduğundan $K_1 = IM$, $K_2 = JM$ ve $K_3 = QM$ olacak şekilde $\mathfrak{R}$ nin I, J, Q has idealleri mevcuttur. Bu durumda $IJQm \subseteq \aleph$ elde ederiz ve $\aleph$, bir klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan ya $IJm \subseteq \aleph$ ya da $Qm \subseteq \aleph$ sonucuna ulaşılır. Bu da $K_1K_2m \subseteq \aleph$ ya da $K_3m \subseteq \aleph$ olduğunu ifade eder.

($\Longleftarrow$) I, J, Q $\mathfrak{R}$ nin has idealleri ve $m \in M$ için $IJQm \subseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. $K_1 = IM$, $K_2 = JM$ ve $K_3 = QM$ olarak tanımlanırsa K_1, K_2, K_3 has alt modül olurlar. Gerçekten de $IM = M$ olsaydı, M sonlu üretilmiş olduğundan, Nakayama Lemma gereği $I + Ann(M) = \mathfrak{R}$ bulunur. Buradan M nin sadık modül olduğu bilgisi kullanılırsa $I = \mathfrak{R}$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla, I has ideal olduğundan $K_1 = IM$ has alt modül olduğu sonucu ortaya çıkar. Şimdi de $K_1K_2K_3m \subseteq \aleph$ olduğunu belirtelim. Bu durumda, $K_1K_2m \subseteq \aleph$ veya $K_3m \subseteq \aleph$ elde edilir. Eğer $K_1K_2m \subseteq \aleph$ ise $IJ(\mathfrak{R}m : M)M = IJ(\mathfrak{R}m) \subseteq \aleph$ olur ve bu da $IJm \subseteq \aleph$ anlamına gelir. Eğer $K_3m \subseteq \aleph$ ise benzer şekilde $Qm \subseteq \aleph$ elde edilir. Böylece Teorem 3.2 gereğince $\aleph$, M nin bir klasik 1-yutan asal alt modülü olur. ■

Teorem 3.5. *M bir $\mathfrak{R}$−modül ve $\aleph$, M nin bir has alt modülünü belirtsin. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir:*

1. *$\aleph$, M nin bir klasik 1-yutan asal alt modülüdür.*

2. *Birimsel olmayan her $x, y, z \in \mathfrak{R}$ için, $(\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M xy)$ ya da $(\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M z)$ dir.*

3. *Birimsel olmayan her $x, y, z \in \mathfrak{R}$ ve M nin her L alt modülü için $xyzL \subseteq \aleph$ iken $xyL \subseteq \aleph$ ya da $zL \subseteq \aleph$ dir.*

4. *Birimsel olmayan her $x, y \in \mathfrak{R}$ ve M nin herhangi bir L alt modülü için eğer $xyL \nsubseteq \aleph$ ise $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xyL) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} L)$ dir.*

5. *Birimsel olmayan her $x, y \in \mathfrak{R}$, M nin tüm L alt modülü ve $\mathfrak{R}$ nin herhangi J has ideali için $xyJL \subseteq \aleph$ ise $xyL \subseteq \aleph$ ya da $JL \subseteq \aleph$ olur.*

6. *Birimsel olmayan her $x \in \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}$ nin her has J ideali ve M nin her L alt modülü için $xJL \nsubseteq \aleph$ koşulu sağlanıyorsa $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xJL) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} L)$ dir.*

7. *Birimsel olmayan her $x \in \mathfrak{R}$, M nin her L alt modülü ve $\mathfrak{R}$ nin her I, J has idealleri için $xIJL \subseteq \aleph$ ise $xIL \subseteq \aleph$ ya da $JL \subseteq \aleph$ dir.*

8. *I ve J, $\mathfrak{R}$ nin has idealleri, M nin herhangi L alt modülü için $IJL \nsubseteq \aleph$ olduğunda $(\aleph :_{\mathfrak{R}} IJL) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} L)$ dir.*

9. *I,J,K, $\mathfrak{R}$ nin has idealleri ve L, M nin alt modülü olmak üzere $IJKL \subseteq \aleph$ ise $IJL \subseteq \aleph$ ya da $KL \subseteq \aleph$ olur.*

10. *M nin $L \subsetneq \aleph$ koşulunu sağlayan L alt modülü için $(\aleph :_{\mathfrak{R}} L)$, $\mathfrak{R}$ nin bir 1-yutan asal idealidir.*

İspat. $(1) \Longrightarrow (2)$ Teorem 3.2 den elde edilir.

$(2) \Longrightarrow (3)$ $xyzL \subseteq \aleph$ olduğundan $L \subseteq (\aleph :_M xyz)$ bulunur. İspatın devamı (2) gereği elde edilir.

$(3) \Longrightarrow (4)$ Birimsel olmayan $x, y \in \mathfrak{R}$ ve M nin bir L alt modülü için $xyL \nsubseteq \aleph$ olduğunu kabul edelim ve bir $z \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} xyL)$ alalım. O zaman z birimsel olmayan elemandır ve $xyzL \subseteq \aleph$ dir. Bu durumda (3) koşulu gereği $zL \subseteq \aleph$ olur ve bu da $z \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} L)$ anlamına gelir. Böylece $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xyL) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} L)$ sonucuna varılır.

$(4) \Longrightarrow (5)$ J, $\mathfrak{R}$ nin has ideali, M nin bir L alt modülü ve birimsel olmayanı $x, y \in \mathfrak{R}$ için $xyJL \subseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. Kabul edelim ki $xyL \nsubseteq \aleph$ olsun. Buradan (4) gereği, $J \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} xyL) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} L)$ olur ve böylece $JL \subseteq \aleph$ elde edilir.

$(5) \Longrightarrow (6)$ J, $\mathfrak{R}$ nin has ideali, M nin bir L alt modülü ve birimsel olmayan bir $x \in \mathfrak{R}$ için $xJL \nsubseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. O zaman, bir $\alpha \in J$ için $x\alpha L \nsubseteq \aleph$ olur. Şimdi $y \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} xJL)$ alalım. Buradan $xyJL \subseteq \aleph$ elde edilir. Şimdi, $J^* = y\mathfrak{R}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda J^*, bir has idealdir ve $x\alpha J^*L \subseteq xyJL \subseteq \aleph$ olur. $x\alpha L \nsubseteq \aleph$ kabulümüz nedeniyle (5) gereği $yL \subseteq J^*L \subseteq \aleph$ elde edilir. Böylece $y \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} L)$ sonucuna varılır.

$(6) \Longrightarrow (7)$ Birimsel olmayan bir $x \in \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}$ nin I,J has idealleri ve M nin L alt modülü için $xIJL \subseteq \aleph$ olsun. Ayrıca $xIL \nsubseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (6) gereğince $J \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} xIL) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} L)$ olur ve buradan $JL \subseteq \aleph$ sonucuna varılır.

$(7) \Longrightarrow (8)$ I,J $\mathfrak{R}$ nin iki has ideali ve L,M nin bir alt modülü olmak üzere $IJL \nsubseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. Bu durumda bir $\alpha \in J$ için $\alpha IL \nsubseteq \aleph$ olur. Ayrıca $x \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} IJL)$ alalım. Buradan $xIJL \subseteq \aleph$ elde edilir. Şimdi bir $J^* = x\mathfrak{R}$ olarak tanımlayalım ve $\alpha IJ^*L \subseteq xIJL \subseteq \aleph$ olduğunu belirtelim. Bu durumda $\alpha IL \nsubseteq \aleph$ olduğundan (7) gereği $xL \subseteq J^*L \subseteq \aleph$ bulunur. Böylece $x \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} L)$ sonucuna varılır.

$(8) \Longrightarrow (9)$ I,J,K $\mathfrak{R}$ nin has idealleri, L,M nin alt modülü olmak üzere $IJKL \subseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. Eğer $IJL \subseteq \aleph$ ise istenilen elde edilir. Bu durumda $IJL \nsubseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. $IJKL \subseteq \aleph$ olduğundan (8) gereği $K \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} IJL) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} L)$ elde edilir . Böylece $KL \subseteq \aleph$ sonucuna varılır.

$(9) \Longrightarrow (10)$ Birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ adına $xyz \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} L)$ olduğunu varsayalım.

Şimdi $I = x\mathfrak{R}$, $J = y\mathfrak{R}$, $K = z\mathfrak{R}$ olarak tanımlayalım. Buradan $IJKL \subseteq \aleph$ olur. O halde (9) gereği $xyL \subseteq IJL \subseteq \aleph$ ya da $zL \subseteq KL \subseteq \aleph$ olur. Böylece $xy \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} L)$ ya da $z \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} L)$ sonucuna varılır.

$(10) \Longrightarrow (1)$ Her $m \in M \setminus \aleph$ için $L = \mathfrak{R}m$ olarak tanımlayalım. Buradan (10) gereğince $(\aleph :_{\mathfrak{R}} L) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ ifadesi 1-yutan asal ideal olur ve devamı ise Teorem 3.2 $(9) \Longrightarrow (1)$ den elde edilir. ■

Önerme 3.6. *M bir $\mathfrak{R}-$modül ve $\aleph$, M nin bir klasik 1-yutan asal alt modülü olsun. O zaman birimsel olmayan tüm $x, y, z \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M$ adına $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xyzm) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} xym) \cup (\aleph :_{\mathfrak{R}} zm)$ ifadesi geçerlidir. Bu durumda $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xyzm) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} xym)$ ya da $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xyzm) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} zm)$ olur.*

İspat. Birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M$ için $\alpha \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} xyzm)$ olsun. Bu durumda $xyz(\alpha m) \in \aleph$ elde edilir ve bu da $xy(\alpha m) \in \aleph$ ya da $z(\alpha m) \in \aleph$ anlamına gelir. Böylece $\alpha \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} xym) \cup (\aleph :_{\mathfrak{R}} zm)$ sonucuna varılır. İspatın geri kalanı 'Eğer bir ideal iki idealin birleşimi içinde yer alıyorsa, onlardan biri tarafından kapsanması gerekir' gerçeğinden elde edilir. ■

Teorem 3.6. *M bir çarpımsal $\mathfrak{R}-$modül ve $\aleph$, M nin bir has alt modülü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

1. *$\aleph$, M nin 1-yutan asal alt modülüdür.*

2. *$\aleph$, M nin klasik 1-yutan asal alt modülüdür.*

3. *$(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$, $\mathfrak{R}$ nin 1-yutan asal idealidir.*

İspat. $(1) \Longrightarrow (2)$ Önerme 3.2 den elde edilir.

$(2) \Longrightarrow (3)$ Teorem 3.5 ten elde edilir.

$(3) \Longrightarrow (1)$ I ve J, $\mathfrak{R}$ nin has idealleri ve L, M nin alt modülü olmak üzere $IJL \subseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. M çarpımsal modül olması sebebiyle $L = KM$ koşulunu sağlayan bir K ideali, $\mathfrak{R}$ de bulunur. Eğer $K = \mathfrak{R}$ ise $IJL = IJM \subseteq \aleph$ elde edilir ki buradan $IJ \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ yazılabilir. Şimdi de K, $\mathfrak{R}$ de bir has ideal olduğunu varsayalım. O zaman $IJL = IJKM \subseteq \aleph$ olur ve böylece $IJK \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ bulunur. $(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$, $\mathfrak{R}$ nin 1-yutan asal ideali olduğundan $IJ \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ ya da $K \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ elde edilir. Eğer $IJ \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ ise ispat tamamlanır. O halde $K \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $L = KM \subseteq \aleph$ olur ve [18, Teorem 2.8] gereği $\aleph$, M nin 1-yutan asal alt modülü olduğu sonucuna varılır. ■

Tanım 3.2. M, $\mathfrak{R}$ üzerinde bir modül ve S, M nin boştan farklı bir alt kümesini belirtsin. $\mathfrak{R}$ nin tüm I,J,K has idealleri ve M nin her L,P alt modülleri için $(P+IJL)\cap S \neq \varnothing$ ve $(P+KL)\cap S \neq \varnothing$ iken $(P+IJKL)\cap S \neq \varnothing$ oluyorsa bu durumda S ye klasik 1-yutan asal $m-$kapalı küme denir.

Önerme 3.7. *M bir $\mathfrak{R}-$modül ve $\aleph$, M nin bir has alt modülü olsun. Bu durumda $\aleph$ nin klasik 1-yutan asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul $S = M \setminus \aleph$ nin klasik 1-yutan asal $m-$kapalı küme olmasıdır.*

İspat. $\aleph$, M nin bir klasik 1-yutan asal alt modülü olsun. I,J,K $\mathfrak{R}$ nin has idealleri, L ile P, M nin alt modülleri ve $S = M \setminus \aleph$ için $(P+IJL)\cap S \neq \varnothing$ ve $(P+KL)\cap S \neq \varnothing$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $(P+IJKL)\cap S \neq \varnothing$ olduğunu göstereceğiz. O halde aksini varsayalım. Bu durumda $P+IJKL \subseteq \aleph$ elde ederiz ve bu da $P \subseteq \aleph$ ve $IJKL \subseteq \aleph$ olduğu anlamına gelir. $\aleph$, bir klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan Teorem 3.5 e göre $IJL \subseteq \aleph$ ya da $KL \subseteq \aleph$ bulunur. Dolayısıyla $(P+IJL)\cap S = \varnothing$ ya da $(P+KL)\cap S = \varnothing$ olur ve bu iki durum da çelişkilidir. Demek ki kabulümüz yanlıştır ve $(P+IJKL)\cap S \neq \varnothing$ dir. Sonuç olarak S, bir klasik 1-yutan asal m-kapalı kümedir. Şimdi, tersine $S = M \setminus \aleph$ nin bir klasik 1-yutan asal m-kapalı küme olduğunu varsayalım. $\mathfrak{R}$ nin I,J,K has idealleri ve M nin L alt modülü için $IJKL \subseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $P = (0)$ için $P+IJKL = IJKL \subseteq \aleph$ olur ve $(P+IJKL)\cap S = \varnothing$ bulunur. S, klasik 1-yutan asal $m-$kapalı küme olduğundan $(P+IJL)\cap S = \varnothing$ veya $(P+KL)\cap S = \varnothing$ bulunur. Böylece, $IJL \subseteq \aleph$ ya da $KL \subseteq \aleph$ elde edilir ve buradan da Teorem 3.5 gereği, $\aleph$ nin klasik 1-yutan asal alt modül olduğu anlaşılır. ■

Teorem 3.7. *M, bir $\mathfrak{R}-$modül ve S, bir klasik 1-yutan asal $m-$kapalı küme olsun. Bu durumda M nin S den farklı tüm alt modüllerinin kümesi en az bir maksimal eleman içerir. Böyle bir maksimal eleman, klasik 1-yutan asal alt modüldür.*

İspat. $\Gamma = \{K : K, M \text{ nin alt modülüdür ve } K\cap S = \varnothing\}$ olarak tanımlayalım. $L = (0) \in \Gamma$ dır. Bu yüzden Γ boştan farklıdır. $(\Gamma, \subseteq)$ kismi sıralı küme olduğundan Zorn Lemma gereği maksimal elemanlardan en az biri mevcuttur. $\aleph$ nin bu maksimal elemanı belirttiğini varsayalım. Şimdi bu $\aleph$ elemanının klasik 1-yutan asal alt modül olduğunu göstereceğiz. Bunun için I,J,K, $\mathfrak{R}$ nin has idealleri ve L,M nin alt modülü olmak üzere $IJKL \subseteq \aleph$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca $IJL \nsubseteq \aleph$ ve $KL \nsubseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. $\aleph$ nin maksimalliğinden $(IJL+\aleph)\cap S \neq \varnothing$ ve $(KL+\aleph)\cap S \neq \varnothing$ dır. S, bir klasik 1-yutan asal m-kapalı küme olduğundan $(IJKL+\aleph)\cap S \neq \varnothing$ bulunur. Buradan $\aleph\cap S \neq \varnothing$ olduğu sonucu ortaya çıkar ve bu bir çelişkidir. Böylece, $IJL \subseteq \aleph$ ya da $KL \subseteq \aleph$ elde edilir ve Teorem 3.5 e göre $\aleph$, bir klasik 1-yutan asal alt modül olur. ■

Tanım 3.3. [32] uyarınca, eğer bir $\mathfrak{R}-$modül $\mathscr{F}$ nin tüm $K \longrightarrow L \longrightarrow M$ tam dizisi için $\mathscr{F}\otimes K \longrightarrow \mathscr{F}\otimes L \longrightarrow \mathscr{F}\otimes M$ dizisi de tam ise $\mathscr{F}$ ye düz (flat) $\mathfrak{R}-$ modül denir. Ayrıca,

$K \longrightarrow L \longrightarrow M$ tam olması için gerek ve yeter koşul $\mathscr{F} \otimes K \longrightarrow \mathscr{F} \otimes L \longrightarrow \mathscr{F} \otimes M$ dizisinin tam olması ise de $\mathscr{F}$ ye sadık düz (faithfully flat) $\mathfrak{R}-$modül denir. Azizi' nin [2] makalesinden bilindiği üzere $\aleph$, $\mathfrak{R}-$modül M nin bir alt modülü ve $\mathscr{F}$ bir düz $\mathfrak{R}-$modül iken her $x \in \mathfrak{R}$ için $(\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F}\otimes M} x) = \mathscr{F} \otimes (\aleph :_M x)$ eşitliğinin sağlandığını göstermiştir.

Teorem 3.8. *M, $\mathfrak{R}$ üzerinde bir modülü ve $\mathscr{F}$, $\mathfrak{R}$ üzerinde bir düz modülü belirtsin. Eğer $\aleph$, M nin bir klasik 1-yutan asal alt modülü olup $\mathscr{F} \otimes \aleph \neq \mathscr{F} \otimes M$ koşulunu da sağlıyorsa,*

bu durumda $\mathscr{F} \otimes \aleph$, $\mathscr{F} \otimes M$ nin klasik 1-yutan asal alt modülü olur.

İspat. Birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ alalım. Teorem 3.5 e göre $(\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M xy)$ ya da $(\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M z)$ dir. $(\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M xy)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda [2, Lemma 3.2] gereği $(\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F}\otimes M} xyz) = \mathscr{F} \otimes (\aleph :_M xyz) = \mathscr{F} \otimes (\aleph :_M xy) = (\mathscr{F} \otimes \aleph :_{F\otimes M} xy)$ elde edilir. Benzer şekilde eğer $(\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M z)$ ise yine [2, Lemma 3.2] gereğince $(\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F}\otimes M} xyz) = \mathscr{F} \otimes (\aleph :_M xyz) = \mathscr{F} \otimes (\aleph :_M z) = (\mathscr{F} \otimes \aleph :_{F\otimes M} z)$ bulunur. Dolayısıyla yine Teorem 3.5 gereği $\mathscr{F} \otimes \aleph$, $\mathscr{F} \otimes M$ nin klasik 1-yutan asal alt modülü olur. ■

Teorem 3.9. *M, $\mathfrak{R}$ üzerinde bir modül ve $\mathscr{F}$, $\mathfrak{R}$ üzerinde sadık düz modül olarak alınsın. O zaman $\aleph$, M nin bir klasik 1-yutan asal alt modülü olması için gerek ve yeter koşul $\mathscr{F} \otimes \aleph$, $\mathscr{F} \otimes M$ nin klasik 1-yutan asal alt modülü olmasıdır.*

İspat. $\aleph$, M nin klasik 1-yutan asal alt modülü olsun ve $\mathscr{F} \otimes \aleph = \mathscr{F} \otimes M$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $0 \longrightarrow \mathscr{F} \otimes \aleph \xrightarrow{\subseteq} \mathscr{F} \otimes M \longrightarrow 0$ bir tam dizi olur. $\mathscr{F}$, bir sadık düz $\mathfrak{R}-$modül olduğundan, $0 \longrightarrow \aleph \xrightarrow{\subseteq} M \longrightarrow 0$ bir tam dizi olur. Böylece $\aleph = M$ elde edilir ve bu bir çelişkidir. Bu yüzden $\mathscr{F} \otimes \aleph \neq \mathscr{F} \otimes M$ bulunur. Bu durumda Teorem 3.8 gereği $\mathscr{F} \otimes \aleph$ bir klasik 1-yutan asal alt modül olduğu sonucuna varılır. Tersine, $\mathscr{F} \otimes \aleph$ bir klasik 1-yutan asal alt modül olsun. Bu durumda $\mathscr{F} \otimes \aleph \neq \mathscr{F} \otimes M$ ve dolayısıyla $\aleph \neq M$ elde edilir. Birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ için Teorem 3.5 gereği $(\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F}\otimes M} xyz) = (\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F}\otimes M} xy)$ ya da $(\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F}\otimes M} xyz) = (\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F}\otimes M} z)$ dir. O halde, $(\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F}\otimes M} xyz) = (\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F}\otimes M} xy)$ olduğunu kabul edelim. Böylece $\mathscr{F} \otimes (\aleph :_M xy) = (\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F}\otimes M} xy) = (\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F}\otimes M} xyz) = \mathscr{F} \otimes (\aleph :_M xyz)$ elde edilir. Böylece $0 \longrightarrow \mathscr{F} \otimes (\aleph :_M xy) \xrightarrow{\subseteq} \mathscr{F} \otimes (\aleph :_M xyz) \longrightarrow 0$ bir tam dizi olur. $\mathscr{F}$, bir sadık düz $\mathfrak{R}-$modül olduğundan $0 \longrightarrow (\aleph :_M xy) \xrightarrow{\subseteq} (\aleph :_M xyz) \longrightarrow 0$ tam dizi olur ve böylece $(\aleph :_M xy) = (\aleph :_M xyz)$ sonucuna varılır. Benzer şekilde $(\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F}\otimes M} xyz) = (\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F}\otimes M} z)$ eşitliğinden de $(\aleph :_M z) = (\aleph :_M xyz)$ bulunur. Dolayısıyla, Teorem 3.5 gereği $\aleph$, bir klasik 1-yutan asal alt modül olur. ■

Sonuç 3.3. *M bir $\mathfrak{R}-$modül ve X bir değişken olmak üzere, eğer $\aleph$, M nin bir klasik 1-yutan asal alt modülü ise $\aleph[X]$, $M[X]$ in bir klasik 1-yutan asal alt modülü olur.*

İspat. $\aleph$, M nin bir klasik 1-yutan asal alt modülü olsun. $\Re[X]$ bir düz $\Re-$modüldür. Dolayısıyla Teorem 3.8 gereği $\Re[X]\otimes\aleph$, $\Re[X]\otimes M$ nin bir klasik asal alt modülü olur. $\Re[X]\otimes\aleph\cong\aleph[X]$ ve $\Re[X]\otimes M\cong M[X]$ olduğundan $\aleph[X]$, $M[X]$ in bir klasik 1-yutan asal alt modülü olduğu sonucuna varılır. ■

Önerme 3.8. *M, $\Re$ üzerinde bir modül, $\aleph$ M nin bir klasik 1-yutan asal alt modülü ve S, $(\aleph :_{\Re} M)\cap S=\emptyset$ olacak şekilde $\Re$ halkasının çarpımsal kapalı kümesi olsun. Bu durumda $S^{-1}\aleph$, $S^{-1}M$ nin bir klasik 1-yutan asal alt modülü olur.*

İspat. $\aleph$, M nin bir klasik 1-yutan asal alt modülü ve $(\aleph :_{\Re} M)\cap S=\emptyset$ olsun. Birimsel olmayan $\frac{x}{s},\frac{y}{t},\frac{z}{u}\in S^{-1}\Re$ ve $\frac{m}{v}\in S^{-1}M$ için $\frac{x}{s}\frac{y}{t}\frac{z}{u}\frac{m}{v}\in S^{-1}\aleph$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\alpha\in S$ için $\alpha(xyzm)=xyz(\alpha m)\in\aleph$ elde edilir. $\aleph$, bir klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan $xy(\alpha m)\in\aleph$ ya da $z(\alpha m)\in\aleph$ dir. Buradan $\frac{xym}{stv}=\frac{xy\alpha m}{st\alpha v}\in S^{-1}\aleph$ ya da $\frac{zm}{uv}=\frac{z\alpha m}{u\alpha v}\in S^{-1}\aleph$ bulunur. Böylece $S^{-1}\aleph$, $S^{-1}M$ nin bir klasik 1-yutan asal alt modülü olduğu sonucuna ulaşılır. ■

Her $i=1,2$ için $\Re_i$ bir birimli, değişmeli halka ve M_i bir $\Re_i-$modül belirtmek üzere $\Re=\Re_1\times\Re_2$ ve $M=M_1\times M_2$ olsun. Bu durumda $\aleph_1$, M_1 in alt modülü ve $\aleph_2$, M_2 nin alt modülü olacak şekilde $\aleph=\aleph_1\times\aleph_2$ formundadır.

Teorem 3.10. *$\Re=\Re_1\times\Re_2$ ayrışabilir bir halka ve M_1 bir $\Re_1-$modül, M_2 bir $\Re_2-$modül olmak üzere $M=M_1\times M_2$ bir $\Re-$modülü belirtsin. Kabul edelim ki $\aleph=\aleph_1\times\aleph_2$, M nin bir has alt modülüdür. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:*

1. *$\aleph$, M nin bir klasik 1-yutan asal alt modülüdür.*

2. *$\aleph_1=M_1$ ve $\aleph_2$, M_2 nin bir klasik asal alt modülü ya da $\aleph_2=M_2$ ve $\aleph_1$, M_1 in bir klasik asal alt modülü olur.*

3. *$\aleph$, M nin bir klasik asal alt modülüdür.*

İspat. $(1)\Longrightarrow(2)$ Kabul edelim ki $\aleph$, M nin bir klasik 1-yutan asal alt modülü olsun. Bu durumda Teorem 3.5 gereği $(\aleph :_{\Re} M)=(\aleph_1 :_{\Re_1} M_1)\times(\aleph_2 :_{\Re_2} M_2)$, $\Re$ nin bir 1-yutan asal ideali olur. O halde [16, Sonuç 2.5] gereği, $(\aleph_1 :_{\Re_1} M_1)=\Re_1$ ya da $(\aleph_2 :_{\Re_2} M_2)=\Re_2$ olur. Böylece $\aleph_1=M_1$ ya da $\aleph_2=M_2$ sonucuna varılır. Genelliği kaybetmeden $N_2=M_2$ olduğunu kabul edelim. Şimdi $x,y\in\Re_1$ ve $m\in M_1$ için $xym\in\aleph_1$ olduğunu kabul edelim. Eğer x ya da y birimsel ise $xm\in\aleph_1$ ya da $ym\in\aleph_1$ bulunur. O halde $x,y\in\Re_1$ birimselden farklı olsunlar. Buradan $(x,0)(1,0)(y,0)(m,0)=(xym,0)\in\aleph$ bulunur. $\aleph$, M nin bir klasik 1-yutan asal alt modülü olduğundan $(x,0)(1,0)(m,0)=(xm,0)\in\aleph$ ya da $(y,0)(m,0)=(ym,0)\in\aleph$ elde edilir. Dolayısıyla, $xm\in\aleph_1$ ya da $ym\in\aleph_1$ olur

ve bu da $\aleph_1$, M_1 in bir klasik asal alt modülü olduğu anlamına gelir. Benzer şekilde, $\aleph_1 = M_1$ ise $\aleph_2$, M_2 nin bir klasik asal alt modülü olduğu gösterilir.

$(2) \Longrightarrow (3)$ Genelliği kaybetmeden $\aleph_1 = M_1$ ve $\aleph_2$, M_2 nin bir klasik asal alt modülü olarak varsayılsın. Bu taktirde $(x,y),(z,w) \in \Re$ ve $(m,n) \in M$ için $(x,y)(z,w)(m,n) = (xzm, ywn) \in \aleph$ olsun. Buradan $ywn \in \aleph_2$ elde edilir ve $\aleph_2$, klasik asal alt modül olduğundan ya $yn \in \aleph_2$ ya da $wn \in \aleph_2$ olur. Böylece $(x,y)(m,n) \in \aleph$ ya da $(z,w)(m,n) \in \aleph$ elde edilir. Yani $\aleph$, bir klasik asal alt modüldür.

$(3) \Longrightarrow (1)$ Önerme 3.1 den elde edilir. ■

Teorem 3.11. *$\Re = R_1 \times \Re_2 \times ... \times \Re_n$ bir ayrışabilir halka ve $1 \leq i \leq n$ için M_i ler bir $\Re_i$−modül olmak üzere $M = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ bir $\Re$−modül belirtsin. $\aleph$, M nin has alt modülü olması halinde aşağıdaki koşullar denktir:*

1. *$\aleph$, M nin bir klasik 1-yutan asal alt modülüdür.*

2. *$\aleph = \prod_{i=1}^{n} \aleph_i$ olmak üzere, $k \in \{1,2,..,n\}$ için $\aleph_k$, M_k nın bir klasik asal alt modülü ve tüm $t \in \{1,2,..,n\} \setminus \{k\}$ adına $\aleph_t = M_t$ olur.*

3. *$\aleph$, M nin bir klasik asal alt modülüdür.*

İspat. $(1) \Longrightarrow (2)$ Teorem 3.10 ve Yardımcı Teorem 2.4 kullanılarak $\aleph$ üzerine tümevarımla elde edilir.

$(2) \Longrightarrow (3)$ Yardımcı Teorem 2.4 den elde edilir.

$(3) \Longrightarrow (1)$ Önerme 3.1 den elde edilir. ■

3.1 Birleşimli Çoğaltım Modüllerinde Klasik Asal Alt Modüller

M. D 'anna ve M. Fontana 2008 yılında yayınladıkları [33] makaleye göre J, değişmeli ve birimli $\Re$ halkasının bir ideali olmak üzere, $\Re$ halkasının J ideali boyunca birleşimli çoğaltımı (amalgamated duplication) olan $\Re \bowtie J = \{(r, r+i) \mid r \in \Re,\ i \in J\}$ olarak gösterilir ve $\Re \times \Re$ üzerinde bileşen bileşene toplama ve çarpma işlemleriyle tanımlanan özel bir alt halkadır. Aslında $\Re \bowtie J$, $\Re \times \Re$ ile aynı birim elemana sahip değişmeli bir alt halkadır. 2018 yılına gelindiğinde ise $\Re \bowtie J$ halka yapısı modül yapısına genelleştirilmiştir [34]. Buna göre M, $\Re$ üzerinde bir modül ve J, $\Re$ nin bir idealini belirtmek koşuluyla bir J ideali boyunca $\Re$−modül M nin birleşimli çoğaltımı (amalgamated duplication) olan $M \bowtie J = \{(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}+\mathfrak{m}') \mid \mathfrak{m} \in M,\ \mathfrak{m}' \in JM\}$ olarak gösterilir ve bu yapı bileşen bileşene toplama ve $(r, r+i)(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}+\mathfrak{m}') = (r\mathfrak{m}, (r+i)(\mathfrak{m}+\mathfrak{m}'))$ işlemiyle tanımlı bir

$\mathfrak{R} \ltimes J-$modüldür [34]. Burada $(r, r+i) \in \mathfrak{R} \ltimes J$ ve $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}+\mathfrak{m}') \in M \ltimes J$ dır. Eğer özel

olarak $M = \mathfrak{R}$ alınırsa $M \ltimes J$, $\mathfrak{R} \ltimes J$ halkasına dönüşür. Çalışmamızın bu bölümünde, bir $\mathfrak{R}-$modül M nin J ideali boyunca birleşimli çoğaltımı olan $M \ltimes J$ yapısında klasik asal alt modüller, klasik 1-yutan asal alt modüller ve klasik 2-yutan alt modüller incelenecektir. Ana teoremin daha iyi anlaşılabilmesi için öncelikle yardımcı teoremler ile başlayalım.

Yardımcı Teorem 3.1. *M bir $\mathfrak{R}-$modül, $\aleph$ M nin bir alt modülü ve J , $\mathfrak{R}$ nin ideali olsun. $\mathfrak{R} \ltimes J-$modül $M \ltimes J$ yı ele alalım. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

1. *Her $r \in \mathfrak{R}$ ve $i \in J$ için $\left(\aleph \ltimes J :_{M \ltimes J} (r, r+i)\right) = (\aleph :_M r) \ltimes J$ dır.*

2. *Her $\mathfrak{m} \in M$ ve $\mathfrak{m}' \in JM$ için $\left(\aleph \ltimes J :_{\mathfrak{R} \ltimes J} (\mathfrak{m}, \mathfrak{m}+\mathfrak{m}')\right) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} \mathfrak{m}) \ltimes J$ dır.*

İspat. Eğer $\aleph$, M ye ait bir alt modül olduğunda $\aleph \ltimes J = \{(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}+\mathfrak{m}') \mid \mathfrak{m} \in \aleph,\ \mathfrak{m}' \in JM\}$ de $\mathfrak{R} \ltimes J-$modül $M \ltimes J$ nın bir alt modülü olur.

(1) Kabul edelim ki $\mathfrak{m} \in M$ ve $\mathfrak{m}' \in JM$ için $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}+\mathfrak{m}') \in (\aleph :_M r) \ltimes J$ olarak alınsın. Bu taktirde $\mathfrak{m} \in (\aleph :_M r)$ olur ve $r\mathfrak{m} \in \aleph$ elde edilir. Ardından $r\mathfrak{m}' + i\mathfrak{m} + i\mathfrak{m}' \in JM$ olduğundan $(r, r+i)(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}+\mathfrak{m}') = (r\mathfrak{m}, r\mathfrak{m} + r\mathfrak{m}' + i\mathfrak{m} + i\mathfrak{m}') \in \aleph \ltimes J$ sonucuna varılır. Bu nedenle $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}+\mathfrak{m}') \in \left(\aleph \ltimes J :_{M \ltimes J} (r, r+i)\right)$ bulunur. Şimdi de tersini göstermek için $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}+\mathfrak{m}') \in \left(\aleph \ltimes J :_{M \ltimes J} (r, r+i)\right)$ alalım. Buradan $(r, r+i)(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}+\mathfrak{m}') \in \aleph \ltimes J$ olur. Böylece $r\mathfrak{m} \in \aleph$ ve bu da $\mathfrak{m} \in (\aleph :_M r)$ anlamına gelir. Dolayısıyla $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}+\mathfrak{m}') \in (\aleph :_M r) \ltimes J$ bulunur ve ispat tamamlanır.

(2) (1) kısma benzer şekilde elde edilir. ■

Yardımcı Teorem 3.2. *$\mathfrak{R}$ bir halka, J $\mathfrak{R}$ nin bir ideali ve $\mathfrak{R} \ltimes J$ birleşimli çoğaltım halkası olsun. Bu durumda her $j \in J$ ve $\alpha \in \mathfrak{R}$ için $(\alpha, \alpha+j)$, $\mathfrak{R} \ltimes J$ da birimsel olması için gerekli ve yeterli şart α ve $(\alpha+j)$ nin $\mathfrak{R}$ de birimsel olmasıdır.*

İspat. Gerekliliğin ispatı açıktır. Yeterliliğin ispatı için ise α ve $(\alpha+j)$ nin birimsel olduğunu varsayalım. Bu durumda $\alpha x = 1 = (\alpha+j)y$ olacak şekilde $x, y \in \mathfrak{R}$ vardır. Böylece $(\alpha+j)(x - yxj) = \alpha x - y\alpha xj + jx - yxj^2 = \alpha x + jx - jxy(\alpha+j) = 1$ bulunur. Dolayısıyla $(\alpha, \alpha+j)(x, x-yxj) = (1, 1)$ sonucuna varılır ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.12. *M bir $\mathfrak{R}-$modül, $\aleph$ M nin bir alt modülü ve J, $\mathfrak{R}$ nin bir ideali olsun. $\mathfrak{R} \ltimes J-$modül $M \ltimes J$ yı ele alalım. Bu durumda aşağıdaki durumlar sağlanır.*

1. *$\aleph \ltimes J$, $M \ltimes J$ nın bir klasik asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul $\aleph$, M nin bir klasik asal alt modül olmasıdır.*

2. $\aleph \bowtie J$, $M \bowtie J$ *nın bir klasik 1-yutan asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul* $\aleph$, M *nin bir klasik 1-yutan asal alt modülü olmasıdır.*

3. $\aleph \bowtie J$, $M \bowtie J$ *nın bir klasik 2-yutan alt modülü olması için gerek ve yeter koşul* $\aleph$, M *nin bir klasik 2-yutan alt modülü olmasıdır.*

İspat. (1) $\aleph \bowtie J$, $M \bowtie J$ bir klasik asal alt modülü olduğunu kabul edelim. Ayrıca $x, y \in \Re$ ve $m \in M$ için $xym \in \aleph$ olduğunu varsayalım. Buradan $(x,x)(y,y)(m,m) = (xym, xym) \in \aleph \bowtie J$ elde ederiz. $\aleph \bowtie J$ bir klasik asal alt modül olduğundan $(x,x)(m,m) \in \aleph \bowtie J$ ya da $(y,y)(m,m) \in \aleph \bowtie J$ bulunur. Böylece $xm \in \aleph$ ya da $ym \in \aleph$ elde edilir ve $\aleph$, M nin bir klasik asal alt modülü olduğu sonucuna ulaşılır. Tersini göstermek için $\aleph$ nin M ye ait klasik asal alt modül olduğunu düşünelim. $(x, x+i), (y, y+j) \in \Re \bowtie J$ alalım. Yardımcı Teorem 3.1 gereği $\left(\aleph \bowtie J :_{M \bowtie J} (x, x+i)(y, y+j)\right) = (\aleph :_M xy) \bowtie J$ dir. $\aleph$, M nin bir klasik asal alt modülü olduğundan Yardımcı Teorem 2.3 gereği $(\aleph :_M xy) = (\aleph :_M x)$ ya da $(\aleph :_M xy) = (\aleph :_M y)$ olmalıdır. Genelliği kaybetmeden $(\aleph :_M xy) = (\aleph :_M x)$ olduğunu varsayalım. Yardımcı Teorem 3.1 yi tekrar kullanarak $\left(\aleph \bowtie J :_{M \bowtie J} (x, x+i)(y, y+j)\right) = (\aleph :_M xy) \bowtie J = (\aleph :_M x) \bowtie J = \left(\aleph \bowtie J :_{M \bowtie J} (x, x+i)\right)$ elde edilir. Diğer durumdan da benzer şekilde $\left(\aleph \bowtie J :_{M \bowtie J} (x, x+i)(y, y+j)\right) = \left(\aleph \bowtie J :_{M \bowtie J} (y, y+j)\right)$ bulunur. Dolayısıyla Yardımcı Teorem 2.3 gereği $\aleph \bowtie J$, $M \bowtie J$ nın bir klasik asal alt modülü olur.

(2) Farz edelim ki $\aleph \bowtie J$, $M \bowtie J$ nın bir klasik 1-yutan asal alt modülü olsun. Birimsel olmayan $x, y, z \in \Re$ ve $m \in M$ durumunda $xyzm \in \aleph$ olduğunu varsayalım. Bu durumda Yardımcı Teorem 3.2 gereği $(x,x), (y,y)$ ve $(z,z) \in \Re \bowtie J$ da birimsel olmayan elemanlardır. Bu durumda $(x,x)(y,y)(z,z)(m,m) \in \aleph \bowtie J$ yazabiliriz ve $\aleph \bowtie J$, klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan $(x,x)(y,y)(m,m) \in \aleph \bowtie J$ ya da $(z,z)(m,m) \in \aleph \bowtie J$ bulunur. Böylelikle $xym \in \aleph$ ya da $zm \in \aleph$ olur. Yani $\aleph$, M nin bir klasik 1-yutan asal alt modülü olduğu sonucuna ulaşılır. Şimdi de yeterliliğin ispatı için $\aleph$, M nin klasik 1-yutan asal alt modülü olduğunu kabul edelim. Eğer $\aleph$, klasik asal alt modül ise (1) koşulu gereği $\aleph \bowtie J$, bir klasik asal alt modül olur. Dolayısıyla Önerme 3.1 gereği $\aleph \bowtie J$, $M \bowtie J$ nın klasik 1-yutan asal alt modülü olduğu sonucuna varılır. O halde şimdi de $\aleph$ klasik asal alt modül olmasın. Bu durumda Teorem 3.3 den, $(\Re, q)$ bir yerel halka olur ve $m \in M - \aleph$ için $q^2 \subseteq (\aleph :_\Re m)$ koşulu sağlanır. $Jac(\Re)$, $\Re$ nin Jacobson radikalini belirttiğinden $J \subseteq q = Jac(\Re)$ sağlanır ve Yardımcı Teorem 3.2 gereği, $(x, x+i)$ nın $\Re \bowtie J$ de birimsel olması için gerek ve yeter koşul $x \in \Re$ birimsel olmasıdır. Şimdi birimsel olmayan $(x, x+i)$, $(y, y+j)$, $(z, z+k) \in \Re \bowtie J$ alalım. O halde $x, y, z \in \Re$ de birimselden farklı olurlar. $\aleph$, klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan Teorem 3.5 gereği $(\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M xy)$ ya da $(\aleph :_M xyz) =$

$(\aleph :_M z)$ eşitliği söz konusudur. Genelliği kaybetmeden $(\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M xy)$ kabul edelim. Yardımcı Teorem 3.1 den, $\big(\aleph \bowtie J :_{M\bowtie J} (x,x+i)(y,y+j)(z,z+k)\big) = (\aleph :_M xyz) \bowtie J = (\aleph :_M xy) \bowtie J = \big(\aleph \bowtie J :_{M\bowtie J} (x,x+i)(y,y+j)\big)$ bulunur. Benzer şekilde, $\big(\aleph \bowtie J :_{M\bowtie I} (x,x+i)(y,y+j)(z,z+k)\big) = \big(\aleph \bowtie J :_{M\bowtie J} (z,z+k)\big)$ elde edilir. Dolayısıyla, Teorem 3.5 gereği $\aleph \bowtie J$, $M \bowtie J$ nın bir klasik 1-yutan asal alt modülü olur.

(3) $\aleph \bowtie J$, $M \bowtie J$ nın bir klasik 2-yutan alt modülü olsun. Bu durumda (1) ve (2) durumlarına benzer şekilde $\aleph$, M nin bir klasik 2-yutan alt modülü olur. Şimdi, tersini göstermek için $\aleph$, M nin bir klasik 2-yutan alt modülü olduğunu varsayalım. $(x,x+i),(y,y+j),(z,z+k) \in \mathfrak{R} \bowtie J$ için Yardımcı Teorem 3.1 gereği $\big(\aleph \bowtie J :_{M\bowtie J} (x,x+i)(y,y+j)(z,z+k)\big) = (\aleph :_M xyz) \bowtie J$ bulunur. Teorem 2.8 den bilindiği üzere $(\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M xy) \cup (\aleph :_M xz) \cup (\aleph :_M yz)$ eşitliği söz konusudur. Şimdi $(m, m+m') \in \big(\aleph \bowtie J :_{M\bowtie J} (x,x+i)(y,y+j)(z,z+k)\big)$ alalım. Buradan Yardımcı Teorem 3.1 gereği $(m, m+m') \in (\aleph :_M xyz) \bowtie J$ elde edilir. Böylece $m \in (\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M xy) \cup (\aleph :_M xz) \cup (\aleph :_M yz)$ olur. Genelliği kaybetmeden, $m \in (\aleph :_M xy)$ olduğunu varsayalım. Bu sayede $(m, m+m') \in (\aleph :_M xy) \bowtie J = \big(\aleph \bowtie J :_{M\bowtie J} (x,x+i)(y,y+j)\big)$ elde edilir. Dolayısıyla $\big(\aleph \bowtie J :_{M\bowtie J} (x,x+i)(y,y+j)(z,z+k)\big) \subseteq \big(\aleph \bowtie J :_{M\bowtie J} (x,x+i)(y,y+j)\big) \cup \big(\aleph \bowtie J :_{M\bowtie J} (x,x+i)(z,z+k)\big) \cup \big(\aleph \bowtie J :_{M\bowtie J} (y,y+j)(z,z+k)\big)$ bulunur. Tersine kapsama her zaman sağlandığından $\big(\aleph \bowtie J :_{M\bowtie J} (x,x+i)(y,y+j)(z,z+k)\big) = \big(\aleph \bowtie J :_{M\bowtie J} (x,x+i)(y,y+j)\big) \cup \big(\aleph \bowtie J :_{M\bowtie J} (x,x+i)(z,z+k)\big) \cup \big(\aleph \bowtie J :_{M\bowtie J} (y,y+j)(z,z+k)\big)$ sonucuna varılır. Böylelikle, Teorem 2.8 gereği $\aleph \bowtie J$, $M \bowtie J$ nın bir klasik 2-yutan alt modülü olur. ■

4
ZAYIF KLASİK 1-YUTAN ASAL ALT MODÜLLER

Bu bölümde zayıf klasik 1-yutan asal alt modüllere dair bir çok karekterizasyon verilmiş ve örnekler sunulmuştur. Bölüm boyunca ele alınan tüm halkaların değişmeli ve sıfırdan farklı birim elemana sahip olduğu varsayılacaktır. Tüm modüllerin birimli olduğu kabul edilmektedir.

Tanım 4.1. M, $\mathfrak{R}$ üzerinde bir modülü ve $\aleph$, M nin has alt modülünü belirtsin. Şayet birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M$ iken $0 \neq xyzm \in \aleph$ olduğunda $xym \in \aleph$ ya da $zm \in \aleph$ koşulu sağlanıyorsa $\aleph$ ye zayıf klasik 1-yutan asal alt modül denir.

Bu durumda açıkça görülüyor ki her klasik 1-yutan asal alt modül, bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olur. Fakat bu önermenin tersinin genelde doğru olmadığını aşağıdaki örnekle gösterebiliriz.

Örnek 4.1. *p, q, r birbirinden farklı asal sayılar ve $\mathbb{Z}$−modül $M = \mathbb{Z}_{pqr}$ olsun. $\aleph = (\overline{0})$ alt modülünün zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olduğu açıktır. Fakat $p.q.r.\overline{1} \in \aleph$ iken $p.q.\overline{1} \notin \aleph$ ve $r.\overline{1} \notin \aleph$ olduğundan $\aleph$, klasik 1-yutan asal alt modül değildir.*

Teorem 4.1. *M, $\mathfrak{R}$ üzerinde bir modül ve $\aleph$, onun kendinden farklı bir alt modülü olarak alınsın. Eğer tüm $m \in M \setminus \aleph$ için $(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ zayıf 1-yutan asal ideal ise $\aleph$, M nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olur. Tersi ise $Ann_{\mathfrak{R}}(m) = 0$ olduğunda sağlanır.*

İspat. Her $m \in M \setminus \aleph$ için $(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$, $\mathfrak{R}$ nin bir zayıf 1-yutan asal ideali olsun. Ayrıca birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M$ için $0 \neq xyzm \in \aleph$ sağlandığını kabul edelim. Bu durumda $m \in M \setminus \aleph$ için $0 \neq xyz \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ olur ve $(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$, zayıf 1-yutan asal ideal olduğundan $xy \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ ya da $z \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ elde edilir ve dolayısıyla $xym \in \aleph$ ya da $zm \in \aleph$ bulunur. Böylelikle $\aleph$, M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olur. Tersini göstermek için $\aleph$, M nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olduğunu ve $m \in M \setminus \aleph$ için $Ann_{\mathfrak{R}}(m) = 0$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ için $0 \neq xyz \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ olsun. Buradan $0 \neq xyzm \in \aleph$ elde edilir. $\aleph$, bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan ya $xym \in \aleph$ ya da $zm \in \aleph$ ulaşılır.

Böylece $xy \in (\aleph :_{\Re} m)$ ya da $z \in (\aleph :_{\Re} m)$ bulunur. Dolayısıyla, $(\aleph :_{\Re} m)$, $\Re$ nin bir zayıf 1-yutan asal ideali olduğu sonucuna varılır. ■

Teoremdeki, $Ann_{\Re}(m) = 0$ koşulu gereklidir. Başka bir ifadeyle $\aleph$, zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olsa dahi, eğer $m \in M \setminus \aleph$ için $Ann_{\Re}(m) \neq 0$ ise $(\aleph :_{\Re} m)$, $\Re$ nin zayıf 1-yutan asal ideal olmayabileceğini aşağıdaki örnekle inceleyelim.

Örnek 4.2. *p ve q farklı asal sayılar ve $\mathbb{Z}-$modül $M = \mathbb{Z}_{p^2q^2}$ olsun. $\aleph = (\overline{0})$ ve $m = \overline{p}$ alalım. Bu durumda $\aleph$, bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modül ve $m \in M \setminus \aleph$ için $Ann_{\mathbb{Z}}(m) \neq 0$ olur. Ayrıca, $(\aleph :_{\mathbb{Z}} M) = pq^2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ nin bir zayıf 1-yutan asal ideali değildir.*

M, bir $\Re-$modül olsun ve [19] dan hatırlanacağı üzere, M nin tüm burulmalı elemanları kümesi $T_{\Re}(M) = \{m \in M \mid rm = 0$ olacak şekilde $0 \neq r \in \Re$ var$\}$ ile gösterilir. Burada $T_{\Re}(M)$ nin her zaman M nin alt modülü olmayacağını belirtmek gerekir. Örneğin $\Re = \mathbb{Z} \times Z-$modül $M = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ olarak seçersek $T_{\Re}(M) = (0) \times \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q} \times (0)$, M nin bir alt modülü olmadığı açıkça görülür.

Teorem 4.2. *M bir burulmalı olmayan modül ve $\aleph$, $T_{\Re}(M) \subseteq \aleph$ koşulunu sağlayan M nin has alt modülünü belirtsin. Bu taktirde $\aleph$, M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülüdür ancak ve yalnız herhangi bir $m \in M \setminus \aleph$ için $(\aleph :_{\Re} m)$, $\Re$ nin bir zayıf 1-yutan asal idealidir.*

İspat. Kabul edelim ki $T_{\Re}(M) \subseteq \aleph$ olsun. Bu durumda $M - N \subseteq M - T_{\Re}(M)$ olur ve bu da $m \in M \setminus \aleph$ için $Ann_{\Re}(m) = 0$ olduğu anlamına gelir. Geri kalan kısım Teorem 4.1 den elde edilir. ■

Sonuç 4.1. *$\Re$ bir halka ve J, $\Re$ nin bir has ideali olsun. Bu durumda J, $\Re-$modül $\Re$ nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülüdür ancak ve yalnız J, $\Re$ nin bir zayıf 1-yutan asal idealidir.*

İspat. J, $\Re-$modül $\Re$ nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olsun. Bu durumda, Teorem 4.1 gereği $(J :_{\Re} 1) = J$, $\Re$ nin bir zayıf 1-yutan asal ideali olur. Tersini göstermek için J, $\Re$ nin bir zayıf 1-yutan asal ideali olduğunu varsayalım. Birimsel olmayan $x, y, z \in \Re$ ve $m \in M$ için $0 \neq xyzm = xy(zm) \in J$ olsun. J, bir zayıf 1-yutan asal ideal olduğundan $xy \in J$ ya da $zm \in J$ elde edilir. Yani, $xym \in J$ ya da $zm \in J$ olur ki buradan J, $\Re-$modül $\Re$ nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olduğu sonucuna varılır. ■

Teorem 4.3. *M ve M' iki $\Re-$modül ve $f : M \longrightarrow M'$ bir $\Re-$homomorfizma olsun. Bu durumda,*

1. *f bir monomorfizma ve $\aleph'$, $f^{-1}(\aleph') \neq M$ koşulunu sağlayan M' nün bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü ise $f^{-1}(\aleph')$, M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olur.*

2. *f bir epimorfizma ve $\aleph$, Çek(f) yi kapsayan M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü ise $f(\aleph)$, M'nün bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olur.*

İspat. (1) $f^{-1}(\aleph') \neq M$ olmak üzere $\aleph'$, M'nün bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülünü belirtsin. Birimsel olmayan $x, y, z \in \Re$ ve $m \in M$ olması durumunda $0 \neq xyzm \in f^{-1}(\aleph')$ alalım. f bir monomorfizma olduğundan, $0 \neq f(xyzm) = xyzf(m) \in \aleph'$ elde edilir. $\aleph'$, bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan $xyf(m) \in \aleph'$ ya da $zf(m) \in \aleph'$ elde edilir. Bu da $f(xym) \in \aleph'$ ya da $f(zm) \in \aleph'$ olduğu anlamına gelir. Böylece $xym \in f^{-1}(\aleph')$ ya da $zm \in f^{-1}(\aleph')$ elde edilir. Dolayısıyla $f^{-1}(\aleph')$, M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olur.

(2) Kabul edelim ki $\aleph$, M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olsun. Birimsel olmayan $x, y, z \in \Re$ ve $m' \in M'$ için $0 \neq xyzm' \in f(\aleph)$ olduğunu varsayalım. Kabul gereği, $m' = f(m)$ olacak şekilde bir $m \in M$ bulunur. Böylece $0 \neq xyzm' = xyzf(m) = f(xyzm) \in f(\aleph)$ eşitliği sağlanır. Çek$(f) \subseteq \aleph$ olduğundan $0 \neq xyzm \in \aleph$ bulunur. $\aleph$, M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olduğundan $xym \in \aleph$ ya da $zm \in \aleph$ dir. Dolayısıyla, $f(xym) = xym' \in f(\aleph)$ ya da $f(zm) = zm' \in f(\aleph)$ elde edilir. Sonuç olarak, $f(\aleph)$, M'nün bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olur. ■

Teorem 4.3 ün doğrudan bir sonucu olarak, Sonuç 4.2 yi elde ederiz.

Sonuç 4.2. *M, $\Re$ üzerinde bir modül ve $L \subseteq \aleph$ olacak şekilde M nin alt modülleri olsunlar. Eğer $\aleph$, M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü ise $\aleph/L$, M/L nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olur.*

İspat. $\sigma : M \longrightarrow M/L$ ile gösterilen her $m \in M$ için $\sigma(m) = m + L$ ile tanımlı doğal homomorfizma ile istenilen sonuç elde edilir. ■

Sonuç 4.2 nin tersinin her zaman doğru olması gerekmez. Bunu aşağıdaki örnekle gösterebiliriz.

Örnek 4.3. *p bir asal sayı olmak üzere $\mathbb{Z}$–modül $M = \mathbb{Z}_{p^3}^3$ alalım. $L = \mathbb{Z}_{p^3} \times \overline{(0)} \times \overline{(0)} = \aleph$ olsun. Bu durumda $\aleph/L$ bir sıfır alt modülü olur ki bu da bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olduğu anlamına gelir. Fakat $p^3(\overline{1}, \overline{1}, \overline{1}) \in \aleph$ iken $p^2(\overline{1}, \overline{1}, \overline{1}) \notin \aleph$ olduğundan $\aleph$, M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü değildir.*

Sonuç 4.3. *K ve $\aleph$, $K \subseteq \aleph \subseteq M$ olacak şekilde M nin iki alt modülü olsun. Şayet K, M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü ve $\aleph/K$, M/K nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü ise $\aleph$, M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olur.*

İspat. Kabul edelim ki K, M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü ve $\aleph/K$, M/K nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olsun. Birimsel olmayan $x, y, z \in \Re$ ve $m \in M$ olması durumunda $0 \neq xyzm \in \aleph$ alınsın. Eğer $xyzm \in K$ ise K, zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan $xym \in K \subseteq \aleph$ ya da $zm \in K \subseteq \aleph$ elde edilir. Şimdi de $xyzm \notin K$ olsun. Bu durumda $0 \neq xyz(m+K) \in \aleph/K$ yazabiliriz ve $\aleph/K$, bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan $xy(m+K) \in \aleph/K$ ya da $z(m+K) \in \aleph/K$ bulunur. Buradan, $xym \in \aleph$ ya da $zm \in \aleph$ olur ve sonuç olarak $\aleph$, M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülüdür. ■

Teorem 4.4. *M bir $\Re-$modül, $\aleph$, M nin alt modülü ve S, $\Re$ nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun. Eğer $\aleph$, M nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü ve $(\aleph :_{\Re} M) \cap S = \emptyset$ ise $S^{-1}\aleph$, $S^{-1}M$ nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olur.*

İspat. Varsayalım ki $\aleph$, M nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü ve $(\aleph :_{\Re} M) \cap S = \emptyset$ olsun. Birimsel olmayan $\frac{a}{s}, \frac{b}{t}, \frac{c}{u} \in S^{-1}\Re$ ve $\frac{m}{v} \in S^{-1}M$ için $0 \neq \frac{a}{s}\frac{b}{t}\frac{c}{u}\frac{m}{v} \in S^{-1}\aleph$ olsun. Bu durumda, $0 \neq wabcm \in \aleph$ olacak şekilde $w \in S$ vardır. $\aleph$, zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan $ab(wm) \in \aleph$ ya da $c(wm) \in \aleph$ bulunur. Dolayısıyla, $\frac{a}{s}\frac{b}{t}\frac{m}{v} = \frac{wabm}{wstv} \in S^{-1}\aleph$ ya da $\frac{c}{u}\frac{m}{v} = \frac{wcm}{wuv} \in S^{-1}\aleph$ elde ederiz. Böylelikle, $S^{-1}\aleph$, $S^{-1}M$ nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olduğu sonucuna ulaşırız. ■

Önerme 4.1. *$\aleph$, M ye ait bir has alt modül belirtsin.*

1. *Şayet $\aleph$, M nin zayıf 1-yutan asal alt modülü ise $\aleph$, M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülüdür.*

2. *Şayet $\aleph$, M nin bir zayıf klasik asal alt modülünü belirttiğinde $\aleph$, M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü ve zayıf yarı asal alt modülü olur.*

3. *Kabul edelim ki M indirgenmiş modül olsun. Bu durumda $\aleph$, M nin bir zayıf klasik asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul $\aleph$, M nin bir zayıf yarı asal alt modül ve zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olmasıdır.*

İspat. (1) ve (2) Açıktır.

(3) Gerekliliğinin ispatı 2.Kısımdan elde edilir. Yeterliliğinin ispatında ise $\aleph$, indirgenmiş bir M modülünün zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü ve zayıf yarı asal alt modülü

olduğunu kabul edelim. $0 \neq xym \in \aleph$ olacak şekilde $x, y \in \Re$ ve $m \in M$ alalım. Genelliği kaybetmeden, x ve y birimsel olmadığını varsayabiliriz. M, indirgenmiş modül olduğundan $0 \neq x^2ym \in \aleph$ elde ederiz. $\aleph$, zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan $x^2m \in \aleph$ ya da $ym \in \aleph$ bulunur. Eğer, $x^2m \in \aleph$ ise $\aleph$, zayıf yarı asal alt modül olduğundan $xm \in \aleph$ dir. İkinci durumdan da istenilen elde edildiğinden $\aleph$, M nin zayıf klasik asal alt modül olduğu sonucuna varılır. ■

Önerme 4.2. *M, bir devirli $\Re-$modül olsun. Bu durumda M nin kendinden farklı bir $\aleph$ alt modülü zayıf 1-yutan asal alt modüldür ancak ve yalnız $\aleph$, zayıf klasik 1-yutan asal alt modüldür.*

İspat. ($\Longrightarrow$) Önerme 4.1 (1) gereği açıktır.

($\Longleftarrow$) Bazı $m \in M$ için $M = \Re m$ ve $\aleph$, M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olsun. Ayrıca birimsel olmayan $x, y \in \Re$ ve $\alpha \in M$ için $0 \neq xy\alpha \in \aleph$ olduğunu kabul edelim. Eğer $\Re\alpha = Rm = M$ ise $xy \in (\aleph :_{\Re} M)$ bulunur. Kabul edelim ki $\Re\alpha \neq M$ olsun. O halde $\alpha = zm$ olacak şekilde birimsel olmayan bir $z \in \Re$ bulunur. Dolayısıyla $0 \neq xy\alpha = xyzm \in \aleph$ dir. $\aleph$, M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olduğu için de $xym \in \aleph$ ya da $zm \in \aleph$ elde edilir. Böylelikle $xy \in (\aleph :_{\Re} M)$ ya da $\alpha = zm \in \aleph$ bulunur ve buradan $\aleph$, M nin bir zayıf 1-yutan asal alt modül olduğu sonucuna varılır. ■

Tanım 4.2. $\aleph$, M nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olmak üzere, birimsel olmayan $x, y, z \in \Re$ ve $m \in M$ alalım. Eğer $xyzm = 0$ iken $xym \notin \aleph$ ve $zm \notin \aleph$ sağlanıyorsa, (x, y, z, m) $\aleph$ nin klasik 1-dörtlü sıfırı olarak adlandırılır.

Teorem 4.5. *$\aleph$, M nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü ve birimsel olmayan $x, y, z \in \Re$ ve M nin bir K alt modülü için $xyzK \subseteq \aleph$ koşulu sağlansın. Eğer, her $k \in K$ için (x, y, z, k) $\aleph$ nin klasik 1-dörtlü sıfırı değilse, bu durumda $xyK \subseteq \aleph$ ya da $zK \subseteq \aleph$ elde edilir.*

İspat. Varsayalım ki her $k \in K$ için (x, y, z, k), $\aleph$ nin klasik 1-dörtlü sıfırı değil ve $xyzK \subseteq \aleph$ olsun. Aksine $xyK \nsubseteq \aleph$ ve $zK \nsubseteq \aleph$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $xyk_1 \notin \aleph$ ve $zk_2 \notin \aleph$ olacak şekilde $k_1, k_2 \in K$ vardır. Eğer $xyzk_1 \neq 0$ ise, $xyk_1 \notin \aleph$ ve $\aleph$, zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan $zk_1 \in \aleph$ sonucuna varırız. Şimdi de $xyzk_1 = 0$ olduğunu varsayalım. (x, y, z, k_1), $\aleph$ nin klasik 1-dörtlü sıfırı olmadığından $zk_1 \in \aleph$ olduğu anlaşılır. Her iki durumda da $zk_1 \in \aleph$ elde edilir. Benzer şekilde, $xyk_2 \in \aleph$ elde edilir. Diğer taraftan $xyz(k_1 + k_2) \in \aleph$ olduğunu biliyoruz. Yukarıdakine benzer bir argümanla $xy(k_1 + k_2) \in \aleph$ ya da $z(k_1 + k_2) \in \aleph$ bulunur. Böylelikle, $xyk_2 \in \aleph$ ve $zk_1 \in \aleph$ bilgisi kullanılarak $xyk_1 \in \aleph$ ve $zk_2 \in \aleph$ sonucuna ulaşırız ki, bu iki sonuç çelişkilidir. Dolayısıyla, $xyK \subseteq \aleph$ ya da $zK \subseteq \aleph$ elde edilir. ■

Tanım 4.3. $\aleph$, M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü ve $\mathfrak{R}$ nin bir takım I,J,L idealleri ile M de herhangi bir K alt modülü için $IJLK \subseteq \aleph$ olsun. Eğer her $x \in I$, $y \in J$, $z \in L$ ve $k \in K$ için (x,y,z,k), $\aleph$ nin klasik 1-dörtlü sıfırı değilse o zaman $\aleph$, $IJLK$ ya göre serbest klasik 1-dörtlü sıfır olarak adlandırılır.

Not 4.1. $\aleph$, M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü ve $\mathfrak{R}$ nin bir takım I,J,L has idealleri ile M de herhangi bir K alt modülü için $IJLK \subseteq \aleph$ olarak alınsın. Bu durumda her $x \in I$, $y \in J$, $z \in L$ ve $k \in K$ için $\aleph$, $IJLK$ ya göre serbest klasik 1-dörtlü sıfır ise $xyk \in \aleph$ ya da $zk \in \aleph$ elde edilir.

Sonuç 4.4. *$\aleph$, M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü ve $\mathfrak{R}$ nin bir takım I,J,L idealleri ile M ye ait herhangi bir K alt modülü için $IJLK \subseteq \aleph$ olsun. Bu durumda eğer $\aleph$, $IJLK$ ya göre serbest klasik 1-dörtlü sıfir ise $IJK \subseteq \aleph$ ya da $LK \subseteq \aleph$ elde edilir.*

İspat. $\aleph$, $IJLK$ ya göre serbest klasik 1-dörtlü sıfır olsun. $IJK \nsubseteq \aleph$ ya da $LK \nsubseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $x \in I$, $y \in J$ ve $z \in L$ elemanları, $xyK \nsubseteq \aleph$ ve $zK \nsubseteq \aleph$ sağlanacak şekilde bulunur. $\aleph$, $IJLK$ ya göre serbest klasik 1-dörtlü sıfır ve $xyzK \subseteq \aleph$ olduğundan Teorem 4.5 gereği $xyK \subseteq \aleph$ ya da $zK \subseteq \aleph$ sonucunu elde ederiz ve bu durum çelişkiye yol açar. Dolayısıyla, $IJK \subseteq \aleph$ ya da $LK \subseteq \aleph$ olmalıdır. ■

Sıradaki teoremle, zayıf klasik 1-yutan asal alt modülleri karakterize eden uzun bir liste sunuyoruz.

Teorem 4.6. *M bir $\mathfrak{R}-$modül ve $\aleph$, M nin bir has alt modülünü belirtsin. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir:*

1. *$\aleph$, bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modüldür.*

2. *Birimsel olmayan her $x,y,z \in \mathfrak{R}$ için, $(\aleph :_M xyz) = (0 :_M xyz) \cup (\aleph :_M xy) \cup (\aleph :_M z)$ dir.*

3. *Birimsel olmayan tüm $x,y,z \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M$ için $xym \notin \aleph$ koşulunda $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xym) = (0 :_{\mathfrak{R}} xym) \cup (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ dir.*

4. *Birimsel olmayan tüm $x,y,z \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M$ için $xym \notin \aleph$ olması halinde $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xym) = (0 :_{\mathfrak{R}} xym)$ ya da $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xym) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ dir.*

5. *Birimsel olmayan her $x,y \in \mathfrak{R}$, $m \in M$ ve $\mathfrak{R}$ nin bir has J ideali için $0 \neq xyJm \subseteq \aleph$ iken $xym \in \aleph$ ya da $Jm \subseteq \aleph$ dir.*

6. *Birimsel olmayan her* $x, y \in \mathfrak{R}$, $m \in M$ *ve* J, $\mathfrak{R}$ *nin bir has idealini belirtmesi durumunda* $0 \neq xyJm \subseteq \aleph$ *iken* $xJm \subseteq \aleph$ *ya da* $ym \in \aleph$ *dir.*

7. $\mathfrak{R}$ *nin her* J *has ideali, birimsel olmayan* $x \in \mathfrak{R}$ *ve* $m \in M$ *adına eğer* $xJm \nsubseteq \aleph$ *koşulu sağlanıyorsa* $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xJm) = (0 :_{\mathfrak{R}} xJm)$ *ya da* $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xJm) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ *dir.*

8. I, J, K, $\mathfrak{R}$ *nin has idealleri ve* $m \in M$ *için* $0 \neq IJKm \subseteq \aleph$ *ise* $IJm \subseteq \aleph$ *ya da* $Km \subseteq \aleph$ *dir.*

İspat. $(1) \Longrightarrow (2)$ Kabul edelim ki $\aleph$, bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olsun. $m \in (\aleph :_M xyz)$ alalım. Buradan $xyzm \in \aleph$ dir. Eğer $xyzm = 0$ ise, $m \in (0 :_M xyz)$ elde edilir. Şimdi de $xyzm \neq 0$ olduğunu varsayalım. $\aleph$, bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan $xym \in \aleph$ ya da $zm \in \aleph$ dir. Böylece $m \in (\aleph :_M xy)$ ya da $m \in (\aleph :_M z)$ bulunur. Dolayısıyla, $m \in (0 :_M xyz) \cup (\aleph :_M xy) \cup (\aleph :_M z)$ elde edilir. Sonuç olarak, $(\aleph :_M xyz) = (0 :_M xyz) \cup (\aleph :_M xy) \cup (\aleph :_M z)$ dir.

$(2) \Longrightarrow (3)$ Birimsel olmayan $x, y \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M$ için $xym \notin \aleph$ olsun. $z \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} xym)$ olduğunu varsayalım. Buradan $xyzm \in \aleph$ olur ve $m \in (\aleph :_M xyz)$ yazılabilir. (2). kısım gereğince $m \in (0 :_M xyz) \cup (\aleph :_M xy) \cup (\aleph :_M z)$ bulunur. $xym \notin \aleph$ kabulümüzden $m \notin (\aleph :_M xy)$ dir. Böylece $m \in (0 :_M xyz)$ ya da $m \in (\aleph :_M z)$ olduğu anlaşılır. Buradan da $z \in (0 :_{\mathfrak{R}} xym)$ ya da $z \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ olur. Yani, $z \in (0 :_{\mathfrak{R}} xym) \cup (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ dir ve böylelikle $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xym) = (0 :_{\mathfrak{R}} xym) \cup (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ sonucuna varılır.

$(3) \Longrightarrow (4)$ "Eğer bir ideal (ya da alt grup) iki idealin (iki alt grubun) birleşimi tarafından kapsanıyorsa, bu ideallerden birinin içinde yer alır" önermesi gereğince istenilen elde edilir.

$(4) \Longrightarrow (5)$ Birimsel olmayan $x, y \in \mathfrak{R}$, $m \in M$ ve $\mathfrak{R}$ nin bir has J ideali için $0 \neq xyJm \subseteq \aleph$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $J \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} xym)$ ve $J \nsubseteq (0 :_{\mathfrak{R}} xym)$ olur. Eğer $xym \in \aleph$ ise ispat tamamlanır. O halde $xym \notin \aleph$ olsun. Buradan (4). kısım gereği $J \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ bulunur. Böylelikle, $Jm \subseteq \aleph$ sonucuna varılır.

$(5) \Longrightarrow (6)$ Birimsel olmayan $x, y \in \mathfrak{R}$, $m \in M$ ve $\mathfrak{R}$ nin bir has J ideali için $0 \neq xyJm \subseteq \aleph$ olsun. $xJm \nsubseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $x\alpha m \notin \aleph$ olacak şekilde bir $\alpha \in J$ bulunur. Ayrıca $x\alpha(\mathfrak{R}y)m \subseteq \aleph$ olduğunu belirtelim. Eğer $0 \neq x\alpha(\mathfrak{R}y)m$ ise (5). kısım gereği $(\mathfrak{R}y)m \subseteq \aleph$ elde edilir ve ispat tamamlanır. Şimdi de $x\alpha(\mathfrak{R}y)m = 0$ olduğunu varsayalım. $0 \neq xyJm$ olduğundan bir $\beta \in J$ için $x\beta(\mathfrak{R}y)m \neq 0$ yazılabilir. Dolayısıyla $0 \neq x(\alpha+\beta)(\mathfrak{R}y)m \subseteq \aleph$ elde edilir. Ayrıca $0 \neq x\beta(\mathfrak{R}y)m \subseteq \aleph$ olduğundan yine (5). kısım gereği $x\beta m \in \aleph$ ya da $(\mathfrak{R}y)m \subseteq \aleph$ bulunur. Eğer $x\beta m \in \aleph$ ise $x(\alpha+\beta)m \notin \aleph$ dir. Buradan $0 \neq x(\alpha+\beta)(\mathfrak{R}y)m \subseteq \aleph$

olduğundan yine (5). kısım gereği $(\mathfrak{R}y)m \subseteq \aleph$ bulunur ve böylece $ym \in \aleph$ dir. Diğer durumda, $ym \in \aleph$ olur ve ispat tamamlanır.

(6) $\Longrightarrow$ (7) Birimsel olmayan $x \in \mathfrak{R}$, $m \in M$ ve $\mathfrak{R}$ nin bir has J ideali için $xJm \nsubseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. $y \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} xJm)$ olsun. Buradan $xyJm \subseteq \aleph$ bulunur. Eğer $xyJm = 0$ ise $y \in (0 :_{\mathfrak{R}} xJm)$ elde edilir. Şimdi de $xyJm \neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (6). kısım gereği $ym \in \aleph$ bulunur ve bu da $y \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ anlamına gelir. Dolayısıyla $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xJm) = (0 :_{\mathfrak{R}} xJm) \cup (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ bulunur. Sonuç olarak, $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xJm) = (0 :_{\mathfrak{R}} xJm)$ ya da $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xJm) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ dir.

(7) $\Longrightarrow$ (8) $\mathfrak{R}$ nin bir takım I, J, K has idealleri ve $m \in M$ için $0 \neq IJKm \subseteq \aleph$ olsun. $IJm \nsubseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $xJm \nsubseteq \aleph$ olacak şekilde bir $x \in I$ bulunur. $xJKm \subseteq \aleph$ olduğundan $K \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} xJm)$ yazılabilir ve (7). kısım gereği $K \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} xJm) = (0 :_{\mathfrak{R}} xJm)$ ya da $K \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} xJm) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ elde edilir. Buradan $xJKm = 0$ ya da $Km \subseteq \aleph$ bulunur. İkinci durumda ispat tamamlanmış olur. Dolayısıyla $xJKm = 0$ olduğunu varsayalım. $0 \neq IJKm$ olduğundan $0 \neq yJKm$ olcak şekilde bir $y \in I$ vardır. $K \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} yJm)$ ve yine (7). kısım gereği $yJm \subseteq \aleph$ ya da $Km \subseteq \aleph$ elde edilir. Şimdi $yJm \subseteq \aleph$ olsun. O zaman $(x+y)Jm \nsubseteq \aleph$ ve $0 \neq (x+y)JKm \subseteq \aleph$ bulunur. Böylece, $K \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} (x+y)Jm)$ elde edilir ve yine (7). kısım gereği $Km \subseteq \aleph$ olduğu sonucuna varılır.

(8) $\Longrightarrow$ (1) Açıktır. ■

Aşağıdaki ifade, Teorem 4.6 nın doğrudan bir sonucudur.

Sonuç 4.5. *$\aleph$, M nin bir has alt modülünü belirtsin. Bu taktirde $\aleph$, M nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olması için gerek ve yeter koşul birimsel olmayan her $x, y \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M$ için $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xym) = (0 :_{\mathfrak{R}} xym)$ ya da $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xym) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ ya da $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xym) = \mathfrak{R}$ olmasıdır.*

Teorem 4.7. *$\aleph$, M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olsun. Birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M$ durumunda (x, y, z, m), $\aleph$ nin klasik 1-dörtlü sıfırı olduğunu varsayalım. Bu durumda:*

1. $xyz\aleph = 0 = xy(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)m$.

2. *Eğer $x, y \notin (\aleph :_{\mathfrak{R}} zm)$ ise, o zaman $xz(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)m = yz(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)m = x(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)^2m = y(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)^2m = z(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)^2m = 0$ olur. Buna ek olarak, $(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)^3m = 0$ sağlanır.*

İspat. 1. $xyz\aleph \neq 0$ olduğunu varsayalım. O zaman $xyzn \neq 0$ olacak şekilde bir $n \in \aleph$ vardır. Bu durumda, $0 \neq xyzn = xyz(m+n) \in \aleph$ yazılabilir. $\aleph$, zayıf klasik 1-yutan

asal alt modül olduğundan $xy(m+n) \in \aleph$ ya da $z(m+n) \in \aleph$ bulunur. Böylece, $xym \in \aleph$ ya da $zm \in \aleph$ olduğu anlaşılır ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $xyz\aleph = 0$ olmalıdır. Şimdi de $xy(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)m = 0$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için $\alpha \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ ve $xy\alpha m \neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $0 \neq xy\alpha m = xy(z+\alpha)m \in \aleph$ elde ederiz. Eğer, $z+\alpha$ birimsel ise $xym \in \aleph$ sonucuna varırız, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $z+\alpha$ birimsel olmayan bir elemandır. $\aleph$, zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan $xym \in \aleph$ ya da $(z+\alpha)m \in \aleph$ olur. Buradan yine $xym \in \aleph$ ya da $zm \in \aleph$ elde edilir ve tekrar çelişki ile karşılaşırız. Böylelikle, $xy(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)m = 0$ bulunur.

2. $x, y \notin (\aleph :_{\mathfrak{R}} zm)$ olduğunu varsayalım, yani $xzm \notin \aleph$ ve $yzm \notin \aleph$ dir. $\alpha \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ olacak şekilde bir α alalım ve $xz\alpha m \neq 0$ olsun. O zaman, $0 \neq x(y+\alpha)zm \in \aleph$ bulunur. $y+\alpha$ in birimsel olmadığını belirtelim. $\aleph$, zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan $x(y+\alpha)m \in \aleph$ ya da $zm \in \aleph$ elde edilir ve buradan $xym \in \aleph$ ya da $zm \in \aleph$ sonucu ortaya çıkar. Bu bir çelişkidir. Bu nedenle, $xz(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)m = 0$ dır. Benzer şekile, $yz(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)m = 0$ bulunur. Şimdi, $x(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)^2 m = 0$ olduğunu göstereceğiz. O zaman, $x(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)^2 m \neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\alpha, \beta \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ olacak şekilde $x\alpha\beta m \neq 0$ elde ederiz. $xy(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)m = xz(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)m = 0$ olduğundan $0 \neq x\alpha\beta m = x(y+\alpha)(z+\beta)m \in \aleph$ bulunur. $xym \notin \aleph$ ve $zm \notin \aleph$ olduğuna göre, $y+\alpha$ ve $z+\beta$ birimsel olmayan elemanlardır. $\aleph$, zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan $x(y+\alpha)m \in \aleph$ ya da $(z+\beta)m \in \aleph$ dir. Buradan $xym \in \aleph$ ya da $zm \in \aleph$ sonucu ortaya çıkar ve bu yine bir çelişkidir. Dolayısıyla $x(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)^2 m = 0$ olmalıdır. Benzer şekilde, $y(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)^2 m = z(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)^2 m = 0$ olduğu kanıtlanabilir. Şimdi, $(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)^3 m = 0$ olduğunu doğrulayalım. Aksi durumu kabul edelim. Bu taktirde $\alpha\beta\gamma m \neq 0$ olacak şekilde $\alpha, \beta, \gamma \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ alalım. O zaman $0 \neq (x+\alpha)(y+\beta)(z+\gamma)m = \alpha\beta\gamma m \in \aleph$ elde edilir. Ayrıca, $(x+\alpha)$, $(y+\beta)$, $(z+\gamma)$ birimsel olmayan elemanlardır. Böylelikle, $(x+\alpha)(y+\beta)m \in \aleph$ ya da $(z+\gamma)m \in \aleph$ bulunur. Bu da $xym \in \aleph$ ya da $zm \in \aleph$ anlamına gelir ve bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)^3 m = 0$ dır. ■

$\aleph$, $\mathfrak{R}$−modül M nin alt modülü ve $(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)^k N = 0$ koşulu sağlanacak şekilde bir k pozitif tam sayısı varsa $\aleph$ nilpotent alt modül olarak adlandırılır [35]. Özel olarak, bir $m \in M$ elemanı için $\mathfrak{R}m$, M nin bir nilpotent alt modülü ise, m elemanı M de nilpotent eleman olur.

Teorem 4.8. *$\aleph$, M nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olup klasik 1-yutan asal alt modülü olmasın. Bu durumda (x, y, z, m), $\aleph$ nin klasik 1-dörtlü sıfırı olur. Eğer $x, y \notin (\aleph :_{\mathfrak{R}} zm)$ ise, $(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)^3\aleph = 0$ olur ve böylece $\aleph$ nilpotenttir. Özel olarak, M bir çarpımsal modül ise $\aleph^4 = 0$ dır.*

İspat. Kabul edelim ki $\aleph$, M nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olup klasik 1-yutan asal alt modül olmasın. Bu durumda, birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M$ adına

(x,y,z,m), $\aleph$ nin klasik 1-dörtlü sıfırı olur. Ayrıca, $x,y \notin (\aleph :_{\Re} zm)$ olduğunu kabul edelim. Şimdi, $(\aleph :_{\Re} M)^3\aleph = 0$ olduğunu göstereceğiz. Aksini varsayalım. Bu durumda $\alpha,\beta,\gamma \in (\aleph :_{\Re} M)$ ve $n \in \aleph$ için $\alpha\beta\gamma n \neq 0$ olacaktır. Teorem 4.7 gereği, $0 \neq (x+\alpha)(y+\beta)(z+\gamma)(m+n) = \alpha\beta\gamma n \in \aleph$ dir. $\aleph$, zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan $(x+\alpha)(y+\beta)(m+n) \in \aleph$ ya da $(z+\gamma)(m+n) \in \aleph$ olur. Bu da $xym \in \aleph$ ya da $zm \in \aleph$ sonucunu ortaya çıkarır ve bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $(\aleph :_{\Re} M)^3\aleph = 0$ elde edilir ve bu da $\aleph$ nin nilpotent olduğunu gösterir. Şimdi, M nin çarpımsal modül olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\aleph^4 = (\aleph :_{\Re} M)^3\aleph = 0$ olduğu açıktır. ■

Önerme 4.3. *M bir çarpımsal modül ve $\aleph$, M nin bir has alt modülünü belirtsin. Bu durumda eğer $\aleph$, M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü ise M nin bir takım K,L,P has alt modülleri ve $m \in M$ için $0 \neq KLPm \subseteq \aleph$ iken $KLm \subseteq \aleph$ ya da $Pm \subseteq \aleph$ dir. Tersi ise, M sonlu üretilmiş sadık çarpımsal modül olduğunda geçerli olur.*

İspat. ($\Longrightarrow$) M nin has K,L,P alt modülleri ve $m \in M$ için $0 \neq KLPm \subseteq \aleph$ olsun. M bir çarpımsal modül olduğundan $K = IM$, $L = JM$ ve $P = QM$ olacak şeilde $\Re$ nin I,J,Q has idealleri mevcuttur. Bu durumda, $0 \neq KLPm \subseteq \aleph$ olduğundan $0 \neq IJQm \subseteq \aleph$ elde edilir ve $\aleph$, zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan $IJm \subseteq \aleph$ ya da $Qm \subseteq \aleph$ bulunur. Buradan da $KLm \subseteq \aleph$ ya da $Pm \subseteq \aleph$ sonucuna varılır.

($\Longleftarrow$) $0 \neq IJQm \subseteq \aleph$ olacak şekilde $\Re$ nin I,J,Q has ideallerini ve $m \in M$ alalım. (2). kısımdaki $K := IM$, $L := JM$, $P := QM$ olarak alınırsa K,L,P has alt modül olurlar. Şimdi de $0 \neq KLPm \subseteq \aleph$ olduğunu belirtelim ve bu ifade $KLm \subseteq \aleph$ ya da $Pm \subseteq \aleph$ sonucunu verir. Bu da $IJm \subseteq \aleph$ ya da $Qm \subseteq \aleph$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla, Teorem 4.6 gereği $\aleph$, M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olur. ■

Şimdi, $um-$halkaları üzerinde zayıf klasik 1-yutan asal alt modüllerin farklı bir karakterizasyonu sunulacaktır.

Teorem 4.9. *$\Re$ bir $um-$halka, M $\Re$ üzerinde bir modül ve $\aleph$, M nin bir has alt modülünü belirtsin. Bu durumda aşağıdaki koşullar birbirine denktir:*

1. *$\aleph$, bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modüldür.*

2. *Birimsel olmayan her $x,y,z \in \Re$ için, $(\aleph :_M xyz) = (0 :_M xyz)$ ya da $(\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M xy)$ ya da $(\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M z)$ dir.*

3. *Birimsel olmayan her $x,y,z \in \Re$ ve M nin her L alt modülü için eğer $0 \neq xyzL \subseteq \aleph$ koşulu sağlanıyorsa $xyL \subseteq \aleph$ ya da $zL \subseteq \aleph$ dir.*

4. *Birimsel olmayan her* $x, y \in \mathfrak{R}$ *ve* M *nin her* L *alt modülü için,* $xyL \nsubseteq \aleph$ *ise* $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xyL) = (0 :_{\mathfrak{R}} xyL)$ *ya da* $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xyL) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} L)$ *dir.*

5. $\mathfrak{R}$ *nin her has* J *ideali,* M *nin her* L *alt modülü ve birimsel olmayan her* $x, y \in \mathfrak{R}$ *için, eğer* $0 \neq xyJL \subseteq \aleph$ *ise* $xyL \subseteq \aleph$ *ya da* $JL \subseteq \aleph$ *olur.*

6. *Birimsel olmayan bir* $x \in \mathfrak{R}$, I, J $\mathfrak{R}$ *nin has idealleri ve* M *nin her* L *alt modülü için, eğer* $0 \neq xIJL \subseteq \aleph$ *ise* $xIL \subseteq \aleph$ *ya da* $JL \subseteq \aleph$ *dir.*

7. $\mathfrak{R}$ *nin her* I,J *has idealleri,* M *nin herhangi* L *alt modülü için, şayet* $IJL \nsubseteq \aleph$ *koşulu sağlanıyorsa,* $(\aleph :_{\mathfrak{R}} IJL) = (0 :_{\mathfrak{R}} IJL)$ *ya da* $(\aleph :_{\mathfrak{R}} IJL) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} L)$ *dir.*

8. $I, J, K,$ $\mathfrak{R}$ *nin has idealleri ve* M *nin her* L *alt modülü için* $0 \neq IJKL \subseteq \aleph$ *ise* $IJL \subseteq \aleph$ *ya da* $KL \subseteq \aleph$ *dir.*

İspat. (1) $\Longrightarrow$ (2) Farz edelim ki $m \in (\aleph :_M xyz)$ olsun. Yani $xyzm \in \aleph$ dir. Eğer $xyzm = 0$ ise, o zaman $m \in (0 :_M xyz)$ dir. Şimdi, $xyzm \neq 0$ olduğunu varsayalım. $\aleph$, zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan $xym \in \aleph$ ya da $zm \in \aleph$ elde edilir. Bu durumda, $m \in (\aleph :_M xy) \cup (\aleph :_M z)$ olur. Böylelikle, $(\aleph :_M xyz) = (0 :_M xyz) \cup (\aleph :_M xy) \cup (\aleph :_M z)$ bulunur. $\mathfrak{R}$, bir $um-$halka olduğundan $(\aleph :_M xyz) = (0 :_M xyz)$ ya da $(\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M xy)$ ya da $(\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M z)$ sonucuna varılır.

(2) $\Longrightarrow$ (3) $0 \neq xyzL \subseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $L \subseteq (\aleph :_M xyz)$ olur. $0 \neq xyzL$ olduğuna göre, $(\aleph :_M xyz) \neq (0 :_M xyz)$ dir. Buradan şu sonuç elde edilir: $L \subseteq (\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M xy)$ ya da $L \subseteq (\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M z)$. Sonuç olarak, $xyL \subseteq \aleph$ ya da $zL \subseteq \aleph$ bulunur.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Varsayalım ki $xyL \nsubseteq \aleph$ ve $\alpha \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} xyL)$ olsun. Bu durumda, $xy\alpha L \subseteq \aleph$ elde ederiz. Eğer $xy\alpha L = 0$ ise, $\alpha \in (0 :_{\mathfrak{R}} xyL)$ dir. Şimdi, $xy\alpha L \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (3) gereği, $\alpha L \subseteq \aleph$ sonucuna ulaşırız, yani $\alpha \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} L)$ dir. Böylece, $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xyL) = (0 :_{\mathfrak{R}} xyL) \cup (\aleph :_{\mathfrak{R}} L)$ elde edilir. Eğer bir alt modül, iki alt modülün birleşimiyse, o zaman bu alt modüllerden birine eşit olması gerektiği gerçeğinden $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xyL) = (0 :_{\mathfrak{R}} xyL)$ ya da $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xyL) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} L)$ bulunur.

(4) $\Longrightarrow$ (5) $0 \neq xyJL \subseteq \aleph$ ve $xyL \nsubseteq \aleph$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $J \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} xyL)$ ve $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xyL) \neq (0 :_{\mathfrak{R}} xyL)$ elde ederiz. Böylece, (4) gereği $J \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} xyL) = (\aleph :_{\mathfrak{R}} L)$ dir. Bu da $JL \subseteq \aleph$ anlamına gelir ve ispat tamamlanır.

(5) $\Longrightarrow$ (6) $0 \neq xIJL \subseteq \aleph$ ve $JL \nsubseteq \aleph$ olduğunu kabul edelim. Şimdi, bir $\alpha \in I$ seçelim. $0 \neq xIJL$ olduğundan, $x\beta JL \neq 0$ olacak şekilde bir $\beta \in I$ vardır. $0 \neq x\beta JL \subseteq \aleph$ olduğundan, (5). öncül gereği $x\beta L \subseteq \aleph$ elde edilir. Eğer $0 \neq x\alpha JL \subseteq \aleph$ ise, benzer

şekilde $x\alpha L \subseteq \aleph$ sonucuna varırız. Eğer $x\alpha JL = 0$ ise, $0 \neq x\beta JL = x(\alpha+\beta)JL \subseteq \aleph$ olur ve benzer bir argümanla, $x(\alpha+\beta)L \subseteq \aleph$ elde edilir. Böylelikle, $x\alpha L \subseteq \aleph$ bulunur ve buradan $xIL \subseteq \aleph$ sonucuna varılır.

$(6) \Longrightarrow (7)$ $IJL \nsubseteq \aleph$ ve $x \in (\aleph :_{\Re} IJL)$ olduğunu varsayalım. Buradan $xIJL \subseteq \aleph$ ve $\alpha IL \nsubseteq \aleph$ olacak şekilde bir $\alpha \in J$ bulunur. Eğer $xIJL = 0$ ise $x \in (0 :_{\Re} IJL)$ elde edilir. Şimdi, $xIJL \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman, $0 \neq x\beta IL = \beta I(\Re x)L \subseteq \aleph$ olacak şekilde bir $\beta \in J$ vardır. Böylece, (6). öncül gereği $\beta IL \subseteq \aleph$ ya da $(\Re x)L \subseteq \aleph$ elde edilir. İkinci durumdan, $x \in (\aleph :_{\Re} L)$ bulunur. Bu durumda, $\beta IL \subseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. Eğer $0 \neq x\alpha IL = \alpha I(\Re x)L \subseteq \aleph$ olursa, yine (6). kısım gereğince $(\Re x)L \subseteq \aleph$ sonucuna varılır, bu da $x \in (\aleph :_{\Re} L)$ anlamına gelir. O halde, $x\alpha IL = 0$ olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda, $0 \neq x\beta IL = x(\alpha+\beta)IL = (\alpha+\beta)I(\Re x)L \subseteq \aleph$ olur. Yine (6). kısım gereği, $(\alpha+\beta)IL \subseteq \aleph$ ya da $(\Re x)L \subseteq \aleph$ sonucuna ulaşırız. Eğer $(\alpha+\beta)IL \subseteq \aleph$ ise, $\beta IL \subseteq \aleph$ olduğu için $\alpha IL \subseteq \aleph$ sonucu ortaya çıkar ki bu bir çelişkidir. Bu nedenle, $(\Re x)L \subseteq \aleph$ elde edilir, yani $x \in (\aleph :_{\Re} L)$ olur. Yukarıdaki argümanlara dayanarak, $(\aleph :_{\Re} IJL) \subseteq (0 :_{\Re} IJL) \cup (\aleph :_{\Re} L)$ sonucuna varılır. Diğer kapsama her zaman doğru olduğundan, $(\aleph :_{\Re} IJL) = (0 :_{\Re} IJL) \cup (\aleph :_{\Re} L)$ eşitliğine ulaşırız. Bu durumda $(\aleph :_{\Re} IJL) = (0 :_{\Re} IJL)$ ya da $(\aleph :_{\Re} IJL) = (\aleph :_{\Re} L)$ bulunur.

$(7) \Longrightarrow (8)$ $0 \neq IJKL \subseteq \aleph$ ve $IJL \nsubseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. O zaman, $K \subseteq (\aleph :_{\Re} IJL) \neq (0 :_{\Re} IJL)$ elde ederiz. Bu durumda, (7). öncül gereği $K \subseteq (\aleph :_{\Re} IJL) = (\aleph :_{\Re} L)$ bulunur. Bu da $KL \subseteq \aleph$ anlamına gelir.

$(8) \Longrightarrow (1)$ Açıktır. ■

Üçüncü bölümde $\aleph$, M nin klasik 1-yutan asal alt modülü olması durumunda $(\aleph :_{\Re} M)$ nin $\Re$ de 1-yutan asal ideal olduğunu belirtmiştik. Şimdi, bu özelliğin zayıf klasik 1-yutan asal alt modüller için geçerli olmayacağını aşağıdaki örnekle gösterelim.

Örnek 4.4. *p bir asal sayı olmak üzere $\mathbb{Z}$–modül $\mathbb{Z}_{p^2}$ yi ele alalım. $\aleph = \left(\overline{0}\right)$ alt modülünü seçelim. Bu durumda, $\aleph$ zayıf klasik 1-yutan asal alt modüldür. Ancak, $(\aleph :_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^2}) = p^2\mathbb{Z}$ zayıf 1-yutan asal ideal değildir.*

Teorem 4.10. *M, sonlu üretilmiş bir çarpımsal modül ve $Ann_{\Re}(M)$, $\Re$ nin 1-yutan asal ideali olarak alınsın. M nin bir has $\aleph$ alt modülü için, aşağıdaki koşullar denktir:*

1. *$\aleph$, M nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülüdür.*

2. *$(\aleph :_{\Re} M)$, $\Re$ nin zayıf 1-yutan asal idealidir.*

3. *$Ann_{\Re}(M) \subseteq P$ koşulunu sağlayan $\Re$ nin zayıf 1-yutan asal P ideali için $\aleph = PM$ dir.*

İspat. (1) $\Longrightarrow$ (2) $\aleph$, M nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü ve birimsel olmayan $x,y,z \in \Re$ için $0 \neq xyz \in (\aleph :_{\Re} M)$ olduğunu kabul edelim. Buradan $xyzM \subseteq \aleph$ elde edilir. Eğer $xyzM = 0$ ise, $xy \in Ann_{\Re}(M)$ ya da $z \in Ann_{\Re}(M)$ bulunur. Böylelikle, $xyM \subseteq \aleph$ ya da $zM \subseteq \aleph$ sonucuna varılır. Şimdi, $0 \neq xyzM \subseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. Teorem 4.9 a göre, $xyM \subseteq \aleph$ ya da $zM \subseteq \aleph$ bulunur, bu da $xy \in (\aleph :_{\Re} M)$ ya da $z \in (\aleph :_{\Re} M)$ olduğunu gösterir. Böylece, $(\aleph :_{\Re} M)$ zayıf 1-yutan asal ideal olduğu sonucuna varılır.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Açıktır.

(3) $\Longrightarrow$ (1) $\Re$ nin I,J,K has idealleri ve M nin L alt modülü için $0 \neq IJKL \subseteq N = PM$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, [36] gereği $IJK(L :_{\Re} M) \subseteq (PM :_{\Re} M) = P + Ann_{\Re}(M) = P$ yazabilirz. P, zayıf 1-yutan asal ideal olduğundan $IJ(L :_{\Re} M) \subseteq P$ ya da $K(L :_{\Re} M) \subseteq P$ bulunur. Böylece, $IJL \subseteq \aleph$ ya da $KL \subseteq \aleph$ elde edilir.Dolayısıyla Teorem 4.9 a göre $\aleph$, M nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olur. ■

Yardımcı Teorem 4.1. *M, bir sadık $\Re-$modül ve $\aleph$, M nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olarak ele alınsın. O zaman $(\aleph :_{\Re} M)$, $\Re$ nin bir zayıf 1-yutan asal idealidir.*

İspat. Teorem 4.10 (1) $\Longrightarrow$ (2) benzer şekilde istenilen elde edilir. ■

Teorem 4.11. *M_1, M_2 iki $\Re-$modül ve $\aleph_1$, M_1 in bir has alt modülü olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir:*

1. *$\aleph = \aleph_1 \times M_2$, $M = M_1 \times M_2$ nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülüdür.*

2. *$\aleph_1$, M_1 in bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü ve birimsel olmayan $x,y,z \in \Re$ ve $m \in M_1$ olması durumunda eğer (x,y,z,m), $\aleph_1$ in klasik 1-dörtlü sıfırı ise $xyz \in Ann_{\Re}(M_2)$ koşulu sağlanır.*

İspat. (1) $\Longrightarrow$ (2) Kabul edelim ki, $\aleph = \aleph_1 \times M_2$, $M = M_1 \times M_2$ modülünün zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olsun. Birimsel olmayan $x,y,z \in \Re$ ve $m \in M_1$ için $0 \neq xyzm \in \aleph_1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $(0,0) \neq xyz(m,0) = (xyzm,0) \in \aleph$ elde ederiz. $\aleph$, M nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan $xy(m,0) = (xym,0) \in \aleph$ ya da $z(m,0) = (zm,0) \in \aleph$ olur. Buradan, $xym \in \aleph_1$ ya da $zm \in \aleph_1$ sonucuna varılır. Böylelikle $\aleph_1$, M_1 in zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olur. Şimdi (x,y,z,m), $\aleph_1$ in klasik 1-dörtlü sıfırı olarak düşünülsün. Bu durumda, $xyzm = 0$, $xym \notin \aleph_1$ ve $zm \notin \aleph_1$ olur. $xyz \in Ann_{\Re}(M_2)$ olduğunu göstereceğiz. Varsayalım ki $xyz \notin Ann_{\Re}(M_2)$ olsun. O halde, $xyzn \neq 0$ olacak şekilde $n \in M_2$ vardır. Buradan $(0,0) \neq xyz(m,n) = (0,xyzn) \in \aleph$ olur. $\aleph$, zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan $xy(m,n) \in \aleph$ ya

da $z(m,n) \in \aleph$ bulunur. Bu da $xym \in \aleph_1$ ya da $zm \in \aleph_1$ anlamına gelir ki her iki durum da çelişkiye yol açar. Dolayısıyla, $xyz \in Ann_{\Re}(M_2)$ olmalıdır.

$(2) \Longrightarrow (1)$ Birimsel olmayan $x,y,z \in \Re$ ve $(m,n) \in M = M_1 \times M_2$ olacak şekilde $(0,0) \neq xyz(m,n) \in \aleph = \aleph_1 \times M_2$ olsun. İlk olarak, $xyzm \neq 0$ olduğunu varsayalım. O zaman, (2). öncül gereği $xym \in \aleph_1$ ya da $zm \in \aleph_1$ bulunur. Sonuç olarak, $xy(m,n) \in \aleph$ ya da $z(m,n) \in \aleph$ elde edilir. Bu da, $\aleph$ nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olduğunu gösterir. Şimdi de $xyzm = 0$ olduğunu kabul edelim. Eğer, $xym \notin \aleph_1$ ve $zm \notin \aleph_1$ ise (x,y,z,m), $\aleph_1$ in klasik 1-dörtlü sıfırı olur. Dolayısıyla (2). öncül gereği, $xyzn = 0$ olur. Buradan $xyz(m,n) = (0,0)$ bulunur ve bu bir çelişkidir. Bu nedenle, $xym \in \aleph_1$ ve $zm \in \aleph_1$ elde edilir. Böylece, $xy(m,n) \in \aleph$ ya da $z(m,n) \in \aleph$ sonucu ortaya çıkar ve ispat tamamlanır. ■

Önerme 4.4. *M_1, M_2 iki $\Re$−modül ve $\aleph_1$, $\aleph_2$ sırasıyla M_1 ve M_2 nin iki has alt modülü olsun. Eğer $\aleph = \aleph_1 \times \aleph_2$, $M = M_1 \times M_2$ nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü ise, o zaman $\aleph_1$, M_1 in zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü ve $\aleph_2$, M_2 nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olur.*

İspat. Önceki teoremdeki gibi benzer bir argümanla kolayca gösterilebilir. ■

Önerme 4.4' ün tersinin doğru olmadığını aşağıdaki örnekle inceleyeceğiz:

Örnek 4.5. *$\Re = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}^2$ ve p,q farklı asal sayılar olmak üzere $\aleph = p\mathbb{Z} \times q\mathbb{Z}$ olsun. $p\mathbb{Z}$ ve $q\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ nin asal idealleri olduğundan, $p\mathbb{Z}$ ve $q\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$−modül $\mathbb{Z}$ nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülleridir. Şunu belirtelim ki, $(0,0) \neq ppq(1,1) = (ppq, ppq) \in \aleph$ ancak $pp(1,1) \notin \aleph$ ve $q(1,1) \notin \aleph$ dir. Bu nedenle $\aleph$, M nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü değildir.*

Teorem 4.12. *M_i, her $i = 1,2$ için sadık çarpımsal $\Re_i$−modül olsun ve $Ann(M_i)$, $\Re_i$ nin tek maksimal ideali olmasın. Kabul edelim ki, $\Re = \Re_1 \times \Re_2$ ayrıştırılabilir bir halka ve $M = M_1 \times M_2$ olsun. Ayrıca $\aleph_i$, M_i nin alt modülleri olmak üzere $\aleph = \aleph_1 \times \aleph_2 \neq 0$ alalım. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

1. *$\aleph$, M nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülüdür.*

2. *$\aleph = \aleph_1 \times M_2$ olup $\aleph_1$, M_1 in klasik asal alt modülüdür ya da $\aleph = M_1 \times \aleph_2$ olup $\aleph_2$, M_2 nin klasik asal alt modülüdür.*

3. *$\aleph$, M nin klasik asal alt modülü olur.*

4. *$\aleph$, M nin zayıf klasik asal alt modülü olur.*

İspat. (1) $\Longrightarrow$ (2) Kabul edelim ki $\aleph = \aleph_1 \times \aleph_2$, M nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olsun. M_1, M_2 sadık modül olduğundan, M sadık bir modüldür. $\aleph$, zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan Yardımcı Teorem 4.1 gereği $(\aleph :_{\Re} M)$, $\Re$ nin zayıf 1-yutan asal idealidir. $\aleph$, sıfırdan farklı ve M, bir sadık çarpımsal modül olduğundan $(\aleph :_{\Re} M) = (\aleph_1 :_{\Re_1} M_1) \times (\aleph_2 :_{\Re_2} M_2)$ sıfırdan farklıdır. Bu durumda [17, Teorem 10] gereği $(\aleph_1 :_{\Re_1} M_1) = \Re_1$ ya da $(\aleph_2 :_{\Re_2} M_2) = \Re_2$ elde edilir. Genelliği bozmadan $\aleph = N_1 \times M_2$ olduğunu ve $\aleph_1$, M_1 in has alt modülü olduğunu kabul edebiliriz. Şimdi, $\aleph_1$, M_1 in klasik asal alt modülü olduğunu göstereceğiz. Bu yüzden $x, y \in \Re_1$ ve $m \in M_1$ için $xym \in \aleph_1$ olduğunu varsayalım. $Ann(M_2)$, $\Re_2$ nin tek maksimal ideali olmadığından $t \notin Ann_{\Re}(M_2)$ olacak şekilde birimsel olmayan bir t elemanı bulunur. O zaman $tn \neq 0$ olacak şekilde bir $n \in M_2$ vardır. Bu durumda, $0_M \neq (xym, tn) = (x,1)(1,t)(y,1)(m,n) \in \aleph$ elde ederiz. $\aleph$, M nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan $(x,1)(1,t)(m,n) \in \aleph$ ya da $(y,1)(m,n) \in \aleph$ olur. Bu da, $xm \in \aleph_1$ ya da $ym \in \aleph_1$ olduğunu gösterir. Böylece $\aleph_1$, M_1 in klasik asal alt modülü olur.

(2) $\Longrightarrow$ (3) [8, Teorem 2.35] den elde edilir.

(3) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (1) Açıktır. ■

Sıradaki teoremle, tensör çarpımlarında zayıf klasik 1-yutan asal alt modüllerin karakterizasyonunu sunuyoruz.

Teorem 4.13. *Kabul edelim ki $\Re$ bir um− halka ve M bir $\Re-$modül olsun.*

1. *Eğer $\mathcal{F}$ bir düz $\Re-$modül ve $\aleph$, M nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olup $\mathcal{F} \otimes \aleph \neq \mathcal{F} \otimes M$ koşulu sağlanıyorsa, bu durumda $\mathcal{F} \otimes \aleph$, $\mathcal{F} \otimes M$ nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olur.*

2. *$\mathcal{F}$, sadık düz $\Re-$modülü belirtsin. Bu durumda $\aleph$, M nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{F} \otimes \aleph$, $\mathcal{F} \otimes M$ nın zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olmasıdır.*

İspat. (1) Birimsel olmayan $x, y, z \in \Re$ alalım. O zaman, Teorem 4.9 a göre $(\aleph :_M xyz) = (0 :_M xyz)$ ya da $(\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M xy)$ ya da $(\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M z)$ dir. Şimdi, $(\aleph :_M xyz) = (0 :_M xyz)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda [2, Lemma 3.2] gereği $(\mathcal{F} \otimes \aleph :_{\mathcal{F} \otimes M} xyz) = \mathcal{F} \otimes (\aleph :_M xyz) = \mathcal{F} \otimes (0 :_M xyz) = (\mathcal{F} \otimes 0 :_{\mathcal{F} \otimes M} xyz) = (0 :_{\mathcal{F} \otimes M} xyz)$ elde ederiz. Şimdi de $(\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M xy)$ olduğunu varsayalım. Yine [2, Lemma 3.2] gereği $(\mathcal{F} \otimes \aleph :_{\mathcal{F} \otimes M} xyz) = \mathcal{F} \otimes (\aleph :_M xyz) = \mathcal{F} \otimes (\aleph :_M xy) = (F \otimes \aleph :_{F \otimes M} xy)$ bulunur. Benzer şekilde eğer $(\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M z)$ ise

$(F \otimes \aleph :_{F\otimes M} xyz) = (F \otimes \aleph :_{F\otimes M} z)$ olduğu anlaşılır. Dolayısıyla Teorem 4.9 gereği, $\mathscr{F} \otimes \aleph$, $\mathscr{F} \otimes M$ nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olur.

(2) Kabul edelim ki $\aleph$, M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü ve $\mathscr{F} \otimes \aleph = \mathscr{F} \otimes M$ olsun. O zaman, $0 \longrightarrow \mathscr{F} \otimes \aleph \xrightarrow{\subseteq} \mathscr{F} \otimes M \longrightarrow 0$ bir tam dizidir. $\mathscr{F}$, bir sadık düz modül olduğundan, $0 \longrightarrow \aleph \longrightarrow M \longrightarrow 0$ bir tam dizi olur. Buradan $\aleph = M$ olduğu anlaşılır ve bu durum bir çelişkidir. Dolayısıyla, $\mathscr{F} \otimes \aleph \neq \mathscr{F} \otimes M$ sonucuna ulaşılır. Bu durumda, (1). öncül gereği $\mathscr{F} \otimes \aleph$, $\mathscr{F} \otimes M$ nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olur. Şimdi, yeterliliğin ispatı için $\mathscr{F} \otimes \aleph$, $\mathscr{F} \otimes M$ nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\mathscr{F} \otimes \aleph \neq \mathscr{F} \otimes M$ ve dolayısıyla $\aleph \neq M$ dir. Birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ için Teorem 4.9 göre $(\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F}\otimes M} xyz) = (0 :_{\mathscr{F}\otimes M} xyz)$ ya da $(\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F}\otimes M} xyz) = (\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F}\otimes M} xy)$ ya da $(\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F}\otimes M} xyz) = (\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F}\otimes M} z)$ dir. Bu durumda, $(\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F}\otimes M} xyz) = (0 :_{\mathscr{F}\otimes M} xyz)$ olduğunu varsayalım. Buradan, $\mathscr{F} \otimes (\aleph :_M xyz) = (\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F}\otimes M} xyz) = (0 :_{\mathscr{F}\otimes M} xyz) = \mathscr{F} \otimes (0 :_M xyz)$ olduğu anlaşılır. Böylelikle, $0 \longrightarrow \mathscr{F} \otimes (0 :_M xyz) \xrightarrow{\subseteq} \mathscr{F} \otimes (\aleph :_M xyz) \longrightarrow 0$ bir tam dizidir. $\mathscr{F}$, sadık düz $\mathfrak{R}-$modül olduğundan $0 \longrightarrow (0 :_M xyz) \xrightarrow{\subseteq} (\aleph :_M xyz) \longrightarrow 0$ bir tam dizi olur ve bu da $(\aleph :_M xyz) = (0 :_M xyz)$ anlamına gelir. Benzer bir argümanla, eğer $(\mathscr{F} \otimes \aleph :_{F\otimes M} xyz) = (\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F}\otimes M} xy)$ ya da $(\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F}\otimes M} xyz) = (\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F}\otimes M} z)$ ise, o zaman $(\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M xy)$ ya da $(\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M z)$ sonucu elde edilir. Böylece, Teorem 4.9 gereği $\aleph$, M nin zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olur. ■

Sonuç 4.6. *$\mathfrak{R}$, bir um− halka, M bir $\mathfrak{R}-$modül ve x bir değişken olsun. Eğer $\aleph$, M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü ise o halde $\aleph[x]$, $M[x]$ in bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olur.*

İspat. $\aleph$, M nin bir zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olsun. $\mathfrak{R}[x]$ bir düz $\mathfrak{R}-$ modül olduğunu göz önünde bulunduralım. Dolayısıyla Teorem 4.13 gereği $\mathfrak{R}[x] \otimes \aleph \cong \aleph[x]$, $\mathfrak{R}[x] \otimes M \cong M[x]$ in bir zayıf klasik asal alt modülü olur. ■

Şimdi her has alt modülü zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olan modülleri karakterize edeceğiz.

Teorem 4.14. *M, $\mathfrak{R}$ üzerinde bir modülü belirtsin. Buna göre, aşağıdaki koşullar sağlanır:*

1. *Eğer M nin her has alt modülü zayıf klasik 1-yutan asal alt modül ise $Jac(\mathfrak{R})^3 M = 0$ dır.*

2. *Kabul edelim ki $(\mathfrak{R}, \mathfrak{m})$ bir lokal halka olsun. O halde M nin her has alt modülünün zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul $\mathfrak{m}^3 M = 0$ olmasıdır.*

İspat. (1) Kabul edelim ki M nin her has alt tmodülü zayıf klasik 1-yutan asal alt modülü olsun. $Jac(\Re)^3 M = 0$ olduğunu göstereceğiz. Aksini varsayalım. Bu durumda, $x, y, z \in Jac(\Re)$ ve $m \in M$ için $xyzm \neq 0$ olur. Şimdi $\aleph = \Re xyzm$ olarak tanımlayalım. $0 \neq xyzm \in \aleph$ ve $\aleph$, zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olduğundan $xym \in \aleph$ ya da $zm \in \aleph$ olmalıdır. O zaman, $xym = \alpha xyzm$ ya da $zm = \alpha xyzm$ olacak şekilde $\alpha \in \Re$ vardır. İlk durumda, $(1 - \alpha z)xym = 0$ elde edilir. $1 - \alpha z$ birimsel olduğundan, $xym = 0$ sonucuna varırız. İkinci durumda, benzer şekilde $zm = 0$ bulunur. Böylelikle, $xyzm = 0$ olur ve bu durum bir çelişkidir. Dolayısıyla, $Jac(\Re)^3 M = 0$ sonucuna varılır.

(2) Varsayalım ki $(\Re, m)$ yerel bir halkadır. Şayet M nin her has alt modülü zayıf klasik 1-yutan asal alt modül ise (1). öncül gereği $m^3 M = 0$ olur. Tersini gösterirken, birimsel olmayan her $x, y, z \in \Re$ için $xyz = 0$ olduğunu gözlemleyelim. Bu durumda, M nin her has alt modülü doğal olarak zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olur. ■

5
KLASİK 1-YUTAN ASALIMSI ALT MODÜLLER

Bu bölümde, değişmeli halkalarda 1-yutan asalımsı idealler ile modül teorideki klasik asalımsı alt modülleri genişleterek klasik 1-yutan asalımsı alt modülleri sunacağız. Bölüm boyunca ele alınan tüm halkaların değişmeli ve sıfırdan farklı birim elemana sahip olduğu varsayılacaktır. Tüm modüllerin birimli olduğu kabul edilmektedir.

Tanım 5.1. M bir $\mathfrak{R}-$modül ve $\aleph$, M nin has alt modülünü belirtsin. Eğer birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M$ için $xyzm \in \aleph$ olduğunda $xym \in \aleph$ ya da bazı $t \geq 1$ için $z^t m \in \aleph$ koşulu sağlanıyorsa $\aleph$ ye klasik 1-yutan asalımsı alt modül olarak adlandırılır.

Bu durumda açıkça görülüyor ki her klasik asalımsı alt modül, bir klasik 1-yutan asalımsı alt modül olur. Fakat bu önermenin tersinin genelde doğru olmadığını aşağıdaki örnekle gösterebiliriz.

Örnek 5.1. *$\digamma$ bir cisim olmak üzere $\mathfrak{R} = \digamma[x, y]$, $J = \langle x, y \rangle$, $\widetilde{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}_J$ yerelleştirilmiş halkası ve $M = \widetilde{\mathfrak{R}}$ olsun. $\widetilde{\mathfrak{R}}-$modül M yi düşünelim. Bu durumda $K = yJ_J = \langle xy, y^2 \rangle$, $\widetilde{\mathfrak{R}}-$modül $\widetilde{\mathfrak{R}}$ nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olur [14]. Fakat, $yx1 \in K$ iken $y1 \notin K$ ve tüm $t \geq 1$ için $x^t 1 \notin K$ olduğundan K, klasik asalımsı alt modül değildir.*

Klasik 1-yutan asalımsı alt modüllere ait bir karakterizasyonu aşağıdaki gibi sunuyoruz:

Teorem 5.1. *M bir $\mathfrak{R}-$modül ve $\aleph$, M nin bir has alt modülü olarak ele alınsın. Bu durumda, aşağıdaki durumlar birbirine denktir:*

1. *$\aleph$, M nin klasik 1-yutan asalımsı alt modülüdür.*

2. *Her $m \in M \setminus \aleph$ için, $(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$, $\mathfrak{R}$ nin 1-yutan asalımsı ideali olur.*

3. *Her $m \in M \setminus \aleph$ için, $(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$, $\mathfrak{R}$ nin 1-yutan asalımsı ideali ve $\left\{\sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)} : m \in M \setminus \aleph\right\}$, $\mathfrak{R}$ nin asal ideallerinden oluşan bir zincirdir.*

İspat. (1) $\Longrightarrow$ (2) $\aleph$, M nin klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olduğunu varsayalım. Birimsel olmayan $x,y,z \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M \setminus \aleph$ için $xyz \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ olsun. Bu durumda, $xyzm \in \aleph$ olur ve bu da $xym \in \aleph$ ya da bazı $t \geq 1$ için $z^t m \in \aleph$ anlamına gelir. Dolayısıyla, $xy \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ ya da $z \in \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)}$ olur. Sonuç olarak $(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$, $\mathfrak{R}$ nin 1-yutan asalımsı idealidir.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Her $m_1, m_2 \in M \setminus \aleph$ için $\sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m_1)} \cap \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m_2)} \subseteq \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m_1 + m_2)}$ dir. Eğer $\sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m_1 + m_2)}$ has ideal ise, Teorem 2.4 uyarınca asal idealdir. Bu durumda $m_1 + m_2$ nin $\aleph$ de olup olmamasına bağlı olarak $\sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m_1)} \subseteq \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m_1 + m_2)}$ ya da $\sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m_2)} \subseteq \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m_1 + m_2)}$ bulunur. Dolayısıyla, $\sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m_1)} \subseteq \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m_2)}$ ya da $\sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m_2)} \subseteq \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m_1)}$ dir. Bu nedenle, $\left\{\sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)} : m \in M \setminus \aleph\right\}$, $\mathfrak{R}$ nin asal ideallerinden oluşan bir zincirdir.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Her $m \in M \setminus \aleph$ için, $(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$, $\mathfrak{R}$ nin 1-yutan asalımsı ideali olduğunu varsayalım. Birimsel olmayan bir takım $x,y,z \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M$ elemanları için $xyzm \in \aleph$ olduğunu düşünelim. Eğer $m \in \aleph$ ise, ispat tamamlanır. Öyleyse, $m \notin \aleph$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $xyz \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ olur. $(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$, 1-yutan asalımsı ideal olduğundan $xy \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ ya da bazı $t \geq 1$ için $z^t \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ dir. Bu da, $xym \in \aleph$ ya da $z^t m \in \aleph$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\aleph$, M nin klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olur. ■

M, bir $\mathfrak{R}-$modül olsun. [15, Önerme 1] den bilindiği üzere M nin tüm 1-yutan asalımsı $\aleph$ alt modülü için $\sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)}$, $\mathfrak{R}$ nin bir asal idealidir. Burada, bu sonucun sonlu üretilmiş bir M modülünün klasik 1-yutan asalımsı $\aleph$ alt modülü için de geçerli olduğunu gösteriyoruz. Bu durumda $\aleph$, $\sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)} = P$ olmak üzere $P-$klasik 1-yutan asalımsı alt modül olarak adlandırılır.

Yardımcı Teorem 5.1. *M, sonlu üretilmiş bir $\mathfrak{R}-$modül ve $\aleph$, M nin klasik 1-yutan asalımsı alt modülünü belirtsin. O zaman $(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$, $\mathfrak{R}$ nin 1-yutan asalımsı ideali ve $\sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)}$ asal ideali olur. Özel olarak eğer M, $\mathfrak{R}$ üzerinde bir çarpımsal modül ise $M - rad(\aleph)$, M nin bir asal alt modülü olur.*

İspat. Birimsel olmayan $x,y,z \in \mathfrak{R}$ için $xyz \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ olduğunu varsayalım. $\aleph$, klasik 1-yutan asalımsı alt modül olduğundan her $m \in M$ için $xym \in \aleph$ ya da $t \geq 1$ için $z^t m \in \aleph$ olur. Şimdi, $P = \{m \in M \mid xym \in \aleph\}$ ve $Q = \{m \in M \mid z^t m \in \aleph \text{ bazı } t \geq 1\}$ kümelerini tanımlayalım. Söz konusu halde P ve Q, M nin alt modülleridir ve $M = P \cup Q$ yazılabilir. Böylece $M = P$ ya da $M = Q$ olur. Eğer $M = P$ ise $xyM \subseteq \aleph$ ve dolayısıyla $xy \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ bulunur. Şimdi $M = Q$ olduğunu varsayalım ve M sonlu üretilmiş modül olduğundan bazı $t \geq 1$ için $z^t M \subseteq \aleph$ elde edilir. Buradan $z^t \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ olur ve $(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$, $\mathfrak{R}$ nin 1-yutan asalımsı ideali olduğu sonucuna varılır. Böylelikle [14] bilindiği

üzere $\sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)}$, $\mathfrak{R}$ nin asal ideali olur. Eğer M bir çarpımsal modül ise [15, Önerme 1] gereği $M - rad(\aleph)$, M nin bir asal alt modülü olur. ■

Eğer $\sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)}$, $\mathfrak{R}$ nin asal ideali ise $\aleph$ nin genel olarak M nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olması gerekmediğini aşağıdaki örnekle gösterebiliriz:

Örnek 5.2. *$\mathfrak{R} = \mathbb{Z}$ ve x, y birbirinden farklı asallar olmak üzere $M = \mathbb{Z}_x \oplus \mathbb{Z}_y \oplus \mathbb{Q}$ alalım. M nin sıfır alt modülünü $\aleph = \{0\}$ belirtsin.Bu durumda $\sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)} = \{0\}$, $\mathfrak{R}$ nin asal idealidir. Fakat, x ve y asallarından farklı olan bir z asalı için $z.x.y.\left(\overline{1}, \overline{1}, 0\right) = \left(\overline{0}, \overline{0}, 0\right)$ iken $z.x.\left(\overline{1}, \overline{1}, 0\right) \notin \aleph$ ve tüm $t \geq 1$ için $y^t.\left(\overline{1}, \overline{1}, 0\right) \notin \aleph$ olduğundan $\aleph$, klasik 1-yutan asalımsı alt modül değildir.*

Şimdi de sonlu üretilmiş çarpımsal modüllerde klasik 1-yutan asalımsı alt modüllerin karakterizasyonunun yapıldığı bir teorem sunuyoruz.

Teorem 5.2. *M, sonlu üretilmiş çarpımsal $\mathfrak{R}-$modül ve $\aleph$, M nin bir has alt modülünü belirtsin. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

1. *$\aleph$, 1-yutan asalımsı alt modüldür.*

2. *$\aleph$, klasik 1-yutan asalımsı alt modüldür.*

3. *$(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$, $\mathfrak{R}$ nin 1-yutan asalımsı idealidir.*

İspat. $(1) \Longrightarrow (2)$ Çarpımsal bir M modülünün 1-yutan asalımsı bir $\aleph$ alt modülünü alalım. Birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M$ için $xyzm \in \aleph$ olsun. M, bir çarpımsal modül olduğundan $xy \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ ya da $zm \in M -$ rad $(\aleph) = \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)}M$ bulunur. Dolayısıyla, $xym \in \aleph$ ya da bazı $t \geq 1$ için $z^t m \in \aleph$ elde edilir ve bu da $\aleph$, nin klasik 1-yutan asalımsı alt modül olduğunu gösterir.

$(2) \Longrightarrow (3)$ Yardımcı Teorem 5.1 den elde edilir.

$(3) \Longrightarrow (1)$ Birimsel olmayan $x, y \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M \setminus M - rad(\aleph)$ için $xym \in \aleph$ olduğunu varsayalım. M nin çarpımsal modül olduğu bilgisi kullanılırsa $\mathfrak{R}m = JM$ koşulunu sağlayan $\mathfrak{R}$ nin bir J ideali bulunur. Bu nedenle, $xyJM \subseteq \aleph$ olup $xyJ \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ bulunur. $(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$, 1-yutan asalımsı ideal ve $J \nsubseteq \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)}$ olduğundan $xy \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ dir. Sonuç olarak $\aleph$, 1-yutan asalımsı alt modül olur. ■

Eğer bir $\mathfrak{R}-$modül M nin klasik asalımsı alt modülleri ile klasik 1-yutan asalımsı alt modülleri aynı ise 1-yutan asalımsı eşleşen (compatible) olarak adlandırılır. Eğer

$\mathfrak{R}$ halkasının her sonlu üretilmiş $\mathfrak{R}-$modülü 1-yutan asalımsı eşleşen olduğunda böyle halkalar 1-yutan asalımsı eşleşen olarak adlandırılır.

Sırada eğer bir $\mathfrak{R}$ halkası için $\dim(\mathfrak{R}) = 0$ ise, bu durumda $\mathfrak{R}$ nin 1-yutan asalımsı eşlelen olduğunu gösteriyoruz.

Teorem 5.3. *Her sıfır boyutlu halka (özellikle cisim ya da artinian halka) 1-yutan asalımsı eşleşendir.*

İspat. Kabul edelim ki $\mathfrak{R}$ sıfır boyutlu bir halka ancak 1-yutan asalımsı eşleşen değil. O zaman M nin klasik 1-yutan asalımsı olan fakat klasik asalımsı olmayan bir $\aleph$ alt modülü vardır. Bu taktirde, $m \in M\backslash\aleph$ adına $(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ 1-yutan asalımsı idealdir fakat asalımsı ideal değildir. Böylelikle, Teorem 2.5 uyarınca $\mathfrak{R}$, tek maksimal ideali q olan yerel bir halkadır. Bu durumda $\mathfrak{R}$ deki her asal idealin maksimal olduğu varsayımına göre $\mathfrak{R}$ nin yalnızca bir asal ideali vardır ve bu ideal q dur. Bununla birlikte $(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$, 1-yutan asalımsı ideal olduğundan Teorem 2.4 gereği $\sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)}$, asal ideal olur. Dolayısıyla, $\sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)}$ bir maximal idealdir ve Önerme 2.1 gereği, $(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ bir asalımsı ideal olduğu sonucuna varılır ki bir çelişkidir. Bu nedenle $\mathfrak{R}$, 1-yutan asalımsı eşleşendir. ■

Sıradaki teorem ile klasik 1-yutan asalımsı alt modüllere ait bir karakterizasyon sunuyoruz.

Teorem 5.4. *M bir $\mathfrak{R}-$modül ve $\aleph$, M nin bir has alt modülü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

1. *$\aleph$, M nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modüldür.*

2. *Birimsel olmayan her $x, y, z \in \mathfrak{R}$ için, $(\aleph :_M xyz) \subseteq (\aleph :_M xy) \cup \left(\cup_{t\geq 1} (\aleph :_M z^t)\right)$ dir.*

3. *Birimsel olmayan tüm $x, y \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M$ adına, $xym \notin \aleph$ koşulu gerçekleşiyorsa $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xym) \subseteq \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)}$ dir.*

4. *Birimsel olmayan her $x, y \in \mathfrak{R}$, $m \in M$ ve $\mathfrak{R}$ nin her J ideali için $xyJm \subseteq \aleph$ ise $xym \in \aleph$ ya da $J \subseteq \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)}$ dir.*

5. *$\mathfrak{R}$ nin her I, J, L idealleri ve $m \in M$ için $IJLm \subseteq \aleph$ sağlanıyorken $IJm \subseteq \aleph$ ya da $L \subseteq \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)}$ dir.*

İspat. $(1) \Longrightarrow (2)$ $\aleph$, bir klasik 1-yutan asalımsı alt modül olsun. Birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ için $m \in (\aleph :_M xyz)$ olduğu farz edilsin. Bu taktirde, $xyzm \in \aleph$ bulunur

ve bu da $xym \in \aleph$ ya da bazı $t \geq 1$ için $z^t m \in \aleph$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $m \in (\aleph :_M xy) \cup \left(\cup_{t\geq 1}(\aleph :_M z^t)\right)$ olur. Böylece, $(\aleph :_M xyz) \subseteq (\aleph :_M xy) \cup \left(\cup_{t\geq 1}(\aleph :_M z^t)\right)$ elde edilir.

$(2) \Longrightarrow (3)$ Birimsel olmayan $x, y \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M$ adına $xym \notin \aleph$ olduğunu varsayalım. $z \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} xym)$ olsun. Eğer z birim olsaydı, $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xym) = \mathfrak{R}$ dir ve bu da $xym \in \aleph$ anlamına gelir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla z, birimsel değildir. $xyzm \in \aleph$ olduğundan (2) gereği $m \in (\aleph :_M xyz) \subseteq (\aleph :_M xy) \cup \left(\cup_{t\geq 1}(\aleph :_M z^t)\right)$ bulunur. $xym \notin \aleph$ olduğundan, bazı $t \geq 1$ için $z^t m \in \aleph$ elde edilir. Bu da $z \in \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)}$ anlamına gelir. Böylece, $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xym) \subseteq \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)}$ olur.

$(3) \Longrightarrow (4)$ Birimsel olmayan $x, y \in \mathfrak{R}$, $m \in M$ ve $\mathfrak{R}$ nin J ideali için $xyJm \subseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $J \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} xym)$ olur. Eğer $xym \in \aleph$ ise ispat tamamlanır. Öyleyse $xym \notin \aleph$ olduğunu varsayalım ve (3) gereği $J \subseteq \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)}$ elde edilir.

$(4) \Longrightarrow (5)$ $\mathfrak{R}$ nin I, J, L idealleri ve $m \in M$ için $IJLm \subseteq \aleph$ ve $IJm \nsubseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $xym \notin \aleph$ olacak şekilde $x \in I$ ve $y \in J$ elemanları mevcuttur. $xyLm \subseteq \aleph$ olduğundan (4) gereği $L \subseteq \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)}$ elde edilir.

$(5) \Longrightarrow (1)$ Birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M$ adına $xyzm \in \aleph$ olduğunu kabul edelim. (5) te $I = (x)$, $J = (y)$ ve $L = (z)$ seçilirse, ispat tamamlanır. ■

Eğer $\mathfrak{R}$, Noetherian bir halka ise $\mathfrak{R}-$modül M nin klasik 1-yutan asalımsı alt modüller için daha ileri bir karakterizasyon elde edilir.

Teorem 5.5. *$\mathfrak{R}$, Noetherian bir halka, M bir sadık çarpımsal $\mathfrak{R}-$modül ve $\aleph$, M nin bir has alt modülü olsun. Bu durumda, aşağıdaki koşullar birbirine denktir:*

1. *$\aleph$, M nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülüdür.*

2. *M nin V, Y, Z has alt modülleri ve $m \in M$ için $VYZm \subseteq \aleph$ ifadesi sağlanıyorsa $VYm \subseteq \aleph$ ya da bazı $t \geq 1$ için $Z^t m \subseteq \aleph$ dir.*

İspat. $(1) \Longrightarrow (2)$ Kabul edelim ki $\aleph$, bir klasik 1-yutan asalımsı alt modüldür ve M nin V, Y, Z has alt modülleri ve $m \in M$ için $VYZm \subseteq \aleph$ ifadesi sağlanmaktadır. M, bir çarpımsal modül olduğundan $V = IM$, $Y = JM$ ve $Z = LM$ olacak şekilde $\mathfrak{R}$ nin I, J, L has idealleri mevcuttur. Böylece, $IJLm \subseteq \aleph$ olduğunu gözlemleyebiliriz. N, bir klasik 1-yutan asalımsı alt modül olduğundan Teorem 5.4 gereği $IJm \subseteq \aleph$ ya da $L \subseteq$

$\sqrt{(\aleph :_{\Re} m)}$ elde edilir. $\Re$, Noetherian bir halka olduğundan bazı $t \geq 1$ için $L^t m \subseteq \aleph$ sağlanır. Böylece, $VYm \subseteq \aleph$ ya da bazı $t \geq 1$ için $Z^t m \subseteq \aleph$ ifadesi geçerli olur.

$(2) \Longrightarrow (1)$ $\Re$ nin has I, J, L idealleri ve $m \in M$ için $IJLm \subseteq \aleph$ olduğunu kabul edelim. Şimdi $V = IM$, $Y = JM$ ve $Z = LM$ olarak tanımlayalım. Burada V, Y, Z has alt modül olurlar ve $VYZm \subseteq \aleph$ olduğunu belirtelim. Bu durumda (2) gereği, $VYm \subseteq \aleph$ ya da bazı $t \geq 1$ için $Z^t m \subseteq \aleph$ ifadesi sağlanır. Eğer $VYm \subseteq \aleph$ ise, $IJ(\Re m : M)M = IJ(\Re m) \subseteq \aleph$ olur ve bu da $IJm \subseteq \aleph$ anlamına gelir. Eğer bazı $t \geq 1$ için $Z^t m \subseteq \aleph$ sağlanıyorsa, benzer şekilde $L^t m \subseteq \aleph$ ve buradan da $L \subseteq \sqrt{(\aleph :_{\Re} m)}$ elde edilir. Dolayısıyla Teorem 5.4 gereği $\aleph$, M nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modül olur. ■

İki klasik 1-yutan asalımsı alt modülün kesişimi her zaman bir klasik 1-yutan asalımsı alt modül olmak zorunda değildir. Örneğin $\mathbb{Z}$−modül $M = \mathbb{Z}_6$ nın $\aleph = 2\mathbb{Z}_6$ ve $K = 3\mathbb{Z}_6$ modüllerini ele alalım. Bu durumda $\aleph \cap K = \left(\overline{0}\right)$ olur ve bu kesişim M nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülü değildir. Çünkü $2.2.3.1 \in \left(\overline{0}\right)$ iken $2.2.1 \notin \left(\overline{0}\right)$ ve tüm $t \geq 1$ için $3^t.1 \notin \left(\overline{0}\right)$ dir. Diğer taraftan birbiriyle karşılaştırılabilen klasik 1-yutan asalımsı alt modüllerin ailesinin kesişimi, klasik 1-yutan asalımsı alt modül olur.

Önerme 5.1. *M bir $\Re$−modül ve $\{\aleph_i : i \in \triangle\}$, M nin klasik bir yutan asalımsı alt modüllerinden oluşan azalan bir zincir olsun. O zaman $\bigcap_{i\in\triangle} \aleph_i$ $(i \in 1, 2, .., n)$ ifadesi, M nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olur.*

İspat. Birimsel olmayan $x, y, z \in \Re$ ve $m \in M$ adına $xyzm \in \bigcap_{i\in\triangle} \aleph_i$ alalım. Bu durumda her $i \in \triangle$ için $xyzm \in \aleph_i$ sağlanır. $xym \notin \bigcap_{i\in\triangle} \aleph_i$ olduğunu varsayalım. O zaman bir $j \in \triangle$ için $xym \notin \aleph_j$ olur. Öte yandan, $xyzm \in \aleph_j$ ve $\aleph_j$, bir klasik 1-yutan asalımsı alt modül olduğundan bazı $t \geq 1$ için $z^t m \in \aleph_j$ elde edilir. Şimdi bir $i \in \triangle$ seçelim. Bu durumda ya $\aleph_j \subseteq \aleph_i$ ya da $\aleph_i \subseteq \aleph_j$ olmalıdır. Eğer $\aleph_j \subseteq \aleph_i$ ise, o zaman bazı $t \geq 1$ için $z^t m \in \aleph_i$ olur. Eğer $\aleph_i \subseteq \aleph_j$ ise, bu durumda $xym \notin \aleph_i$ ve $xyzm \in \aleph_i$ dir. $\aleph_i$, M nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olduğundan bazı $t \geq 1$ için $z^t m \in \aleph_i$ elde edilir. Böylece, bazı $t \geq 1$ için $z^t m \in \bigcap_{i\in\triangle} \aleph_i$ ifadesi geçerlidir. Sonuç olarak $\bigcap_{i\in\triangle} \aleph_i$, M nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olur. ■

Şimdi, u−halka ve um−halkalar üzerinde klasik 1-yutan asalımsı alt modülleri inceliyoruz.

Önerme 5.2. *$\aleph$, bir $\Re$−modül M nin klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olsun. Bu durumda*

1. *Birimsel olmayan tüm $x, y, z \in \Re$ ve $m \in M$ olması durumunda $(\aleph :_{\Re} xyzm) \subseteq (\aleph :_{\Re} xym) \cup \left(\cup_{t\geq 1} (\aleph :_{\Re} z^t m)\right)$ dir.*

2. *Eğer* $\mathfrak{R}$ *bir u−halka ise, birimsel olmayan her* $x,y,z \in \mathfrak{R}$ *ve* $m \in M$ *için,* $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xyzm) \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} xym)$ *ya da bazı* $t \geq 1$ *için* $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xyzm) \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} z^t m)$ *olur.*

İspat. (1) $r \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} xyzm)$ kabul edelim. Bu durumda $xyz(rm) \in \aleph$ bulunur ve $\aleph$, klasik 1-yutan asalımsı alt modül olduğundan $xy(rm) \in \aleph$ ya da bazı $t \geq 1$ için $z^t(rm) \in \aleph$ olur. Dolayısıyla, $r \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} xym)$ ya da bazı $t \geq 1$ için $r \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} z^t m)$ elde edilir. Buradan $r \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} xym) \cup \left(\cup_{t\geq 1} (\aleph :_{\mathfrak{R}} z^t m)\right)$ sonucuna varılır. Böylece, $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xyzm) \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} xym) \cup \left(\cup_{t\geq 1} (\aleph :_{\mathfrak{R}} z^t m)\right)$ bulunur.

(2) (1) den elde edilir. ■

Teorem 5.6. $\mathfrak{R}$*, bir um−halka,* M *bir* $\mathfrak{R}$*−modül ve* $\aleph$*,* M *nin bir has alt modülü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

1. $\aleph$*,* M *nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modüldür.*

2. *Birimsel olmayan her* $x,y,z \in \mathfrak{R}$ *için,* $(\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M xy)$ *ya da bazı* $t \geq 1$ *için* $(\aleph :_M xyz) \subseteq (\aleph :_M z^t)$ *dir.*

3. *Birimsel olmayan her* $x,y,z \in \mathfrak{R}$ *ve* M *nin her* L *alt modülü için* $xyzL \subseteq \aleph$ *ifadesi sağlanıyorsa,* $xyL \subseteq \aleph$ *ya da bazı* $t \geq 1$ *için* $z^t L \in \aleph$ *olur.*

4. *Birimsel olmayan her* $x,y \in \mathfrak{R}$ *ve* M *nin her* L *alt modülü için* $xyL \nsubseteq \aleph$ *ise* $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xyL) \subseteq \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} L)}$ *dir.*

5. *Birimsel olmayan her* $x,y \in \mathfrak{R}$*,* $\mathfrak{R}$ *nin her* J *ideali ve* M *nin her* L *alt modülü için* $xyJL \subseteq \aleph$ *ise* $xyL \subseteq \aleph$ *ya da* $J \subseteq \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} L)}$ *dir.*

6. $\mathfrak{R}$ *nin her* I,J,P *idealleri ve* M *nin her* L *alt modülü için* $IJPL \subseteq \aleph$ *ise* $IJL \subseteq \aleph$ *ya da* $P \subseteq \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} L)}$ *dir.*

İspat. (1) $\Longrightarrow$ (2) $\mathfrak{R}$, bir $um-$halka olduğundan Teorem 5.4 (1) $\Longrightarrow$ (2) den elde edilir.

(2) $\Longrightarrow$ (3) $xyzL \subseteq \aleph$ olduğundan $L \subseteq (\aleph :_M xyz)$ dir. (2) kısım gereği istenilen bulunur.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Birimsel olmayan $x,y \in \mathfrak{R}$ ve M nin bir L alt modülü için $xyL \nsubseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. $z \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} xyL)$ olsun. Bu durumda z, birimsel olmayan bir elemandır ve $xyzL \subseteq \aleph$ elde edilir. Buradan (3) gereği bazı $t \geq 1$ için $z^t L \in \aleph$ bulunur. Böylece $z \in \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} L)}$ dir ve bu da $(\aleph :_{\mathfrak{R}} xyL) \subseteq \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} L)}$ anlamına gelir.

$(4) \Longrightarrow (5)$ Birimsel olmayan $x, y \in \mathfrak{R}$, M nin bir L alt modülü ve $\mathfrak{R}$ nin bir has J ideali için $xyJL \subseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. Kabul edelim ki $xyL \nsubseteq \aleph$ olsun. Bu durumda, (4) gereği $J \subseteq (\aleph :_{\mathfrak{R}} xyL) \subseteq \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} L)}$ bulunur. Böylece, $J \subseteq \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} L)}$ elde edilir.

$(5) \Longrightarrow (6)$ $\mathfrak{R}$ nin I, J, P idealleri ve M nin bir L alt modülü için $IJPL \subseteq \aleph$ olsun. $IJL \nsubseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. Bu taktirde, $x \in I$ ve $y \in J$ iken $xyL \nsubseteq \aleph$ elde edilir. $xyPL \subseteq \aleph$ olduğundan (5) gereği $P \subseteq \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} L)}$ sonucuna varılır ve ispat tamamlanır.

$(6) \Longrightarrow (1)$ Açıktır. ■

Teorem 5.7. *$\mathfrak{R}$, Noetherian bir um−halka, M bir sadık çarpımsal $\mathfrak{R}$−modül ve $\aleph$, M nin has alt modülü olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler denktir:*

1. *$\aleph$, M nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülüdür.*

2. *M nin bir takım $\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \aleph_4$ has alt modülleri için eğer $\aleph_1\aleph_2\aleph_3\aleph_4 \subseteq \aleph$ ifadesi sağlanıyorsa $\aleph_1\aleph_2\aleph_4 \subseteq \aleph$ ya da bazı $t \geq 1$ için $\aleph_3^t\aleph_4 \subseteq \aleph$ olur.*

3. *M nin bir takım $\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3$ has alt modülleri için eğer $\aleph_1\aleph_2\aleph_3 \subseteq \aleph$ ise $\aleph_1\aleph_2 \subseteq \aleph$ ya da bazı $t \geq 1$ için $\aleph_3^t \subseteq \aleph$ olur.*

4. *$\aleph$, M nin 1-yutan asalımsı alt modülüdür.*

5. *$(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$, $\mathfrak{R}$ nin 1-yutan asalımsı idealidir.*

İspat. $(1) \Longrightarrow (2)$ Kabul edelim ki, M nin bir takım $\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \aleph_4$ alt modülleri için $\aleph_1\aleph_2\aleph_3\aleph_4 \subseteq \aleph$ sağlansın. M, çarpımsal modül olduğundan, $\aleph_1 = J_1M$, $\aleph_2 = J_2M$ ve $\aleph_3 = J_3M$ olacak şekilde $\mathfrak{R}$ nin J_1, J_2, J_3 has idealleri vardır. Bu durumda, $J_1J_2J_3\aleph_4 \subseteq \aleph$ elde ederiz. Buradan Teorem 5.6 gereği, $J_1J_2\aleph_4 \subseteq \aleph$ ya da bazı $t \geq 1$ için $J_3^t\aleph_4 \subseteq \aleph$ bulunur. Böylece, bazı $t \geq 1$ için $\aleph_1\aleph_2\aleph_4 \subseteq \aleph$ ya da $\aleph_3^t\aleph_4 \subseteq \aleph$ sonucuna ulaşılır.

$(2) \Longrightarrow (3)$ $\aleph_4 = \aleph$ seçilirse istenilen elde edilir.

$(3) \Longrightarrow (4)$ $\mathfrak{R}$ nin bazı J_1, J_2 idealleri ile M nin bir L alt modülü için $J_1J_2L \subseteq \aleph$ olduğunu varsayalım. (3) te $\aleph_1 = J_1M$, $\aleph_2 = J_2M$ ve $\aleph_3 = L$ olarak alınırsa istenilene ulaşılır.

$(4) \Longrightarrow (5)$ $\aleph$, M nin 1-yutan asalımsı alt modülü olsun. Birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ için $xyz \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ olduğunu kabul edelim. Buradan $xyzM \subseteq \aleph$ elde edilir. N, bir 1-yutan asalımsı alt modül olduğundan $xy \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ ya da $zM \subseteq M - rad(\aleph)$ olur. Dolayısıyla, $xy \in (\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ ya da $z \in \sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)}$ dir. Böylece, $(\aleph :_{\mathfrak{R}} M)$ nin 1-yutan asalımsı ideal olduğu sonucuna varılır.

$(5) \Longrightarrow (1)$ Noetherian bir halka üzerinde tanımlı her çarpımsal modül Noetherian özellik taşıdığından, M bir Noetherian modül olup sonlu üretilmiştir. Buna göre Teorem 5.2 den istenilen elde edilir. ■

$\aleph$, $\mathfrak{R}-$modül M nin bir has alt modülü olmak üzere $Z_{\mathfrak{R}}(M/\aleph) = \{r \in \mathfrak{R} \mid m \in M \setminus \aleph \text{ için } rm \in \aleph\}$ olarak tanımlayacağız.

Önerme 5.3. *M bir $\mathfrak{R}-$modül, $\aleph$, M nin has alt modülü ve S, $\mathfrak{R}$ nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun.*

1. *Eğer $\aleph$, M nin $(\aleph :_{\mathfrak{R}} M) \cap S = \varnothing$ koşulunu sağlayan bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülü ise $S^{-1}\aleph$, $S^{-1}M$ nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olur.*

2. *Eğer $S^{-1}\aleph$, $S^{-1}M$ nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülü ve $Z_{\mathfrak{R}}(M/\aleph) \cap S = \varnothing$ koşulu sağlanıyorsa $\aleph$, M nin klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olur.*

İspat. (1) $\aleph$, M nin klasik 1-yutan asalımsı alt modülü ve $(\aleph :_{\mathfrak{R}} M) \cap S = \varnothing$ olduğunu varsayalım. Birimsel olmayan $\frac{x}{s}, \frac{y}{t}, \frac{z}{u} \in S^{-1}\mathfrak{R}$ ve $\frac{m}{v} \in S^{-1}M$ için $\frac{x}{s}\frac{y}{t}\frac{z}{u}\frac{m}{v} \in S^{-1}\aleph$ olsun. Bu durumda, $\alpha(xyzm) = xyz(\alpha m) \in \aleph$ olacak şekilde $\alpha \in S$ vardır. $\aleph$, klasik 1-yutan asalımsı alt modül olduğundan $xy(\alpha m) \in \aleph$ ya da bazı $t \geq 1$ için $z^t(\alpha m) \in \aleph$ bulunur. Bu da, $\frac{x}{s}\frac{y}{t}\frac{m}{v} = \frac{xy\alpha m}{st\alpha m} \in S^{-1}\aleph$ ya da $\frac{z^t}{u}\frac{m}{v} = \frac{z^t \alpha m}{u\alpha v} \in S^{-1}\aleph$ anlamına gelir. Dolayısıyla, $S^{-1}\aleph$, $S^{-1}M$ nin klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olur.

(2) Birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M$ durumunda $xyzm \in \aleph$ olduğunu kabul edelim. Buradan $\frac{x}{1}\frac{y}{1}\frac{z}{1}\frac{m}{1} \in S^{-1}\aleph$ olur ve bu durumda $\frac{x}{1}\frac{y}{1}\frac{m}{1} \in S^{-1}\aleph$ ya da bazı $t \geq 1$ için $\left(\frac{z}{1}\right)^t \frac{m}{1} \in S^{-1}\aleph$ elde edilir. Dolayısıyla, bazı $s \in S$ için $sxym \in \aleph$ ya da bazı $s' \in S$ için $s'z^t m \in \aleph$ bulunur. $Z_{\mathfrak{R}}(M/\aleph) \cap S = \varnothing$ koşulu gereği $xym \in \aleph$ ya da $z^t m \in \aleph$ sonucuna ulaşılır. ■

Önerme 5.4. *$f : M_1 \longrightarrow M_2$ bir $\mathfrak{R}-$modül homomorfizması $\aleph_1$ ve $\aleph_2$ sırasıyla M_1 ve M_2 nin has alt modülleri olsunlar.*

1. *Eğer $\aleph_2$, M_2 nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülü ve $f^{-1}(\aleph_2)$, M_1 in has alt modülü ise, o zaman $f^{-1}(\aleph_2)$, M_1 in bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olur.*

2. *Eğer f bir epimorfizma ve $\aleph_1$, M_1 in Çek (f) yi kapsayan bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülü ise bu durumda $f(\aleph_1)$, M_2 nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olur.*

İspat. (1) $\aleph_2$, M_2 nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülü ve $f^{-1}(\aleph_2) \neq M_1$ olduğunu varsayalım. Birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M_1$ için $xyzm \in f^{-1}(\aleph_2)$ olsun.

Bu durumda, $f(xyzm) = xyzf(m) \in \aleph_2$ elde edilir. $\aleph_2$, M_2 nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modül olduğundan $xyf(m) = f(xym) \in \aleph_2$ ya da bazı $t \geq 1$ için $z^t f(m) = f(z^t m) \in \aleph_2$ olur. Bu da, $xym \in f^{-1}(\aleph_2)$ ya da bazı $t \geq 1$ için $z^t m \in f^{-1}(\aleph_2)$ anlamına gelir. Dolayısıyla $f^{-1}(\aleph_2)$, M_1 in bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülüdür.

(2) Birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ ve $m' \in M_2$ durumunda $xyzm' \in f(\aleph_1)$ olduğunu varsayalım. f örten olduğundan $m' = f(m)$ olacak şekilde $m \in M_1$ bulunur. Bu durumda $xyzm' = xyzf(m) = f(xyzm) \in f(\aleph_1)$ elde edilir. Çek $(f) \subseteq \aleph_1$ olduğundan $xyzm \in \aleph_1$ olur ve $\aleph_1$, klasik 1-yutan asalımsı alt modül olduğundan $xym \in \aleph_1$ ya da bazı $t \geq 1$ için $z^t m \in \aleph_1$ sonucu ortaya çıkar. Bu durumda, $xym' = f(xym) \in f(\aleph_1)$ ya da $z^t m' = f(z^t m) \in f(\aleph_1)$ elde edilir. Dolayısyla $f(\aleph_1)$, M_2 nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olur. ■

Sonuç 5.1. *M, $\mathfrak{R}$ üzerinde bir modül ve $L \subseteq K$ olacak şekilde M nin iki alt modülünü belirtsinler. Buna göre K, M nin klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olması için gerek ve yeter koşul K/L, M/L nin klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olmasıdır.*

Şimdi de tensör çarpımları üzerinde klasik 1-yutan asalımsı alt modülleri karakterize ediyoruz.

Önerme 5.5. *Kabul edelim ki $\mathfrak{R}$ bir um−halka ve M bir $\mathfrak{R}$−modül ve $\mathscr{F}$ bir düz $\mathfrak{R}$−modül olsun. Eğer $\aleph$, M nin klasik 1-yutan asalımsı alt modülü ve $\mathscr{F} \otimes \aleph \neq \mathscr{F} \otimes M$*

koşulu sağlanıyorsa $\mathscr{F} \otimes \aleph$, $\mathscr{F} \otimes M$ nin klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olur.

İspat. Birimsel olmayan $x, y, z \in \mathfrak{R}$ alalım. O zaman, Teorem 5.6 a göre $(\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M xy)$ ya da bazı $t \geq 1$ için $(\aleph :_M xyz) \subseteq (\aleph :_M z^t)$ dir. Kabul edelim ki, $(\aleph :_M xyz) = (\aleph :_M xy)$ olsun. Bu durumda [2, Lemma 3.2] gereği $(\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F} \otimes M} xyz) = \mathscr{F} \otimes (\aleph :_M xyz) = \mathscr{F} \otimes (\aleph :_M xy) = (\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F} \otimes M} xy)$ bulunur. Şimdi de, bazı $t \geq 1$ için $(\aleph :_M xyz) \subseteq (\aleph :_M z^t)$ olduğunu kabul edelim. Benzer şekilde, yine [2, Lemma 3.2] gereği $(\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F} \otimes M} xyz) = \mathscr{F} \otimes (\aleph :_M xyz) \subseteq \mathscr{F} \otimes (\aleph :_M z^t) = (\mathscr{F} \otimes \aleph :_{\mathscr{F} \otimes M} z^t)$ elde edilir. Buradan Teorem 5.6 kullanarak, $\mathscr{F} \otimes \aleph$, $\mathscr{F} \otimes M$ nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olduğu sonucuna varılur. ■

Sonuç 5.2. *$\mathfrak{R}$, bir um−halka, M bir $\mathfrak{R}$−modül ve X bir değişken olarak alınsın. Eğer $\aleph$, M nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülü ise o zaman $\aleph[X]$, $M[X]$ in bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olur.*

İspat. $\aleph$, M nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olsun. $\mathfrak{R}[X]$ bir düz $\mathfrak{R}$−modül olduğu bilindiğine göre Önerme 5.5 gereği $\mathfrak{R}[X] \otimes \aleph \cong \aleph[X]$, $\mathfrak{R}[X] \otimes M \cong M[X]$ in bir klasik asalımsı alt modülü olur. ■

Önerme 5.6. *M_1 ve M_2, $\Re$−modüller ve $\aleph_1$, $\aleph_2$ sırasıyla M_1 ve M_2 nin has alt modülleri olsunlar. Eğer $\aleph = \aleph_1 \times \aleph_2$, $M = M_1 \times M_2$ nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modül ise, bu durumda $\aleph_1$, M_1 in klasik 1-yutan asalımsı alt modülü ve $\aleph_2$, M_2 nin klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olur.*

İspat. Kabul edelim ki $\aleph = \aleph_1 \times \aleph_2$, $M = M_1 \times M_2$ nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olsun. Birimsel olmayan $x, y, z \in \Re$, $m_1 \in M_1$ için $xyzm_1 \in \aleph_1$ ve $xym_1 \notin \aleph_1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $xyz(m_1, 0) \in \aleph_1 \times \aleph_2$ ve $xy(m_1, 0) \notin \aleph_1 \times \aleph_2$ elde ederiz. $\aleph = \aleph_1 \times \aleph_2$, klasik 1-yutan asalımsı alt modül olduğundan bazı $t \geq 1$ için $z^t(m_1, 0) \in \aleph_1 \times \aleph_2$ sonucuna varılır. Böylece, $z^t m_1 \in \aleph_1$ bulunur ve $\aleph_1$ in klasik 1-yutan asalımsı alt modül olduğu anlaşılır. Benzer şekilde $\aleph_2$, M_2 nin klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olduğu gösterilir. ■

Sıradaki örnek, Önerme 5.6 in tersinin genellikle geçerli olmadığını göstermektedir.

Örnek 5.3. *$\Re = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ve q, r farklı asal sayılar olmak üzere $\aleph = q\mathbb{Z} \times r\mathbb{Z}$ alalım. $q\mathbb{Z}$ ve $r\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ nin asal idealleri olduğundan, $\mathbb{Z}$−modül $\mathbb{Z}$ nin klasik 1-yutan asalımsı alt modülleri olurlar. Fakat, $qqr(1,1) \in \aleph = q\mathbb{Z} \times r\mathbb{Z}$ iken $qq(1,1) \notin \aleph$ ve her $t \geq 1$ için $r^t(1,1) \notin \aleph$ olduğundan $\aleph$, M nin klasik 1-yutan asalımsı alt modülü değildir.*

Önerme 5.7. *$\Re = \Re_1 \times \Re_2$ ayrışabilir halka ve M_1 bir $\Re_1$−modül ve M_2 bir $\Re_2$−modül olmak üzere $M = M_1 \times M_2$ bir $\Re$−modül olsunlar. Bu durumda $\aleph = \aleph_1 \times \aleph_2$, $M = M_1 \times M_2$ nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülüdür ancak ve yalnız aşağıdaki ifadelerden biri sağlanır:*

1. *$\aleph_1$, M_1 in klasik 1-yutan asalımsı alt modülüdür ve $\aleph_2 = M_2$ dir.*

2. *$\aleph_2$, M_2 in klasik 1-yutan asalımsı alt modülüdür ve $\aleph_1 = M_1$ dir.*

İspat. (1) $\aleph = \aleph_1 \times \aleph_2$, M nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olduğunu varsayalım. Hem $\aleph_1$ hem de $\aleph_2$ has alt modüller olsunlar. Bu durumda, $m_1 \in M_1 \setminus \aleph_1$ ve $m_2 \in M_2 \setminus \aleph_2$ elemanları vardır. Buradan, $(1,0)(1,0)(0,1)(m_1, m_2) \in \aleph$ için $(1,0)(1,0)(m_1, m_2) \in \aleph$ ya da bazı $t \geq 1$ için $(0,1)^t(m_1, m_2) \in \aleph$ olduğunu gösterir ve bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $\aleph_1 = M_1$ ya da $\aleph_2 = M_2$ olur. Genelliği kaybetmeden $\aleph_2 = M_2$ olduğunu varsayalım. Birimsel olmayan $x, y, z \in \Re_1$ ve $m_1 \in M_1$ için $xyzm_1 \in \aleph_1$ olduğunu farz edelim. O halde tüm $m_2 \in M_2$ için $(x,1)(y,1)(z,1)(m_1, m_2) \in \aleph_1 \times M_2$ bulunur. Bu da $(x,1)(y,1)(m_1, m_2) \in \aleph_1 \times M_2$ ya da bazı $t \geq 1$ için $(z,1)^t(m_1, m_2) \in \aleph_1 \times M_2$ anlamına gelir. O halde, $xym_1 \in \aleph_1$ ya da $z^t m_1 \in \aleph_1$ elde edilir. Böylece, $\aleph_1$ klasik 1-yutan asalımsı alt modüldür. Tersine $\aleph_1$, M_1 in klasik 1-yutan asalımsı alt modülü ve $\aleph_2 = M_2$ olsun. Birimsel olmayan (x_1, x_2), (y_1, y_2), $(z_1, z_2) \in \Re$ ve $(m_1, m_2) \in M$ için

$(x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)(m_1, m_2) \in \aleph = \aleph_1 \times \aleph_2$ kabul edelim. Bu durumda $x_1y_1z_1m_1 \in \aleph_1$ ve $\aleph_1$ klasik 1-yutan asalımsı alt modül olduğundan $x_1y_1m_1 \in \aleph_1$ ya da bazı $t \geq 1$ için $z_1^t m_1 \in \aleph_1$ bulunur. Buradan $(x_1, x_2)(y_1, y_2)(m_1, m_2) \in \aleph$ ya da $(z_1, z_2)^t (m_1, m_2) \in \aleph$ sonucuna varılır ve $\aleph$, klasik 1-yutan asalımsı alt modüldür. ■

Sıradaki örnek $\aleph_1$, M_1 in klasik 1-yutan asalımsı alt modülü ve $\aleph_2$, M_2 in klasik 1-yutan asalımsı alt modülü ise $\aleph = \aleph_1 \times \aleph_2$, $M = M_1 \times M_2$ nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olmak zorunda olmadığını göstermektedir.

Örnek 5.4. *$\mathfrak{R} = M = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, α ve β iki farklı asal sayı olmak üzere $\aleph = \alpha\mathbb{Z}\times\beta\mathbb{Z}$ olduğunu varsayalım. $\alpha\mathbb{Z}$ ve $\beta\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ nin asal idealleri olduğundan, $\alpha\mathbb{Z}$ ve $\beta\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$—modül $\mathbb{Z}$ nin klasik 1-yutan asalımsı alt modülleridir. Fakat, $(\alpha, 1)(\alpha, 1)(1, \beta)(1, 1) = \left(\alpha^2, \beta\right) \in \aleph$ iken $(\alpha, 1)(\alpha, 1)(1, 1) \notin \aleph$ ve tüm $t \geq 1$ için $(1, \beta)^t (1, 1) \notin \aleph$ olduğundan $\aleph$, klasik 1-yutan asalımsı alt modül değildir.*

Teorem 5.8. *M bir $\mathfrak{R}$—modül ve $\aleph$ ise M nin klasik asalımsı olmayan bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olsun. O zaman $\mathfrak{R}$, tek maksimal ideali q olan lokal halkadır ve $m \in M \setminus \aleph$ için $\sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)}$ asal idealdir.*

İspat. Kabul edelim ki $\aleph$, M nin klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olsun fakat klasik asalımsı alt modülü olmasın. $\aleph$, klasik asalımsı alt modül olmadığından $m \in M \setminus \aleph$ için $(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$, $\mathfrak{R}$ nin bir asalımsı ideali değildir. Diğer taraftan, $\aleph$ klasik 1-yutan asalımsı alt modül olduğundan Teorem 5.1 gereği, $(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)$ 1-yutan asalımsı ideal olur. Bu durumda $\mathfrak{R}$, asalımsı olmayan bir 1-yutan asalımsı ideale sahiptir. Dolayısıyla [14, Teorem 3] gereği $\mathfrak{R}$ lokal halkadır ve $m \in M \setminus \aleph$ için $\sqrt{(\aleph :_{\mathfrak{R}} m)}$ asal ideal olur. ■

Sıradaki teoremde, değişmeli halkalar üzerindeki birleşimli çoğaltım modülü olan $M \bowtie J$ nın klasik asalımsı ve klasik 1-yutan asalımsı alt modülleri incelenecektir.

Teorem 5.9. *M, $\mathfrak{R}$ üzerinde bir modülü, $\aleph$ onun alt modülünü ve J, $\mathfrak{R}$ ye ait bir ideali belirtsin. $\mathfrak{R} \bowtie J$—modül $M \bowtie J$ yi ele alalım. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanır.*

1. *$\aleph \bowtie J$, $M \bowtie J$ nin klasik asalımsı alt modülü olması için gerek ve yeter koşul $\aleph$, M nin bir klasik asalımsı alt modülü olmasıdır.*

2. *$\aleph \bowtie J$, $M \bowtie J$ nin klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olması için gerek ve yeter koşul $\aleph$, M nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olmasıdır.*

İspat. (1) $\aleph \bowtie J$, $M \bowtie J$ nin klasik asalımsı alt modülü olduğunu varsayalım. Kabul edelim ki $x, y \in \mathfrak{R}$ ve $m \in M$ için $xym \in \aleph$ olsun. Bu durumda $(x, x)(y, y)(m, m) =$

$(xym, xym) \in \aleph \bowtie J$ olur. $\aleph \bowtie J$, $M \bowtie J$ nin klasik asalımsı alt modülü olduğundan $(x,x)(m,m) \in \aleph \bowtie J$ ya da bazı $t \geq 1$ için $(y,y)^t (m,m) \in \aleph \bowtie J$ elde edilir. Buradan $xm \in \aleph$ ya da bazı $t \geq 1$ için $y^t m \in \aleph$ bulunur ve böylece $\aleph$, M nin klasik asalımsı alt modülü olur. Tersini göstermek için $\aleph$, M nin klasik asalımsı alt modül olduğunu kabul edelim. Bir takım $(x, x+j), (y, y+i) \in \Re \bowtie J$ ve $(m, m+m') \in M \bowtie J$ için $(x, x+j)(y, y+i)(m, m+m') \in \aleph \bowtie J$ olarak alalım. Bu taktirde, $(xym, (x+j)(y+i)(m+m')) \in \aleph \bowtie J$ olur ve buradan $xym \in \aleph$ elde edilir. $\aleph$, klasik asalımsı alt modül olduğundan $xm \in \aleph$ ya da bazı $t \geq 1$ için $y^t m \in \aleph$ bulunur. Böylece aşağıdaki durumlar elde edilir.

Durum 1: $xm \in \aleph$ olduğunu varsayalım. Buradan, $(x, x+j)(m, m+m') = (xm, xm + jm + xm' + jm') \in \aleph \bowtie J$ bulunur.

Durum 2: Bazı $t \geq 1$ için $y^t m \in N$ olduğunu kabul edelim.

$(y, y+i)^t (m, m+m') = (y^t m, (y+i)^t .(m+m')) = (y^t m, (y^t + a_1 y^{t-1} i + a_2 y^{t-2} i^2 + ... + a_t i^t)(m+m')) = (y^t m, (y^t + a_1 y^{t-1} i + ... + a_t i^t)m + (y^t + a_1 y^{t-1} i + ... + a_t i^t)m'$ $\in \aleph \bowtie J$. Sonuç olarak $\aleph \bowtie J$, $M \bowtie J$ nin klasik asalımsı alt modülü olur.

(2) Varsayalım ki $\aleph \bowtie J$, $M \bowtie J$ nin klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olsun. Birimsel olmayan $x, y, z \in \Re$ ve $m \in M$ durumunda $xyzm \in \aleph$ olduğunu kabul edelim. Yardımcı Teorem 3.2 e göre (x,x), (y,y), $(z,z) \in \Re \bowtie J$ birimselden farklı elemanlardır ve $(x,x)(y,y)(z,z)(m,m) \in \aleph \bowtie J$ dir. $\aleph \bowtie J$ bir klasik 1-yutan asalımsı alt modül olduğundan $(x,x)(y,y)(m,m) \in \aleph \bowtie J$ ya da bazı $t \geq 1$ için $(z,z)^t (m,m) \in \aleph \bowtie J$ bulunur. Buradan $xym \in \aleph$ ya da bazı $t \geq 1$ için $z^t m \in \aleph$ elde edilir ve böylece $\aleph$, M nin klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olduğu sonucuna varılır. Şimdi, tersini göstermek için N, M nin klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olsun. Eğer $\aleph$, klasik asalımsı alt modül ise (1). kısım gereği $\aleph \bowtie J$, klasik asalımsı alt modül olur ve dolayısıyla klasik 1-yutan asalımsı alt modül olduğu sonucuna varılır. Şimdi, $\aleph \bowtie J$ nin klasik asalımsı alt modül olmadığını varsayalım. Bu durumda Teorem 5.8 gereği $(\Re, q)$ tek maksimal ideali q olan lokal halkadır. Buradan $J \subseteq Jac(\Re) = q$ elde edilir. Ayrıca Lemma 3.2 gereği, $(x, x+j)$, $(y, y+i)$, $(z, z+k)$ $\Re \bowtie J$ birimsel olmayan elemanlar ise x, y, z de $\Re$ de birimselden farklı elemanlardır. Böylece, $(xyzm, (x+j)(y+i)(z+k)(m+m')) \in \aleph \bowtie J$ olur. Dolayısıyla, $xyzm \in \aleph$ ve $\aleph$ klasik 1-yutan asalımsı alt modül olduğundan $xym \in \aleph$ ya da bazı $t \geq 1$ için $z^t m \in \aleph$ elde edilir. Böylece, aşağıdaki iki durum ortaya çıkar.

Durum 1: Kabul edelim ki $xym \in \aleph$ olsun. O zaman $(x, x+j)(y, y+i)(m, m+m') =$ $(xym, (x+j)(y+i)(m+m'))$

$=$

$(xym, xym + (xi + yj + ji)m + (xy + xi + yj + ji)m') \in \aleph \bowtie J$ bulunur.

Durum 2: Varsayalım ki bazı $t \geq 1$ için $z^t m \in \aleph$ olsun.

$$(z, z+k)^t (m, m+m') = (z^t m, (z+k)^t.(m+m'))$$

$$= (z^t m, z^t + a_1 z^{t-1} k + a_2 z^{t-2} k^2 + ... + k^t)(m+m'))$$

$$= (z^t m, (z^t + a_1 z^{t-1} k + ... + k^t)m + (z^t + a_1 z^{t-1} k + ... + k^t)m') \in \aleph \bowtie J$$

dir. Böylece $\aleph \bowtie J$, $M \bowtie J$ nin bir klasik 1-yutan asalımsı alt modülü olduğu sonucuna varılır. ■

6
SONUÇ

Bu tezde, modül teorisi kapsamında klasik asal alt modüllerin genelleştirilmesi üzerine çalışmalar gerçekleştirilmiştir. Üçüncü bölümde, klasik asal alt modüller ile klasik 2-yutan alt modüller arasında yeni bir sınıf olarak klasik 1-yutan asal alt modüller tanımlanmış ve bu modüllerin temel özellikleri ayrıntılı bir şekilde araştırılmıştır. Yapılan genellemelerin tersinin her zaman doğru olmadığını göstermek amacıyla, bu durumu destekleyen modül örnekleri sunulmuştur. Bazı önemli halka sınıfları, klasik 1-yutan asal alt modüllere dayanarak tanımlanmış ve karakterize edilmiştir. Klasik 1-yutan asal m-kapalı küme tanımlanarak, Krull Ayrışım Lemması klasik 1-yutan asal alt modüller için ispatlanmıştır. Ardından birleşimli çoğaltım modül yapısında klasik asal, klasik 1-yutan asal ve klasik 2-yutan alt modüllerinin özellikleri ele alınmıştır. Dördüncü bölümde, klasik 1-yutan asal alt modüllerin genişlemesi olarak zayıf klasik 1-yutan asal alt modüller kavramsallaştırılmıştır. Bu bağlamda, klasik 1-dörtlü sıfır kavramı tanıtılmış ve zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olup klasik 1-yutan asal alt modül olmayan alt modüllerin özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Ayrıca, um-halkalar üzerinde zayıf klasik 1-yutan asal alt modüllerin temel özellikleri verilmiştir. Her has alt modülü zayıf klasik 1-yutan asal alt modül olan modüllerin yapısal özellikleri araştırılmıştır. Beşinci bölümde ise, klasik asalıması alt modüllerin daha genel bir uzantısı olarak klasik 1-yutan asalıması alt modüller üzerinde çalışılmıştır. Bu sınıfın özellikleri, diğer modül yapılarıyla ilişkisi derinlemesine ele alınmıştır. Klasik asalıması ile klasik 1-yutan asalıması alt modülleri aynı olan halkaların yapısı incelenmiş ve bu özelliği taşıyan modüllere 1-yutan asalıması eşleşen adı verilmiştir. Son olarak da birleşimli çoğaltım modüllerinin klasik asalıması ve klasik 1-yutan asalıması alt modülleri incelenmiştir. Tüm modül yapılarının homomorfizmalarda, bölüm modüllerinde, lokalizasyonda, tensör çarpımlarında ve kartezyen çarpımlarda gösterdiği davranışlar detaylı olarak incelenmiştir. Bu çalışmada, klasik asal alt modüller ile onların genellemeleri arasında ortaya çıkan yeni yapılar ve kavramlar sistematik bir şekilde incelenmiştir. Bu yapıların cebirsel ve modüler özellikleri üzerinde durulmuştur. Elde edilen sonuçlar, modül teorisinin anlaşılmasına katkı sağlayacak niteliktedir. Gelecekteki çalışmalarda, bu modül yapısı farklı yaklaşımlarla genelleştirilebilir. Örneğin, $\mathfrak{R}$ halkasının çarpımsal kapalı bir

alt kümesi olan S kullanılarak klasik $S-1$ yutan asal ve asalımsı alt modüller incelenebilir. Bunun yanı sıra, alternatif bir genelleme formu olarak $\phi-$ fonksiyonu tanımlanarak ϕ-klasik 1-yutan asalımsı alt modüller araştırılabilir. Bu yeni kavram ve sonuçlar, mevcut halka ve modülleri sınıflandırmada ve yeni kavramların geliştirilmesine olanak sağlayabilir.

KAYNAKÇA

[1] M. Behboodi, H. Koohy, "Weakly prime modules," *Vietnam J. Math*, vol. 32, no. 2, pp. 185–195, 2004.

[2] A. Azizi, "Weakly prime submodules and prime submodules," *Glasgow Mathematical Journal*, vol. 48, no. 2, pp. 343–346, 2006.

[3] A. Azizi, "On prime and weakly prime submodules," *Vietnam J. Math*, vol. 36, no. 3, pp. 315–325, 2008.

[4] M. Baziar, M. Behboodi, "Classical primary submodules and decomposition theory of modules," *Journal of Algebra and its Applications*, vol. 8, no. 03, pp. 351–362, 2009.

[5] M. Behboodi, S. Shojaee, "On chains of classical prime submodules and dimension theory of modules," *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, vol. 36, no. 1, pp. 149–166, 2011.

[6] M. Behboodi, N. R. Jahani, M. Naderi, "Classical quasi-primary submodules," *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, vol. 37, no. 4, pp. 51–71, 2011.

[7] H. Mostafanasab, U. Tekir, K. H. Oral, "Classical 2-absorbing submodules of modules over commutative rings," *European Journal Of Pure and Applied Mathematics*, vol. 8, no. 3, pp. 417–430, 2015.

[8] H. Mostafanasab, U. Tekir, K. H. Oral, "Weakly classical prime submodules," *Kyungpook Mathematical Journal*, vol. 56, no. 4, pp. 1085–1101, 2016.

[9] H. Mostafanasab, "On weakly classical primary submodules," *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, vol. 22, no. 5, pp. 743–760, 2015.

[10] H. Mostafanasab, E. Ugurlu, "Phi-classical prime submodules," *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, vol. 43, no. 2, 2019.

[11] D. Anderson, E. Smith, "Weakly prime ideals," *Houston journal of Mathematics*, vol. 29, no. 4, p. 831, 2003.

[12] S. E. Atani, F. Farzalipour, "On weakly prime submodules," *Tamkang Journal of Mathematics*, vol. 38, no. 3, pp. 247–252, 2007.

[13] A. Badawi, "On 2-absorbing ideals of commutative rings," *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, vol. 75, no. 3, pp. 417–429, 2007.

[14] A. Badawi, E. Y. Celikel, "On 1-absorbing primary ideals of commutative rings," *Journal of Algebra and its Applications*, vol. 19, no. 06, p. 2 050 111, 2020.

[15] E. Y. Celikel, "1-absorbing primary submodules," *Analele Stiintifice Ale Univ. "Òvidius" Constanta-Ser. Mat.*, vol. 29, no. 3, pp. 285–296, 2021.

[16] A. Yassine, M. Nikmehr, R. Nikandish, "On 1-absorbing prime ideals of commutative rings," *Journal of Algebra and its Applications*, vol. 20, no. 10, p. 2 150 175, 2021.

[17] S. Koc, Ü. Tekir, E. Yıldız, "On weakly 1-absorbing prime ideals," *Ricerche di Matematica*, vol. 72, no. 2, pp. 723–738, 2023.

[18] E. Aslankarayigit Ugurlu, "On 1-absorbing prime submodules," *Moroccan Journal of Algebra and Geometry with Applications*, vol. 10, no. 10, pp. 1–12, 2023.

[19] R. Sharp, *Steps in commutative algebra*. Cambridge University Press, 2000.

[20] F. Çallıalp, Ü. Tekir, *Değişmeli Halkalar ve Modüller*. Birsen Yayınevi, 2009.

[21] A. E. Khalfi, M. Issoual, N. Mahdou, A. Reinhart, "Commutative rings with one-absorbing factorization," *Communications in Algebra*, vol. 49, no. 6, pp. 2689–2703, 2021.

[22] A. Barnard, "Multiplication modules.," *J. Algebra*, vol. 71, no. 1, pp. 174–178, 1981.

[23] Z. A. El-Bast, P. P. Smith, "Multiplication modules," *Communications in Algebra*, vol. 16, no. 4, pp. 755–779, 1988.

[24] R. Ameri, "On the prime submodules of multiplication modules," *International journal of Mathematics and mathematical Sciences*, vol. 2003, no. 27, pp. 1715–1724, 2003.

[25] T.-K. Lee, Y. Zhou, "Reduced modules," *Rings, modules, algebras and abelian groups*, vol. 236, pp. 365–377, 2004.

[26] U. Tekir, "On primary submodules," *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 27, no. 2, p. 285, 2006.

[27] A. Y. Darani, F. Soheilnia, "2-absorbing and weakly 2-absorbing submodules," *Thai J. Math*, vol. 9, no. 3, pp. 577–584, 2011.

[28] N. Groenewald, "1-absorbing and weakly 1-absorbing prime submodules of a module over a noncommutative ring," *Afrika Matematika*, vol. 34, no. 3, p. 54, 2023.

[29] B. Saraç, "On semiprime submodules," *Communications in Algebra*, vol. 37, no. 7, pp. 2485–2495, 2009.

[30] M. Ebrahimpour, F. Mirzaee, "On phi-semıprıme submodules," *Journal of the Korean Mathematical Society*, vol. 54, no. 4, pp. 1099–1108, 2017.

[31] P. Quartararo, H. Butts, "Finite unions of ideals and modules," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 52, no. 1, pp. 91–96, 1975.

[32] P. J. McCarthy, *Multiplicative Theory of Ideals. Pure and Applied Mathematics: A Series of Monographs and Textbooks, Volume 43*. Elsevier Science & Technology, 1971.

[33] M. D'anna, M. Fontana, "An amalgamated duplication of a ring along an ideal: The basic properties," *Journal of Algebra and its Applications*, vol. 6, no. 03, pp. 443–459, 2007.

[34] E. Bouba, N. Mahdou, M. Tamekkante, "Duplication of a module along an ideal," *Acta Mathematica Hungarica*, vol. 154, pp. 29–42, 2018.

[35] M. M. Ali, “Idempotent and nilpotent submodules of multiplication modules,” *Communications in Algebra®*, vol. 36, no. 12, pp. 4620–4642, 2008.

[36] P. P. Smith, “Some remarks on multiplication modules,” *Archiv der Mathematik*, vol. 50, pp. 223–235, 1988.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Makale

1. Z. Yılmaz Uçar, B. A. Ersoy, Ü. Tekir, E. Yetkin Çelikel, S. Onar, "Classical 1-Absorbing Primary Submodules", Mathematics, vol. 12, no. 12, 1801, 2024.

2. Z. Yılmaz, B. A. Ersoy, Ü. Tekir, S. Koç, S. Onar, "On Classical 1-Absorbing Prime Submodules", Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, In press.

Konferans Bildirisi

1. Z. Yılmaz Uçar, B. A. Ersoy, S. Onar, Ü. Tekir, S. Koç, "Klasik 1-Yutan Asal Alt Modüller", *35. Ulusal Matematik Sempozyumu*, Özet Kitapçığı UMS 2023, Trakya Üniversitesi, syf. 118.