T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$\mathbb{Z}_3$-DERECELİ $\widetilde{GL}_q(2)$ KUANTUM GRUBUNUN GAUSS AYRIŞIMI

Öztürk SAVAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman

Doç. Dr. Salih ÇELİK

Haziran, 2023

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$\mathbb{Z}_3$-DERECELİ $\widetilde{GL}_q(2)$ KUANTUM GRUBUNUN GAUSS AYRIŞIMI

Öztürk SAVAŞ tarafından hazırlanan tez çalışması 22.06.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Salih ÇELİK
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Salih ÇELİK, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Ayşe PEKER, Üye
İstanbul Teknik Üniversitesi _____

Danışmanım Doç. Dr. Salih ÇELİK sorumluluğunda tarafımca hazırlanan

"$\mathbb{Z}_3$-Dereceli $\widetilde{GL}_q(2)$ Kuantum Grubunun Gauss Ayrışımı" başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Öztürk SAVAŞ

İmza

Aileme

ve

eşime

TEŞEKKÜR

Abraham Flexner ın dediği gibi “Bilim, problem çözme eyleminde, daha fazlasını yaratır.”

Bu çalışma esnasında engin bilgileri ile bana ışık tutan, bana bilimi sevdiren ve öğreten, ilerlediğim bu yolda benden hiçbir zaman yardımlarını esirgemeyen çok kıymetli saygıdeğer danışmanım Doç. Dr. Salih ÇELİK e teşekkür ederim.

Ayrıca çalışma aşamalarımda her zaman yanımda olan ve desteğini esirgemeyen eşime ve aileme teşekkürlerimi borç bilirim.

Öztürk SAVAŞ

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR **iv**

SİMGE LİSTESİ **vi**

ÖZET **vii**

ABSTRACT **ix**

1 GİRİŞ **11**

1.1 Literatür Özeti 11

1.2 Tezin Amacı 11

1.3 Hipotez 12

2 TEMEL KAVRAMLAR **13**

2.1 $\mathbb{Z}_3$-Dereceli Yapılar 13

3 $\mathbb{Z}_3$-DERECELİ $\widetilde{GL}_q(2)$ KUANTUM GRUBU **17**

4 $\mathbb{Z}_3$-DERECELİ $\widetilde{GL}_q(2)$ KUANTUM GRUBUN GAUSS AYRIŞIMI **20**

4.1 $\mathbb{Z}_3$-Dereceli $\widetilde{GL}^l(2)$ ve $\widetilde{GL}^u(2)$ Grupları 20

4.2 Gauss Ayrışımı 21

4.3 $\mathbb{Z}_3$-Dereceli $\widetilde{GL}^l_q(2)$ ve $\widetilde{GL}^u_q(2)$ Kuantum Grupları 22

4.4 $\mathbb{Z}_3$-Dereceli $\widetilde{GL}_q(2)$ Kuantum Grubu 26

5 SONUÇ VE ÖNERİLER **29**

KAYNAKÇA **30**

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR **31**

SİMGE LİSTESİ

Δ	$\mathbb{Z}_3$-dereceli $\mathcal{A}$ cebiri üzerindeki eş-çarpma tasviri
ϵ	$\mathbb{Z}_3$-dereceli $\mathcal{A}$ cebiri üzerindeki eş-birim tasviri
S	$\mathbb{Z}_3$-dereceli $\mathcal{A}$ cebiri üzerindeki eş-ters tasviri
$\widetilde{GL}_q(2)$	$\mathbb{Z}_3$-dereceli Kuantum Grubu
$\mathcal{D}_q$	$\mathbb{Z}_3$-dereceli Kuantum matrisinin determinantı
$\otimes$	Tensör Çarpım

ÖZET

$\mathbb{Z}_3$-Dereceli $\widetilde{GL}_q(2)$ Kuantum Grubunun Gauss Ayrışımı

Öztürk SAVAŞ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Salih ÇELİK

Lineer tasvirler, eğer tersi mevcut ise, tasvirlerin bileşkesi işlemine göre bir grup oluşturur. Diğer taraftan, her lineer tasvir bir matris temsiline sahiptir. Lineer tasvirlerin matris temsilleri ile elde edilen genel lineer grup $GL(n)$ ile gösterilir. Bu grup, iki şekilde deforme edilmektedir. İlki, Yang-Baxter bağıntısını sağlayan bir $n^2 \times n^2$-tipindeki R matrisini kullanmak; diğeri ise, $GL(n)$ grubuna ait bir $n \times n$ tipindeki T matrisini ilgili uzaylara etki ettirmek. Klasikte ve deforme durumda, $GL(n)$ grubuna ait bir T matrisi; T_L, T_D ve T_U, sırasıyla alt üçgensel, köşegen ve üst üçgensel matrisler olmak üzere $T = T_L T_D T_U$ şeklinde yazılabilir. Bu, Gauss ayrışımı olarak bilinmektedir. Literatürde bu durumun, $GL_q(n)$ kuantum grubuna ve $GL_q(m|n)$ kuantum süper grubuna ait bir matris için de geçerli olduğu gösterilmiştir.

Bu çalışmada, Gauss ayrışımının $\mathbb{Z}_3$- dereceli $\widetilde{GL}_q(2)$ kuantum grubu için de geçerli olduğu gösterilecektir. $\widetilde{GL}_q(2)$ kuantum grubunun Gauss ayrışımı yapılınca ortaya iki yeni $\mathbb{Z}_3$-dereceli kuantum alt grup çıkacak ve bu kuantum alt grupların özellikleri incelenecektir.

Çalışma, $\mathbb{Z}_3$- dereceli yapıların tanıtımı ile başlamaktadır. Daha sonra, $\mathbb{Z}_3$- dereceli $\widetilde{GL}_q(2)$ kuantum grubu tanıtılıp, bu grubun Gauss ayrışımı yapılacaktır: Eğer

$T \in \widetilde{GL}_q(2)$ ise; T_L, T_D ve T_U sırasıyla alt üçgensel, köşegen ve üst üçgensel matrisler olmak üzere $T = T_L T_D T_U$ şeklinde yazabiliriz. Devamında, $T_L T_D$ ve $T_D T_U$ çarpım matrisleri gözönüne alınacak ve böyle matrislerin birer $\mathbb{Z}_3$-dereceli kuantum grup oldukları gösterilecektir. Bunların matris elemanları dikkate alınarak, her iki kuantum alt grubun koordinat cebirlerinin birer $\mathbb{Z}_3$-dereceli Hopf cebiri yapısına sahip oldukları ispat edilecektir. Son olarak, $\widetilde{GL}_q(2)$ kuantum grubuna ait bir matrisin Gauss ayrışımındaki üç matrisin çarpımının da bir Hopf cebiri yapısını koruduğu görülecektir.

Anahtar Kelimeler: $\mathbb{Z}_3$-dereceli Hopf cebiri, $\mathbb{Z}_3$-dereceli kuantum grup, Gauss ayrışımı.

ABSTRACT

Gauss Decomposition of the $\mathbb{Z}_3$-graded Quantum Group $\widetilde{GL}_q(2)$

Öztürk SAVAŞ

Department of Mathematics

Master of Science Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Salih ÇELİK

The invertible linear transformations form a group according to the composition of the transformations. On the other hand, every linear transformation has a matrix representation. The general linear group obtained by the matrix representations of the linear transformations is denoted by $GL(n)$. This group is deformed in two ways. The first is to use an R-matrix with rank n^2, that satisfies the Yang-Baxter relation; the other is to acts an $n \times n$-type matrix T belonging to the group $GL(n)$ on the corresponding spaces. In the classical and deformed cases, a matrix T belonging to the group $GL(n)$ can be written as $T = T_L T_D T_U$, where T_L, T_D and T_U are a lower triangular, a diagonal and an upper triangular matrices, respectively. This is so-called the Gauss decomposition. In the literature, it has been shown that this case is also valid for a matrix belonging to the quantum group $GL_q(n)$ and the quantum supergroup $GL_q(m|n)$.

In this study, it will be shown that the Gauss decomposition is valid for the $\mathbb{Z}_3$-graded quantum group $\widetilde{GL}_q(2)$ as well. When the Gauss decomposition of a matrix in the quantum group $\widetilde{GL}_q(2)$ is performed, two new $\mathbb{Z}_3$-graded quantum subgroups will be examined.

The study begins with introduction of the $\mathbb{Z}_3$-graded structures. Then, the $\mathbb{Z}_3$-graded quantum group $\widetilde{GL}_q(2)$ will be introduced and Gauss decomposition of this group will be done: if $T \in \widetilde{GL}_q(2)$, we can write $T = T_L T_D T_U$, where the matrices T_L, T_D and T_U are lower triangular, diagonal and upper triangular, respectively. In the following, the product matrices $T_L T_D$ and $T_D T_U$ will be considered and it will be shown that such matrices are $\mathbb{Z}_3$-graded quantum groups. Considering the matrix elements of these matrices, it will be proved that the coordinate algebras of both quantum subgroups have a $\mathbb{Z}_3$-graded Hopf algebra structure. Finally, it has been seen that the product of three matrices in the Gauss decomposition of a matrix belonging to the quantum group $\widetilde{GL}_q(2)$ also admits a Hopf algebra structure.

Keywords: $\mathbb{Z}_3$-graded Hopf algebra, $\mathbb{Z}_3$-graded quantum group, Gauss decomposition.

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Kuantum grupları teorisi [11] sürekli gelişim gösteren bir bilim alanıdır. Teoriyi çevreleyen heyecan, hem teorik hem de uygulamalı matematik ve modern teorik fizik üzerindeki etkilerinden kaynaklanmaktadır. [14,15].

Kuantum gruplarının, kuantum süper gruplara ($\mathbb{Z}_2$-dereceli gruplara) doğal genişlemesi [16] da verilmiştir. Kuantum süper uzay, kuantum süper grubun lineer dönüşümlerle etki ettiği ve koordinatları bir değişmeli olmayan birleşmeli cebire ait bir süper uzaydır [16]. Her ne kadar, $\mathbb{Z}_2$-dereceli yapılar, $\mathbb{Z}_1$-dereceli (yani genel anlamda komutatif) yapıların doğal bir genişlemesi ise de, $\mathbb{Z}_3$-dereceli yapılar oldukça karmaşıktır. Bu konuda literatürde az da olsa bazı çalışmalar yapılmıştır

[1-8]. Literatürde $GL_q(n)$ kuantum grubuna ve $GL_q(m|n)$ kuantum süper grubuna ait bir matrisin Gauss ayrışımı yapılmış ve böyle matrislerin bazı özellikleri incelenmiştir. [9,10,12,13].

Bu çalışmada, Gauss ayrışımının $\mathbb{Z}_3$-dereceli $\widetilde{GL}_q(2)$ kuantum grubu için de geçerli olduğu gösterilecektir.

1.2 Tezin Amacı

$\mathbb{Z}_3$-dereceli $\widetilde{GL}_q(2)$ kuantum grubu için Gauss ayrışımının geçerli olduğunu göstermek ve bir $T \in \widetilde{GL}_q(2)$ matrisini alt üçgensel, köşegen ve üst üçgensel üç matrisin çarpımı olarak yazdıktan sonra, çarpımdaki matrisleri ikişerli ve üçlü olarak düşünüp, böyle matrislerin birer $\mathbb{Z}_3$-dereceli quantum grup oluşturduklarını ve dolayısıyla, koordinat cebirlerinin Hopf cebiri yapısına sahip olduğunu göstermektir.

1.3 Hipotez

$\mathbb{Z}_3$-dereceli $\widetilde{GL}_q(2)$ kuantum grubundaki bir matrisin matris elemanları, belli q-komutasyon bağıntılarını sağlar. Bu kuantum grubun koordinat cebiri, bir $\mathbb{Z}_3$-dereceli Hopf cebiridir. Eğer bir $T \in \widetilde{GL}_q(2)$ matrisi $T = T_L T_D T_U$ şeklinde yazılırsa, çarpımdaki her bir matrisin matris elemanlarının da belli q-komutasyon bağıntılarını sağlaması gerekir. Üstelik, Hopf cebirin ko-tasvirlerinin T nin matris elemanlarına etkileri kullanılarak, ko-tasvirlerin çarpımdaki her bir matrisin matris elemanlarına etkisi bulunabilir.

2
TEMEL KAVRAMLAR

2.1 $\mathbb{Z}_3$-Dereceli Yapılar

Bu başlıkta, $\mathbb{Z}_3$-dereceli yapılarla ilgili bazı temel bilgiler verilmiştir.

2.1.1 $\mathbb{Z}_3$-Dereceli Cebirler

$\mathbb{Z}_3$-dereceli cebir teorisi, $\mathbb{Z}_3$-dereceli vektör uzayı kavramının tanımıyla başlar.

Tanım 2.1 $V, \mathcal{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve V_0, V_1 ve V_2, V nin $V = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$ olacak şekilde üç alt uzayı olsun. Bu takdirde, V ye bir $\mathbb{Z}_3$-dereceli vektör uzayı denir. V nin elemanlarına homojen elemanlar denir ve homojen elemanların derecesi $\rho(\vec{v})$ ile gösterilir.

Buna göre, $i \in \mathbb{Z}_3$ için $v \in V_i$ iken

$$\rho(\vec{v}) = \begin{cases} 0\,, & \vec{v} \in V_0 \\ 1\,, & \vec{v} \in V_1 \\ 2\,, & \vec{v} \in V_2 \end{cases}$$

yazarız.

Tanım 2.2 U ve V, iki $\mathbb{Z}_3$-dereceli vektör uzayı olmak üzere $F: U \longrightarrow V$, bir lineer tasvir olsun. Eğer $\forall v \in U$ için

$$\rho\big(F(v)\big) = \rho(F) + \rho(v) \quad (mod\ 3)$$

eşitliği sağlanıyorsa, F ye $\mathbb{Z}_3$-dereceli vektör uzay homomorfizmi adı verilir.

Tanım 2.3 $\mathcal{A}$, $\mathcal{K}$ cismi üzerinde bir cebir olsun. Eğer $\mathcal{A}$, $\forall i, j = 0,1,2$ için $\mathcal{A}_i . \mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{i+j}$ olacak şekildeki $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ iki-lineer tasviri ile $\mathcal{K}$ cismi üzerinde bir $\mathbb{Z}_3$-dereceli vektör uzayı ise, $\mathcal{A}$ ya bir $\mathbb{Z}_3$-dereceli cebir denir.

Tanım 2.4 $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$, birer $\mathbb{Z}_3$-dereceli cebir ve $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, belirli dereceli bir tasvir olsun. Eğer F, bir $\mathbb{Z}_3$-dereceli vektör uzay homomorfizmi (veya q-izdüşümlü homomorfizmi) ve $q^3 = 1$ olmak üzere $\forall x, y \in \mathcal{A}$ için

$$F(xy) = q^{\rho(x)\rho(F(y))} F(x) F(y)$$

özelliğine sahip ise, F ye bir $\mathbb{Z}_3$-dereceli cebir homomorfizmi denir.

Tanım 2.5 $\mathcal{A}$, bir $\mathbb{Z}_3$-dereceli cebir ve $L: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ tasviri, $\mathbb{Z}_3$-dereceli vektör uzay homomorfizmi olsun. Eğer $\forall a, b \in \mathcal{A}$ için, $q^3 = 1$ olmak üzere, $\mathbb{Z}_3$-dereceli Liebniz Kuralı sağlanıyorsa yani

$$L(ab) = L(a)b + q^{\rho(L)\rho(a)} aL(b)$$

ise, L ye bir $\mathbb{Z}_3$-dereceli diferansiyel denir.

2.1.2 $\mathbb{Z}_3$-Dereceli Cebirlerin Modülleri

Genel bir cebirin tersinir elemanları olması gerekmediğinden, modüllerin her zaman tabanları olması gerekmez. $\mathbb{Z}_3$-dereceli durumda, ekstra bir tutarlı derece gereksinimi vardır.

Tanım 2.6 $\mathcal{A}$, $\mathbb{Z}_3$-dereceli bir cebir ve M, $\mathbb{Z}_3$-dereceli bir vektör uzayı olsun.

Eğer $\forall a, b \in \mathcal{A}$ ve $\forall m \in M$ için,

$$\rho(am) = \rho(a) + \rho(m) \text{ ve } a(bm) = (ab)m$$

olacak şekilde bir

$$\mathcal{A} \times M \longrightarrow M\,, \quad (a, m) \mapsto am$$

Lineer tasviri mevcut ise, M ye bir sol $\mathbb{Z}_3$-dereceli $\mathcal{A}$ modülü denir.

M, bir $\mathbb{Z}_3$-dereceli $\mathcal{A}$ cebiri üzerindeki bir sol $\mathbb{Z}_3$-dereceli $\mathcal{A}$ modülü olsun. Eğer M, $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{k+l}, e_{k+l+1}, \dots, e_{k+l+n}\}$ olacak şekilde bir homojen tabana sahipse, serbest olduğu söylenir. Burada, $e_1, \dots, e_k$ M_0 ın, $e_{k+1}, \dots, e_{k+l}$ M_1 in ve $e_{k+l+1}, \dots, e_{k+l+n}$ M_2 nin elemanlarıdır. Dolayısıyla, $\forall m \in M$ elemanı

$$m = \sum_i^{k+l+n} a^i e_i\,, \quad a^i \in \mathcal{A}$$

olacak şekilde tek bir şekilde ifade edilebilir.

$\mathbb{Z}_3$-dereceli $\mathcal{A}$ cebiri için sol ve sağ $\mathcal{A}$ modülü arasında bir farklılık vardır.

Bir sol modüle,

$$V \times \mathcal{A} \longrightarrow V, \quad (v, a) \mapsto q^{\rho(v)\rho(a)} av$$

tasvirini tanımlayarak sağ modül yapısı da verilebilir.

$\mathcal{A}$ nın $\mathbb{Z}_3$-dereceli diferansiyeller kümesi, $\mathbb{Z}_3$-dereceli $\mathcal{A}$ modülünün bir örneğidir.

2.1.3 $\mathbb{Z}_3$-Dereceli Hopf Cebiri

Eğer $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$, $\mathbb{Z}_3$-dereceli iki cebir ise, onların $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ şeklindeki $\mathbb{Z}_3$-dereceli tensör çarpımı, [15] de belirlenen çarpım kuralı ile bir $\mathbb{Z}_3$-dereceli cebirdir:

Tanım 2.7 $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$, $\mathbb{Z}_3$-dereceli iki cebir olsun. Bu takdirde $\mathbb{Z}_3$-dereceli $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ cebirindeki çarpım kuralı

$$(a_1\otimes b_1)(a_2\otimes b_2) = q^{\rho(b_1)\rho(a_2)}a_1a_2\otimes b_1b_2$$

şeklinde tanımlanır. Burada a_i'ler ve b_i'ler sırasıyla $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ cebirlerinin homojen elemanlarıdır.[15]

Tanım 2.8 Bir $\mathbb{Z}_3$-dereceli Hopf cebiri, $\Delta:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ cebir homomorfizmi (ko-çarpma), $\varepsilon:\mathcal{A}\longrightarrow\kappa$ cebir homomorfizmi (ko-birim) ve $S:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$ cebir anti-homomorfizmi (ko-ters) ile κ cismi üzerinde $\mathbb{Z}_3$-dereceli $\mathcal{A}$ vektör uzayıdır,öyle ki

$\Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1}\otimes\mathbf{1}, \varepsilon(\mathbf{1}) = 1$ ve $S(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ ile

$(\Delta\otimes\mathrm{id})\circ\Delta = (\mathrm{id}\otimes\Delta)\circ\Delta,\ \ m\circ(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\circ\Delta = \mathrm{id} = m\circ(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\circ\Delta,$

$m\circ(S\otimes\mathrm{id})\circ\Delta = \eta\circ\varepsilon = m\circ(\mathrm{id}\otimes S)\circ\Delta$

özdeşlikleri gerçeklenir.

Burada $m:\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$ çarpım, $\mathrm{id}:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$ birim, $\eta:\kappa\longrightarrow\mathcal{A}$ tasviridir.

$\mathbb{Z}_3$-dereceli bir $\mathcal{A}$ Hopf cebirinin herhangi bir elemanı, jeneratörler üzerine bir çarpım olarak ifade edilir. S, jeneratörlerin antipodu cinsinden

$$S(ab) = q^{\rho(a)\rho(b)}S(b)S(a), \qquad \forall a,b\in\mathcal{A}$$

şeklinde hesaplanır. Burada q, birimin kübik köküdür.

2.1.4 $\mathbb{Z}_3$-Dereceli Matrisler

Eğer $\mathcal{A}$, $\mathbb{Z}_3$-dereceli bir cebir ise, girdileri $\mathcal{A}$ dan alınan $\mathbb{Z}_3$-dereceli matrisler özel tabanlar cinsinden serbest $\mathbb{Z}_3$-dereceli $\mathcal{A}$ modüllerinin homomorfizmlerini tanımlar.

Tanım 2.9 $\mathbb{Z}_3$-dereceli bir $\mathcal{A}$ cebiri üzerindeki $n\ x\ n$ tipindeki bir T matrisi, matris elemanları $\mathcal{A}$'dan alınan ve $T = T_0 + T_1 + T_2$ formunda olan bir $\mathbb{Z}_3$-dereceli matristir. Burada T_0, T_1 ve T_2 nin dereceleri sırasıyla 0,1 ve 2 dir.

Örnek 2.1 Eğer $\mathcal{A}$, $\mathbb{Z}_3$-dereceli bir cebir ise, bir $T \in \widetilde{M}(2)$ matrisi; a, β, γ ve d, $\mathcal{A}$'nın jeneratörleri olmak üzere;

$$T = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}}_{T_0} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}}_{T_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{T_2}$$

şeklinde yazılabilir.

3
$\mathbb{Z}_3$-DERECELİ $\widetilde{\mathrm{GL}}_q(2)$ KUANTUM GRUBU

Bu bölümde, $\mathbb{Z}_3$-dereceli $\widetilde{\mathrm{GL}}_q(2)$ kuantum grubu tanıtılacaktır. İlgili bilgiler [5] den alınmıştır.

Yukarıdaki Örnek 2.1 de açıklandığı üzere, eğer $\mathcal{A}$, bir $\mathbb{Z}_3$-dereceli cebir ise, bir $T \in \widetilde{M}(2)$ matrisi; a, β, γ ve d, $\mathcal{A}$'nın jeneratörleri olmak üzere

$$T = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Burada a ve d nin derecesinin 0, γ nın derecesinin 1 ve β nın derecesinin 2 olduğu kabul edilmiştir.

Tanım 3.1 [5] $\mathcal{O}\left(\widetilde{M}_q(2)\right)$, üreteçleri a, β, γ, d olan kompleks birleşmeli bir cebir olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} a\beta &= \beta a, \qquad a\gamma = q\gamma a, \quad \beta^3 = 0 = \gamma^3 \\ \beta\gamma &= \gamma\beta, \qquad d\gamma = q^2\gamma d \\ \beta d &= d\beta, \qquad ad = da + (q-1)\beta\gamma \end{aligned} \tag{3.1}$$

bağıntıları sağlanır. Burada q, birimin kübik köküdür ve a ve d nin dereceleri 0, γ ve β nın dereceleri sırasıyla 1 ve 2 kabul edilir.

Örnek 3.1 Eğer $\mathcal{O}\left(\widetilde{M}_q(2)\right)$ cebirinin jeneratörlerini, lineer tasvirler olarak düşünürsek bunların matris temsillerini bulabiliriz. Gerçekten, $\mathbb{Z}_3$-dereceli

$\rho: \mathcal{O}\left(\widetilde{M}_q(2)\right) \longrightarrow M(4, \mathbb{C})$ temsili mevcuttur ve jeneratörlere etkisi

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \rho(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & q^2-q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^2-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-q^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & q^2(q-1)^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

dir. ρ tasviri (3.1) deki bağıntıları sağlar. Burada q birimin kübik köküdür.

İspat. Burada, (3.1) deki son bağıntının gerçekleştiğini göstereceğiz. Benzer şekilde diğer bağıntıların da sağlandığı gösterilebilir. $\mathbb{Z}_3$-dereceli bir cebir homomorfizmi olan ρ,

$$\rho_{ij}(fg) = q^{p(f)p(\rho_{ij}(g))} \sum_{k=1}^{4} \rho_{ik}(f)\rho_{kj}(g), \qquad \forall f, g \in \mathcal{O}\left(\widetilde{M}_q(2)\right)$$

özelliğine sahip olduğundan,

her bir i için $\rho_{ii}(ad) = q = \rho_{ii}(da)$ ve $\rho_{14}(ad) = (q-1)^2 = q\rho(da)$ ve diğer i'ler ve j'ler için $\rho_{ij}(ad) = 0 = \rho_{ij}(da)$ yazılabilir. Benzer şekilde,

$\rho_{14}(\beta\gamma) = q^2\rho_{12}(\beta)\rho_{24}(\gamma) = q^2(q^2-q)(1-q^2)$ ve diğer i'ler ve j'ler için $\rho_{ij}(\beta\gamma) = 0$ olduğu görülebilir. Buradan,

$\rho_{14}(ad - da - (q-1)\beta\gamma) = (1-q^2)(q-1)^2 - (q-1)^2(1-q^2) = 0,$

$\rho_{ij}(ad - da - (q-1)\beta\gamma) = q - q = 0$

diğer i'ler ve j'ler için,

$\rho_{ij}(ad - da - (q-1)\beta\gamma) = 0\,, \qquad \forall\, i, j$

elde ederiz.

Örnek 3.2 Kabul edelim ki q, birimin kübik kökü olmak üzere

$P \in \{q, q^2\}$ ve $Q \in \{1, q^2\}$ dir. O halde

$$L(a) = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & qP^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}, \qquad L(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & q(P-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^2(Q^{-1}-Q) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q^2P - P^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & P-1 \\ 0 & Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & qQ^{-1} \end{pmatrix}$$

girdileri $\mathbb{C}$'den alınan $\widetilde{M}_q(2)$'nin bir temsili olarak (3.1) deki bağıntıları sağlar.

Teorem 3.1 [5]

$$\Delta: \mathcal{O}\left(\widetilde{M}_q(2)\right) \longrightarrow \mathcal{O}\left(\widetilde{M}_q(2)\right) \otimes \mathcal{O}\left(\widetilde{M}_q(2)\right), \qquad \Delta\left(t_{ij}\right) = \sum_{k=1}^{2} t_{ik} \otimes t_{kj},$$

$$\epsilon: \mathcal{O}\left(\widetilde{M}_q(2)\right) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \epsilon\left(t_{ij}\right) = \delta_{ij}$$

yapıları ile $\mathcal{O}\left(\widetilde{M}_q(2)\right)$ cebiri üzerinde bir ikili cebir yapısı vardır. Burada

$t_{11} = a, t_{12} = \beta, t_{13} = \gamma$ ve $t_{14} = d$ dir. Ek olarak, $\Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$ ve $\epsilon(\mathbf{1}) = 1$ dir.

$\mathbb{Z}_\mathbf{3}$-dereceli kuantum determinant

$$\mathcal{D}_q := ad - q\beta\gamma = da - \beta\gamma.$$

şeklinde tanımlanmıştır [5].

Bu $\mathbb{Z}_\mathbf{3}$-dereceli kuantum determinant, $\mathcal{O}\left(\widetilde{M}_q(2)\right)$ cebirinin merkezine ait bir grup-like elemanıdır.

$\mathcal{O}\left(\widetilde{M}_q(2)\right)$ cebirine ait $\mathcal{D}_q$ kuantum determinantını kullanarak, $\mathcal{O}\left(\widetilde{M}_q(2)\right)$ cebirine $\mathcal{D}_q^{-1}$ tersini ekleyerek bir Hopf cebiri tanımlayabiliriz. $\mathcal{O}(\widetilde{GL}_q(2))$, $\mathcal{O}(\widetilde{M}_q(2))$ cebirinin $t\mathcal{D}_q - 1$ elemanı ile üretilen iki taraflı ideale bölümü olsun. Kısaca,

$$\mathcal{O}\left(\widetilde{GL}_q(2)\right) := \mathcal{O}(\widetilde{M}_q(2))[t]/\langle t\mathcal{D}_q - 1\rangle$$

yazılabilir. Bu takdirde $\mathcal{O}\left(\widetilde{GL}_q(2)\right)$, bir iki-cebirdir.

Teorem 3.2. [5] $\mathcal{O}\left(\widetilde{GL}_q(2)\right)$ iki-cebiri, bir $\mathbb{Z}_3$-dereceli Hopf cebiridir.

$\mathcal{O}\left(\widetilde{GL}_q(2)\right)$'nin antipodu S şu şekilde tanımlanır:

$$S(a) = d\mathcal{D}_q^{-1}, \quad S(\beta) = -\beta\mathcal{D}_q^{-1}, \quad S(\gamma) = -q\gamma\mathcal{D}_q^{-1}, \quad S(d) = a\mathcal{D}_q^{-1}.$$

Ek olarak $S(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ dir.

Tanım 3.3. $\mathbb{Z}_3$-dereceli $\mathcal{O}\left(\widetilde{GL}_q(2)\right)$ Hopf cebiri, $\mathbb{Z}_3$-dereceli $\widetilde{GL}_q(2)$ kuantum grubunun koordinat cebiri olarak adlandırılır.

$\mathcal{O}\left(\widetilde{GL}_q(2)\right)$ cebirinin üreteçlerinin küpleri, $\mathcal{O}\left(\widetilde{GL}_q(2)\right)$'nin merkezi elemanlarıdır.

4
$\mathbb{Z}_3$-DERECELİ $\widetilde{\mathbf{GL}}_{\mathbf{q}}(2)$ KUANTUM GRUBUN GAUSS AYRIŞIMI

Bu bölümde, bir $T \in \widetilde{GL}_q(2)$ matrisinin Gauss ayrışımını ele alacağız ve ayrışımdaki üç matrisi ikişerli düşünerek, bu matrislerin matris elemanları ile oluşturulmuş iki adet $\mathbb{Z}_3$-dereceli cebirin birer $\mathbb{Z}_3$-dereceli Hopf cebiri olduğunu göstereceğiz.

A ve B, $\mathbb{Z}_3$-dereceli bir cebire ait olan 0. dereceden iki jeneratör olsun. $\widetilde{M}^d(2)$ ile $\mathbb{Z}_3$-dereceli $k[A,B]$ polinom cebirini gösterelim. $\widetilde{M}^d(2)$ nin bir (A,B) noktasını, matris formunda $T_D = (A_{ij})$ şeklinde bir köşegen matris yani $A_{ij} = \delta_{ij}A_j$ olarak yazalım. Ayrıca A ve B jeneratörlerinin terslerinin mevcut olduğunu kabul edelim (veya A^{-1} ve B^{-1} jeneratörlerini de, cebirin jeneratörler listesine ekleyelim).

4.1 $\mathbb{Z}_3$-Dereceli $\widetilde{GL}^l(2)$ ve $\widetilde{GL}^u(2)$ Grupları

A ve B jeneratörlerinin derecesi 0 ve ξ nin derecesi 1 olmak üzere, A, B ve ξ bir $\mathbb{Z}_3$-dereceli cebirin birer elemanı olsun. $\widetilde{M}^l(2)$, $\mathbb{Z}_3$-dereceli $k[A,B,\xi]$ polinom cebiri olarak tanımlansın. Ayrıca T_L, bir alt üçgensel ve T_D, bir köşegen matris olmak üzere

$$T^l = T_L T_D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ \xi A & B \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

yazalım. Kolayca gösterilebileceği üzere böyle matrisler, 2-ranklı bir $\mathbb{Z}_3$-dereceli grubun elemanları gibidir. Diğer bir ifadeyle, bu şekildeki çarpım matrisleri de bir $\mathbb{Z}_3$-dereceli grup oluşturur. Bu $\mathbb{Z}_3$-dereceli grubu $\widetilde{GL}^l(2)$ ile göstereceğiz.

Benzer düşünceyle, η nin derecesi 2 olmak üzere, A, B ve η bir $\mathbb{Z}_3$-dereceli cebirin birer elemanı olsun. $\widetilde{M}^u(2)$, $\mathbb{Z}_3$-dereceli $k[A,B,\eta]$ polinom cebiri olarak tanımlansın. Ayrıca T_U, bir üst üçgensel olmak üzere

$$T^l = T_D T_U = \begin{pmatrix} A & A\eta \\ 0 & B \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

yazalım. Kolayca gösterilebileceği üzere böyle matrisler, 2-ranklı bir $\mathbb{Z}_3$-dereceli grubun elemanları gibidir. Diğer bir ifadeyle, bu şekildeki çarpım matrisleri de bir $\mathbb{Z}_3$-dereceli grup oluşturur. Bu $\mathbb{Z}_3$-dereceli grubu $\widetilde{GL}^u(2)$ ile göstereceğiz.

4.2 Gauss Ayrışımı

nxn tipindeki bir matris; T_L, bir alt üçgensel, T_D, bir köşegen ve T_U, bir üst üçgensel matris olmak üzere $T = T_L T_D T_U$ şeklinde yazılabilir. Bu durum, normal ve süper ($\mathbb{Z}_2$-dereceli) matrisler için geçerlidir. Bu çalışmada göstereceğiz ki aynı durum, $\mathbb{Z}_3$-dereceli matrisler için de geçerlidir.

Şimdi $T \in \widetilde{GL}(2)$ matrisini,

$$T_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix},\ T_D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},\ T_U = \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$T = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix} = T_L T_D T_U \tag{4.3}$$

şeklinde yazalım. Bu takdirde anlıyoruz ki, gerçekten ξ nin derecesi 1 ve η nın derecesi 2 dir.

Yukarıda (4.3) ile verilen Gauss ayrışımı, $\mathcal{O}\left(\widetilde{GL}_q(2)\right)$ cebirinin orjinal jeneratörleri tarafından sağlanan (3.1) bağıntılarından daha basit komutasyon kurallarına sahip olan "yeni" jeneratörler kümesini verir:

Teorem 4.1 Eğer $T^l = T_L T_D$ ve $T^u = T_D T_u$ matrislerinin matris elemanları için aşağıdaki komutasyon bağıntıları sağlanırsa, $T \in GL_q(2)$ matrisinin matris elemanları (3.1) bağıntılarını sağlar:

(i) T_D matrisinin matris elemanları arasında sağlanan komutasyon bağıntısı

$$AB = BA$$

şeklindedir.

(ii) T^l matrisinin matris elemanları arasında sağlanan komutasyon bağıntıları

$$A\xi = q\xi A, \quad B\xi = q^2\xi B, \quad \xi^3 = 0$$

şeklindedir.

(iii) T^u matrisinin matris elemanları arasında sağlanan komutasyon bağıntıları

$$A\eta = \eta A, \quad B\eta = \eta B, \quad \eta^3 = 0$$

şeklindedir.

(iv) Karışık bağıntı

$$\eta\xi = q^2\xi\eta$$

şeklindedir.

Not 1 T^l matrisinin matris elemanları tarafından sağlanan (ii) deki komutasyon bağıntıları, deforme olmuş $\mathbb{Z}_3$-dereceli bir cebir tanımlar. Bu cebiri $k_q[A, B, \xi]$ ile gösterelim. Benzer şeyleri T^u matrisi için de söyleriz. Bu iki gerçek, aşağıda iki yeni $\mathbb{Z}_3$-dereceli Hopf cebirinin ortaya çıkmasına sebep olacaktır.

4.3 $\mathbb{Z}_3$-Dereceli $\widetilde{GL}_q^l(2)$ ve $\widetilde{GL}_q^u(2)$ Kuantum Grupları

Bu kısımda, elde ettiğimiz yeni cebirlerin özelliklerini inceleyeceğiz.

Teorem 4.2 $\mathbb{Z}_3$-dereceli $\mathcal{O}(\widetilde{GL}_q^l(2))$ cebiri bir $\mathbb{Z}_3$-dereceli Hopf cebiridir.

İspat. $\Delta: \mathcal{O}(\widetilde{GL}_q^l(2)) \longrightarrow \mathcal{O}(\widetilde{GL}_q^l(2)) \otimes \mathcal{O}(\widetilde{GL}_q^l(2))$ ko-çarpmasının,

T^l matrisinin matris elemanlarına etkisi aşağıdaki gibidir:

$\Delta(A) = A \otimes A, \quad \Delta(B) = B \otimes B, \quad \Delta(\xi) = \xi \otimes \mathbf{1} + BA^{-1} \otimes \xi.$

$\epsilon: \mathcal{O}(\widetilde{GL}_q^l(2)) \longrightarrow \mathbb{C}$ ko-biriminin, T^l nin matris elemanlarına etkisi

$$\epsilon(A) = 1, \quad \epsilon(B) = 1, \quad \epsilon(\xi) = 0$$

şeklindedir.

$S: \mathcal{O}(\widetilde{GL}_q^l(2)) \longrightarrow \mathcal{O}(\widetilde{GL}_{q^2}^l(2))$ ko-tersinin, T^l nin matris elemanlarına etkisi aşağıdaki gibidir:

$$S(A) = A^{-1}, \quad S(B) = B^{-1}, \quad S(\xi) = -B^{-1}A\xi.$$

Dolayısıyla teoremin ispatını tamamlamak için Tanım 2.8. deki özdeşliklerin sağlandığını ve Teorem 4.1 deki bağıntıların Δ, ϵ ve S tasvirleri altında korunduğunu göstermeliyiz.

Bir örnek olarak, ξ elemanını gözönüne alalım ve

$(\Delta\otimes\mathrm{id})\Delta(\xi) = (\mathrm{id}\otimes\Delta)\Delta(\xi)$,

$m(\epsilon\otimes\mathrm{id})\Delta(\xi) = \mathrm{id}(\xi) = m(\mathrm{id}\otimes\epsilon)\Delta(\xi)$ ve

$m(S\otimes\mathrm{id})\Delta(\xi) = \epsilon(\xi) = m(\mathrm{id}\otimes S)\Delta(\xi)$

olduklarını gösterelim:

$$(\Delta\otimes\mathrm{id})\Delta(\xi) = (\Delta\otimes\mathrm{id})(\xi\otimes\mathbf{1} + BA^{-1}\otimes\xi)$$

$$= \Delta(\xi)\otimes\mathrm{id}(\mathbf{1}) + \Delta(BA^{-1})\otimes\mathrm{id}(\xi)$$

$$= (\xi\otimes\mathbf{1} + BA^{-1}\otimes\xi)\otimes\mathbf{1} + (B\otimes B)(A^{-1}\otimes A^{-1})\otimes\xi$$

$$= (\xi\otimes\mathbf{1} + BA^{-1}\otimes\xi)\otimes\mathbf{1} + (BA^{-1}\otimes BA^{-1})\otimes\xi$$

$$= (\xi\otimes\mathbf{1})\otimes\mathbf{1} + (BA^{-1}\otimes\xi)\otimes\mathbf{1} + (BA^{-1}\otimes BA^{-1})\otimes\xi$$

$$= \xi\otimes(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}) + BA^{-1}\otimes(\xi\otimes\mathbf{1}) + BA^{-1}\otimes(BA^{-1}\otimes\xi)$$

$$= \xi\otimes(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}) + BA^{-1}\otimes(\xi\otimes\mathbf{1} + BA^{-1}\otimes\xi)$$

$$= \mathrm{id}(\xi)\otimes\Delta(\mathbf{1}) + \mathrm{id}(BA^{-1})\otimes\Delta(\xi)$$

$$= (\mathrm{id}\otimes\Delta)(\xi\otimes\mathbf{1} + BA^{-1}\otimes\xi)$$

$$= (\mathrm{id}\otimes\Delta)\Delta(\xi)$$

$$m(\epsilon\otimes\mathrm{id})\Delta(\xi) = m(\epsilon\otimes\mathrm{id})(\xi\otimes\mathbf{1} + BA^{-1}\otimes\xi)$$

$$= m[\epsilon(\xi)\otimes\mathrm{id}(\mathbf{1}) + \epsilon(BA^{-1})\otimes\mathrm{id}(\xi)]$$

$$= m(0\otimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes\xi) = \xi = \mathrm{id}(\xi)$$

$$m(\mathrm{id}\otimes\epsilon)\circ\Delta(\xi) = m(\mathrm{id}\otimes\epsilon)(\xi\otimes\mathbf{1} + BA^{-1}\otimes\xi)$$

$$= m[\mathrm{id}(\xi)\otimes\epsilon(\mathbf{1}) + \mathrm{id}(BA^{-1})\otimes\epsilon(\xi)]$$

$$= m(\xi\otimes\mathbf{1} + BA^{-1}\otimes 0) = \xi = \mathrm{id}(\xi)$$

$$m(S\otimes id)\Delta(\xi) = m(S\otimes\mathrm{id})(\xi\otimes\mathbf{1} + BA^{-1}\otimes\xi)$$

$$= m\big(S(\xi)\otimes\mathrm{id}(\mathbf{1}) + S(BA^{-1})\otimes\mathrm{id}(\xi)\big)$$

$$= m\big(S(\xi)\otimes\mathrm{id}(\mathbf{1}) + S(A^{-1})S(B)\otimes\mathrm{id}(\xi)\big)$$

$$= m(-B^{-1}A\xi\otimes\mathbf{1} + AB^{-1}\otimes\xi)$$

$$= -B^{-1}A\xi + AB^{-1}\xi = 0 = \epsilon(\xi)$$

$$m(\mathrm{id}\otimes S)\Delta(\xi) = m(\mathrm{id}\otimes S)(\xi\otimes\mathbf{1} + BA^{-1}\otimes\xi)$$

$$= m\big(\mathrm{id}(\xi)\otimes S(\mathbf{1}) + \mathrm{id}(BA^{-1})\otimes S(\xi)\big)$$

$$= m(\xi\otimes\mathbf{1} + BA^{-1}\otimes - B^{-1}A\xi)$$

$$= \xi - \xi = 0 = \epsilon(\xi).$$

Benzer şekilde, A ve B jeneratörleri için de aynı aksiyomların sağlandığı gösterilir. Δ ve ϵ tasvirleri birer cebir homomorfizmi, S tasviri bir cebir anti-homomorfizmidir, yani Δ, ϵ ve S tasvirleri Teorem 4.1 deki bağıntılarını korur.

Örneğin,

$$\Delta(A\xi - q\xi A) = \Delta(A)\Delta(\xi) - q\Delta(\xi)\Delta(A)$$

$$= (A\otimes A)(\xi\otimes\mathbf{1} + BA^{-1}\otimes\xi) - q(\xi\otimes\mathbf{1} + BA^{-1}\otimes\xi)(A\otimes A)$$

$$= A\xi\otimes A + B\otimes A\xi - q\xi A\otimes A - qB\otimes\xi A$$

$$= A\xi\otimes A + B\otimes A\xi - A\xi\otimes A - B\otimes\xi A = 0.$$

$$\epsilon(A\xi - q\xi A) = \epsilon(A)\epsilon(\xi) - q\epsilon(\xi)\epsilon(A) = 1.0 - q.0.1 = 0.$$

$$S(A\xi - q\xi A) = S(\xi)S(A) - qS(A)S(\xi)$$

$$= -B^{-1}A\xi A^{-1} - qA^{-1}(-B^{-1}A\xi)$$

$$= -qB^{-1}\xi + qB^{-1}\xi = 0.$$

Aynı şekilde, Teorem 4.1. deki diğer bağıntıların da Δ, ϵ ve S tasvirleri altında korunduğu gösterilir.

Teorem 4.3. $\mathbb{Z}_3$-dereceli $\mathcal{O}(\widetilde{GL}_q^u(2))$ cebiri bir $\mathbb{Z}_3$-dereceli Hopf cebiridir.

İspat. $\Delta: \mathcal{O}(\widetilde{GL}_q^u(2)) \longrightarrow \mathcal{O}(\widetilde{GL}_q^u(2))\otimes\mathcal{O}(\widetilde{GL}_q^u(2))$ ko-çarpmasının, T^u nun matris elemanlarına etkisi aşağıdaki gibidir:

$$\Delta(A) = A\otimes A, \quad \Delta(B) = B\otimes B, \quad \Delta(\eta) = \mathbf{1}\otimes\eta + \eta\otimes BA^{-1}.$$

$\epsilon: \mathcal{O}(\widetilde{GL}_q^u(2)) \longrightarrow \mathbb{C}$ ko-biriminin, T^u nun matris elemanlarına etkisi

$$\epsilon(A) = 1, \quad \epsilon(B) = 1, \quad \epsilon(\eta) = 0$$

şeklindedir.

$S: \mathcal{O}(\widetilde{GL}_q^u(2)) \longrightarrow \mathcal{O}(\widetilde{GL}_{q^{-1}}^u(2))$ ko-tersinin, T^u nun matris elemanlarına etkisi aşağıdaki gibidir:

$$S(A) = A^{-1}, \quad S(B) = B^{-1}, \quad S(\eta) = -B^{-1}A\eta.$$

Dolayısıyla teoremin ispatını tamamlamak için Tanım 2.8. deki özdeşliklerin sağlandığını ve Teorem 4.1. deki bağıntıların Δ, ϵ ve S tasvirleri altında korunduğunu göstermeliyiz.

Bir örnek olarak, η elemanını gözönüne alalım ve

$(\Delta\otimes\mathrm{id})\Delta(\eta) = (\mathrm{id}\otimes\Delta)\Delta(\eta)$,

$m(\epsilon\otimes\mathrm{id})\Delta(\eta) = \mathrm{id}(\eta) = m(\mathrm{id}\otimes\epsilon)\Delta(\eta)$ ve

$m(S\otimes\mathrm{id})\Delta(\eta) = \epsilon(\eta) = m(\mathrm{id}\otimes S)\Delta(\eta)$ olduğunu gösterelim:

$$(\Delta\otimes\mathrm{id})\Delta(\eta) = (\Delta\otimes\mathrm{id})(\mathbf{1}\otimes\eta + \eta\otimes BA^{-1})$$
$$= \Delta(\mathbf{1}) \otimes \mathrm{id}(\eta) + \Delta(\eta)\otimes\mathrm{id}(BA^{-1})$$
$$= (\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}) \otimes \eta + (\mathbf{1}\otimes\eta + \eta\otimes BA^{-1})\otimes BA^{-1}$$
$$= \mathbf{1}\otimes(\mathbf{1} \otimes \eta + \eta \otimes BA^{-1}) + \eta\otimes(BA^{-1}\otimes BA^{-1})$$
$$= \mathrm{id}(\mathbf{1})\otimes\Delta(\eta) + \mathrm{id}(\eta)\otimes\Delta(BA^{-1})$$
$$= (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\mathbf{1}\otimes\eta + \eta\otimes BA^{-1})$$
$$= (\mathrm{id}\otimes\Delta)\Delta(\eta)$$

$$m(\epsilon\otimes\mathrm{id})\Delta(\eta) = m(\epsilon\otimes\mathrm{id})(\mathbf{1}\otimes\eta + \eta\otimes BA^{-1})$$
$$= m(\epsilon(\mathbf{1}) \otimes \mathrm{id}(\eta) + \epsilon(\eta) \otimes \mathrm{id}(BA^{-1})$$
$$= 1.\eta + 0.BA^{-1} = \eta = \mathrm{id}(\eta)$$

$$m(\mathrm{id}\otimes\epsilon)\Delta(\eta) = m(\mathrm{id}\otimes\epsilon)(\mathbf{1}\otimes\eta + \eta\otimes BA^{-1})$$
$$= m\big(\mathrm{id}(\mathbf{1}) \otimes \epsilon(\eta) + \mathrm{id}(\eta) \otimes \epsilon(BA^{-1})\big).$$
$$= 1.0 + \eta.1.1 = \eta = \mathrm{id}(\eta).$$

$$m(S\otimes\mathrm{id})\Delta(\eta) = m(S\otimes\mathrm{id})(\mathbf{1}\otimes\eta + \eta\otimes BA^{-1})$$
$$= m(S(\mathbf{1})\otimes\mathrm{id}(\eta) + S(\eta)\otimes\mathrm{id}(BA^{-1})$$
$$= 1.\eta + (-B^{-1}A\eta).BA^{-1} = 0 = \epsilon(\eta)$$

$$m(\mathrm{id}\otimes S)\Delta(\eta) = m(\mathrm{id}\otimes S)(\mathbf{1}\otimes\eta + \eta\otimes BA^{-1})$$
$$= m\big(\mathrm{id}(\mathbf{1})\otimes S(\eta) + \mathrm{id}(\eta)\otimes S(BA^{-1})\big)$$
$$= 1.(-B^{-1}A\eta) + \eta.A.B^{-1} = 0 = \epsilon(\eta)$$

Benzer şekilde, A ve B jeneratörleri için de aynı aksiyomların sağlandığı gösterilir. Δ ve ϵ tasvirleri birer cebir homomorfizmi, S tasviri bir cebir anti-homomorfizmidir, yani Δ, ϵ ve S tasvirleri Teorem 4.1 deki bağıntılarını korur.

$$\Delta(A\eta - \eta A) = \Delta(A)\Delta(\eta) - \Delta(\eta)\Delta(A)$$
$$= (A\otimes A)(\mathbf{1}\otimes\eta + \eta\otimes BA^{-1}) - (\mathbf{1}\otimes\eta + \eta\otimes BA^{-1})(A\otimes A)$$
$$= A\otimes A\eta + A\eta\otimes B - A\otimes\eta A - \eta A\otimes B$$
$$= A\otimes A\eta + A\eta\otimes B - A\otimes A\eta - A\eta\otimes B = 0.$$

$$\epsilon(A\eta - \eta A) = \epsilon(A)\epsilon(\eta) - \epsilon(\eta)\epsilon(A) = 1.0 - 0.1 = 0$$

$$S(A\eta - \eta A) = S(\eta)S(A) - S(A)S(\eta)$$
$$= (-B^{-1}A\eta).A^{-1} - A^{-1}(-B^{-1}A\eta)$$
$$= -B^{-1}\eta + B^{-1}\eta = 0.$$

Aynı şekilde, Teorem 4.1. deki diğer bağıntıların da Δ, ϵ ve S tasvirleri altında korunduğu gösterilir.

4.4 $\mathbb{Z}_3$-Dereceli $\widetilde{GL}_q(2)$ Kuantum Grubu

Bu kısımda, elde ettiğimiz yeni cebirin bir Hopf cebiri olduğunu göstereceğiz.

Teorem 4.4 $\mathbb{Z}_3$-dereceli $\mathcal{O}(\widetilde{GL}_q(2))$ cebiri bir $\mathbb{Z}_3$-dereceli Hopf cebiridir.

İspat. $\Delta: \mathcal{O}(\widetilde{GL}_q(2)) \longrightarrow \mathcal{O}(\widetilde{GL}_q(2))\otimes\mathcal{O}(\widetilde{GL}_q(2))$ ko-çarpmasının, $T = T_L T_D T_U$ matrisinin matris elemanlarına yeni jeneratörler cinsinden etkisi aşağıdaki gibidir:

$$\Delta(A) = A\otimes A + A\eta\otimes\xi A,$$
$$\Delta(\xi) = \xi\otimes\mathbf{1} + BA^{-1}\otimes\xi - q^2 BA^{-1}\eta\otimes\xi^2,$$
$$\Delta(\eta) = \mathbf{1}\otimes\eta + \eta\otimes A^{-1}B - q^2\eta^2\otimes A^{-1}\xi B,$$
$$\Delta(B) = B\otimes B - q^2 B\eta\otimes\xi B + B\eta^2\otimes\xi^2 B.$$

$\epsilon: \mathcal{O}(\widetilde{GL}_q(2)) \longrightarrow \mathbb{C}$ ko-biriminin, $T = T_L T_D T_U$ çarpım matrisinin matris elemanlarına etkisi

$$\epsilon(A) = 1, \quad \epsilon(B) = 1, \quad \epsilon(\xi) = 0, \quad \epsilon(\eta) = 0$$

şeklindedir.

$S: \mathcal{O}(\widetilde{GL}_q(2)) \longrightarrow \mathcal{O}(\widetilde{GL}_{q^2}(2))$ ko-tersinin, $T = T_L T_D T_U$ çarpım matrisinin matris elemanlarına etkisi aşağıdaki gibidir:

$$S(A) = A^{-1} + \eta B^{-1}\xi,$$

$$S(\xi) = q^2 \mathrm{A}^2 \mathrm{B}^{-2} \xi^2 \eta - AB^{-1}\xi,$$

$$S(\eta) = \mathrm{A}^2 \mathrm{B}^{-2} \xi \eta^2 - AB^{-1}\eta,$$

$$S(B) = B^{-1} - q^2 B^{-1} A B^{-1} \xi \eta + B^{-1} A B^{-1} A B^{-1} \xi^2 \eta^2.$$

İspatı tamamlamak için Tanım 2.8 deki özdeşliklerin sağlandığını ve Teorem 4.1 deki bağıntıların Δ, ϵ ve S tasvirleri altında korunduğunu göstermeliyiz.

Bir örnek olarak, A elemanını gözönüne alalım ve

$(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(A) = (\Delta \otimes \mathrm{id})(A \otimes A + A\eta \otimes \xi A)$

$= \Delta(A) \otimes \mathrm{id}(A) + \Delta(A\eta) \otimes \mathrm{id}(\xi A)$

$= (A \otimes A + A\eta \otimes \xi A) \otimes A + (A \otimes A\eta + A\eta \otimes (B + \xi A\eta)) \otimes \xi A$

$= A \otimes A \otimes A + A\eta \otimes \xi A \otimes A + A \otimes A\eta \otimes \xi A + A\eta \otimes B \otimes \xi A + A\eta \otimes \xi A\eta \otimes \xi A$

$= A \otimes A \otimes A + A \otimes A\eta \otimes \xi A + A\eta \otimes \xi A \otimes A + A\eta \otimes B \otimes \xi A + A\eta \otimes \xi A\eta \otimes \xi A$

$= A \otimes (A \otimes A) + A \otimes (A\eta \otimes \xi A) + A\eta \otimes (\xi A \otimes A) + A\eta \otimes (B \otimes \xi A)$
$\quad + A\eta \otimes (\xi A\eta \otimes \xi A)$

$= A \otimes (A \otimes A + A\eta \otimes \xi A) + A\eta \otimes (\xi A \otimes A + (B + \xi A\eta) \otimes \xi A)$

$= \mathrm{id}(A) \otimes \Delta(A) + \mathrm{id}(A\eta) \otimes \Delta(\xi A) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)(A \otimes A + A\eta \otimes \xi A) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(A)$

$m(\epsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(A) = m(\epsilon \otimes \mathrm{id})(A \otimes A + A\eta \otimes \xi A)$

$= m(\epsilon(A) \otimes \mathrm{id}(A) + \epsilon(A\eta) \otimes \mathrm{id}(\xi A)$

$= 1.A + 1.0.\xi A = A = \mathrm{id}(A).$

$m(\mathrm{id} \otimes \epsilon)\Delta(A) = m(\mathrm{id} \otimes \epsilon)(A \otimes A + A\eta \otimes \xi A)$

$= m\big(\mathrm{id}(A) \otimes \epsilon(A) + \mathrm{id}(A\eta) \otimes \epsilon(\xi A)\big)$

$= A.1 + A\eta.0.1 = A = \mathrm{id}(A).$

$m(S \otimes \mathrm{id})\Delta(A) = m(S \otimes \mathrm{id})(A \otimes A + A\eta \otimes \xi A)$

$= m(S(A) \otimes \mathrm{id}(A) + S(A\eta) \otimes \mathrm{id}(\xi A))$

$= (A^{-1} + \eta B^{-1}\xi).\, A + (A^2B^{-2}\xi\eta^2 - AB^{-1}\eta)(A^{-1} + \eta B^{-1}\xi).\xi A$

$= 1 + \eta B^{-1}\xi.\, A + (A^2B^{-2}\xi\eta^2A^{-1} - AB^{-1}\eta A^{-1} - AB^{-1}\eta^2B^{-1}\xi)\xi A$

$= 1 + \eta B^{-1}\xi.\, A + A^2B^{-2}\xi\eta^2A^{-1}.\xi A - AB^{-1}\eta A^{-1}.\xi A - AB^{-1}\eta^2B^{-1}\xi.\xi A$

$= 1 + qAB^{-1}\xi\eta + A^2B^{-2}\xi^2\eta^2 - qAB^{-1}\xi\eta - A^2B^{-2}\xi^2\eta^2 = 1 = \epsilon(A).$

$m(\mathrm{id}\otimes S)\Delta(A) = m(\mathrm{id}\otimes S)(A\otimes A + A\eta\otimes\xi A)$

$= m\big(\mathrm{id}(A)\otimes S(A) + \mathrm{id}(A\eta)\otimes S(\xi A)\big)$

$= A(A^{-1} + \eta B^{-1}\xi) + A\eta(A^{-1} + \eta B^{-1}\xi)(q^2A^2B^{-2}\xi^2\eta - AB^{-1}\xi)$

$= 1 + A.\eta B^{-1}\xi + (\eta + A\eta^2B^{-1}\xi)(q^2A^2B^{-2}\xi^2\eta - AB^{-1}\xi)$

$= 1 + \mathrm{A}.\eta B^{-1}\xi + q^2\eta.\,\mathrm{A}^2\mathrm{B}^{-2}\xi^2\eta - \eta.AB^{-1}\xi - A\eta^2B^{-1}\xi.AB^{-1}\xi$

$= 1 + q^2A.\eta B^{-1}\xi + A^2B^{-2}\xi^2\eta^2 - q^2A.\eta B^{-1}\xi - A^2B^{-2}\xi^2\eta^2 = 1 = \epsilon(A).$

Benzer şekilde, B, ξ ve η jeneratörleri için de aynı aksiyomların sağlandığı gösterilir. Δ ve ϵ tasvirleri birer cebir homomorfizmi, S tasviri bir cebir anti-homomorfizmidir, yani Δ, ϵ ve S tasvirleri Teorem 4.1. deki bağıntılarını korur.

$\Delta(A\xi - q\xi A) = \Delta(A)\Delta(\xi) - q\Delta(\xi)\Delta(A)$

$= (A\otimes A + A\eta\otimes\xi A)(\xi\otimes\mathbf{1} + BA^{-1}\otimes\xi - q^2BA^{-1}\eta\otimes\xi^2)$

$\quad - q(\xi\otimes\mathbf{1} + BA^{-1}\otimes\xi - q^2BA^{-1}\eta\otimes\xi^2)(A\otimes A + A\eta\otimes\xi A)$

$= A\xi\otimes A + B\otimes A\xi - q^2B\eta\otimes A\xi^2 + qA\eta\xi\otimes\xi A + \eta B\otimes\xi A\xi$

$-q(\xi A\otimes A + \xi A\eta\otimes\xi A + B\otimes\xi A + q^2B\eta\otimes\xi^2A - q^2B\eta\otimes\xi^2A)$

$= A\xi\otimes A + B\otimes A\xi - q^2B\eta\otimes A\xi^2 + qA\eta\xi\otimes\xi A + \eta B\otimes\xi A\xi - A\xi\otimes A$

$-A\xi\otimes A - q\xi A\eta\otimes\xi A - B\otimes A\xi - \eta B\otimes\xi A\xi + q^2B\eta\otimes A\xi^2 = 0.$

$\epsilon(A\xi - q\xi A) = \epsilon(A)\epsilon(\xi) - q\epsilon(\xi)\epsilon(A) = 1.0 - q.0.1 = 0.$

$S(A\xi - q\xi A) = S(\xi)S(A) - qS(A)S(\xi)$

$= -B^{-1}A\xi A^{-1} - qA^{-1}(-B^{-1}A\xi)$

$= -qB^{-1}\xi + qB^{-1}\xi = 0.$

5
SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada $\mathbb{Z}_3$-dereceli $\widetilde{GL}_q(2)$ kuantum grubun Gauss ayrışımını yaparak, bu ayrışımdaki üç matrisi ikişerli olarak düşünüp, ortaya çıkan matrislerin matris elemanları ile oluşmuş $\mathbb{Z}_3$-dereceli cebirlerin birer $\mathbb{Z}_3$-dereceli Hopf cebiri olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, $\widetilde{GL}_q(2)$ kuantum grubunun Gauss ayrışımındaki üç matrisin çarpımının da yeni jeneratörler cinsinden bir Hopf cebiri yapısını koruduğu görülmüştür.

Bu durumun, daha yüksek ranklı $\mathbb{Z}_3$-dereceli kuantum gruplar için geçerli olduğunu bilmemekle birlikte, üzerinde çalışmalara devam etmekteyiz.

KAYNAKÇA

[1] S. Çelik, "Differential geometry of the $\mathbb{Z}_3$-graded quantum superplane", J. Phys. A: Math. Gen., vol. 35, pp. 4257–4268, 2002.

[2] S. Çelik, "$\mathbb{Z}_3$-graded differential geometry of the quantum plane", J. Phys. A: Math. Gen., vol. 35, pp. 6307–6318, 2002.

[3] S. Çelik, "A differential calculus on $\mathbb{Z}_3$-graded quantum superspace $\mathbb{R}_q(2|1)$", Algebras Representation Theory, vol. 19, pp. 713–730, 2016.

[4] S. Çelik and F. Bulut, "A differential calculus on the $\mathbb{Z}_3$-graded quantum group $GL_q(2)$", Adv. Appl. Clifford Algebras, vol. 26, pp. 81–96, 2016.

[5] S. Çelik, "A new $\mathbb{Z}_3$-graded quantum group", J. Lie Theory 27, pp. 545–554, 2017.

[6] S. Çelik and S. A. Celik, "Differential calculi on $\mathbb{Z}_3$-graded Grassmann plane", Adv. Appl. Clifford Algebras, vol. 27, pp. 2407–2427, 2017.

[7] S. Celik, "Left-covariant differantial calculi on $\widetilde{\mathrm{GL}}_q(2)$", J. Math Phys., vol. 62, 073504:1-16, 2021.

[8] W. S. Chung, "Quantum $\mathbb{Z}_3$-graded space", J. Math. Phys., vol. 35, pp. 2497–2504, 1994.

[9] E. V. Damaskinsky, P. P. Kulish and M. A. Sokolov, "Gauss decomposition for quantum groups and supergroups", Journal of Mathematical Sciences, vol. 88, pp. 208–223, 1998.

[10] E. V. Damaskinsky and M.A. Sokolov, "Some remarks on the Gauss decomposition for quantum group $\mathrm{GL}_q(n)$ with application to q-bosonization", J. Phys. A: Math. Gen., vol. 28, 3725-3732, 1995.

[11] V. G. Drinfeld, "Quantum Groups", Proc. I.C.M. Berkeley 798 (1986)

[12] L. D. Faddeev, N. Y. Reshetikhin and L. A. Takhtajan, "Quantum groups". In: C.N.Yang, M.-L. Ge (eds.) Braid groups, knot theory and statistical Mechanics, Singapore: World Scientific, 1989.

[13] C. Fronsdal and A. Galindo, "The dual of a quantum group", Lett. Math. Phys. vol. 27, pp. 59-71, 1993.

[14] A. Klimyk ve K. Schmüdgen: Quantum Groups and Their Representations, Springer, New York et al. 1997.

[15] S. Majid: Foundations of Quantum Group Theory, Cambridge Univ. Press 1995.

[16] Yu. I. Manin, " " Commun. Math. Phys. 123, 163 (1989).

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirileri

1. S.Çelik and Ö.Savaş ; "Gauss Decomposition of the $\mathbb{Z}_3$-graded Quantum Group $\widetilde{\mathrm{GL}}_q(2)$" , ICOMAA 2023 6th International HYBRID Conference on Mathematical Advances and Applications, MAY 10-13 2023, Istanbul, Turkey, 159.