T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜREKSİZ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNDE GREEN FONKSİYONU

Hilal ÖZDEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman

Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN

Temmuz, 2025

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜREKSİZ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNDE GREEN FONKSİYONU

Hilal ÖZDEMİR tarafından hazırlanan tez çalışması 11.07.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Özlem BAKŞİ, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Ayten KOÇ, Üye
Gebze Teknik Üniversitesi _____

Danışmanım Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN sorumluluğunda tarafımca hazırlanan “ Süreksiz Sınır Değer Probleminin Çözümünde Green Fonksiyonu” başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Hilal ÖZDEMİR

İmza

Aileme

ve

sevdiklerime

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca ve tez çalışma sürecimde bana yol gösteren, her türlü bilgi ve desteğini benden esirgemeyen çok değerli hocam Doç. Dr. Seda Kızılbudak Çalışkan'a en içten dileklerimle teşekkür ederim. Hayatım boyunca benden desteğini esirgemeyen sevgileriyle beni her zaman güçlendiren değerli aileme sonsuz teşekkürler.

Hilal ÖZDEMİR

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ vii

ÖZET viii

ABSTRACT x

1 GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1

1.2 Tezin Amacı 2

1.3 Hipotez 2

2 ÖN BİLGİLER 3

3 SÜREKSİZ STURM-LİOUVİLLE PROBLEMİNİN OPERATÖR FORMÜLUSAZYONU 6

3.1 Problemin İnşası 6

3.2 Operatör Gösterimi 6

4 ÖZDEĞER ÖZFONKSİYONLAR VE W(λ) İÇİN ASİMPTOTİK YAKLAŞIM FORMÜLLERİ 18

5 GREEN FONKSİYONUNUN İNŞA EDİLMESİ 35

6 SONUÇ 47

KAYNAKÇA 48

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR 50

SİMGE LİSTESİ

G	Green Fonksiyonu
H	Hilbert Uzayı
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi,
$D(A)$	Koşul Operatörü
L_i	Koşul Operatörü
SL-P	Sturm-Liouville Problemi
W	Wronskian

ÖZET

Süreksiz Sınır Değer Probleminin Çözümünde Green Fonksiyonu

Hilal ÖZDEMİR

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN

Bu çalışmada, $H = L_2[0,1] \oplus \mathbb{C}$ tanımlı ve iki farklı noktada kesikli süreksizliğe sahip olan ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem incelenmiştir. Ele alınan sınır değer problemi, spektral parametre içeren sınır koşulları ile birlikte süreksiz noktalarda fonksiyonun nasıl davrandığını belirten ara yüz (geçiş) koşullarını da kapsamaktadır. Bu tür problemler, klasik sınır değer problemlerine kıyasla daha karmaşık bir matematiksel yapı sergilemekte ve özellikle mühendislik ile fizik gibi uygulamalı alanlarda önemli bir yer tutmaktadır.

Bu tez kapsamında, söz konusu diferansiyel denklem için belirtilen sınır ve ara yüz koşulları altında tanımlı özdeğer problemi ele alınmış ve bu probleme karşılık gelen Green fonksiyonu oluşturulmuştur. Green fonksiyonu, ilgili diferansiyel operatörün tersini temsil eden temel bir araç olup, çözümün ifadesinde kritik bir rol üstlenmektedir. Tezde, Green fonksiyonunun yapısı detaylı biçimde analiz edilmiş, süreksizliklerin bu fonksiyon üzerindeki etkileri ortaya konmuş ve elde edilen fonksiyonun asimptotik davranışları incelenmiştir.

Bu çalışma, süreksiz sınır değer problemlerine yönelik kapsamlı bir yaklaşım sunmakta olup, benzer yapıda karşılaşılan problemler için de temel teşkil edecek nitelikte sonuçlar ortaya koymaktadır.

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville problem, Green fonksiyonu, özdeğer, özfonksiyon, asimptotik davranış.

ABSTRACT

Green Function in Solving Discontinuous Boundary Value Problem

Hilal ÖZDEMİR

Department of Mathematics
Master of Science Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN

In this study, a second-order differential equation defined in the Hilbert space $H = L_2[0,1] \oplus \mathbb{C}$, which exhibits discontinuities at two distinct points, is examined. The considered boundary value problem includes not only boundary conditions involving a spectral parameter but also interface (transmission) conditions that describe the behavior of the function at the points of discontinuity. Such problems possess a more complex mathematical structure compared to classical boundary value problems and hold significant importance in applied fields such as engineering and physics.

Within the scope of this thesis, the eigenvalue problem defined under the given boundary and interface conditions for the aforementioned differential equation is studied, and the corresponding Green's function is constructed. The Green's function serves as a fundamental tool representing the inverse of the associated differential operator and plays a critical role in expressing the solution. In the thesis, the structure of the Green's function is analyzed in detail, the effects of the discontinuities on this function are revealed and the asymptotic behavior of the resulting function is examined.

This study provides a comprehensive approach to discontinuous boundary value problems and presents fundamental results that can serve as a basis for similar problems encountered in various applications.

Keywords: Sturm-Liouville problem, Green's function, eigenvalue, eigenfunction, asymptotic behavior

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Süreksizlik ve arayüz (geçiş) koşulları içeren sınır değer problemleri, farklı fiziksel ortamların ya da parça parça homojen yapıların modellenmesinde ortaya çıkan önemli matematiksel yapılardır. Bu tür problemlerde, diferansiyel denklem ile başlangıç ve sınır koşulları, ortamın yapısal özelliklerinden kaynaklanan süreksizlikler veya ani parametre değişimleri nedeniyle kesikli bir yapı sergileyebilir.

Bu çerçevede en temel yapılardan biri Sturm–Liouville problemleridir (SL-P). Sturm teorisi, yalnızca soyut matematiksel analiz açısından değil, aynı zamanda fiziksel olayların modellenmesindeki uygulamaları bakımından da önemli bir araştırma alanı olarak öne çıkmaktadır ([11], [14–16]). Özellikle, öz değer parametresinin yalnızca diferansiyel denklemde değil, aynı zamanda sınır koşullarında da yer aldığı durumlar, bu alandaki araştırmaların yönünü belirlemiştir. Bu bağlamda oldukça kapsamlı bir literatür oluşmuş ([6], [8], [10], [17–18], [20–21]); özellikle [10], [17] ve [22] numaralı çalışmalar, fizik ve mühendislik uygulamalarına ilişkin önemli örnekler sunmuştur.

Bu çalışmada, içinde süreksizlik noktası bulunan bir diferansiyel denklemle tanımlanan ve sınır koşullarının yanı sıra ara yüzde geçiş koşulları içeren bir sınır değer problemi ele alınmaktadır. Böyle bir yapının varlığı, problemin öz değerleri ve öz fonksiyonları üzerinde doğrudan etkili olmakta; bu nedenle ayrıntılı bir spektral çözümleme gerektirmektedir ([2–5], [7], [9], [12–13]).

Çalışmamızda amaçlanan, [1] çalışmasında olduğu gibi, süreksizlik ve arayüz (geçiş) koşulları içeren bir probleme ait spektral niceliklerin—yani öz değer ve öz fonksiyonların—asimptotik davranışlarını belirlemek ve elde edilen bu ifadeleri

kullanarak problemin Green fonksiyonunu inşa etmektir. Bulunan asimptotik ifadeler, yalnızca spektral verilerin dağılımını anlamaya katkı sağlamakla kalmayıp, aynı zamanda uygulamalı problemlerde yaklaşık çözümlerin elde edilmesinde de önemli rol oynayacaktır. Green fonksiyonu, homojen olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünde ve özellikle ters problemler bağlamında temel bir araçtır. Bu nedenle, elde edilen bulguların ters spektral problemler, kararlılık analizleri ve sayısal simülasyonlar gibi ileri düzey çalışmalara bir temel oluşturması ve literatüre katkı sağlaması beklenmektedir.

1.2 Tezin Amacı

Tezimizin amacı, $[0,1]$ aralığında iki noktada süreksiz olan potansiyele sahip diferansiyel denklem, özdeğerin bulunduğu sınır koşulları ve arayüz (geçiş) koşullarının oluşturduğu Sturm-Liouville probleminin Green fonksiyonunu, problemin öz değer ve öz fonksiyonlarının asimptotik gösterimlerinden yararlanarak bulmaktır.

1.3 Hipotez

$H = L_2[0,1] \oplus \mathbb{C}$ uzayında ele alınan

$$\sigma(y): -y'' + q(z)y = \lambda y\,, \qquad z \in [0, d_1) \cup (d_1, d_2) \cup (d_2, 1] \tag{1.1}$$

iki noktada kesikli (süreksizliğe) sahip diferansiyel denklemi,

$$L_1(\mathrm{y}): \cos a\ y(0) - \lambda \sin a\ y'(0) = 0 \tag{1.2}$$

$$L_2(\mathrm{y}): [\beta_1 + \lambda\beta_1']y(1) - [\beta_2 + \lambda\beta_2']y'(1) = 0 \tag{1.3}$$

sınır koşulları ve

$$L_3(\mathrm{y}): y(d_1 - 0) - \delta y(d_1 + 0) = 0 \tag{1.4}$$

$$L_4(\mathrm{y}): y'(d_1 - 0) - \delta y'(d_1 + 0) = 0 \tag{1.5}$$

$$L_5(\mathrm{y}): y(d_2 - 0) - \delta y(d_2 + 0) = 0 \tag{1.6}$$

$$L_6(\mathrm{y}): y'(d_2 - 0) - \delta y'(d_2 + 0) = 0 \tag{1.7}$$

arayüz (geçiş) koşulları ile oluşturulan SL-P, simetrik bir operatörün öz değer problemi olarak yorumlanacak ve Green fonksiyonu tanımlanacaktır

2
ÖN BİLGİLER

Tanım 2.1 (Regüler Sturm-Liouville Problemi) P, Q, R ve t reel fonksiyonlar λ, t den bağımsız bir parameter olmak

$$\frac{d}{dt}\left[P(t)\frac{dy}{dt}\right] + Q(t)y + \lambda R(t)y = 0, \qquad c < t < d \tag{2.1}$$

diferansiyel denklemi ve

$$a_1 y(c) + a_2 y'(c) = 0 \tag{2.2}$$

$$b_1 y(d) + b_2 y'(d) = 0 \tag{2.3}$$

sınır koşulları ile oluşturulan sınır değer problemi SL-P olarak bilinir. Burada $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$ dır. Bu sınır değer problemi SL-P olarak bilinir.

$P > 0$, $R > 0$ $Q(t)$ ve $P'(t)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan regülerdir [25].

Tanım 2.2 (Özdeğer ve Özvektör) Bir $\mathcal{F}$ cismi üzerinde tanımlanmış bir U vektör uzayında $L: U \to U$ lineer operatörünü göz önüne alalım. Eğer $Lu = \lambda u$ denkleminin $\lambda \in \mathcal{F}$ ve $0 \neq u \in U$ olacak şekilde bir çözümü bulunabiliyorsa o zaman λ sayısına L operatörünün bir öz değeri denir. $u \in U$ vektörüne de L operatörünün λ öz değerine karşılık gelen öz vektörü denir [23].

Tanım 2.3 (Lineer Bağımlılık) V vektör uzayının sonlu bir alt kümesi olan $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ yi göz önüne alalım. Eğer

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0 \tag{2.4}$$

bağıntısı ancak ve ancak bağıntının katsayıları olan $c_1, c_2, \dots, c_n \in F$ skalerlerinin tümü sıfır olduğunda sağlanabiliyorsa B kümesine, lineer bağımsız katsayıların en az biri sıfır olmadan bağıntı sağlanıyorsa lineer bağımlı denir [23] .

Tanım 2.4 (Hilbert Uzayı) Bir iç çarpım uzayı, iç çarpımın indirgediği normdan indirgenen metriğe göre tam ise bu uzaya Hilbert uzayı adı verilir [24].

Tanım 2.5 (Direkt Toplam) A ve B bir V vektör uzayının vektör alt uzayları olsun. Eğer her bir $x \in V$ vektörü $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere $x = a + b$ olacak şekilde yalnız ve yalnız tek bir türlü yazılabilirse (yani her bir $x \in V$ için $x = a + b$ olacak şekilde bir tek $a \in A$ ve $b \in B$ varsa) V, A ile B nin direct toplamıdır denir ve bu durumda $V = A \oplus B$ yazılır [24].

Teorem 2.1 (Direkt Toplam) V vektör uzayı A ve B altvektör (lineer) uzaylarının direkt toplamıdır ancak ve ancak $V = A + B$ ve $A \cap B = \{0\}$ dır [24].

Teorem 2.2 (Green Fonksiyonu) Bir L diferansiyel operatörü, $y(x)$ çözüm fonksiyonu ve $f(x)$ verilen bir kaynak fonksiyonu olmak üzere

$$Ly(x) = f(x) \tag{2.5}$$

şeklinde verilen bir lineer sınır değer problem için, bu probleme karşılık gelen Green fonksiyonu $G(x, \xi)$ şeklinde tanımlanır. Green fonksiyonu $G(x, \xi)$, sabit ξ için,

$$LG(x, \xi) = \delta(x - \xi) \tag{2.6}$$

eşitliğini sağlayan fonksiyondur ve verilen sınır koşullarına uyar Burada $\delta(x - \xi)$ Dirac-Delta fonksiyonudur.

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \tag{2.7}$$

şeklinde ifade edilir.

Green Fonksiyonu Özellikleri

1) $G(x, \xi)$ tüm $x = \xi$ noktalarında süreklidir.

2) $G(x, \xi)$ nın x değişkenine göre türevi $x \neq \xi$ noktalarında sürekli $x = \xi$ için

$$\lim_{x \to \xi^+} \frac{\partial g}{\partial x} - \lim_{x \to \xi^-} \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{1}{\tau} \tag{2.8}$$

olur.

3) $G(x, \xi)$ her $x \neq \xi$ için diferansiyel denklemin homojen kısmını ve sınır şartlarını sağlar.

Tanım 2.6 (Dirac-Delta Fonksiyonu) Aşağıda tanımlanmış olan

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)dx = 1 \tag{2.10}$$

$x = 0$ civarında çok büyük değer alabilen ve $x = 0$ civarındaki çok küçük bir aralığın dışında sıfır olan bir fonksiyona Dirac-Delta fonksiyonu denir.

Tanım 2.7 (Simetrik Dönüşüm) V reel iç çarpım uzayı ve $A{:}V \to V$ lineer dönüşüm olsun.

$\forall X, Y \in V$ için $\langle A(X), Y\rangle = \langle X, A(Y)\rangle$ özelliği sağlanıyorsa A ya V üzerinde simetrik dönüşüm (self adjoint dönüşüm) denir.

3
SÜREKSİZ STURM-LİOUVİLLE PROBLEMİNİN OPERATÖR FORMÜLÜZASYONU

3.1 Problemin İnşası

Aşağıda [0,1] aralığının iki iç noktada süreksizliğe sahip olan SL-P yi göz önüne alalım.

$$\sigma y: -y'' + q(z)y = \lambda y\,, \quad z \in [0, d_1) \cup (d_1, d_2) \cup (d_2, 1] \tag{3.1}$$

denklemi ve

$$L_1(y): \cos a\ y(0) - \lambda \sin a\ y'(0) = 0 \tag{3.2}$$

$$L_2(y): (\beta_1 + \lambda\beta_1')y(1) - (\beta_2 + \lambda\beta_2')y'(0) = 0 \tag{3.3}$$

sınır koşulları ve de ,

$$L_3(y): y(d_1 - 0) - \delta y(d_1 + 0) = 0 \tag{3.4}$$

$$L_4(y): y'(d_1 - 0) - \delta y'(d_1 + 0) = 0 \tag{3.5}$$

$$L_5(y): y(d_2 - 0) - \delta y(d_2 + 0) = 0 \tag{3.6}$$

$$L_{6(}y): y'(d_2 - 0) - \delta y'(d_2 + 0) = 0 \tag{3.7}$$

Burada $q(x), q(h_i \pm 0) : \lim_{g(x)\to\pm 0}(i = 1{,}2)$ potansiyel fonksiyonu $[0, d_1), (d_1, d_2)$ ve $(d_2, 1]$ aralıklarında reel değerli sürekli bir fonksiyon λ kompleks bir öz parametre $\lambda, |a|, \beta_1, \beta_2$ reel sayılar olmak üzere $\rho :\ \beta_1'\beta_2 - \beta_1\beta_2' > 0$ dır.

3.2 Operatör Gösterimi

$H = L_2[0{,}1] \oplus \mathbb{C}$ Hilbert uzayında tanımlanan ve $M \coloneqq \begin{pmatrix} m(z) \\ m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}, N \coloneqq \begin{pmatrix} n(z) \\ n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$,

olmak üzere

$$\langle M,N\rangle = \int_0^{d_1} m(z)\overline{n(z)}\,dz + \delta^2\int_{d_1}^{d_2} m(z)\overline{n(z)}\,dz + \delta^4\int_{d_2}^{1} m(z)\overline{n(z)}\,dz + \frac{1}{\cot a}m_1\overline{n_1} + \frac{\delta^2}{\rho}m_2\overline{n_2} \tag{3.8}$$

iç çarpımı yardımıyla simetrik olduğunu Teorem3.1 ile göstereceğimiz A lineer operatörü çalışmamızdaki öz değer problemimizin temelini oluşturacaktır. Burada $D(A) \coloneqq \{M,N \in H, m_i, m_i'(z), n_i(z), n_i'(z)$ fonksiyonları $[0,d_1)\cup(d_1,d_2)\cup(d_2,1]$aralıklarının birleşiminde sürekli, $\tau f \in L_2[0,1]\oplus\mathbb{C},\ L_2 y;=0,$

$L_3 y = 0,\ (i=1,2)\}$ tanım kümesi ile ifade edilen $A: D(A)\to H$ operatörünü, sınır şartları

$$R_1(m) = \cot a\ y(0) \qquad R_2(m) = \beta_1 y(1) - \beta_2 y'(1)$$
$$R_1'(m) = y'(0) \qquad R_2'(m) = \beta_2' y'(1) - \beta_1' y(1)$$

ve $m(z)$ de $[0,d_1)\cup(d_1,d_2)\cup(d_2,1]$ kümesinde tanımlı, sınırlı $m(d_i \pm 0) = \lim_{d_i\to 0} m(z)\ (i=1,2)$ sonlu limitlerine sahip bir fonksiyon olmak üzere

$$AM = \lambda M,\ AM = \begin{pmatrix}\sigma m(z)\\ R_1(m)\\ R_2(m)\end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} f(z)\\ R_1'(m)\\ R_2'(m)\end{pmatrix} \in D(A), N = \begin{pmatrix} n(z)\\ R_1'(n)\\ R_2'(n)\end{pmatrix} \in D(A)$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece, A operatörünün özdeğerleri göz önüne aldığımız SL-P nin özdeğerleri ile aynı olacaktır.

Teorem 3.1 A operatörü simetriktir.

İspat: $$\langle M,N\rangle = \int_0^{d_1} m(z)\overline{n(z)}\,dz + \delta^2\int_{d_1}^{d_2} m(z)\overline{n(z)}\,dz + \delta^4\int_{d_1}^{1} m(z)\overline{n(z)} + \frac{1}{\cot a}m_1\bar{n}_1 + \frac{\delta^2}{\rho}m_2\bar{n}_2 \tag{3.9}$$

$$\langle AM,N\rangle = \int_0^{d_1}\sigma m\bar{n}\,dz + \delta^2\int_{d_1}^{d_2}\sigma m\bar{n}\,dz + \delta^4\int_{d_1}^{1}\sigma m\bar{n}\,dz + \frac{1}{\cot a}(R_1(m))\left(R_1'(n)\right) + \frac{\delta^2}{\rho}(R_2(m))(R_2'(n))$$

$$= \int_0^{d_1} [-m'' + q(z)m]\bar{n}\, dz + \delta^2 \int_{d_1}^{d_2} [-m'' + q(z)m]\bar{n}\, dz$$

$$+ \ \delta^4 \int_{d_2}^{1} [-m'' + q(z)m]\bar{n}\, dz + \frac{1}{\cot a} \cot a\, m(0)n'(0)$$

$$+ \frac{\delta^2}{\beta_1'\beta_2 - \beta_1\beta_2'} [\beta_1 m(1) - \ \beta_2 m'(1)][\beta_2' n'(1) - \beta_1' n(1)]$$

$$= -\int_0^{d_1} m''\bar{n}\, dz - \delta^2 \int_{d_1}^{d_2} m''\bar{n}\, dz + \delta^4 \int_{d_2}^{1} m''\bar{n}\, dz$$

$$+ \int_0^{d_1} q(z)m\bar{n}\, dz + \delta^2 \int_{d_1}^{d_2} q(z)m\bar{n}\, dz + \delta^4 \int_{d_2}^{1} q(z)m\bar{n}\, dz$$

$$+m(0)n'(0) \ + \frac{\delta^2}{\beta_1'\beta_2 - \beta_1\beta_2'} \left[\beta_1\beta_2' \overline{n'(1)} m(1)\right.$$

$$\left. -\beta_1'\beta_1 m(1)\overline{n(1)} - \beta_2\beta_2' \overline{n'(1)} m'(1) - \ \beta_1'\beta_2 m'(1)\overline{n(1)}\right]$$

Kısmi integrasyon yardımı ile

$$\begin{pmatrix} \bar{n} = u \Rightarrow \bar{n}'dz = du \\ m''dz = dv \Rightarrow m' = v \end{pmatrix}$$

$$= -m'\bar{n}|_0^{d_1} + \int_0^{d_1} m'\bar{n}'dz - \delta^2 \left[m'\bar{n}|_{d_1}^{d_2} - \int_{d_1}^{d_2} m'\bar{n}'dz\right]$$

$$-\delta^4 \left[m'\bar{n}|_{d_2}^{1} - \int_{d_2}^{1} m'\bar{n}'dz\right] + \int_0^{d_1} q(z)m\bar{n}dz + \delta^2 \int_{d_1}^{d_2} q(z)m\bar{n}dz$$

$$+ \delta^4 \int_{d_2}^{1} q(z)m\bar{n}dz + m(0)\bar{n}'(0)$$

$$+ \frac{\delta^2}{\rho} [\beta_1 m(1) - \beta_2 m'(1)][\beta_2'\bar{n}'(1) - \beta_1'\bar{n}(1)]$$

Tekrar kısmi integrasyon ile $\begin{pmatrix} \bar{n}' = u \Rightarrow \bar{n}''dz = du \\ m'dz = dv \Rightarrow m = v \end{pmatrix}$

$$= -m'(d_1)\bar{n}(d_1) + m'(0)\bar{n}(0) + \left[m\bar{n}'|_0^{d_1} - \int_0^{d_1} m\bar{n}''dz\right]$$
$$- \delta^2[m'(d_2)\bar{n}(d_2) - m'(d_1)\bar{n}(d_1)]$$
$$+ \delta^2\left[m\bar{n}'|_{d_1}^{d_2} - \int_{d_1}^{d_2} mn''dz\right]$$
$$- \delta^4[m'(1)\bar{n}(1) + m'(d_2)\bar{n}(d_2)] + \delta^4\left[m\bar{n}'|_{d_2}^{1} - \int_{d_2}^{1} m\bar{n}''dz\right]$$
$$+ \int_0^{d_1} q(z)m\bar{n}\,dz + \delta^2\int_{d_1}^{d_2} q(z)m\bar{n}\,dz + \delta^4\int_{d_2}^{1} q(z)m\,\bar{n}dz$$
$$+ m(0)\bar{n}'(0) + \frac{\delta^2}{\rho}[\beta_1 m(1) - \beta_2 m'(1)][\beta_2'\bar{n}'(1) - \beta_1'\bar{n}(1)]$$

$$= -m'(d_1)\bar{n}(d_1) + m'(0)\bar{n}(0) + m(d_1 - 0)\bar{n}'(d_1 - 0) - m(0)\bar{n}'(0)$$
$$- \delta^2[m'(d_2 - 0)\bar{n}(d_2 - 0) + m'(d_1 + 0)\bar{n}(d_1 + 0)]$$
$$+ \delta^2[m(d_2 - 0)\bar{n}'(d_2 - 0) - m(d_1 + 0)\bar{n}'(d_1 + 0)]$$
$$- \delta^4[m'(1)\bar{n}(1) + m'(d_2 + 0)\bar{n}(d_2 + 0)]$$
$$+ \delta^4[m(1)\bar{n}'(1) - m(d_2 + 0)\bar{n}'(d_2 + 0)]$$
$$+ \int_0^{d_1} m[-\bar{n}'' + q(z)\bar{n}]dz + \delta^2\int_{d_1}^{d_2} m[-\bar{n}'' + q(z)\bar{n}]dz$$
$$+ \delta^4\int_{d_2}^{1} m[-\bar{n}'' + q(z)\bar{n}]dz + m(0)\bar{n}'(0)$$
$$+ \frac{\delta^2}{\rho}[\beta_1 m(1) - \beta_2 m'(1)][\beta_2'\bar{n}'(1) - \beta_1'\bar{n}(1)]$$

$$= -m'(d_1 - 0)\bar{n}(d_1 - 0) + m'(0)\bar{n}(0) + m(d_1 - 0)\bar{n}'(d_1 - 0)$$
$$- \delta^2[m'(d_2 - 0)\bar{n}(d_2 - 0) + m'(d_1 + 0)\bar{n}(d_1 + 0)]$$
$$+ \delta^2[m(d_2 - 0)\bar{n}'(d_2 - 0) - m(d_1 + 0)\bar{n}'(d_1 + 0)]$$
$$- \delta^4[m'(1)\bar{n}(1) + m'(d_2 + 0)\bar{n}(d_2 + 0)]$$
$$+ \delta^4[m(1)\bar{n}'(1) - m(d_2 + 0)\bar{n}'(d_2 + 0)]$$
$$+ \int_0^{d_1} m[-\bar{n}'' + q(z)\bar{n}]dz + \delta^2\int_{d_1}^{d_2} m[-\bar{n}'' + q(z)\bar{n}]dz$$
$$+ \delta^4\int_{d_2}^{1} m[-\bar{n}'' + q(z)\bar{n}]dz$$
$$+ \frac{\delta^2}{\rho}[\beta_1 m(1) - \beta_2 m'(1)][\beta_2'\bar{n}'(1) - \beta_1'\bar{n}(1)]$$

$$= -\delta m'(d_1+0)\delta\bar{n}(d_1+0) + m'(0)\bar{g}(0) + \delta m(d_1-0)\delta\bar{n}'(d_1-0)$$
$$- \delta^2[\delta m'(d_2+0)\delta\bar{n}(d_2+0) + m'(d_1+0)\bar{n}(d_1+0)]$$
$$+ \delta^2[\delta m(d_2+0)\delta\bar{n}'(d_2+0) - m(d_1+0)\bar{n}'(d_1+0)]$$
$$- \delta^4[m'(1)\bar{n}(1) + m'(d_2+0)\bar{n}(d_2+0)]$$
$$+ \delta^4[m(1)\bar{n}'(1) - m(d_2+0)\bar{n}'(d_2+0)]$$
$$+ \int_0^{d_1} m[-\bar{n}'' + q(z)\bar{n}]dz + \delta^2\int_{d_1}^{d_2} m[-\bar{n}'' + q(z)\bar{n}]dz$$
$$+ \delta^4\int_{d_2}^{1} m[-\bar{n}'' + q(z)\bar{n}]dz$$
$$+ \frac{\delta^2}{\rho}[\beta_1 m(1) - \beta_2 m'(1)][\beta_2'\bar{n}'(1) - \beta_1'\bar{n}(1)]$$

$$= m'(0)\bar{n}(0) - \delta^4[m'(1)\bar{n}(1) + m(1)\bar{n}'(1)] + \int_0^{d_1} m[-\bar{n}'' + q(z)\bar{n}]dz$$
$$+ \delta^2\int_{d_1}^{d_2} m[-\bar{n}'' + q(z)\bar{n}]dz + \delta^4\int_{d_2}^{1} m[-\bar{n}'' + q(z)\bar{n}]dz$$
$$+ \frac{\delta^2}{\rho}[\beta_1 m(1) - \beta_2 m'(1)][\beta_2'\bar{n}'(1) - \beta_1'\bar{n}(1)]$$

$$= m'(0)\bar{n}(0) - \delta^4 W_1(m,\bar{n}) + \int_0^{d_1} m[-\bar{n}'' + q(z)\bar{n}]dz +$$
$$\delta^2\textstyle\int_{d_1}^{d_2} m[-\bar{n}'' + q(z)\bar{n}]dz + \delta^4\int_{d_2}^{1} m[-\bar{n}'' + q(z)\bar{n}]dz +$$
$$\frac{\delta^2}{\rho}[\beta_1 m(1) - \beta_2 m'(1)][\beta_2'\bar{n}'(1) - \beta_1'\bar{n}(1)] \qquad (3.10)$$

bulunur . Aynı şekilde $\langle M, AN\rangle$ için çözüm yapılır.

$$\langle M, AN\rangle = -\lim_{t\to d_1^-}\int_0^t m\bar{n}''dz - \delta^2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{d_1+\varepsilon}^{d_2+\varepsilon} m\bar{n}''dx - \delta^4\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{d_1+\varepsilon}^{1} m\bar{n}''dz$$
$$+ \int_0^{d_1} q(z)m\bar{n}dz + \delta^2\int_{d_1}^{d_2} q(z)m\bar{n}dz + \delta^4\int_{d_2}^{1} q(z)m\bar{n}dz$$
$$+ m'(0)\bar{n}(0) + \frac{\delta^2}{\rho}[\beta_1 m(1) - \beta_2 m'(1)][\beta_2'\bar{n}'(1) - \beta_1'\bar{n}(1)]$$

Kısmi integrasyon yardımı ile

$m = u \Rightarrow m'dz = du$
$\bar{n}''dz = dv \Rightarrow \bar{n}' = v$

$$\langle M, AN\rangle = -\lim_{t\to d_1^-}\left\{m\bar{n}'|_0^t - \int_0^t m'\bar{n}'\,dz\right\}$$
$$-\delta^2\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{m\bar{n}'|_{d_1+\varepsilon}^{d_2-\varepsilon} - \int_{d_1+\varepsilon}^{d_2-\varepsilon} m'\bar{n}'\,dz\right\}$$
$$-\delta^4\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{m\bar{n}'|_1^t - \int_1^t m'\bar{n}'\,dz\right\} + \int_0^{d_1} q(z)m\bar{n}dz$$
$$+\delta^2\int_{d_1}^{d_2} q(z)m\bar{n}dz + \delta^4\int_{d_2}^{1} q(z)m\bar{n}dz + m'(0)\bar{n}(0)$$
$$+\frac{\delta^2}{\rho}[\beta_1 m(1) - \beta_2 m'(1)][\beta_2'\bar{n}'(1) - \beta_1'\bar{n}(1)]$$

İkinci kez kısmi integrasyon uygulayalım

$$m' = u \Rightarrow m''dz = du$$
$$\bar{n}'dz = dv \Rightarrow \bar{n} = v$$

$$= -\lim_{t\to d_1^-}\left\{[m(t)\bar{n}'(t) - m(0)\bar{n}'(0)] - \left[m'\bar{n}|_0^t - \int_0^t \bar{n}m''\,dz\right]\right\}$$
$$-\delta^2\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{[m(d_2-\varepsilon)\bar{n}'(d_2-\varepsilon) - m(d_1+\varepsilon)\bar{n}'(d_2+\varepsilon)]\right.$$
$$\left.-\left[m'\bar{n}|_{d_1+\varepsilon}^{d_2+\varepsilon} - \int_{d_1+\varepsilon}^{d_2-\varepsilon}\bar{n}m''\,dz\right]\right\}$$
$$-\delta^4\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{[m(1)\bar{n}'(1) - m(t)\bar{n}'(t)] - \left[m'\bar{n}|_t^1 - \int_t^1 \bar{n}m''dz\right]\right\}$$
$$+\int_0^{d_1} q(z)m\bar{n}dz + \delta^2\int_{d_1}^{d_2} q(z)m\bar{n}dz + \delta^4\int_{d_2}^{1} q(z)m\bar{n}dz$$
$$+m'(0)\bar{n}(0) + \frac{\delta^2}{\rho}[\beta_1 m(1) - \beta_2 m'(1)][\beta_2'\bar{n}'(1) - \beta_1'\bar{n}(1)]$$

$$= -m(d_1 - 0)\bar{n}'(d_1 - 0) - m(0)\bar{n}'(0)$$
$$+ \lim_{t \to d_1^-} \left\{ [m'(t)\bar{n}(t) - m'(0)\bar{n}(0)] - \int_0^t \bar{n} m'' \, dz \right\}$$
$$- \delta^2 m(d_2 - 0)\bar{n}'(d_2 - 0) - \delta^2 m(d_1 + 0)\bar{n}'(d_1 + 0)$$
$$+ \delta^2 \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ [m'(d_2 - \varepsilon)\bar{n}(d_2 - \varepsilon) - m'(d_1 + \varepsilon)\bar{n}(d_1 + \varepsilon)] \right.$$
$$\left. - \int_{d_1 + \varepsilon}^{d_2 - \varepsilon} \bar{n} m'' \, dz \right\} - \delta^4 m(1)\bar{n}'(1) - \delta^4 m(d_2 + 0)\bar{n}'(d_2 + 0)$$
$$+ \delta^4 \lim_{t \to d_2^+} \left\{ [m'(1)\bar{n}(1) - m'(t)\bar{n}(t)] - \int_t^1 \bar{n} m'' dz \right\}$$
$$+ \int_0^{d_1} q(z) m \bar{n} dz + \delta^2 \int_{d_1}^{d_2} q(z) m \bar{n} dz + \delta^4 \int_{d_2}^1 q(z) m \bar{n} dz$$
$$+ m'(0)\bar{n}(0) + \frac{\delta^2}{\rho} [\beta_1 m(1) - \beta_2 m'(1)][\beta_2' \bar{n}'(1) - \beta_1' \bar{n}(1)]$$

$$= -\delta^2 m(d_1 + 0)\bar{n}'(d_1 + 0) + m(0)\bar{n}'(0) + m'(d_1 - 0)\bar{n}(d_1 - 0)$$
$$- m'(0)\bar{n}(0) - \delta^4 m(d_2 + 0)\bar{n}'(d_2 + 0)$$
$$- \delta^2 m(d_1 + 0)\bar{n}'(d_1 + 0) + \delta^2 m'(d_2 - 0)\bar{n}(d_2 - 0)$$
$$- \delta^2 m'(d_1 + 0)\bar{n}(d_1 + 0) - \delta^4 m(1)\bar{n}'(1)$$
$$+ \delta^4 m(d_2 + 0)\bar{n}'(d_2 + 0) + \delta^4 m'(1)\bar{n}(1)$$
$$- \delta^4 m'(d_2 + 0)\bar{n}(d_2 + 0) + m'(0)\bar{n}(0)$$
$$+ \int_0^{d_1} \bar{n}[-m'' + q(z)m] dz + \delta^2 \int_{d_1}^{d_2} \bar{n}[-m'' + q(z)m] dz$$
$$+ \delta^4 \int_{d_2}^1 \bar{n}[-m'' + q(z)m] dz$$
$$+ \frac{\delta^2}{\rho} [\beta_1 m(1) - \beta_2 m'(1)][\beta_2' \bar{n}'(1) - \beta_1' \bar{n}(1)]$$

$$\langle M, AN \rangle = m(0)\bar{n}'(0) - \delta^4 m(1)\bar{n}'(1) + \delta^4 m'(1)\bar{n}(1)$$
$$+ \int_0^{d_1} \bar{n}[-m'' + q(z)m] dz + \delta^2 \int_{d_1}^{d_2} \bar{n}[-m'' + q(z)m] dz$$
$$+ \delta^4 \int_{d_2}^1 \bar{n}[-m'' + q(z)m] dz$$
$$+ \frac{\delta^2}{\rho} [\beta_1 m(1) - \beta_2 m'(1)][\beta_2' \bar{n}'(1) - \beta_1' \bar{n}(1)]$$

$$\langle M, AN\rangle = m(0)\bar{n}'(0) - \delta^4 W_1[m,\bar{n}] + \int_0^{d_1} \bar{n}[-m'' + q(z)m]dz +$$
$$\delta^2 \int_{d_1}^{d_2} \bar{n}[-m'' + q(z)m]dz + \delta^4 \int_{d_2}^{1} \bar{n}[-m'' + q(z)m]dz +$$
$$\frac{\delta^2}{\rho}[\beta_1 m(1) - \beta_2 m'(1)][\beta_2'\bar{n}'(1) - \beta_1'\bar{n}(1)] \qquad (3.11)$$

Buradan $\langle AM, N\rangle - \langle M, AN\rangle = 0$ elde edilir.

Böylece $\langle AM, N\rangle = \langle M, AN\rangle$ olduğundan A operatörünün simetrik olduğu elde edilir.

Sonuç 3.1: Göz önüne aldığımız problemin özdeğerleri reeldir.

Lemma 3.1 $[a,b]$ aralığı üzerinde $q(x)$ reel değerli sürekli bir fonksiyon ve herhangi bir λ kompleks sayısı için

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \qquad x \in [a,b]$$

diferansiyel denkleminin $y = (x,\lambda)$ çözümü $u(\lambda)$ ve $v(\lambda)$ tam fonksiyonlar olmak üzere

$$y(a) = u(\lambda) \qquad \text{ya da} \qquad y(b) = v(\lambda)$$
$$y'(a) = u'(\lambda) \qquad\qquad y'(b) = v'(\lambda)\,,$$

koşullarını sağlayan tek çözümü $\forall x \in [a,b]$ için λ ya bağlı olan tek çözümdür ve tamdır [26].

$\varphi_\lambda(z)$ ve $\psi_\lambda(z)$ fonksiyonları (3.1) denklemini sağlayan fonksiyonlar olarak tanımlansın ve $\varphi_{1\lambda}(z) = \varphi_1(z,\lambda)$ fonksiyonu (3.1) denkleminin $[0,d_1)$ aralığında

$$\varphi_{1\lambda}(0) = \lambda \sin a, \qquad \varphi_{1\lambda}'(0) = \cos a \qquad (3.12)$$

koşullarını sağlayan çözümü olsun. (3.1) denkleminin (d_1,d_2) aralığında

$$y(d_1) = \delta^{-1}\varphi_{1\lambda}(d_1,\lambda), \qquad y'(d_1) = \delta^{-1}\varphi_{1\lambda}'(d_1,\lambda) \qquad (3.13)$$

koşullarını sağlayan çözümünü $\varphi_{2\lambda}(z) = \varphi_2(z,\lambda)$ fonksiyonu ile ve son olarakta yine (3.1) denkleminin $(d_1,1]$ aralığındaki

$$y(d_2) = \delta^{-1}\varphi_{2\lambda}(d_2,\lambda), \qquad y'(d_2) = \delta^{-1}\varphi_{2\lambda}'(d_2,\lambda) \qquad (3.14)$$

koşullarını sağlayan çözümünü de $\varphi_{3\lambda}(z) = \varphi_3(z,\lambda)$ olarak tanımlayalım.

Böylece $z \in [0,d_1) \cup (d_1,d_2) \cup (d_2,1]$ için (3.1) denkleminin (3.2) sınır koşulunu ve (3.4)-(3.5) arayüz (geçiş) koşullarını sağlayan çözümünü

$$\varphi(z,\lambda)=\begin{cases}\varphi_1(z,\lambda), & z\in[0,d_1)\\ \varphi_2(z,\lambda), & z\in(d_1,d_2)\\ \varphi_3(z,\lambda), & z\in(d_2,1]\end{cases} \tag{3.15}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Benzer şekilde, (3.1) denkleminin $(d_2,1]$ aralığında

$$y(1)=\lambda\beta_2'+\beta_2\ , \qquad y'(1)=\lambda\beta_1'+\beta_1 \tag{3.16}$$

koşullarını sağlayan çözümü $\psi_{3\lambda}(z)=\psi_3(z,\lambda)$ olsun.

Bu çözüme bağlı olarak (3.1) denkleminin (d_1,d_2) aralığında

$$y(d_2)=\delta\psi_{3\lambda}(d_2,\lambda), \qquad y'(d_2)=\delta\psi_{3\lambda}'(d_2,\lambda) \tag{3.17}$$

koşullarını sağlayan çözümü olsun .

Ve son olarakta $\psi_{2\lambda}(z)=\varphi_2(z,\lambda)$ e bağlı olarak (3.1) denkleminin $[0,d_1)$ aralığında

$$y(d_1)=\delta\psi_{2\lambda}(d_1,\lambda), \qquad y'(d_1)=\delta\psi_{2\lambda}'(d_1,\lambda) \tag{3.18}$$

koşullarını sağlayan çözümünü de $\psi_{1\lambda}(z)=\psi_1(z,\lambda)$ ile tanımlayalım.

Buna göre $z\in[0,d_1)\cup(d_1,d_2)\cup(d_2,1]$ için (3.1) denkleminin (3.3) sınır koşulunu ve (3.6)-(3.7) arayüz (geçiş) koşullarını sağlayan çözümü

$$\psi(z,\lambda)=\begin{cases}\psi_1(z,\lambda), & z\in[0,d_1)\\ \psi_2(z,\lambda), & z\in(d_1,d_2)\\ \psi_3(z,\lambda), & z\in(d_2,1]\end{cases} \tag{3.19}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Buradan da görülür ki $[0,d_1)\cup(d_1,d_2)\cup(d_2,1]$ aralıkları üzerinde z bağımsız değişkeni ve $\varphi_{i\lambda}(z,\lambda)$, $\psi_{i\lambda}(z,\lambda)$ $(i=1,2)$ çözümleri için $\omega_i(\lambda)=W(\varphi_i,\psi_i;z)$, $(i=1,2)$ fonksiyonları,

$\omega_i(\lambda)=W(\varphi_i,\psi_i;z)=\varphi_i(z,\lambda)\psi_i'(z,\lambda)-\varphi_i'(z,\lambda)\psi_i(z,\lambda)$ tam fonksiyonlardır.

Lemma 3.2 Herhangi bir λ kompleks sayısı için $\omega_1(\lambda)=\delta^2\omega_2(\lambda)=\delta^4\omega_3(\lambda)$ dır.

İspat: (3.12), (3.13), (3.15) ve (3.16) denklemleri hesaplandığında

$$W(\varphi_1,\psi_1;d_1)=\begin{vmatrix}\varphi_1(d_1,\lambda) & \psi_1(d_1,\lambda)\\ \varphi_1'(d_1,\lambda) & \psi_1'(d_1,\lambda)\end{vmatrix}$$

$$=\varphi_1(d_1,\lambda)\psi_1'(d_1,\lambda)-\varphi_1'(d_1,\lambda)\psi_1(d_1,\lambda)$$

$$=[\delta\varphi_2(d_1,\lambda)][\delta\psi_2'(d_1,\lambda)]-[\delta\varphi_2'(d_1,\lambda)][\delta\psi_2(d_1,\lambda)]$$

$$=\delta^2W(\varphi_2,\psi_2;d_1)$$

$$=\delta^2\{[\delta\varphi_3(d_2,\lambda)][\delta\psi_3'(d_2,\lambda)]-[\,\delta\varphi_3'(d_2,\lambda)][\delta\psi_3(d_2,\lambda)]\}$$

$$=\delta^4W(\varphi_3,\psi_3;d_2) \qquad (3.20)$$

Böylece karakteristik fonksiyonu $W(\lambda)=\omega_1(\lambda)=\delta^2\omega_2(\lambda)=\delta^4\omega_3(\lambda)$ olarak tanımlayabiliriz.

Teorem 3.2 Göz önüne aldığımız problemin özdeğerleri ile karakteristik fonksiyon $W(\lambda)$ nın sıfırları çakışır.

İspat: λ_0 için $W(\lambda_0)=0$ olsun. $W_{\lambda 0}(\varphi_1,\psi_1;z)=0$ olur ki $\varphi_1$ve ψ_1' in bazı $k_1\neq 0$ değerleri için lineer bağımlıdır. Yani

$$\psi_1(z,\lambda_0)=k.\varphi_1(z,\lambda_0) \qquad z\in[0,d_1)$$

$\psi_1(z,\lambda_0)$ ikinci sınır şartını sağlar. Böylece ψ_1 (3.1)-(3.7) probleminin λ_0 özdeğerine karşılık gelen bir öz fonksiyondur. Şimdi λ_0 karakteristik denklemin sıfırı olmamak üzere problemin özdeğeri ve bu özdeğere karşılık gelen herhangi bir öz fonksiyonun $u_0(z)$ olduğunu varsayalım. O zaman $[0,d_1)$,$[d_1,d_2]$ ve $(d_2,1]$ aralıkları üzerinde $i=1,2,3$ olmak üzere φ_i,ψ_i fonksiyonları için $W(\varphi_i(z,\lambda_0)\psi_i(z,\lambda_0))\neq 0$, olacağından Wronskian determinantının özelliğine göre bu fonksiyon çiftlerinin her biri lineer bağımsızdır. Dolayısıyla λ_0' a karşılık gelen $y_0(z)$ öz fonksiyonu, C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6 sabitlerinden en az biri sıfırdan farklı olmak üzere

$$y_0(z)=\begin{cases} C_1\varphi_1(z,\lambda_0)+C_2\psi_1(z,\lambda_0), & z\in[0,d_1)\\ C_3\varphi_2(z,\lambda_0)+C_4\psi_2(z,\lambda_0), & z\in(d_1,d_2)\\ C_5\varphi_3(z,\lambda_0)+C_6\psi_3(z,\lambda_0), & z\in(d_2,1]\end{cases} \qquad (3.21)$$

şeklinde elde edilir. λ_0' a karşılık gelen $y_0(z)$ öz fonksiyonunu, $v=1,2,3,4,5,6$ olmak üzere $L_v(y_0(z))=0$ ile sembolize ettiğimiz tüm sınır ve arayüz (geçiş) koşullarında göz önüne alınırsa ;

$$L_1[y_0(z)] = \cos a\, y_0(0) - \lambda_0 \sin a\, y_0'(0) = 0$$

$$\Longrightarrow \cos a\,[C_1\varphi_1(0,\lambda_0) + C_2\psi_1(0,\lambda_0)]$$

$$-\lambda_0 \sin a\,[C_1\varphi_1'(0,\lambda_0) + C_2\psi_1'(0,\lambda_0)] = 0$$

$$\Longrightarrow C_1[\varphi_1(0,\lambda_0)\cos a - \varphi_1'(0,\lambda_0)\sin a\,\lambda_0]$$

$$+ C_2[\psi_1(0,\lambda_0)\cos a - \psi_1'(0,\lambda_0)\sin a] = 0$$

$$\Longrightarrow C_1[\lambda_0 \sin a \cos a - \lambda_0 \cos a \sin a]$$

$$+ C_2[\psi_1(0,\lambda_0)\varphi_1'(0,\lambda_0) - \psi_1'(0,\lambda_0)\varphi_1(0,\lambda_0)] = 0$$

$$\Longrightarrow -C_2 W(\varphi_1,\psi_1) = 0 \qquad (3.22)$$

ve

$$L_2[y_0(z)] = (\beta_1 + \lambda_0\beta_1')y_0(1) - (\beta_2 + \lambda_0\beta_2')\, y_0'(0) = 0$$

$$\Longrightarrow (\beta_1 + \lambda_0\beta_1')[C_5\varphi_3(1,\lambda_0) + C_6\psi_3(1,\lambda_0)] - (\beta_2 + \lambda_0\beta_2')[C_5\varphi_3'(1,\lambda_0) + C_6\psi_3'(1,\lambda_0)] = 0$$

$$\Longrightarrow C_5[(\beta_1 + \lambda_0\beta_1')\varphi_3(1,\lambda_0) - (\beta_2 + \lambda_0\beta_2')\varphi_3'(1,\lambda_0)]$$

$$+ C_6[(\beta_1 + \lambda_0\beta_1')\psi_3(1,\lambda_0) - (\beta_2 + \lambda_0\beta_2')\psi_3'(1,\lambda_0)] = 0$$

$$\Longrightarrow C_5[W_3(\varphi_3',\psi_3)] = 0 \qquad (3.23)$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde $L_3 L_4, L_5, L_6$ elde edilir.

$$L_3[y_0(z)] = y(d_1 - 0) - \delta y(d_1 + 0) = 0$$

$$= C_1\varphi_1(d_1,\lambda_0) + C_2\psi_1(d_1,\lambda_0)$$

$$- \delta[C_3\varphi_2(d_1,\lambda_0) + C_4\psi_2(d_1,\lambda_0)] = 0$$

$$= C_1\varphi_1(d_1,\lambda_0) + C_2\psi_1(d_1,\lambda_0) + C_3(-\delta\varphi_2(d_1,\lambda_0)$$

$$+ C_4(-\delta\psi_2(d_1,\lambda_0)) = 0 \qquad (3.24)$$

$$L_4[y_0(z)] = y'(d_1 - 0) - \delta y'(d_1 + 0) = 0$$

$$= C_1\varphi_1'(d_1,\lambda_0)\, C_2\psi_1'(d_1,\lambda_0) - \delta[C_3\varphi_2'(d_1,\lambda_0) + C_4\psi_2'(d_1,\lambda_0)]$$

$$= 0$$

$$= C_1\varphi_1'(d_1,\lambda_0) + C_2\psi_1'(d_1,\lambda_0) + C_3\big(-\delta\varphi_2'(d_1,\lambda_0)\big) +$$

$$C_4\big(-\delta\psi_2'(d_1,\lambda_0)\big) = 0 \qquad (3.25)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_5[\mathrm{y}_0(\mathrm{z})] &= y(d_2-0)-\delta y(d_2+0)=0\\ &= \mathrm{C}_3\varphi_2(\mathrm{d}_2,\lambda_0)+\mathrm{C}_4\psi_2(\mathrm{d}_2,\lambda_0)\\ &-\delta[\mathrm{C}_5\varphi_3(\mathrm{d}_2,\lambda_0)+\mathrm{C}_6\psi_3(\mathrm{d}_2,\lambda_0)]=0\\ &= \mathrm{C}_3\varphi_2(\mathrm{d}_2,\lambda_0)+\mathrm{C}_4\psi_2(\mathrm{d}_2,\lambda_0)+\mathrm{C}_5(-\delta\varphi_3(\mathrm{d}_2,\lambda_0))\\ &+\mathrm{C}_6(-\delta\psi_3(\mathrm{d}_1,\lambda_0))=0 \qquad (3.26)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_6[y_0(z)] &= y'(d_2-0)-\delta y'(d_2+0)=0\\ &= C_3\varphi_2'(d_2,\lambda_0)+C_4\psi_2'(d_2,\lambda_0)\\ &-\delta[C_5\varphi_3'(d_2,\lambda_0)+C_6\psi_3'(d_2,\lambda_0)]=0\\ &= C_3\varphi_2'(d_2,\lambda_0)+C_4\psi_2'(d_2,\lambda_0)+C_5\big(-\delta\varphi_3'(d_2,\lambda_0)\big)\\ &+C_6\big(-\delta\psi_3'(d_2,\lambda_0)\big)=0. \qquad (3.27)\end{aligned}$$

Böylece, bir lineer homojen denklem sistemi oluşur. Aşikar çözümden farklı çözümünün olması için homojen bir lineer denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması gereklidir. Şimdi oluşan lineer homojen denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantını oluşturalım;

$$\begin{vmatrix} 0 & -\omega_1(\lambda_0) & 0 & 0 & 0 & 0\\ \varphi_1\lambda_0(d_1) & \psi_1\lambda_0(d_1) & -\delta\varphi_1\lambda_0(d_1) & -\delta\psi_2\lambda_0(d_1) & 0 & 0\\ \varphi_1'\lambda_0(d_1) & \psi_1'\lambda_0(d_1) & \delta\varphi_2'\lambda_0(d_1) & -\delta\psi_2'\lambda_0(d_1) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \varphi_2(d_2) & \chi_2\lambda_0(d_2) & -\delta\varphi_3(d_1) & -\delta\psi_3\lambda_0(d_2)\\ 0 & 0 & \varphi_2'(d_2) & \chi_2'\lambda_0(d_2) & -\delta\varphi_3'(d_1) & -\delta\psi_3'\lambda_0(d_2)\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_3(\lambda_0) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \delta^4\omega_1(\lambda_0)\omega_3^2(\lambda_0)\omega_2(\lambda_0) \qquad (3.28)$$

elde edilir. Determinantın değeri sıfırdan farklı elde edilmiştir. Çünkü $\delta > 0$ dır $\omega_1(\lambda_0)\,\omega_2(\lambda_0)\,\omega_2(\lambda_0)$ karakteristik denklemlerdir. Buna göre, bu homojen denklem sistemi sadece $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = 0$ olduğunda aşikar çözüme sahip olacaktır. Bu ise bir çelişki doğurur ve dolayısıyla (3.1)-(3.7) probleminin özdeğerleri karakteristik fonksiyonun sıfırları ile çakışıktır.

4
ÖZDEĞER, ÖZFONKSİYONLAR VE $W(\lambda)$ İÇİN ASİMPTOTİK YAKLAŞIM FORMÜLLERİ

Bu kısımda (3.1)-(3.7) problemini ifade ettiğimiz A operatörünün özdeğerleri, özfonksiyonları $W(\lambda)$ karakteristik fonksiyonu için asimptotik yaklaşım formülleri elde edilmiştir. Bu kapsamda [3] ve [6] numaralı çalışmalardaki yöntem göz önüne alınarak bazı temel lemmaların kendi problemimiz için ispatı gerçekleştirilmiştir.

Lemma 4.1 (3.1) denkleminin bir çözümü olan $\varphi(z,\lambda)$ ve türevleri , $\lambda = \gamma^2$ olmak üzere aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{d^n}{dz^n}\varphi_{1\lambda}(z) = \gamma \sin a \frac{d^n}{dz^n}\sin \gamma z + \frac{1}{\gamma}\cos a \frac{d^n}{dz^n}\sin \gamma z + \frac{1}{\gamma}\int_0^z \frac{d^n}{dz^n} q(u)\sin[\gamma(z-u)]\,\varphi_{1\lambda}(u)dy \tag{4.1}$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\varphi_{2\lambda}(z) = \frac{\gamma}{\delta}\sin a \frac{d^n}{dz^n}\cos \gamma z + \frac{1}{\gamma\delta}\cos a \frac{d^n}{dz^n}\sin \gamma z + \frac{1}{\gamma\delta}\int_0^z \frac{d^n}{dz^n} q(u)\sin[\gamma(z-u)]\,\varphi_{1\lambda}(u)du + \frac{1}{\gamma}\int_{d_1}^z \frac{d^n}{dz^n} q(u)\sin[\gamma(z-u)]\,\varphi_{2\lambda}(u)du \tag{4.2}$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\varphi_{3\lambda}(z) = \frac{\gamma}{\delta^2}\sin a \frac{d^n}{dz^n}\cos \gamma z + \frac{1}{\gamma\delta^2}\cos a \frac{d^n}{dz^n}\sin \gamma z + \frac{1}{\gamma\delta^2}\int_0^{d_1} \frac{d^n}{dz^n} q(u)\sin[\gamma(z-u)]\,\varphi_{1\lambda}(u)du + \frac{1}{\gamma\delta}\int_{d_1}^{d_2} \frac{d^n}{dz^n} q(u)\sin[\gamma(z-u)]\,\varphi_{2\lambda}(u)du + \frac{1}{\gamma}\int_{d_2}^z \frac{d^n}{dz^n} q(u)\sin[\gamma(z-u)]\,\varphi_{3\lambda}(u)du \tag{4.3}$$

İspat: İspatı gerçekleştirebilmek için (4.1), (4.2), (4.3) denklemlerinde $q(u)\varphi_{i\lambda}(u),\ i = 1,2,3$ terimlerinin yerine sırasıyla $\gamma^2\varphi_{i\lambda}(u) + \varphi''_{i\lambda}(u)$,

$i = 1,2,3$ ifadeleri yazılır ve her birine iki kez kısmi integrasyon yöntemi uygulanır.

$n = 0$ için

$$\varphi_{1\lambda}(z) = \gamma \sin a \sin \gamma z + \frac{1}{\gamma}\cos a \sin \gamma z + \frac{1}{\gamma}\int_0^z \sin[\gamma(z-u)]q(u)\varphi_{1\lambda}(u)du \tag{4.4}$$

$$I_1 = \int_0^z \sin[\gamma(z-u)]\, q(u)\varphi_{1\lambda}(u)du = \int_0^z \sin[\gamma(z-u)]\,[\varphi''_{1\lambda}(u) + \lambda\varphi_{1\lambda}(u)]du = \int_0^z \sin[\gamma(z-u)]\varphi''_{1\lambda}(u)du + \gamma^2\int_0^z \sin[\gamma(z-u)]\varphi_{1\lambda}(u)\,du \tag{4.5}$$

olur ve

$\sin[\gamma(z-u)] = t\ ,\ -\gamma\cos[\gamma(z-u)]\,du = dt$

$\varphi''_{1\lambda}(u)du = dv\ ,\ \varphi'_{1\lambda}(u) = v$

denilerek kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$I_1 = \sin[\gamma(z-u)]\varphi'_{1\lambda}|_0^z + \gamma\int_0^z \cos[\gamma(z-u)]\varphi'_{1\lambda}du + \lambda\int_0^z \sin[\gamma(z-u)]\varphi_{1\lambda}(u)du$$

$$= -\sin\gamma z\,\varphi'_{1\lambda}(0) + \gamma\int_0^z \cos[\gamma(z-u)]\,\varphi'_{1\lambda}(u)du + \gamma^2\int_0^z \sin[\gamma(z-u)]\ \varphi_{1\lambda}(u)du \tag{4.6}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\cos[\gamma(z-u)] = t\ ,\gamma\sin[\gamma(z-u)]\,du = dt$

$$\varphi'_{1\lambda}(u)du = dv\ ,\varphi_{1\lambda}(u) = v$$

denilerek ikinci kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$I_1 = -\varphi'_{1\lambda}(0)\sin\gamma z + \gamma[\varphi_{1\lambda}\cos[\gamma(z-u)]|_0^z$$
$$-\gamma\int_0^z \sin[\gamma(z-u)]\varphi_{1\lambda}(u)du]$$
$$+\gamma^2\int_0^z \sin[\gamma(z-u)]\,\varphi_{1\lambda}(u)du$$
$$=\cos a\sin\gamma z+\gamma[\varphi_{1\lambda}(z)-\varphi_{1\lambda}(0)\cos\gamma z]$$
$$-\gamma^2\int_0^z \sin[\gamma(z-u)]\varphi_{1\lambda}(u)du$$
$$+\gamma^2\int_0^z \sin[\gamma(z-u)]\,\varphi_{1\lambda}(u)du \qquad (4.7)$$

$$\varphi_{1\lambda}=\frac{1}{\gamma}[\int_0^z \sin[\gamma(z-u)]\,q(u)\varphi_{1\lambda}(u)du+\cos a\sin\gamma z+\gamma^2\sin a\cos\gamma z]$$
$$=\gamma\sin a\cos\gamma z+\frac{1}{\gamma}cosa\sin\gamma z$$
$$+\tfrac{1}{\gamma}\textstyle\int_0^z q(u)\sin[\gamma(z-u)]\,\varphi_{1\lambda}\,(u)du \qquad (4.8)$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

$n=1$ için de

$$\varphi'_{1\lambda}=-\gamma^2\sin a\cos\gamma z+cosa\cos\gamma z+\textstyle\int_0^z\cos[\gamma(z-u)]\,q(u)\varphi_{1\lambda}(u)du \qquad (4.9)$$

dir.

$n=0$ için

$$\varphi_{2\lambda}(z)=\frac{\gamma}{\delta}\sin a\cos\gamma z+\frac{1}{\gamma\delta}\cos a\sin\gamma z$$
$$+\tfrac{1}{\gamma\delta}\textstyle\int_0^{d_1}\sin[\gamma(z-u)]\,q(u)\varphi_{1\lambda}(u)du$$
$$+\tfrac{1}{\gamma}\textstyle\int_{d_1}^z\sin[\gamma(z-u)]q(u)\varphi_{2\lambda}(u)du \qquad (4.10)$$

$$I_2 = \int_{d_1}^{z} \sin[\gamma(z-u)]q(u)\varphi_{2\lambda}(u)du$$

$$= \int_{d_1}^{z} \sin[\gamma(z-u])[\varphi''_{2\lambda}(u) + \lambda\varphi_{2\lambda}(u)]du$$

$$= \int_{d_1}^{z} \sin[\gamma(z-u)]\varphi''_{2\lambda}(u)du$$

$$+ \gamma^2 \int_{d_1}^{z} \sin[\gamma(z-u)]\varphi_{2\lambda}(u)\,du \qquad (4.11)$$

olur ve

$\sin[\gamma(z-u)] = t\ ,\ -\gamma\cos[\gamma(z-y)]\ dy = dt$

$\varphi''_{2\lambda}(u)du = dv\ ,\ \varphi'_{2\lambda}(u) = v$

denilerek kısmi integrasyon uygulanır,

$$I_2 = \sin[\gamma(z-u)]\varphi'_{2\lambda}(u)|_{d_1}^{z}$$

$$+ \gamma \int_{d_1}^{z} \cos[\gamma(z-u)]\varphi'_{2\lambda}du$$

$$+ \gamma^2 \int_{d_1}^{z} \sin[\gamma(z-u)]\varphi_{2\lambda}(u)du$$

$$= -\sin[\gamma(z-d_1)]\varphi'_{2\lambda}(d_1)$$

$$+ \gamma \int_{a_1}^{z} \cos[\gamma(z-u)]\,\varphi'_{2\lambda}(u)du$$

$$+ \gamma^2 \int_{a_1}^{z} \sin[\gamma(z-u)]\ \varphi_{2\lambda}(u)du \qquad (4.12)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$\cos[\gamma(z-u)] = t\ ,\gamma\sin[\gamma(z-u)]\,du = dt$

$\varphi'_{2\lambda}(u)du = dv\ ,\varphi_{2\lambda}(u) = v$

Denilerek ikinci kez kısmi integrasyon uygulanır.

$$I_2 = -\sin[\gamma(z-d_1)]\varphi'_{2\lambda}(d_1) + \gamma[\varphi_{2\lambda}\cos[\gamma(z-u)]|_{d_1}^{z}$$

$$- \gamma \int_{d_1}^{z} \sin[\gamma(z-u)]\varphi_{2\lambda}(u)du]$$

$$+ \gamma^2 \int_{d_1}^{z} \sin[\gamma(z-u)]\varphi_{2\lambda}(u)du$$

$$= -\sin[\gamma(z-d_1)]\varphi'_{2\lambda}(d_1) + \gamma[\varphi_{2\lambda}(z) - \varphi_{2\lambda}(d_1)\cos[\gamma(z-d_1)[]$$
$$-\gamma^2 \int_{d_1}^{z} \sin[\gamma(z-u)]\varphi_{2\lambda}(u)du + \gamma^2 \int_{d_1}^{z} \sin[\gamma(z-\mathrm{u})]\varphi_{2\lambda}(u)du$$

$$= -\sin[\gamma(z-d_1)]\,\varphi'_{2\lambda}(d_1) + \gamma\varphi_{2\lambda}(z)$$
$$-\gamma\cos[\gamma(z-d_1)]\,\varphi_{2\lambda}(d_1) \qquad (4.13)$$

$$\begin{cases} y'(d_1-0) = \delta y'(d_1+0) & y(d_1-0) = \delta y(d_1+0) = 0 \\ \varphi'_{1\lambda}(d_1) = \delta\varphi'_{2\lambda}(d_1) & \varphi_{1\lambda}(d_1) = \delta\varphi_{1\lambda}(d_1) \\ \varphi'_{2\lambda}(d_1) = \frac{1}{\delta}\varphi'_{1\lambda}(d_1) & \varphi_{2\lambda}(d_1) = \frac{1}{\delta}\varphi_{1\lambda}(d_1) \end{cases} \qquad (4.14)$$

eşitlikleri kullanılarak

$$I_2 = -\frac{1}{\delta}\sin[\gamma(z-d_1)]\varphi'_{1\lambda}(d_1) + \gamma\varphi_{2\lambda}(z) - \frac{\gamma}{\delta}\cos[\gamma(z-d_1)]\varphi_{1\lambda}(d_1)$$

$$\gamma\varphi_{2\lambda}(z) = \frac{1}{\delta}\sin[\gamma(z-d_1)]\,\varphi'_{1\lambda}(d_1)$$
$$+\frac{\gamma}{\delta}\cos[\gamma(z-d_1)]\,\varphi_{1\lambda}(d_1)$$
$$+\int_{d_1}^{z} \sin[\gamma(z-u)]q(u)\varphi_{2\lambda}(u)du \qquad (4.15)$$

$$\varphi_{2\lambda}(z) = \frac{1}{\gamma\delta}\sin[\gamma(z-d_1)]\varphi'_{1\lambda}(d_1) + \frac{1}{\delta}\cos[\gamma(z-d_1)]\varphi_{1\lambda}(d_1)$$
$$+\frac{1}{\gamma}\int_{d_1}^{z} \sin[\gamma(z-u)]\,q(u)\varphi_{2\lambda}(u)du \qquad (4.16)$$

(4.14) denkleminden $\varphi'_{1\lambda}(d_1)$ ve $\varphi_{1\lambda}(d_1)$ yerine yazılarak

$$\varphi_{2\lambda}(z) = \frac{1}{\gamma\delta}[-\gamma^2 \sin a \sin\gamma d_1 + \cos a\cos\gamma d_1$$
$$+\int_0^{d_1} \cos[\gamma(d_1-u)]q(u)\varphi_{1\lambda}(u)du]\sin[\gamma(z-d_1)]$$
$$+\frac{1}{\delta}[\gamma\sin a\cos\gamma d_1 + \frac{1}{\gamma}\cos a\sin\gamma d_1$$
$$+\frac{1}{\gamma}\int_0^{d_1} \sin[\gamma(d_1-u)]q(u)\varphi_{1\lambda}(u)du]\cos[\gamma(z-d_1)]$$
$$+\frac{1}{\gamma}\int_{d_1}^{z} \sin[\gamma(z-u)]q(u)\varphi_{2\lambda}(u)du \qquad (4.17)$$

$$= -\frac{\gamma}{\delta}\sin a \sin[\gamma(0-d_1)]]\sin[\gamma(z-d_1)]$$
$$+\frac{1}{\gamma\delta}\cos a \cos[\gamma(0-d_1)]\sin[\gamma(z-d_1)]$$
$$+\frac{\gamma}{\delta}\sin a \cos[\gamma(z-d_1)]$$
$$+\frac{1}{\gamma\delta}\cos a \ \sin[\gamma(0-d_1)]\cos[\gamma(z-d_1)]$$
$$+\frac{1}{\gamma\delta}\sin[\gamma(z-d_1)]\int_0^{d_1}\cos[\gamma(d_1-u)]\,q(u)\varphi_{1\lambda}(u)du$$
$$+\frac{1}{\gamma\delta}\cos[\gamma(z-d_1)]\int_0^{d_1}\sin[\gamma(d_1-u)]q(u)\varphi_{1\lambda}(u)du$$
$$+\frac{1}{\gamma}\int_{d_1}^{z}\sin[\gamma(z-u)]q(u)\varphi_{2\lambda}(u)du$$

$$= \frac{\gamma\sin a}{\delta}\cos[\gamma(d_1+z-d_1)] + \frac{1}{\gamma\delta}\cos a \sin[\gamma(d_1+z-d_1)]$$
$$+\frac{1}{\gamma\delta}\int_0^{d_1}\sin[\gamma(d_1-u+z-d_1)]q(u)\varphi_{1\lambda}(u)du$$
$$+\frac{1}{\gamma}\int_{d_1}^{z}\sin[\gamma(z-u)]q(u)\varphi_{2\lambda}(u)du \qquad (4.18)$$

$$\varphi_{2\lambda} = \frac{\gamma}{\delta}\sin a\cos\gamma z + \frac{1}{\gamma\delta}\cos a\sin\gamma z + \frac{1}{\gamma\delta}\int_0^{d_1}\sin[\gamma(z-u)]q(u)\varphi_{1\lambda}(u)du$$
$$+\tfrac{1}{\gamma}\textstyle\int_{d_1}^{z}\sin[\gamma(z-u)]q(u)\varphi_{2\lambda}(u)du \qquad (4.19)$$

elde edilir.

$n = 1$ için

$$\varphi'_{2\lambda}(z) = \frac{\gamma^2}{\delta}\sin a\sin\gamma z - \frac{1}{\delta}\cos a\cos\gamma z - \frac{1}{\delta}\int_0^{d_1}\cos[\gamma(z-u)]\,q(u)\varphi_{1\lambda}(u)du$$
$$-\textstyle\int_{d_1}^{z}\cos[\gamma(z-u)]\,q(u)\varphi_{2\lambda}(u)du \qquad (4.20)$$

bulunur.

$$\frac{d^n}{dx^n}\varphi_{3\lambda}(z) = \frac{\gamma}{\delta^2}\sin a\frac{d^n}{dz^n}\cos\gamma z + \frac{1}{\gamma\delta^2}\cos a\frac{d^n}{dz^n}\sin\gamma z$$
$$+\frac{1}{\gamma\delta^2}\int_0^{d_1}\frac{d^n}{dz^n}q(u)\sin[\gamma(z-u)]\varphi_{1\lambda}(u)du$$
$$+\frac{1}{\gamma\delta}\int_{d_1}^{d_2}\frac{d^n}{dz^n}q(u)\sin[\gamma(z-u)]\,\varphi_{2\lambda}(u)du$$
$$+\frac{1}{\gamma}\int_{d_2}^{z}\frac{d^n}{dz^n}q(u)\sin[\gamma(z-u)]\,\varphi_{3\lambda}(u)du \qquad (4.21)$$

$n = 0$ için

$$\varphi_{3\lambda}(z) = \frac{\gamma}{\delta^2}\sin a\cos\gamma z + \frac{1}{\gamma\delta^2}\cos a\sin\gamma z$$
$$+\frac{1}{\gamma\delta^2}\int_0^{d_1}\sin[\gamma(z-u)]q(u)\varphi_{1\lambda}(u)du$$
$$+\frac{1}{\gamma\delta}\int_{d_1}^{d_2}\sin[\gamma(z-u)]q(u)\varphi_{2\lambda}(u)du$$
$$+\frac{1}{\gamma}\int_{d_2}^{z}\sin[\gamma(z-u)]q(u)\varphi_{3\lambda}(u)du \qquad (4.22)$$

$$I_3 = \int_{d_2}^{z}\sin[\gamma(z-u)]q(u)\varphi_{3\lambda}(u)du$$
$$= \int_{d_2}^{z}\sin[\gamma(z-u)][\varphi''_{3\lambda}(u) + \lambda\varphi_{3\lambda}(u)]du$$
$$= \int_{d_2}^{z}\sin[\gamma(z-u)]\,\varphi''_{3\lambda}(u)du$$
$$+\lambda\int_{a_2}^{z}\sin[\gamma(z-u)]\varphi_{3\lambda}(u)du \qquad (4.23)$$

olur ve

$\sin[\gamma(z-u)] = t$, $-\gamma\cos[\gamma(z-u)]du = dt$

$\varphi''_{3\lambda}(u)du = dv$, $\varphi'_{3\lambda}(u) = v$

denilerek kısmi integrasyon uygulanır.

$$= \sin[\gamma(z-u)]\varphi'_{3\lambda}|_{d_2}^{z} + \gamma\int_{d_2}^{z}\cos[\gamma(z-u)]\,\varphi'_{3\lambda}(u)du$$

$$+ \gamma^2\int_{d_2}^{z}\sin[\gamma(z-u)]\,\varphi_{3\lambda}(u)du$$

$$= -\sin[\gamma(z-d_2)]\varphi'_{3\lambda}(d_2) + \gamma\int_{d_2}^{z}\cos[\gamma(z-u)]\varphi'_{3\lambda}(u)du$$

$$+ \gamma^2\int_{d_2}^{z}\sin[\gamma(z-u)]\varphi_{3\lambda}(u)du$$

$\cos[\gamma(z-u)] = t$, $\gamma sin[\gamma(z-u)]du = dt$

$\varphi'_{3\lambda}(u)du = dv$, $\varphi_{3\lambda}(u) = v$

denilerek ikinci kez kısmi integrasyon uygulanır.

$$= -\varphi'_{3\lambda}(d_2)\sin[\gamma(z-d_2)]$$

$$+ \gamma\left[\cos[\gamma(z-u)]\varphi_{3\lambda}|_{d_2}^{z} - \gamma\int_{d_2}^{z}\sin[\gamma(z-u)]\,\varphi_{3\lambda}(u)du\right]$$

$$+ \gamma^2\int_{d_2}^{z}\sin[\gamma(z-u)]\varphi_{3\lambda}(u)du$$

$$= -\varphi'_{3\lambda}(d_2)\sin[\gamma(z-d_2)]$$

$$+ \gamma[\,\varphi_{3\lambda}(u) - \varphi_{3\lambda}(d_2)\cos[\gamma(z-d_2)]]$$

$$- \gamma^2\int_{d_2}^{z}\sin[\gamma(z-u)]\varphi_{3\lambda}(u)du$$

$$+ \gamma^2\int_{d_2}^{z}\sin[\gamma(z-u)]\varphi_{3\lambda}(u)du$$

$$\varphi_{3\lambda}(z) = \frac{1}{\gamma}[\int_{d_2}^{z}\sin[\gamma(z-u)]\,q(u)\varphi_{3\lambda}(u)du + \gamma\varphi_{3\lambda}(z)$$

$$- \gamma\varphi_{3\lambda}(d_2)\cos[\gamma(z-d_2)]$$

$$= -\frac{\gamma}{\delta}\varphi'_{2\lambda}(d_2)\sin[\gamma(z-d_2)] + \gamma\varphi_{3\lambda}(z)$$

$$-\frac{\gamma}{\delta}\varphi_{2\lambda}(d_2)\cos[\gamma(z-d_2)] \qquad (4.24)$$

$$\gamma\varphi_{3\lambda}(z) = \frac{\gamma}{\delta}\varphi_{2\lambda}(d_2)\cos[\gamma(z-d_2)] + \frac{1}{\delta}\varphi'_{2\lambda}(d_2)\sin[\gamma(z-d_2)]$$

$$+ \int_{d_2}^{z}\sin[\gamma(z-u)]\,q(u)\varphi_{3\lambda}(u)du \qquad (4.25)$$

$$\varphi_{3\lambda}(z)=\frac{1}{\delta}\varphi_{2\lambda}(d_2)\cos\left[\gamma(z-d_2)\right]+\frac{1}{\gamma\delta}\varphi'_{2\lambda}(d_2)\sin\left[\gamma(z-d_2)\right]$$
$$+\frac{1}{\gamma}\int_{d_2}^{z}\sin[\gamma(z-u)]\,q(u)\varphi_{3\lambda}(u)du$$
$$=\frac{\gamma}{\delta^2}\sin a\cos[\gamma(d_2+z-d_2)]+\frac{1}{\gamma\delta^2}\cos a\sin[\gamma(d_2+z-d_2)]$$
$$+\frac{1}{\gamma\delta^2}\int_{0}^{d_1}\sin\left[\gamma(z-d_2+d_2-u)\right]q(u)\varphi_{1\lambda}(u)du$$
$$+\frac{1}{\gamma\delta}\int_{d_1}^{d_2}\sin\left[\gamma(z-d_2+d_2-u)\right]q(u)\varphi_{1\lambda}(u)du$$
$$+\frac{1}{\gamma}\int_{d_2}^{z}\sin[\gamma(z-u)]\,q(u)\varphi_{3\lambda}(u)du \qquad (4.26)$$

$$\varphi_{3\lambda}(z)=\frac{\gamma}{\delta^2}\sin a\cos\gamma z+\frac{1}{\gamma\delta^2}\cos a\sin\gamma z$$
$$+\frac{1}{\gamma\delta^2}\int_{0}^{d_1}\sin[\gamma(z-u)]\,q(u)\varphi_{1\lambda}(u)du$$
$$+\frac{1}{\gamma\delta}\int_{d_1}^{d_2}\sin[\gamma(z-u)]\,q(u)\varphi_{1\lambda}(u)du$$
$$+\tfrac{1}{\gamma}\textstyle\int_{d_2}^{z}\sin[\gamma(z-u)]\,q(u)\varphi_{3\lambda}(u)du \qquad (4.27)$$

$n=1$ için

$$\varphi'_{3\lambda}(z)=-\frac{\gamma^2}{\delta^2}\sin a\sin\gamma z+\frac{1}{\delta^2}\cos a\cos\gamma z$$
$$+\frac{1}{\delta^2}\int_{0}^{d_1}\sin[\gamma(z-u)]\,q(u)\varphi_{1\lambda}(u)du$$
$$+\frac{1}{\delta}\int_{d_1}^{d_2}\sin[\gamma(z-u)]\,q(u)\varphi_{1\lambda}(u)du$$
$$+\textstyle\int_{d_2}^{z}\sin[\gamma(z-u)]\,q(u)\varphi_{3\lambda}(u)du \qquad (4.28)$$

elde edilir.

Lemma 4.2 $\lambda=\gamma^2$ ve $Im\gamma=l$ olmak üzere $|\lambda|\to\infty$ $\varphi_{1\lambda}(z),\varphi_{2\lambda}(z)$ ve $\varphi_{3\lambda}(z)$ in asimptotik gösterimleri aşağıdaki gibidir.

$\sin a\neq 0$ iken

$$\varphi_{1\lambda}(z) = \gamma\ sin\ a \cos \gamma z + O\left(\frac{e^{|l|z}}{|\gamma|}\right) \tag{4.29}$$

$$\varphi_{2\lambda}(z) = \frac{\gamma \sin a \cos \gamma z}{\delta} + O\left(\frac{e^{|l|z}}{|\gamma|}\right) \tag{4.30}$$

$$\varphi_{3\lambda}(z) = \frac{\gamma \sin a \cos \gamma z}{\delta^2} + O\left(\frac{e^{|l|z}}{|\gamma|}\right) \tag{4.31}$$

$\sin a = 0$ iken

$$\varphi_{1\lambda}(z) = \frac{\cos a \sin \gamma z}{\gamma} + O\left(\frac{e^{|l|z}}{|\gamma|}\right) \tag{4.32}$$

$$\varphi_{2\lambda}(z) = \frac{\cos a \sin \gamma z}{\gamma\delta} + O\left(\frac{e^{|l|z}}{|\gamma|}\right) \tag{4.33}$$

$$\varphi_{3\lambda}(z) = \frac{cosa \sin \gamma z}{\gamma\delta^2} + O\left(\frac{e^{|l|z}}{|\gamma|}\right) \tag{4.34}$$

İspat: $\varphi_{1\lambda}(z)$ formülünün ispatı Titchmarch'ın [16] ispatı ile benzer olduğundan bu formülü ispatlamadan verebiliriz ancak $\varphi_{2\lambda}(z)$ ve $\varphi_{3\lambda}(z)$ için ispatlarını göstermeliyiz çünkü sınır şartlarımız farklıdır. Öncelikle $\varphi_{2\lambda}(z)$ denkleminin ispatını yapalım,

$\sin a \neq 0$ olsun.

$$\varphi'_{1\lambda}(z) = -\gamma^2 \sin a \sin \gamma z + O\left(\frac{e^{|l|z}}{|\gamma|}\right) \tag{4.35}$$

(4.12) ve (4.18) denklemleri (4.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$\varphi_{2\lambda}(z) = \frac{1}{\gamma\delta}\varphi'_{1\lambda}(d_1)\sin[\gamma(z-d_1)] + \frac{1}{\delta}\varphi_{1\lambda}(z_1)\cos[\gamma(z-d_1)] + \frac{1}{\gamma}\int_{d_1}^{z} \sin[\gamma(z-u)]q(u)\varphi_{2\lambda}(u)du$$

$$= \frac{1}{\gamma\delta}[-\gamma^2 \sin a \sin\gamma(d_1) \sin[\gamma(z-d_1)] + \frac{1}{\delta}[\gamma \sin a \cos\gamma(d_1) \cos[\gamma(z-d_1)]] + \frac{1}{\gamma}\int_{d_1}^{z} \sin[\gamma(z-u)]q(u)\varphi_{2\lambda}(u)du$$

$$= \frac{\gamma}{\delta}\sin a \cos\gamma z + \frac{1}{\gamma}\int_{d_1}^{z} \sin[\gamma(z-u)]q(u)\varphi_{2\lambda}(u)du + O\left(\frac{e^{|l|z}}{|\gamma|}\right) \tag{4.36}$$

Bu ifadeyi $e^{-|l|z}$ ile çarparak elde edilen ifadeye $F_{2\lambda}(z)$ diyelim

$$F_{2\lambda}(z)=\frac{\gamma}{\delta}\sin a\cos\gamma(d_1)\,e^{-|l|z}+\frac{1}{\gamma}\int_{d_1}^{z}\sin\left[\gamma(z-u)\right]e^{-|l|z}F_{2\lambda}(u)du+O\left(\frac{1}{|\gamma|}\right)$$

Elde ettiğimiz denklemden $M_1(\lambda)=\max_{d_1\le z\le d_2}|F_{2\lambda}(z)|$ olduğunu gösterelim.

$$M_1(\lambda)=\max_{d_1\le z\le d_2}\frac{|\sin a|}{\delta}+\frac{M_1(\lambda)}{|\gamma|}\int_{d_1}^{d_2}|q(u)|\,du+\frac{M_0}{|\gamma|}\qquad(M_0>0)$$

ve $M_1(\lambda)=O(1)$ elde edilir. $\lambda\longrightarrow\infty$ için $\varphi_{2\lambda}(z)=O\left|e^{|l|z}\right|$ dir.

Şimdi $\varphi_{3\lambda}(z)$ için ispatı yapalım.

$$\varphi'_{2\lambda}(z)=-\frac{\gamma^2}{\delta}\sin a\sin\gamma(d_2)+O\left(\frac{e^{|l|z}}{|\gamma|}\right)\tag{4.37}$$

(4.30) ve (4.37) denklemleri (4.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$\varphi_{3\lambda}(z)=\frac{1}{\gamma\delta}\varphi'_{2\lambda}(d_2)\sin\left[\gamma(z-d_2)\right]+\frac{1}{\delta}\varphi_{2\lambda}(d_2)\cos\left[\gamma(z-d_2)\right]$$
$$+\frac{1}{\gamma}\int_{d_2}^{z}\sin\left[\gamma(z-u)\right]q(u)\varphi_{3\lambda}(u)du$$
$$=\frac{1}{\gamma\delta}\left[-\frac{\gamma^2}{\delta}\sin a\sin\gamma(d_2)\sin\left[\gamma(z-d_2)\right]\right.$$
$$+\frac{1}{\delta}\left[\frac{\gamma\,sin\,a\cos\gamma(d_2)}{\delta}\cos\left[\gamma(z-d_2)\right]\right]$$
$$+\frac{1}{\gamma}\int_{d_2}^{z}\sin\left[\gamma(z-u)\right]q(u)\varphi_{3\lambda}(u)du$$

$=\frac{\gamma}{\delta^2}\sin a\cos\gamma z+\frac{1}{s}\int_{d_2}^{z}\sin\gamma[(z-u)]q(u)\varphi_{3\lambda}(u)du+O\left(\frac{1}{|\gamma|}\right).$ (4.38)

Elde edilen son denklemden $M_2(\lambda)=\max_{d_2\le z\le 1}|F_{3\lambda}(z)|$ olduğunu gösterelim.

$$M_2(\lambda)=\max_{d_2\le z\le 1}\frac{|\sin a|}{\delta^2}+\frac{M_2(\lambda)}{|\gamma|}\int_{d_2}^{1}|q(u)|\,du+\frac{M_3}{|\gamma|}\qquad(M_3>0)$$

ve $M_3(\lambda)=O(1)$ elde edilir. $\lambda\longrightarrow\infty$ için $\varphi_{3\lambda}(z)=O\left|e^{|l|z}\right|$ bulunur ve ispat tamamlanır.

Lemma 4.3 $\lambda=\gamma^2$ ve $Im\gamma=l$ olmak üzere $|\lambda|\to\infty$ iken $\psi_{1\lambda}(z),\psi_{2\lambda}(z)$ ve $\psi_{3\lambda}(z)$ gösterimleri aşağıdaki gibidir.

$\beta'_2\neq 0$ iken

$$\psi_{3\lambda}(z) = \gamma^2\beta_2'\cos[\gamma(z-1)] + O\left(|\gamma|e^{|l|z}\right) \tag{4.39}$$

$$\psi_{2\lambda}(z) = \delta\gamma^2\beta_2'\cos[\gamma(z-d_2)] + O\left(|\gamma|e^{|l|z}\right) \tag{4.40}$$

$$\psi_{1\lambda}(z) = \delta^2\gamma^2\beta_2'\cos[\gamma(z-d_1)] + O\left(|\gamma|e^{|l|z}\right) \tag{4.41}$$

$\beta_2' = 0$ iken

$$\psi_{3\lambda}(z) = \gamma\beta_1'\sin[\gamma(z-1)] + O\left(|\gamma|e^{|l|z}\right) \tag{4.42}$$

$$\psi_{2\lambda}(z) = \delta\gamma\beta_1'\cos[\gamma(z-d_2)] + O\left(|\gamma|e^{|l|z}\right) \tag{4.43}$$

$$\psi_{1\lambda}(z) = \delta^2\gamma\beta_1'\cos[\gamma(z-d_1)] + O\left(|\gamma|e^{|l|z}\right) \tag{4.44}$$

Buradaki asimptotik eşitsizliklerin her biri z için eşit olarak geçerlidir.

İspat: İspatı gerçekleştirebilmek için $\gamma^2\psi_{1\lambda}(u) + \psi_{1\lambda}''(u)$, $\gamma^2\psi_{2\lambda}(u) + \psi_{2\lambda}''(u)$, $\gamma^2\psi_{3\lambda}(u) + \psi_{3\lambda}''(u)$ ifadeleri sırasıyla (4.1), (4.2), (4.3) denklemlerindeki ilgili $q(u)\psi_{1\lambda}(u)du$, $q(u)\psi_{2\lambda}(u)du$, ve $q(u)\psi_{3\lambda}(u)du$ terimlerinin yerine yazılır ve her birine iki kez kısmi integrasyon yöntemi uygulanır.

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_z^1 \sin[\gamma(z-u)]q(u)\psi_{3\lambda}(u)du \\ &= \int_z^1 \sin[\gamma(z-u)][\psi_{3\lambda}''(u) + \lambda\psi_{3\lambda}(u)]du \\ &= \int_z^1 \sin[\gamma(z-u)]\psi_{3\lambda}''(u)du \\ &\quad + \gamma^2\int_z^1 \sin[\gamma(z-u)]\psi_{3\lambda}(u)\,du \end{aligned} \tag{4.45}$$

olur ve $\sin[\gamma(z-u)] = t$, $-\gamma\cos[\gamma(z-u)]du = dt$

$\psi_{3\lambda}''(u)du = dv$, $\psi_{3\lambda}'(u) = v$ denilerek kısmi integrasyon uygulanır.

$$\begin{aligned} I_3 &= \sin[\gamma(z-u)]\psi_{3\lambda}'|_z^1 \\ &\quad + \gamma\int_z^1 \cos[\gamma(z-u)]\psi_{3\lambda}'du + \gamma^2\int_z^1 \sin[\gamma(z-u)]\psi_{3\lambda}(u)du \\ &= -\sin[\gamma(z-1)]\,\psi_{3\lambda}'(1) \\ &\quad + \int_z^1 \cos[\gamma(z-u)]\psi_{3\lambda}'(u)du \\ &\quad + \gamma^2\int_z^1 \sin[\gamma(z-u)]\psi_{3\lambda}(u)du \end{aligned} \tag{4.46}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\cos[\gamma(z-u)] = t\,, \gamma \sin[\gamma(z-u)]du = dt$

$$\psi'_{3\lambda}(u)du = dv\,, \psi_{3\lambda}(u) = v$$

denilerek ikinci kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} I_3 = \sin[\gamma(z-1)]\,\psi'_{3\lambda}(1) + \gamma[\psi_{3\lambda}\cos[\gamma(z-u)]|_z^1 \\ - \gamma\int_z^1 \sin[\gamma(z-u)]\psi_{3\lambda}(u)du] + \gamma^2\int_z^1 \sin[\gamma(z-u)]\,\psi_{3\lambda}(u)du \\ = (\lambda\beta'_1 + \beta_1)\sin[\gamma(z-1)] \\ + \gamma\,[\psi_{3\lambda}(1)\cos[\gamma(z-1)] - \psi_{3\lambda}(z)] \\ - \gamma^2\int_z^1 \sin\,[\gamma(z-u)]\psi_{3\lambda}(u)du + \lambda\int_0^z \sin\,[\gamma(z-u)]\psi_{3\lambda}(u)du \\ = (\lambda\beta'_1 + \beta_1)\sin[\gamma(z-1)] + \gamma(\lambda\beta'_2 + \beta_2)\cos[\gamma(z-1)] \\ - \frac{1}{\gamma}\int_z^1 \sin[\gamma(z-u)]\,\psi_{3\lambda}(u)du \end{aligned}$$

$$= \frac{\beta_1}{\gamma}\sin\,[\gamma(z-1]) + \gamma\beta'_1\sin[\gamma(z-1)] + \beta_2\cos[\gamma(z-1)]]$$

$$+\gamma^2\beta'_2\cos\,[\gamma(z-1)] - \tfrac{1}{\gamma}\textstyle\int_z^1 \sin[\gamma(z-u)]\,\psi_{3\lambda}(u)du \qquad (4.47)$$

Buradan

$\beta'_2 \neq 0$ $\qquad \psi_{3\lambda}(z) = \gamma^2\beta'_2\cos\,[\gamma(z-1)] + O\big(|\gamma|e^{|l|z}\big)$

$\beta'_2 = 0$ $\qquad \psi_{3\lambda}(z) = \gamma\beta'_1\sin\,[\gamma(z-1)] + O\big(|\gamma|e^{|l|z}\big)$ elde edilir.

Aynı işlemleri $\psi_{2\lambda}(z)$ için yapalım.

$$\begin{aligned} I_2 = \int_z^{d_2} \sin\,[\gamma(z-u)]q(u)\psi_{2\lambda}(u)du \\ = \int_z^{d_2} \sin\,[\gamma(z-u)][\psi''_{2\lambda}(u) + \gamma^2\psi_{2\lambda}(u)]du \\ = \int_z^{d_2} \sin\,[\gamma(z-u)]\psi''_{2\lambda}(u)du \\ + \gamma^2\int_z^{d_2} \sin\,[\gamma(z-u)]\psi_{2\lambda}(u)\,du \end{aligned} \qquad (4.48)$$

olur ve

$$\sin[\gamma(z-u)] = t\,, -\gamma\cos[\gamma(z-u)]\,du = dt$$

$$\psi''_{2\lambda}(u)du = dv\ ,\ \psi'_{2\lambda}(u) = v$$

denilerek kısmi integrasyon uygulayalım.

$$I_2 = \sin[\gamma(z-u)]\psi'_{2\lambda}|_z^{d_2} + \gamma\int_z^{d_2}\cos[\gamma(z-u)]\psi'_{2\lambda}du + \gamma^2\int_z^{d_2}\sin[\gamma(z-u)]\psi_{2\lambda}(u)du$$

$$= \sin[\gamma(z-d_2)]\psi'_{2\lambda}(d_2) + \gamma\int_z^{1}\cos[\gamma(z-u)]\psi'_{2\lambda}(u)du + \gamma^2\int_z^{1}\sin[\gamma(z-u)]\,\psi_{2\lambda}(u)du \qquad (4.49)$$

elde edilir ve bu ifadeye

$$\cos[\gamma(z-\mathrm{u})] = t\ ,\ \gamma\sin[\gamma(z-u)]\,du = dt$$

$$\psi'_{2\lambda}(u)du = dv\ ,\psi_{2\lambda}(u) = v$$

İkinci kez kısmi integrasyon uygulanır.

$$= \sin[\gamma(z-d_2)]\psi'_{2\lambda}(d_2) + \gamma[\psi_{2\lambda}\cos[\gamma(z-u)]]|_z^{d_2} - \gamma\int_z^{d_2}\sin[\gamma(z-u)]\psi_{2\lambda}du] + \gamma^2\int_z^{d_2}\sin[\gamma(z-u)]\psi_{2\lambda}(u)du$$

$$= \sin[\gamma(z-d_2)]\psi'_{2\lambda}(d_2) + \gamma\psi_{2\lambda}(d_2)\cos[\gamma(z-d_2)] - \gamma^2\int_z^{d_2}\sin[\gamma(z-u)]\psi_{2\lambda}(u)du + \gamma^2\int_z^{d_2}\sin[\gamma(z-u)]\,\psi_{2\lambda}(u)du$$

$$= \delta\psi'_{3\lambda}(d_2)\sin[\gamma(z-d_2)] + \gamma\delta\psi_{3\lambda}(d_2)\cos[\gamma(z-d_2)] + \gamma\psi_{2\lambda}(z)$$

$$\delta(\lambda\beta'_1+\beta_1)\sin[\gamma(z-d_2)] + \gamma\delta(\lambda\beta'_2+\beta_2)\cos[\gamma(z-d_2)] = \gamma\psi_{2\lambda}(z)$$

$$\delta\gamma\beta'_1\sin[\gamma(z-d_2)] + \frac{\delta}{\gamma}\beta_1\sin[\gamma(z-d_2)] + \delta\gamma^2\beta'_2\cos[\gamma(z-d_2)] + \delta\beta_2\cos[\gamma(z-d_2)] = \psi_{2\lambda}(z) \qquad (4.50)$$

$\beta'_2 \neq 0$ $\qquad \psi_{2\lambda}(z) = \delta\gamma^2\beta'_2\cos[\gamma(z-d_2)] + O\left(|\gamma|e^{|l|z}\right)$

$\beta'_2 = 0$ $\qquad \psi_{2\lambda}(z) = \delta\gamma\beta'_1\cos[\gamma(z-d_2)] + O\left(|\gamma|e^{|l|z}\right)$

Son olarak $\psi_{1\lambda}(z)$ için aynı adımları uygulayalım.

$$I_1 = \int_z^{d_1} \sin[\gamma(z-u)]q(u)\psi_{1\lambda}(u)du$$

$$= \int_z^{d_1} \sin[\gamma(z-u)][\psi''_{1\lambda}(u) + \gamma^2\psi_{1\lambda}(u)]du$$

$$= \int_z^{d_1} \sin[\gamma(z-u)]\psi''_{1\lambda}(u)du$$

$$+ \gamma^2 \int_z^{d_1} \sin[\gamma(z-u])\psi_{1\lambda}(u)\,du \qquad (4.51)$$

olur ve

$\sin[\gamma(z-u)] = t\ , -\gamma\cos[\gamma(z-u)]\,du = dt$

$\psi''_{1\lambda}(u)du = dv\ , \psi'_{1\lambda}(u) = v$

denilerek kısmi integrasyon uygulayalım.

$$I_1 = \sin[\gamma(z-u)]\psi'_{1\lambda}(u)|_z^{d_1}$$

$$+ \gamma \int_z^{d_1} \cos[(\gamma z-u)]\psi'_{1\lambda}(u)du$$

$$+ \gamma^2 \int_z^{d_1} \sin[\gamma(z-u)]\psi_{1\lambda}(u)du$$

$$= \sin[\gamma(z-d_1)]\psi'_{1\lambda}(d_1)$$

$$+ \gamma \int_z^1 \cos[\gamma(z-u)]\,\psi'_{1\lambda}(u)du$$

$$+ \gamma^2 \int_z^1 \sin[\gamma(z-u)]\,\psi_{1\lambda}(u)du \qquad (4.52)$$

elde edilir ve bu ifadeye

$\cos\ [\gamma(z-u)] = t\ ,\ \ \gamma\sin\ [\gamma(z-u)]\,du = dt$

$\psi'_{1\lambda}(u)\,du = dv\ , \psi_\lambda(u) = v$

denilerek ikinci kez kısmi integrasyon uygulanır.

$$= \sin[\gamma(z-d_1)]\psi'_{1\lambda}(d_1) + \gamma[\psi_{1\lambda}\cos[\gamma(z-u)]|_z^{d_1}$$
$$- \gamma\int_z^{d_1} \sin[\gamma(z-u)]\psi_{1\lambda}(u)du]$$
$$+ \gamma^2\int_z^{d_1} \sin[\gamma(z-u)]\psi_{1\lambda}(u)du$$

$$= \sin[\gamma(z-d_1)]\psi'_{1\lambda}(d_1) + \gamma\psi_{1\lambda}(d_1)\cos[\gamma(z-d_1)]$$
$$- \gamma^2\int_z^{z_1} \sin[\gamma(z-u)]\psi_{1\lambda}(u)du + \gamma^2\int_z^{d_1} \sin[\gamma(z-u)]\psi_{1\lambda}(u)du$$

$$\delta\psi'_{2\lambda}(d_1)\sin[\gamma(z-d_1)] + \gamma\delta\psi_{2\lambda}(d_1)\cos[\gamma(z-d_1)] - \gamma\psi_{1\lambda}(z)$$
$$= \int_z^{d_1} \sin[\gamma(z-u)]q(u)\psi_{1\lambda}(u)du$$

$$\delta^2(\lambda\beta'_1+\beta_1)\sin[\gamma(z-d_1)] + \gamma\delta^2(\lambda\beta'_2+\beta_2)\cos[\gamma(z-d_1)]$$
$$- \int_z^{d_1} \sin[\gamma(z-u)]q(u)\,\psi_{1\lambda}(u)dy = \gamma\psi_{1\lambda}(z)$$

$\delta^2 s\beta'_1 \sin[\gamma(z-d_1)] + \frac{\delta^2}{\gamma}\beta_1 sin[\gamma(z-d_1)] + \delta^2\gamma^2\beta'_2\cos[\gamma(z-d_1)] +$

$\delta^2\beta_2\cos[\gamma(z-d_1)] - \frac{1}{\gamma}\int_z^{d_1}\sin[\gamma(z-u)]\,q(u)\,\psi_{1\lambda}(u)du =$

$\psi_{2\lambda}(z)$ (4.53)

$\beta'_2 \neq 0$ $\psi_{1\lambda}(z) = \delta^2\gamma^2\beta'_2\cos[\gamma(z-d_1)] + O\left(|\gamma|e^{|l|z}\right)$

$\beta'_2 = 0$ $\psi_{2\lambda}(z) = \delta^2\gamma\beta'_1\cos[\gamma(z-d_1)] + O\left(|\gamma|e^{|l|z}\right)$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1 $\sin a$ ve β'_2 nün aldığı değerlere göre $W(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun asimptotik gösterilimleri $\lambda = \gamma^2$ ve $Im\gamma = l$ olmak üzere

Eğer $\beta'_2 \neq 0$ ve $\sin a \neq 0$ ise;

$$W(\lambda) = -\delta^2\gamma^4 \sin a\ \sin\gamma\beta'_2 + O(|\gamma|^3 e^{|l|}) \quad (4.54)$$

Eğer $\beta'_2 \neq 0$ ve $\sin a = 0$ ise;

$$W(\lambda) = \delta^2\gamma^2\cos a\cos\gamma\beta'_2 + O(|\gamma|e^{|l|}) \quad (4.55)$$

Eğer $\beta'_2 = 0$ ve $\sin a \neq 0$ ise;

$$W(\lambda) = \delta^2\gamma^3 \sin a \cos\gamma\beta_1' + O(|\gamma|^2 e^{|l|}) \tag{4.56}$$

Eğer $\beta_2' = 0$ ve $\sin a = 0$ ise;

$$W(\lambda) = \delta^2\gamma cos\ a \sin\gamma\beta_1' + O(e^{|l|}) \tag{4.57}$$

şeklindedir.

İspat: İspatın tamamlanabilmesi için [3] te olduğu gibi (4.41), (4.44) denklemleri kullanılarak aşağıdaki bağıntının gerçekleştiğini göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} W(\lambda) = \delta^4\omega_3(\lambda) &= \delta^4[\varphi_{3\lambda}(1)\psi_{3\lambda}(1) - \varphi_{3\lambda}'(1)\psi_{3\lambda}'(1)] \\ &= \delta^4[(\lambda\beta_1' + \beta_1)\varphi_{3\lambda}(1) - (\lambda\beta_2' + \beta_2)\varphi_{3\lambda}'(1)] \\ &= \delta^4\lambda[\beta_1'\varphi_{3\lambda}(1) - \beta_2'\varphi_{3\lambda}'(1)] + \delta^4[\beta_1\varphi_{3\lambda}(1) - \beta_2\varphi_{3\lambda}'(1)] \\ &= \delta^4\lambda\left[\frac{\gamma \sin a \cos\gamma}{\delta^2}\beta_1' - \frac{\gamma^2 \sin a \sin\gamma}{\delta^2}\beta_2'\right] \\ &\quad + \delta^4\left[\frac{\gamma \sin a \cos\gamma}{\delta^2}\beta_1 - \frac{\gamma^2 \sin a \sin\gamma}{\delta^2}\beta_2\right] \\ &= \gamma^3\delta^2 \sin a \cos\gamma\beta_1' - \gamma^4\delta^2 \sin a \cos\gamma\beta_2' + \\ &\quad \gamma\delta^2 \sin a \sin\gamma\beta_1 - \mu^2\delta^2 \sin a \sin\mu\beta_2 \end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned} W(\lambda) = \delta^4\omega_3(\lambda) &= \delta^4[\varphi_{3\lambda}(1)\psi_{3\lambda}(1) - \varphi_{3\lambda}'(1)\psi_{3\lambda}'(1)] \\ &= \delta^4[(\lambda\beta_1' + \beta_1)\varphi_{3\lambda}(1) - (\lambda\beta_2' + \beta_2)\varphi_{3\lambda}'(1)] \\ &= \delta^4\lambda[\beta_1'\varphi_{3\lambda}(1) - \beta_2'\varphi_{3\lambda}'(1)] + \delta^4[\beta_1\varphi_{3\lambda}(1) - \beta_2\varphi_{3\lambda}'(1)] \\ &= \delta^4\lambda\left[\frac{\cos a \sin\gamma}{\gamma\delta^2}\beta_1' - \frac{\cos a \cos\gamma}{\gamma^2\delta^2}\beta_2'\right] \\ &\quad + \delta^4\left[\frac{\cos a \sin\gamma}{\gamma\delta^2}\beta_1 - \frac{\cos a \cos\gamma}{\gamma^2\delta^2}\beta_2\right] \\ &= \gamma\delta^2 \cos a \sin\gamma\beta_1' - \delta^2 \cos a\ \cos\gamma\beta_2' + \frac{\delta^2}{\gamma}\cos a \sin\gamma\beta_1 - \\ &\quad \frac{\delta^2}{\gamma^2}\cos a \cos\gamma\beta_2 \end{aligned} \tag{4.59}$$

5
GREEN FONKSİYONUNUN İNŞA EDİLMESİ

Green fonksiyonları değişik uygulama alanları olan ve özellikle diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan matematiksel yapılardır. Bu yöntem homojen olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünü ifade etmeye olanak tanıyan ve çözümü analitik olarak ifade etmemize yarayan güçlü bir yöntemdir.

Green fonksiyonunun asimptotik gösterimi de çözümün analitik olarak ifade edilmesinde yardımcı olacaktır.

$$-y'' + q(z)y = -f(z) \qquad z \in [0, d_1) \cup (d_1, d_2) \cup (d_2, 1] \tag{5.1}$$

homojen olmayan diferansiyel denklemini ve sınır koşullarını ve de arayüz (geçiş) koşullarını göz önüne alalım.

(5.1) denkleminin homojen kısmının genel çözümünü C_i ve D_i $(i = 1,2,3)$ keyfi sabitleri olmak üzere

$$y_h(z,\lambda) = \begin{cases} C_1\varphi_1(z,\lambda_0) + C_2\psi_1(z,\lambda_0), & z \in [0, d_1) \\ C_3\varphi_2(z,\lambda_0) + C_4\psi_2(z,\lambda_0), & z \in (d_1, d_2) \\ C_5\varphi_3(z,\lambda_0) + C_6\psi_3(z,\lambda_0), & z \in (d_2, 1] \end{cases} \tag{5.2}$$

şeklinde gösterebiliriz.

Bu çözüme sabitin değişimi yöntemini uyguladığımızda diferansiyel denklemin homojen kısmının genel çözümü

$$y_h(z,\lambda) = \begin{cases} C_1(z,\lambda)\varphi_{1\lambda}(z) + C_2(z,\lambda)\psi_{1\lambda}(z), & z \in [0, d_1) \\ C_3(z,\lambda)\varphi_{2\lambda}(z) + C_4(z,\lambda)\psi_{2\lambda}(z), & z \in (d_1, d_2) \\ C_5(z,\lambda)\varphi_{3\lambda}(z) + C_6(z,\lambda)\psi_{3\lambda}(z), & z \in (d_2, 1] \end{cases} \tag{5.3}$$

şeklinde yazılabilir. $C_i(z,\lambda)$ ve $D_i(z,\lambda)$ $(i = 1,2,3)$ keyfi parametreleri

$$\begin{cases} C_1'(z,\lambda)\varphi_{1\lambda}(z) + D_2'(z,\lambda)\psi_{1\lambda}(z) = 0 \\ C_1'(z,\lambda)\varphi_{1\lambda}'(z) + D_2'(z,\lambda)\psi_{2\lambda}'(z) = f(z) \end{cases} \quad [0,d_1] \quad (5.4)$$

$$\begin{cases} C_2'(z,\lambda)\varphi_{1\lambda}(z) + D_2'(z,\lambda)\psi_{1\lambda}(z) = 0 \\ C_2'(z,\lambda)\varphi_{1\lambda}'(z) + D_2'(z,\lambda)\psi_{2\lambda}'(z) = f(z) \end{cases} \quad [d_1,d_2] \quad (5.5)$$

$$\begin{cases} C_3'(z,\lambda)\varphi_{1\lambda}(z) + D_3'(z,\lambda)\psi_{1\lambda}(z) = 0 \\ C_3'(z,\lambda)\varphi_{1\lambda}'(z) + D_3'(z,\lambda)\psi_{2\lambda}'(z) = f(z) \end{cases} \quad [d_2,1] \quad (5.6)$$

denklemlerini sağlarlar. λ, özdeğer olmadığından

$$W(\varphi_{1\lambda},\psi_{1\lambda},z) = \begin{vmatrix} \varphi_{1\lambda} & \psi_{1\lambda} \\ \varphi_{1\lambda}' & \psi_{1\lambda}' \end{vmatrix} \neq 0 \quad W(\varphi_{2\lambda},\psi_{2\lambda},z) = \begin{vmatrix} \varphi_{2\lambda} & \psi_{2\lambda} \\ \varphi_{2\lambda}' & \psi_{2\lambda}' \end{vmatrix} \neq 0$$

$$W(\varphi_{1\lambda},\psi_{1\lambda},z) = \begin{vmatrix} \varphi_{1\lambda} & \psi_{1\lambda} \\ \varphi_{1\lambda}' & \psi_{1\lambda}' \end{vmatrix} \neq 0$$

dır. Dolayısıyla yukarıdaki denklem sistemlerinin her biri yalnız bir çözüme sahiptir.

$$-C_1'(z,\lambda)\varphi_{1\lambda}(z)\psi_1'(z) - D_1'(z,\lambda)\psi_{1\lambda}(z)\psi_1'(z) = 0$$
$$C_1'(z,\lambda)\varphi_{1\lambda}(z)\psi_{1\lambda}'(z) + D_1'(z,\lambda)\psi_{1\lambda}(z)\psi_1'(z) = \psi_{1\lambda}(z)f(z)$$
$$-C_1'[\varphi_{1\lambda}(z)\psi_1'(z) - \varphi_{1\lambda}'(z)\psi_{1\lambda}(z)] = \psi_{1\lambda}(z)f(z)$$
$$C_1' = \frac{-\psi_{1\lambda}(z)}{\omega(\lambda)}f(z)$$
$$C_1 = -\int_0^{d_1}\frac{\psi_{1\lambda}(z)}{\omega(\lambda)}f(z)dz + c \quad (5.7)$$

$$-C_1'(z,\lambda)\varphi_{1\lambda}(z)\varphi_1'(z) - D_1'(z,\lambda)\psi_{1\lambda}(z)\varphi_1'(z) = 0$$
$$C_1'(z,\lambda)\varphi_{1\lambda}(z)\varphi_{1\lambda}'(z) + D_1'(z,\lambda)\varphi_{1\lambda}(z)\psi_1'(z) = \varphi_{1\lambda}(z)f(z)$$
$$D_1'[\varphi_{1\lambda}(z)\psi_1'(z) - \varphi_{1\lambda}'(z)\psi_{1\lambda}(z)] = \varphi_{1\lambda}(z)f(z)$$

$$D_1' = \frac{-\varphi_{1\lambda}(z)}{\omega(\lambda)}f(z)$$
$$D_1 = -\int_0^{d_1}\frac{\varphi_{1\lambda}(z)}{\omega(\lambda)}f(z)dz + c. \quad (5.8)$$

C_2', D_2', C_3', D_3' C_2, D_2, C_3 ve D_3 benzer şekilde bulunur. Böylece aşağıdaki ilişkiler elde edilir;

$$C_1(z,\lambda) = \frac{1}{\omega(\lambda)}\int_z^{d_1}\psi_{1\lambda}(z)f(z)dz + C_1 \qquad x \in [0,d_1) \quad (5.9)$$

$$D_1(z,\lambda) = \frac{1}{\omega(\lambda)}\int_0^{z}\varphi_{1\lambda}(z)f(z)dz + D_1 \qquad x \in [0,d_1) \quad (5.10)$$

$$C_2(z,\lambda) = \frac{1}{\omega(\lambda)}\int_z^{d_2} \psi_{2\lambda}(z)f(z)dz + C_2 \qquad x \in (d_1, d_2) \qquad (5.11)$$

$$D_2(z,\lambda) = \frac{1}{\omega(\lambda)}\int_{d_1}^{z} \varphi_{2\lambda}(z)f(z)dz + D_2 \qquad x \in (d_1, d_2) \qquad (5.12)$$

$$C_3(z,\lambda) = \frac{1}{\omega(\lambda)}\int_z^{1} \psi_{3\lambda}(z)f(z)dz + C_3 \qquad x \in (d_2, 1] \qquad (5.13)$$

$$D_3(z,\lambda) = \frac{1}{\omega(\lambda)}\int_{d_2}^{z} \varphi_{3\lambda}(z)f(z)dz + D_2 \qquad x \in (d_2, 1]. \qquad (5.14)$$

Şimdi $C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3$ keyfi sabitler olmak üzere elde ettiğimiz bu ilişkileri (5.2) denkleminde yerine yazarak homojen doğrusal olmayan bir diferansiyel denklemin genel çözümünü elde etmiş oluruz.

$$y(z,\lambda) = \begin{cases} \frac{\varphi_{1\lambda}(z)}{\omega(\lambda)}\int_z^{d_1} \psi_{1\lambda}(u)f(u)du + \frac{\psi_{1\lambda}(z)}{\omega(\lambda)}\int_0^{z} \varphi_{1\lambda}(u)f(u)du \\ \qquad +C_1\varphi_{1\lambda}(z) + D_1\psi_{1\lambda}(z), \quad z \in [0, d_1) \\ \frac{\varphi_{2\lambda}(z)}{\omega(\lambda)}\int_z^{d_2} \psi_{2\lambda}(u)f(u)du + \frac{\psi_{2\lambda}(z)}{\omega(\lambda)}\int_{d_1}^{z} \varphi_{2\lambda}(u)f(u)du \\ \qquad +C_2\varphi_{2\lambda}(z) + D_2\psi_{2\lambda}(z), \ z \in (d_1, d_2) \\ \frac{\varphi_{3\lambda}(z)}{\omega(\lambda)}\int_z^{1} \psi_{3\lambda}(u)f(u)du + \frac{\psi_{2\lambda}(z)}{\omega(\lambda)}\int_{d_2}^{z} \varphi_{3\lambda}(u)f(u)du \\ \qquad +C_3\varphi_{3\lambda}(z) + D_3\psi_{3\lambda}(z), \quad z \in (d_2, 1] \end{cases} \qquad (5.15)$$

Şimdi elde edilen $y(z,\lambda)$ denkleminin türevini alarak

$$y'(z,\lambda) = \frac{\varphi'_{1\lambda}(z)}{\omega(\lambda)}\int_z^{d_1} \psi_{1\lambda}(u)f(u)du + \frac{\psi'_{1\lambda}(z)}{\omega(\lambda)}\int_o^{z} \varphi_{1\lambda}(u)f(u)du + C_1\varphi'_{1\lambda}(z) + D_1\psi'_{1\lambda}(z) \qquad z \in [0, d_1) \qquad (5.16)$$

$$y'(z,\lambda) = \frac{\varphi'_{2\lambda}(z)}{\omega(\lambda)}\int_z^{d_2} \psi_{2\lambda}(u)f(u)du + \frac{\psi'_{2\lambda}(z)}{\omega(\lambda)}\int_{d_1}^{z} \varphi_{2\lambda}(u)f(u)du + C_2\varphi'_{2\lambda}(z) + D_2\psi'_{2\lambda}(z) \qquad z \in (d_1, d_2) \qquad (5.17)$$

$$y'(z,\lambda) = \frac{\varphi'_{3\lambda}(z)}{\omega(\lambda)}\int_z^{1} \psi_{3\lambda}(u)f(u)du + \frac{\psi'_{3\lambda}(z)}{\omega(\lambda)}\int_{d_1}^{z} \varphi_{3\lambda}(u)f(u)du + C_3\varphi'_{3\lambda}(z) + D_3\psi'_{3\lambda}(z) \qquad z \in (d_2, 1] \qquad (5.18)$$

denklemleri elde edilir.

(5.16), (5.17), (5.18) denklemleri sınır ve arayüz (geçiş) koşullarında yerine yazılarak aşağıdaki $L_i(y)\ i = 1,2,3,4,5,6$ denklemleri elde edilir.

$$L_1(y) = \cos a\, y(0) - \lambda \sin a\, y'(0)$$

$$= \cos a \left[\frac{\varphi_{1\lambda}(0)}{\omega(\lambda)} \int_0^{d_1} \psi_{1\lambda}(u) f(u) du + \frac{\psi_{1\lambda}(0)}{\omega(\lambda)} \int_o^{z} \varphi_{1\lambda}(u) f(u) du \right.$$

$$\left. + C_1 \varphi_{1\lambda}(0) + D_1 \psi_{1\lambda}(0) \right]$$

$$- \lambda \sin a \left[\frac{\varphi'_{1\lambda}(0)}{\omega(\lambda)} \int_0^{d_1} \psi'_{1\lambda}(u) f(u) du \right.$$

$$\left. + \frac{\psi'_{1\lambda}(0)}{\omega(\lambda)} \int_0^{d_1} \varphi'_{1\lambda}(u) f(u) du + C_1 \varphi'_{1\lambda}(0) + D_1 \psi'_{1\lambda}(0) \right]$$

$= \frac{1}{\omega(\lambda)} \int_0^{d_1} \psi_{1\lambda}(u) f(u) du \{\cos a\, \varphi_{1\lambda}(0) - \lambda \sin a\, \varphi'_{1\lambda}(0)\} + C_1\{\cos a\, \varphi_{1\lambda}(0) -$

$\lambda \sin a\, \varphi'_{1\lambda}(0)\} + D_1\{\cos a\, \psi_{1\lambda}(0) - \lambda sin\alpha\ a(0)\}$ (5.19)

Burada (3.11) ve (3.14) formüllerini kullanırsak

$$\cos a\, \varphi_{1\lambda}(0) - \lambda \sin a\, \varphi'_{1\lambda}(0) = 0 \quad (5.20)$$

$$\cos a\, \psi_{1\lambda}(0) - \lambda \sin a\, \psi'_{1\lambda}(0) = \omega(\lambda) \quad (5.21)$$

denklemleri ile $\varphi_{1\lambda}(z)$ ve $\psi_{1\lambda}(z)$ çözümleri için gerekli formüller elde edilir ve

$$L_1(y) = D_1 \omega(\lambda) \quad (5.22)$$

bulunur.

Benzer şekilde

$$L_2(y) = \lambda[\beta'_1 y(1) + \beta'_2 y'(1)] + [\beta_1 y(1) - \beta_2 y'(1)$$

$$= \frac{1}{\omega(\lambda)} \int_{d_1}^{d_2} \varphi_{2\lambda}(u) f(u) du \{(\lambda\beta'_1 + \beta_1)\psi_{2\lambda}(1) - (\lambda\beta'_2 +$$

$$\beta_2)\psi'_{2\lambda}(1)\} + C_2\{(\lambda\beta'_1 + \beta_1)\varphi_{2\lambda}(1) - (\lambda\beta'_2 +$$

$$\beta_2)\varphi'_{2\lambda}(1)\} + D_2\{(\lambda\beta'_1 + \beta_1)\psi_{2\lambda}(1) - (\lambda\beta'_2 +$$

$$\beta_2)\psi'_{2\lambda}(1) \quad (5.23)$$

eşitliğinde

$$(\lambda\beta'_1 + \beta_1)\psi_{2\lambda}(1) - (\lambda\beta'_2 + \beta_2)\psi'_{2\lambda}(1) = 0 \quad (5.24)$$

$$(\lambda\beta'_1 + \beta_1)\psi_{2\lambda}(1) - (\lambda\beta'_2 + \beta_2)\psi'_{2\lambda}(1) = \omega(\lambda) \quad (5.25)$$

formülleri kullanılarak

$$L_2(y) = C_2 \omega_2(\lambda) \quad (5.26)$$

elde edilir. $L_3(y), L_4(y), L_5(y)$ ve $L_6(y)$ denklemleri içinde aynı yöntemi uygularız.

$$L_3(y) = \frac{\varphi_{1\lambda}(d_1-0)}{\omega(\lambda)}\int_{d_1-0}^{d_1}\psi_{1\lambda}(u)f(u)du + \frac{\psi_{1\lambda}(d_1-0)}{\omega(\lambda)}\int_{0}^{d_1-0}\varphi_{1\lambda}(u)f(u)du$$
$$+ C_1\varphi_{1\lambda}(d_1-0) + D_1\psi_{1\lambda}(d_1-0)$$
$$- \delta\left[\frac{\varphi_{2\lambda}(d_1+0)}{\omega(\lambda)}\int_{d_1+0}^{d_2}\psi_{2\lambda}(u)f(u)du\right.$$
$$+ \frac{\psi_{2\lambda}(d_1+0)}{\omega(\lambda)}\int_{d_1}^{d_1+0}\varphi_{2\lambda}(u)f(u)du + C_2\varphi_{2\lambda}(d_1+0)$$
$$\left.+ D_2\psi_{2\lambda}(d_1+0)\right]$$

$$= \varphi_{1\lambda}(d_1-0)\int_{d_1-0}^{d_1}\psi_{1\lambda}(u)f(u)du + \psi_{1\lambda}(d_1-0)\int_{0}^{d_1-0}\varphi_{1\lambda}(u)f(u)du$$
$$- \delta\left[\varphi_{2\lambda}(d_1+0)\int_{d_1+0}^{d_2}\psi_{2\lambda}(u)f(u)du\right.$$
$$\left.+ \psi_{2\lambda}(d_1+0)\int_{d_1}^{d_1+0}\varphi_{2\lambda}(u)f(u)du\right] = 0$$
$$= \{\delta[C_2\varphi_{2\lambda}(d_1+0) + D_2\psi_{2\lambda}(d_1+0)] - C_1\varphi_{1\lambda}(d_1-0) -$$
$$D_1\psi_{1\lambda}(d_1-0)\}\omega(\lambda) \qquad (5.27)$$

$$L_4(y) = \frac{\varphi'_{1\lambda}(d_1-0)}{\omega(\lambda)}\int_{d_1-0}^{d_1}\psi_{1\lambda}(u)f(u)du + \frac{\psi'_{1\lambda}(d_1-0)}{\omega(\lambda)}\int_{0}^{d_1-0}\varphi_{1\lambda}(u)f(u)du$$
$$+ C_1\varphi'_{1\lambda}(d_1-0) + D_1\psi'_{1\lambda}(d_1-0)$$
$$- \delta\left[\frac{\varphi'_{2\lambda}(d_1+0)}{\omega(\lambda)}\int_{d_1+0}^{d_2}\psi_{2\lambda}(u)f(u)du\right.$$
$$+ \frac{\psi'_{2\lambda}(d_1+0)}{\omega(\lambda)}\int_{d_1}^{d_1+0}\varphi_{2\lambda}(u)f(u)du + C_2\varphi'_{2\lambda}(d_1+0)$$
$$\left.+ D_2\psi'_{2\lambda}(d_1+0)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \varphi'_{1\lambda}(d_1-0)\int_{d_1-0}^{d_1}\psi_{1\lambda}(u)f(u)dy+\psi'_{1\lambda}(d_1-0)\int_{0}^{d_1-0}\varphi_{1\lambda}(u)f(u)du$$
$$-\delta\left[\varphi'_{2\lambda}(d_1+0)\int_{d_1+0}^{d_2}\psi_{2\lambda}(u)f(u)du\right.$$
$$\left.+\psi'_{2\lambda}(d_1+0)\int_{d_1}^{d_1+0}\varphi_{2\lambda}(u)f(u)du\right]$$
$$=\{\delta[C_2\varphi'_{2\lambda}(d_1+0)+D_2\psi'_{2\lambda}(d_1+0)]-C_1\varphi'_{1\lambda}(d_1-0)-$$
$$D_1\psi'_{1\lambda}(d_1-0)\}\omega(\lambda). \tag{5.28}$$

Böylece (5.27), (5.28) denklemleri kullanılarak

$$\psi_{1\lambda}(d_1)\int_0^{d_1}\varphi_{1\lambda}(u)f(u)du-\delta\varphi_{2\lambda}(d_1)\int_{d_1}^{d_2}\psi_{2\lambda}(u)f(u)du$$
$$=[\delta C_2\varphi_{2\lambda}(d_1)+D_2\psi_{2\lambda}(d_1)-C_1\varphi_{1\lambda}(d_1)+D_1\psi_{1\lambda}(d_1)]\omega(\lambda)$$
$$\psi'_{1\lambda}(d_1)\int_0^{d_1}\varphi_{1\lambda}(u)f(u)du-\delta\varphi'_{2\lambda}(d_1)\int_{d_1}^{d_2}\psi_{2\lambda}(u)f(u)du$$
$$=\delta[C_2\varphi'_{2\lambda}(d_1)+D_2\psi'_{2\lambda}(d_1)]-C_1\varphi'_{1\lambda}(d_1)-D_1\psi'_{1\lambda}(d_1)]\omega(\lambda)$$
$$[\psi_{1\lambda}(d_1)-\psi'_{1\lambda}(d_1)]\int_0^{d_1}\varphi_{1\lambda}(u)f(u)du$$
$$-\delta[\varphi_{2\lambda}(d_1)-\varphi'_{2\lambda}(d_1)]\int_{d_1}^{d_2}\psi_{2\lambda}(u)f(u)du$$
$$=\omega(\lambda)\{\delta C_2[\varphi_{2\lambda}(d_1)-\varphi'_{2\lambda}(d_1)]+\delta D_2[\psi_{2\lambda}(d_1)-\psi'_{2\lambda}(d_1)]$$
$$-C_1[\varphi_{1\lambda}(d_1)-\varphi'_{1\lambda}(d_1)]-D_1[\psi_{1\lambda}(d_1)-\psi'_{1\lambda}(d_1)]\}$$

$$\Rightarrow D_1=\tfrac{1}{\omega(\lambda)}\textstyle\int_0^{d_1}f(u)\varphi_{1\lambda}(u)du \tag{5.29}$$

$$\Rightarrow C_2=\tfrac{1}{\omega(\lambda)}\textstyle\int_{d_1}^{d_2}f(u)\chi_{2\lambda}(u)du \tag{5.30}$$

elde edilir.

$y(z,\lambda)$ nın bir çözümü olarak $\omega(\lambda)\neq 0$ için (3.4) sınır koşulu ve (5.22) eşitliğinden

$$C_1=0 \tag{5.31}$$

ve (3.5) sınır koşulu ile (5.18) eşitliğinden

$$D_2=0 \tag{5.32}$$

bulunur.

$$L_5(y) = \frac{\varphi_{2\lambda}(d_2-0)}{\omega(\lambda)}\int_{d_2-0}^{d_2}\psi_{2\lambda}(u)f(u)du + \frac{\psi_{2\lambda}(d_2-0)}{\omega(\lambda)}\int_{0}^{d_2-0}\varphi_{2\lambda}(u)f(u)du$$
$$+ C_2\varphi_{2\lambda}(d_2-0) + D_2\psi_{2\lambda}(d_2-0)$$
$$- \delta\left[\frac{\varphi_{3\lambda}(d_2+0)}{\omega(\lambda)}\int_{d_2+0}^{1}\psi_{3\lambda}(u)f(u)du\right.$$
$$+ \frac{\psi_{3\lambda}(d_2+0)}{\omega(\lambda)}\int_{d_2}^{d_2+0}\varphi_{2\lambda}(u)f(u)du + C_3\varphi_{3\lambda}(d_2+0)$$
$$\left.+ D_3\psi_{3\lambda}(d_2+0)\right]$$

$$= \varphi_{2\lambda}(d_2-0)\int_{d_2-0}^{d_2}\psi_{2\lambda}(u)f(u)du + \psi_{2\lambda}(d_2-0)\int_{d_1}^{d_2-0}\varphi_{2\lambda}(u)f(u)du$$
$$- \delta\left[\varphi_{3\lambda}(d_2+0)\int_{d_2+0}^{1}\psi_{3\lambda}(u)f(u)du\right.$$
$$\left.+ \psi_{3\lambda}(d_2+0)\int_{d_2}^{d_2+0}\varphi_{3\lambda}(u)f(u)du\right] = 0$$

$$= \{\delta[C_3\varphi_{3\lambda}(d_2+0) + D_3\psi_{3\lambda}(d_2+0)] - C_2\varphi_{2\lambda}(d_2-0) -$$
$$D_2\psi_{2\lambda}(d_2-0)\}\omega(\lambda) \quad , \qquad (5.33)$$

$$L_6(y) = \frac{\varphi'_{2\lambda}(d_2-0)}{\omega(\lambda)}\int_{d_2-0}^{d_2}\psi_{2\lambda}(u)f(u)du + \frac{\psi'_{2\lambda}(d_2-0)}{\omega(\lambda)}\int_{d_1}^{d_2-0}\varphi_{2\lambda}(u)f(u)du$$
$$+ C_2\varphi'_{2\lambda}(d_2-0) + D_2\psi'_{2\lambda}(d_2-0)$$
$$- \delta\left[\frac{\varphi'_{3\lambda}(d_2+0)}{\omega(\lambda)}\int_{d_2+0}^{1}\psi_{3\lambda}(u)f(u)du\right.$$
$$+ \frac{\psi'_{3\lambda}(d_2+0)}{\omega(\lambda)}\int_{d_2}^{d_2+0}\varphi_{3\lambda}(u)f(u)du + C_3\varphi'_{3\lambda}(d_2+0)$$
$$\left.+ D_3\psi'_{3\lambda}(d_2+0)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \varphi'_{2\lambda}(d_2-0)\int_{d_2-0}^{d_2}\psi_{2\lambda}(u)f(u)du + \psi'_{2\lambda}(d_2-0)\int_{d_1}^{d_2-0}\varphi_{2\lambda}(u)f(u)du$$
$$- \delta\left[\varphi'_{3\lambda}(d_2+0)\int_{d_2+0}^{1}\psi_{3\lambda}(u)f(u)du\right.$$
$$\left.+ \psi'_{3\lambda}(d_2+0)\int_{d_2}^{d_2+0}\varphi_{3\lambda}(u)f(u)du\right]$$

$$= \{\delta[C_3\varphi'_{3\lambda}(d_2+0) + D_3\psi'_{3\lambda}(d_2+0)] - C_2\varphi'_{2\lambda}(d_2-0) - D_2\psi'_{2\lambda}(d_2-0)\}\omega(\lambda). \quad (5.34)$$

(5.33) ve (5.34) denklemleri kullanılarak da

$$\psi_{2\lambda}(d_2)\int_{d_1}^{d_2}\varphi_{2\lambda}(u)f(u)du - \delta\varphi_{3\lambda}(d_2)\int_{d_2}^{1}\psi_{3\lambda}(u)f(u)du = [\delta C_3\varphi_{3\lambda}(d_2) + D_3\psi_{3\lambda}(d_2) - C_2\varphi_{2\lambda}(d_2) + D_2\psi_{2\lambda}(d_2)]\omega(\lambda)$$

$$\Rightarrow \psi'_{2\lambda}(d_2)\int_{d_1}^{d_2}\varphi_{2\lambda}(u)f(u)du - \delta\varphi'_{3\lambda}(d_2)\int_{d_2}^{1}\psi_{3\lambda}(u)f(u)du = \delta[C_3\varphi'_{3\lambda}(d_2) + D_3\psi'_{3\lambda}(d_2)] - C_2\varphi'_{2\lambda}(d_2) - D_2\psi'_{1\lambda}(d_2)]\omega(\lambda)$$

$$[\psi_{2\lambda}(d_2) - \psi'_{2\lambda}(d_2)]\int_{d_1}^{d_2}\varphi_{2\lambda}(u)f(u)du - \delta[\varphi_{3\lambda}(d_2) - \varphi'_{3\lambda}(d_2)]\int_{d_2}^{1}\psi_{3\lambda}(u)f(u)du = \omega(\lambda)\{\delta C_3[\varphi_{3\lambda}(d_2) - \varphi'_{3\lambda}(d_2)] + \delta D_3[\psi_{3\lambda}(d_2) - \psi'_{3\lambda}(d_2)] - C_2[\varphi_{2\lambda}(d_2) - \varphi'_{2\lambda}(d_2)] - D_2[\psi_{2\lambda}(d_2) - \psi'_{2\lambda}(d_2)]\}$$

$$\Rightarrow D_2 = \frac{1}{\omega(\lambda)}\int_{d_1}^{d_2} f(u)\varphi_{2\lambda}(u)du \quad (5.35)$$

$$\Rightarrow C_3 = \frac{1}{\omega(\lambda)}\int_{d_2}^{1} f(u)\psi_{3\lambda}(u)du \quad (5.36)$$

elde edilir. (3.6) sınır koşulu ve (5.33) eşitliğinden

$$C_2 = 0 \quad (5.37)$$

ve (3.7) sınır koşulu ile (5.33) eşitliğinden

$$D_3 = 0 \quad (5.38)$$

sonucuna ulaşılır.

Elde edilen (5.28), (5.29), (5.34), (5.37) denklemleri ve sınır koşulları kullanılarak ve C_2, C_3, D_1, D_2 değişkenlerinden yararlanılarak bir lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistem aşağıda belirtilmiştir.

$$\begin{cases} \delta C_2\varphi_{2\lambda}(d_1+0)-D_1\psi_{1\lambda}(d_1-0)=\frac{\psi_{1\lambda}(d_1-0)}{\omega(\lambda)}\int_0^{d_1}\varphi_{1\lambda}(u)f(u)du \\ \qquad -\delta\frac{\varphi_{2\lambda}(d_1+0)}{\omega(\lambda)}\int_{d_1}^{d_2}\psi_{2\lambda}(u)f(u)du \\ \delta C_2\phi'_{2\lambda}(d_1+0)-D_1\chi'_{1\lambda}(d_1-0)=\frac{\chi'_{1\lambda}(d_1-0)}{\omega(\lambda)}\int_0^{d_1}\varphi_{1\lambda}(u)f(u)du \\ \qquad -\delta\frac{\phi'_{2\lambda}(d_1+0)}{\omega(\lambda)}\int_{d_1}^{d_2}\chi_{2\lambda}(u)f(u)du \\ \delta C_3\varphi_{3\lambda}(d_2+0)-D_2\psi_{2\lambda}(d_1-0)=\frac{\psi_{2\lambda}(d_2-0)}{\omega(\lambda)}\int_{d_1}^{d_2-0}\varphi_{2\lambda}(u)f(u)du \\ \qquad -\delta\frac{\psi_{3\lambda}(d_2-0)}{\omega(\lambda)}\int_{d_2+0}^{1}\psi_{3\lambda}(u)f(u)du \\ \delta C_3\varphi'_{3\lambda}(d_2+0)-D_2\psi'_{2\lambda}(d_2-0)=\frac{\psi'_{2\lambda}(d_2-0)}{\omega(\lambda)}\int_{d_1}^{d_2-0}\varphi_{2\lambda}(u)f(u)du \\ \qquad -\delta\frac{\varphi'_{3\lambda}(d_2+0)}{\omega(\lambda)}\int_{d_2+0}^{1}\psi_{3\lambda}(u)f(u)du \end{cases} \tag{5.39}$$

Bu lineer denklem sisteminin çözümü için $\varphi_{i\lambda}(z)$ ve $\psi_{i\lambda}(z)$ $(i=1,2,3)$ kullanılarak elde edilen sistemin katsayılar matrisinin determinantı alınır.

$$\begin{vmatrix} \delta\varphi_{2\lambda}(d_1+0) & -\psi_{1\lambda}(d_1-0) \\ \delta\varphi'_{2\lambda}(d_1+0) & -\psi'_{1\lambda}(d_1-0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta\varphi_{2\lambda}(d_1+0) & -\delta\psi_{1\lambda}(d_1+0) \\ \delta\varphi'_{2\lambda}(d_1+0) & -\delta\psi'_{2\lambda}(d_1+0) \end{vmatrix}$$

$$= -\delta^2\varphi_{2\lambda}(d_1+0)\psi_{2\lambda}(d_1+0)+\delta^2\varphi'_{2\lambda}(d_1+0)\,\psi'_{2\lambda}(d_1+0)$$

$$= \delta^2\omega_2(\lambda)=\delta^2\omega(\lambda) \tag{5.40}$$

$$\begin{vmatrix} \delta\phi_{3\lambda}(d_2+0) & -\chi_{2\lambda}(d_1-0) \\ \delta\phi'_{3\lambda}(d_2+0) & -\chi'_{2\lambda}(d_1-0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta\phi_{3\lambda}(d_2+0) & -\delta\chi_{3\lambda}(d_2+0) \\ \delta\phi'_{3\lambda}(d_2+0) & -\delta\chi'_{3\lambda}(d_2+0) \end{vmatrix}$$

$$= -\delta^2\varphi_{3\lambda}(d_2+0)\psi_{3\lambda}(d_2+0)+\delta^2\varphi'_{3\lambda}(d_2+0)\,\psi'_{3\lambda}(d_2+0)$$

$$= \delta^2\omega_3(\lambda)=\delta^2\omega(\lambda) \tag{5.41}$$

Görüldüğü gibi denklem sisteminin katsayılar matrisi sıfırdan farklı bulunmuştur. O halde sadece aşikar çözüm vardır. Böylece C_2, C_3, D_1 ve D_2 eşitlikleri aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$C_2=\frac{1}{\omega(\lambda)}\int_{d_1}^{d_2}f(u)\chi_{2\lambda}(u)du \tag{5.42}$$

$$C_3=\frac{1}{\omega(\lambda)}\int_{d_2}^{1}f(u)\chi_{3\lambda}(u)du \tag{5.43}$$

$$D_1=\frac{1}{\omega(\lambda)}\int_0^{d_1}f(u)\phi_{1\lambda}(u)du \tag{5.44}$$

$$D_2=\frac{1}{\omega(\lambda)}\int_{d_1}^{d_2}f(u)\phi_{2\lambda}(u)du \tag{5.45}$$

Ayrıca

$$\varphi(z,\lambda)=\begin{cases}\varphi_1(z,\lambda), & z\in[0,d_1)\\ \varphi_2(z,\lambda), & z\in(d_1,d_2)\\ \varphi_3(z,\lambda), & z\in(a_2,1]\end{cases} \tag{5.46}$$

ve

$$\psi(z,\lambda)=\begin{cases}\psi_1(z,\lambda), & z\in[0,d_1)\\ \psi_2(z,\lambda), & z\in(d_1,d_2)\\ \psi_3(z,\lambda), & z\in(a_2,1]\end{cases} \tag{5.47}$$

kullanılarak $y(z,\lambda)$ formülü yeniden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y(z,\lambda)=\frac{\psi(z,\lambda)}{\omega(\lambda)}\int_0^z f(u)\varphi(u,\lambda)du+\frac{\varphi(z,\lambda)}{\omega(\lambda)}\int_z^1 f(u)\psi(u,\lambda)du \tag{5.48}$$

(5.18) eşitliği sınır değer problemimizin çözümü olarak elde edilmiş olur. Bu eşitlikten problemimizin Green fonksiyonunu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$G(z,u;\lambda)=\begin{cases}\frac{1}{\omega(\lambda)}\varphi(u,\lambda)\psi(z,\lambda),\ 0\le u\le z\le 1,\ z\neq d_1,u\neq d_1,z\neq d_{2,},u\neq d_2\\ \frac{1}{\omega(\lambda)}\varphi(z,\lambda)\psi(u,\lambda),\ 0\le z\le u\le 1,\ z\neq d_1,u\neq d_1,z\neq d_{2,},u\neq d_2\end{cases} \tag{5.49}$$

Böylece ifade ettiğimiz Green fonksiyonu yardımıyla (5.48) çözümünü (5.49) den yararlanarak

$$y(z,\lambda)=\int_0^1 G(z,u;\lambda)f(u)du \tag{5.50}$$

şeklinde yazabiliriz.

<u>$\sin a\neq 0$ ve $\beta_2'\neq 0$ için</u>

(5.49) Green fonksiyonunun asimptotik gösterimini (4.54) denklemini ve (4.29), (4.30), (4.31), (4.39),(4.40) ve (4.41) asimptotik formüllerini kullanarak elde ederiz.

$$G(z,u;\lambda)=\begin{cases}-\frac{1}{\gamma}\frac{\cos\gamma u\cos[\gamma(z-d_1)]}{\sin\gamma}+O\left(\frac{1}{|\gamma|^3}e^{|l|u}\right), & 0\le u\le z\le d_1\\ -\frac{1}{\gamma\delta^2}\frac{\cos\gamma u\cos[\gamma(z-d_2)]}{\sin\gamma}+O\left(\frac{1}{|\gamma|^3}e^{|l|u}\right), & 0\le u\le d_1\le d_2\le z\le 1\\ -\frac{1}{\gamma\delta^4}\frac{\cos\gamma u\cos[\gamma(z-1)]}{\sin\gamma}+O\left(\frac{1}{|\gamma|^3}e^{|l|u}\right), & d_2\le u\le z\le 1\\ \frac{1}{\gamma}\frac{\cos\gamma z\cos[\gamma(u-d_1)]}{\sin\gamma}+O\left(\frac{1}{|\gamma|^3}e^{|l|z}\right), & 0\le z\le u\le d_1\\ -\frac{1}{\gamma\delta^2}\frac{\cos\gamma z\cos[\gamma(u-d_2)]}{\gamma}+O\left(\frac{1}{|\gamma|^3}e^{|l|z}\right), & 0\le z\le d_1\le d_2\le u\le 1\\ -\frac{1}{\gamma\delta^4}\frac{\cos\gamma z\cos[\gamma(u-1)]}{\sin\gamma}+O\left(\frac{1}{|\gamma|^3}e^{|l|z}\right) & d_2\le z\le u\le 1.\end{cases}$$

<u>$\sin a=0$ ve $\beta_2'\neq 0$ için</u>

(5.49) Green fonksiyonunun asimptotik gösterimini (4.55) denklemini ve (4.29), (4.30), (4.31), (4.39),(4.40) ve (4.41) asimptotik formüllerini kullanarak elde ederiz.

$$G(z,u;\lambda)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{\gamma}\frac{\sin\gamma u\cos[\gamma(z-d_1)]}{\cos\gamma}+O\left(\frac{1}{|\gamma|}e^{|l|u}\right) & 0\le u\le z\le d_1 \\ \frac{1}{\gamma\delta^2}\frac{\sin\gamma u\cos[\gamma(z-d_2)]}{\cos\gamma}+O\left(\frac{1}{|\gamma|}e^{|l|u}\right) & 0\le u\le d_1\le d_2\le z\le 1 \\ \frac{1}{\gamma\delta^4}\frac{\sin\gamma u\cos[\gamma(z-1)]}{\cos\gamma}+O\left(\frac{1}{|\gamma|}e^{|l|u}\right) & d_2\le y\le z\le 1 \\ \frac{1}{\gamma}\frac{\cos\gamma z\cos[\gamma(u-d_1)]}{\cos\gamma}+O\left(\frac{1}{|\gamma|}e^{|l|z}\right) & 0\le z\le u\le d_1 \\ \frac{1}{\gamma\delta^2}\frac{\cos\gamma z\cos[\gamma(u-d_2)]}{\cos\gamma}+O\left(\frac{1}{|\gamma|}e^{|l|z}\right) & 0\le z\le d_1\le d_2\le u\le 1 \\ \frac{1}{\gamma\delta^4}\frac{\cos\gamma z\cos[\gamma(u-1)]}{\cos\gamma}+O\left(\frac{1}{|\gamma|}e^{|l|z}\right). & d_2\le z\le u\le 1 \end{cases}$$

<u>$\sin a \neq 0$ ve $\beta_2' = 0$ için</u>

(5.49) Green fonksiyonunun asimptotik gösterimini (4.56) denklemini ve (4.29), (4.30), (4.31), (4.42), (4.43), (4.44) asimptotik formüllerini kullanılarak elde ederiz.

$$G(z,u;\lambda)$$
$$= \begin{cases} \frac{\gamma^2\cos\gamma u\sin[\gamma(z-d_1)]}{\cos\gamma}+O\left(\frac{1}{|\gamma|^3}e^{|l|u}\right) & 0\le u\le z\le d_1 \\ \frac{\gamma^2}{\delta}\frac{\cos\gamma u\sin[\gamma(z-d_2)]}{\cos\gamma}+O\left(\frac{1}{|\gamma|^3}e^{|l|u}\right) & 0\le u\le d_1\le d_2\le z\le 1 \\ \frac{1}{\gamma\delta^4}\frac{\cos\gamma u\sin[\gamma(z-1)]}{\cos\gamma}+O\left(\frac{1}{|\gamma|^3}e^{|l|u}\right) & d_2\le u\le z\le 1 \\ \frac{1}{\gamma}\frac{\cos\gamma z\ \cos[\gamma(u-d_1)]}{\cos\gamma}+O\left(\frac{1}{|\gamma|^3}e^{|l|z}\right) & 0\le z\le u\le d_1 \\ \frac{1}{\gamma\delta^2}\frac{\cos\gamma z\cos[\gamma(u-d_2)]}{\cos\gamma}+O\left(\frac{1}{|\gamma|^3}e^{|l|z}\right) & 0\le z\le d_1\le d_2\le u\le 1 \\ \frac{1}{\gamma\delta^4}\frac{\cos\gamma z\cos[\gamma(u-1)]}{\cos\gamma}+O\left(\frac{1}{|\gamma|^3}e^{|l|z}\right). & d_2\le z\le u\le 1 \end{cases}$$

<u>$\sin a = 0$ ve $\beta_2' = 0$ için</u>

(5.49) Green fonksiyonunun asimptotik gösterimini (4.57) denklemi (4.32), (4.33), (4.34), (4.42), (4.43) ve (4.44) asimptotik formüllerini kullanarak elde ederiz.

$$G(z,u;\lambda)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\sin\gamma u \sin[\gamma(z-d_1)]}{\sin\mu} + O\left(e^{|l|u}\right) & 0 \le u \le z \le d_1 \\ \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\sin\gamma u \sin[\gamma(z-d_2)]}{\sin\gamma} + O\left(e^{|l|u}\right) & 0 \le u \le d_1 \le d_2 \le z \le 1 \\ \dfrac{1}{\gamma\delta^4}\dfrac{\sin\gamma u \sin[\gamma(z-1)]}{\sin\gamma} + O\left(e^{|l|u}\right) & d_2 \le u \le z \le 1 \\ \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\sin\gamma z\, sins\, [\gamma(u-d_1)]}{\sin\gamma} + O\left(e^{|l|z}\right) & 0 \le z \le u \le d_1 \\ \dfrac{1}{\gamma\delta^2}\dfrac{\sin\gamma z \sin[\gamma(u-d_2)]}{\sin\gamma} + O\left(e^{|l|z}\right) & 0 \le z \le d_1 \le d_2 \le u \le 1 \\ \dfrac{1}{\gamma\delta^4}\dfrac{\sin\gamma z \sin[\gamma(u-1)]}{\sin\gamma} + O\left(e^{|l|z}\right). & d_2 \le z \le u \le 1 \end{cases}$$

böylece ispat tamamlanmış olur.

SONUÇ

Çalışmamızda, süreksizlik ve ara yüz (geçiş) koşulları içeren bir Sturm-Liouville problemi ele alınmış ve problemimizi ifade ettiğimiz operatöre ait öz değer ve öz fonksiyonların asimptotik davranışları ayrıntılı olarak incelenmiştir. Elde ettiğimiz asimptotik ifadeler yardımıyla da problemin Green fonksiyonu oluşturulmuş, böylece hem teorik hem de uygulama açısından önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Bulunan asimptotik ifadeler, öz değerlerin büyüklük açısından sıralanması ve öz fonksiyonların davranışları hakkında net bilgiler sağlamış ve Green fonksiyonu-nun özelliklerini belirlemede etkili olmuştur. Ayrıca bulunan bu bulgular, ters spektral problemler, kararlılık analizi ve sayısal çözüm yöntemleri gibi ileri araştırma alanlarına ışık tutabilecekdir.

Sonuç olarak, bu çalışma süreksizliğe ve ara yüz (geçiş) koşullarına sahip sınır değer problemlerine ait spektral teorinin incelenmesine katkı sağlamış; benzer yapılarda çalışacak araştırmacılar için teorik bir temel oluşturmuştur.

KAYNAKÇA

[1] Z. Akdoğan, M. Demirci and O. Sh. Mukhtarov, " Green function of discontinuous boundary-value problem with transmission conditions" Mathematical Methods in the Applied Sciences, 30, 1719-1738, (2007)

[2] M. Demirci, Z. Akdoğan, O. Sh. Mukhtarov, "Asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfuctions of one discontinuous boundary value problem", Int J Computat Cogn;2(3):101–13, (2004).

[3] S. Caliskan, A. Bayramov, Z. Oer and S. Uslu, "Eigenvalues and Eigenfunctions Of Discontinuous Two Point Boundary Value Problem With An Eigenparameter In The Boundary Condition" Rocky Mountain Journal Of Mathematics, Vol. 43, no 6, (2013).

[4] Q. Yang, W. Wang, "Asymptotic behavior of a differential operator with discontinuities at two points", Math Methods Appl Sci;34:373–83,(2011).

[5] M. Kadakal , O. Sh. Mukhtarov, " Sturm–Liouville problems with discontinuities at two points", Comput Math Appl;54: 1367–79, (2007) .

[6] N, Altınışık, O. Sh. Mukhtarov and M. Kadakal, "Asymptotic Formulas For Eigenfunctions Of Sturm-Liouville Problems With Eigenvalue Parameter In the Boundary Conditions", Kuwait J. 39 (1A), pp. 1-17, (2012).

[7] F. Hira, N. Altınışık, O. Muhtaroglu, "Asymptotic Expansions of Eigenvalues and Eigenfunctions of the Discontinuous Boundary Value Problem with Combined Transition Condition", XVL. National Mathematical Congress, Turkey, (2009).

[8] P. A. Binding, P. J. Browne, B. A. Watson, "Strum–Liouville problems with boundary conditions rationally dependent on the eigenparameter II", Journal of Computational and Applied Mathematics; 148:147–169, (2002).

[9] O. Sh. Mukhtarov, M. Kadakal , F.S. Muhtarov, "On discontinuous Sturm–Liouville problem with transmission conditions", Journal of Mathematics of Kyoto University; 444:779–798, (2004).

[10] A. A. Shkalikov, "Boundary value problems for ordinary differential equations with a parameter in boundary conditions", Trudy Sem. Imeny I. G. Petrovskogo; 9:190–229 (Russian), (1983).

[11] S. Yakubov and Y. Yakubov, “Differential-operator Equations. Ordinary and Partial Differential Equations.” Chapman & Hall/CRC: Boca Raton, London, New York, Washington, DC, 2000. Copyright q 2007 John Wiley & Sons, Ltd. Math. Meth. Appl. Sci.; 30:1719–1738,(2007).

[12] O. Sh. Mukhtarov, M. Kandemir , N. Kuruoğlu , “Distribution of eigenvalues for the discontinuous boundary value problem with functional manypoint conditions”, Israel Journal of Mathematics; 129:143–156, (2002).

[13] O. Sh. Mukhtarov, S. Yakubov , “Problems for ordinary differential equations with transmission conditions”, Applicable Analysis; 81:1033–1064,(2002).

[14] V. A. Marchenko, “Sturm-Liouville Operators and Applications”, Springer Basel AG, (1986).

[15] M. N. Naimark, “Linear differential operators”, Ungar, New York, (1967).

[16] E. C. Titchmarsh, “Eigenfunctions expansion associated with second order differential equations”, 1,2nd ed. Oxford Univ. Press London, (1962).

[17] C. T. Fulton, “Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions”, Proc Roy Soc Edinburgh Sec A;77:293–308, (1977).

[18] J. Walter, “Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions”, Math. Z., 133, 301-312, (1973).

[19] A. Wang, J. Sun, X. Hao, S. Yao, “Completeness of eigenfunctions of Sturm-Liouville problems with transmission conditions” ,Methods Appl. Anal., 16(3), 299-312, (2009).

[20] D. B. Hinton, “An expansion theorem for eigenvalue problem with eigenvalue parameter in the boundary conditions”, Quart. J. Math. Oxford, 30, 33-42, (1979).

[21] N. B. Kerimov and Kh. Mamedov, “On a boundary value problem with a spectral parameter in the boundary conditions”, Sibirsk. Math. Zh., 2, 325-335, English translation Siberian Math. J., 40, 281-290, (1999).

[22] A. N. Tikhonov, A. A. Samarskii, “Equations of Mathematical Physics”, Pergamon: Oxford and New York, (1963).

[23] E. S. Şuhubi, “ Fonksiyonel Analiz’’ İTÜ Vakfı Yayınları, (2021).

[24] Y. Soykan, “ Fonksiyonel Analiz’’ Nobel Yayınları, (2016).

[25] Walter, J., “Reguler Eigenvalue Problems With Eigenvalue Parameter in The Boundary Conditions,’’ Math. Z., 133, 1973, 301-312.

[26] Oynar, Ş., “Bir Sturm-Liouville problem inin spektral analizi”, Ulusal tez merkezi, 2019

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirileri

1. S. Caliskan, H. Ozdemir, ‘‘Asymptotic Approximation Formulas of the Eigenfunctions and the Green Function of a Problem of Sturm-Liouville Type in Which the Potential Has Discontinuities at Two Interior Points,’’ 8th International Conference on Mathematıcal Advances and Applıcatıons, Yildiz Technical University, 2025