T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI BANACH FONKSİYON UZAYLARINDA KLASİK ÜSTEL VE TRİGONOMETRİK SİSTEMLERİN BAZLIK ÖZELLİKLERİ

Mehmet ÖZÜKANAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman

Prof. Dr. Yusuf ZEREN

Eş Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Fatih ŞİRİN

Ocak, 2025

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI BANACH FONKSİYON UZAYLARINDA KLASİK ÜSTEL VE TRİGONOMETRİK SİSTEMLERİN BAZLIK ÖZELLİKLERİ

Mehmet ÖZÜKANAR tarafından hazırlanan tez çalışması 15.01.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yusuf ZEREN Yıldız Teknik Üniversitesi Danışman	Dr. Öğr. Üyesi Fatih ŞİRİN Haliç Üniversitesi Eş-Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Yusuf ZEREN, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Adem Cengiz ÇEVİKEL, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Murat KİRİŞÇİ, Üye
İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa _____

Danışmanım Prof. Dr. Yusuf ZEREN sorumluluğunda tarafımca hazırlanan “Bazı Banach Fonksiyon Uzaylarında Klasik Üstel Ve Trigonometrik Sistemlerin Bazlık Özellikleri” başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Mehmet ÖZÜKANAR

İmza

Bu çalışma, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Proje Koordinatörlüğü' nün FYL-2023-5684 numaralı projesi

ve

TÜBİTAK tarafından 2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı ile

desteklenmiştir.

Canım Aileme…

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimin başından itibaren ve tez çalışmalarımı yürüttüğüm süreçte bilgisi ve tecrübesi ile her zaman yol gösteren, güvenen, desteğini her zaman hissettiren değerli danışman hocam Prof. Dr. Yusuf ZEREN' e sonsuz şükranlarımı sunuyorum.

Tez çalışmamda beni sabırla yönlendiren, bilgi ve deneyimlerini paylaşan, yol gösteren eş danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Fatih ŞİRİN' e teşekkür ederim.

Hayatımın her anında bana koşulsuz sevgi ve destek sunan canım annem Hava ÖZÜKANAR' a, güçlü duruşuyla bana örnek olan ve en zor anlarımda dahi yanımda hissettiğim canım ablam Dilek ÖZÜKANAR' a ve beni daima gururlandıran 2020 yılında kaybettiğim özlemle andığım canım babam Şadi ÖZÜKANAR' a teşekkür ederim.

2210-A Genel Yurtiçi Yüksek Lisans Burs programı kapsamında yüksek lisans öğrenimim boyunca sağlamış olduğu maddi destekten dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı' na (BİDEB) teşekkür ederim.

Tez çalışmalarımı gerçekleştirirken bilgi alışverişinde bulunduğum değerli hocalarım Dr. Cemil KARAÇAM, Dr. Kader ŞİMŞİR ACAR, Dr. Şeyma ÇETİN ve bu süreçte bana destek olan tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Mehmet ÖZÜKANAR

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ **vii**
KISALTMA LİSTESİ **ix**
ÖZET **x**
ABSTRACT **xii**
1 GİRİŞ **1**
1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 4
1.3 Hipotez 4
2 TEMEL KAVRAMLAR **6**
2.1 Temel Tanım ve Teoremler 6
2.2 Bazlık Üzerine 17
2.3 Değişken Üslü Lebesgue Uzayı Üzerine 18
3 GRAND LEBESGUE UZAYLARI **34**
3.1 Grand Lebesgue Uzayı ($\boldsymbol{Lp}$)$\boldsymbol{\Omega}$ Uzayı) 34
3.2 $\boldsymbol{Lp}$)($\boldsymbol{\Omega}$) Uzayında Üstel Sistemin Bazlık Özellikleri 46
3.3 $\boldsymbol{Lp}$)($\boldsymbol{\Omega}$) Uzayında Trigonometrik Sistemlerin Bazlık Özellikleri 51
4 DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYINDA BAZLIK **56**
4.1 $\boldsymbol{Lp}(.)(\boldsymbol{\Omega})$ Uzayında Yakınsaklık 56
4.2 $\boldsymbol{Lp}(.)(\boldsymbol{\Omega})$ Uzayının Tamlığı ve Yoğun Alt Kümeleri 61
4.3 Üstel Sistemin Bazlığı 66
4.4 Trigonometrik Sistemin Bazlığı 69
5 GRAND DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYI **73**
6 SONUÇ **77**
KAYNAKÇA **78**
TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR **82**

SİMGE LİSTESİ

$\bar{A}$	A kümesinin kapanışı
$L[A]$	A kümesinin lineer gereni
$p(.)$	Değişken üs fonksiyonu
p_-	Değişken üs fonksiyonunun esas infimumu
p_+	Değişken üs fonksiyonunun esas supremumu
$L_{p(.)}$	Değişken üslü Lebesgue uzayı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
χ_E	E kümesinin karakteristik fonksiyonu
$ess\ inf$	Esas infimum
$ess\ sup$	Esas supremum
$< x, f >$	f fonksiyonelinin x noktasındaki değer
$supp(f)$	f fonksiyonun desteği
$L_{p(.),\theta}$	Grand değişken üslü Lebesgue uzayı
$L_{p)}$	Grand Lebesgue uzayı
$G_{p)}$	Grand Lebesgue uzayının ayrılabilir alt uzayı
$M_0(X, A)$	Hemen hemen her yerde sonlu $M(X, A)$ kümesindeki fonksiyonların sınıfı
L_p	Klasik Lebesgue uzayı
δ_{ij}	Kronecker delta
$\|.\|^A_{L_{p(.)}}$	$L_{p(.)}$ üzerindeki Amemiya norm
$\|.\|_{L_p}$	L_p üzerindeki norm
$\|.\|_{L_{p(.)}}$	$L_{p(.)}$ üzerindeki norm
$\|.\|_{L_{p(.),\theta}}$	$L_{p(.),\theta}$ üzerindeki norm
P^{log}	Lokal log-Hölder sürekli olan $p(.)$ üs fonksiyonların sınıfı
LH	Lokal log-Hölder ve sonsuzda log-Hölder sürekli olan $p(.)$ üs fonksiyonların sınıfı
$\rho_{p(.)}(.)$	Modüler fonksiyon
$\mathbb{R}^n$	n-Boyutlu Öklid uzayı

M^+	Negatif olmayan $M_0(X,A)$ kümesindeki fonksiyonların kümesi
$p'(.)$	$p(.)$' nin eşlenik üssü
$\mathbb{Z}_+$	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
P_∞^{log}	Sonsuzda log-Hölder sürekli olan $p(.)$ üs fonksiyonların sınıfı
$N(T)$	T operatörünün çekirdeği
$R(T)$	T operatörünün görüntü kümesi
$D(T)$	T operatörünün tanım kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$M(X,A)$	X uzayında tüm genişletilmiş reel değerli μ-ölçülebilir fonksiyonların kümesi
$P(X)$	X üzerindeki üslerin kümesi
$\|\Omega\|$	Ω kümesinin ölçüsü
$C_0^\infty(\Omega)$	Ω üzerinde sonsuz mertebeden türeve sahip sınırlarda sıfır olan fonksiyonların uzayıkompakt destekli fonksiyonların uzayı

KISALTMA LİSTESİ

bkz.	bakınız
h.h.y	hemen hemen her yerde
g.y.k.	gerek ve yeter koşul
vb.	ve benzeri

ÖZET

Bazı Banach Fonksiyon Uzaylarında Klasik Üstel ve Trigonometrik Sistemlerin Bazlık Özellikleri

Mehmet ÖZÜKANAR

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Yusuf ZEREN

Eş-Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Fatih ŞİRİN

Bu tez çalışması kapsamında, fonksiyon uzayları teorisinde önemli yere sahip olan $L_{p)}$ grand Lebesgue uzayı ve $L_{p(.)}$ değişken üslü Lebesgue uzayları incelenmiştir. Çalışma, bu uzayların yapısı, özellikleri ve klasik üstel ve trigonometrik sistemler ile olan ilişkileri ele alınmış olup, matematiksel analiz alanına yeni bir bakış açısı sunmaktadır. Yapılan tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm, literatür özetinden oluşmaktadır. İkinci bölüm, tezde incelenen uzaylar hakkında bilgi sunan temel tanım ve teoremlerden oluşmaktadır. Üçüncü bölümde, grand Lebesgue uzayının temel özellikleri detaylı bir şekilde açıklanmıştır. Grand Lebesgue uzayı, ayrılabilir olmadığı için herhangi bir sistemin bazlık özelliklerini incelemek mümkün değildir. Ancak öteleme operatörü yardımıyla bu uzayın ayrılabilir bir alt uzayı olan $G_{p)}$ uzayı tanıtılmıştır. Ayrılabilir olan bu alt uzayda klasik üstel ve trigonometrik sistemlerin bazlığı incelemek mümkün olmuştur. Dördüncü bölümde, değişken üslü Lebesgue uzaylarının teorisi ele alınmıştır. Değişken üslü Lebesgue uzayları, fonksiyon uzayları teorisinde önemli bir yere sahiptir ve

ayrılabilir olan bu uzaylarda klasik üstel ve trigonometrik sistemlerin bazlık özellikleri gösterilmiştir. Beşinci bölümde ise uygun koşullarda grand Lebesgue uzayı ve değişken üslü Lebesgue uzaylarının elde edildiği daha genel bir uzay olan $L_{p(.),\theta}$ grand değişken üslü Lebesgue uzayları tanıtılmış ve bazı özellikleri verilmiştir. Çalışmanın son bölüm olan altıncı bölüm ise sonuç ve öneriler kısmını oluşturmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Bazlık, grand Lebesgue uzayları, değişken üslü Lebesgue uzayları, tamlık, minimallik.

ABSTRACT

The Basis Properties of Classical Exponential and Trigonometric Systems in Certain Banach Function Spaces

Mehmet ÖZÜKANAR

Department of Mathematics

Master of Science Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf ZEREN

Co-supervisor: Asst. Prof. Dr. Fatih ŞİRİN

Within the scope of this thesis, $L_{p)}$ grand Lebesgue space and $L_{p(.)}$ variable exponential Lebesgue spaces, which have an important place in the theory of function spaces, have been examined. The study addresses the structure, properties and relations of these spaces with classical exponential and trigonometric systems, and offers a new perspective in the field of mathematical analysis. The thesis consists of six sections. The first section consists of a literature summary. The second section consists of basic definitions and theorems that provide information about the spaces examined in the thesis. In the third section, the basic properties of the grand Lebesgue space are explained in detail. Since the Grand Lebesgue space is not separable, it is not possible to examine the basicity properties of any system. However, with the help of the shift operator, the $G_{p)}$ space, which is a separable subspace of this space, has been introduced. It has been possible to examine the basicity of classical exponential and trigonometric systems in this separable subspace. In the fourth section, the theory of variable exponential Lebesgue spaces is discussed. Variable exponential Lebesgue spaces have an important place in the

theory of function spaces and the basicity properties of classical exponential and trigonometric systems are shown in these separable spaces. In the fifth section, the grand Lebesgue space and the grand variable exponential Lebesgue spaces $L_{p(.),\theta}$, which is a more general space from which variable exponential Lebesgue spaces are obtained under suitable conditions, are introduced and some of their properties are given. The sixth section, which is the last section of the study, constitutes the conclusion and suggestions section.

Keywords: Basis, grand Lebesgue spaces, variable exponent Lebesgue spaces, completeness, minimality.

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Fonksiyon uzaylarının modern teorisi, S. L. Sobolev, A. Zygmund, A. P. Calderon, P. I. Lizorkin ve diğer alanında tanınmış olan matematikçilerin yapmış oldukları esaslı çalışmalarla matematiğin birçok farklı alanına katkı sağlamıştır. Bu teori, reel analiz ve fonksiyonel analizin yanı sıra kısmi diferensiyel denklemler ve matematiksel fizik gibi çeşitli disiplinlerde oldukça etkili uygulamaya sahiptir. Bu uygulamalar neticesinde ortaya çıkan yeni problemlerin çözüme ulaşabilmesi ve uzaylar arasındaki boşlukların doldurulması için yeni türden fonksiyon uzaylarının tanımlanması ve araştırılması gerekmektedir. Bu durum, matematiksel problemleri daha derinlemesine analiz etmek ve çözümlemek için büyük bir öneme sahiptir.

Lebesgue uzayları, 1920' li yıllarda büyük çoğunlukla fonksiyon uzayları üzerinde tanımlı olan operatörlerin özellikleri incelenmiştir. Bu kapsamda yapılan çalışmalar doğrultusunda yeni ölçülerin tanımlanması, fonksiyon uzaylarının matematiksel özelliklerinin gelişimine öncülük etmiştir. Tarihsel sürecine bakıldığı zaman diferansiyel denklemlerin incelemesi Hölder fonksiyonları ve sürekli fonksiyon uzayları üzerinde başlamış olup çözümlemesi yapılan denklemler Lebesgue uzaylarını sürece dahil etmiştir. Disiplinler arası yapılan Fizik çalışmlardaki bazı problemler yeni uzaylarda çalışmayı ve bu uzaylara ait diğer problemleri incelemeyi gerektirmiştir [1-7].

Klasik fonksiyon uzaylarında incelenen diferansiyel denklemler ve birçok analiz problemlerinin incelemelerinde klasik fonksiyon uzayları yeterli olmadığından, yapısal olarak daha zengin olan standart olmayan Banach fonksiyon uzaylarına son zamanlarda ilgi artmıştır. Bununla birlikte Banach fonksiyon uzayları, yapılan incelemelerin daha kapsamlı olmasını ve uygulama alanlarının genişlemesinde önemli bir yere sahiptir. Bu uzaylarda yaklaşım teorisi ve Cauchy çekirdeğine sahip Singüler operatörün sınırlılık problemleri, maksimal fonksiyon, Hilbert dönüşümü

gibi harmonik analizin birçok klasik sonuçları bu uzaylarda çeşitli düzeylerde incelenmiştir. Bu sayede bu uzaylarda diferansiyel denklemler teorisi, kısmi diferansiyel denklemler teorisi gibi problemlerin düşünülmesine olanak sağlamıştır.

Banach fonksiyon uzayları fikri 1950' li yıllarda A. J. Luxemburg [8] tarafından ortaya atılmış olup günümüzde bu uzaylar üzerinde yapılan çalışmalar mevcuttur. Bu teori, fonksiyon uzaylarının ölçüyle ilgili birçok önemli özelliğini incelemektedir. A. C. Zaanen, W. A. J. Luxemburg, gibi matematikçilerin bu alanda esaslı katkıları olmuştur. Özellikle 1960' ların ortalarında W. A. J. Luxemburg ve A. C. Zaanen birtakım bildiriler yayınlamışlardır. Bu bildiriler sayesinde fonksiyonel analiz, ölçü teorisi ve cebir arasında bir köprü görevi görmektedir. Grand Lebesgue uzayı, standart olmayan Banach fonksiyon uzaylarındandır ve ilk kez 1992 yılında T. Iwaniec ve C. Sbordone tarafından tanımlanmıştır [9]. Grand Lebesgue uzayı PDE teorisi, Operatör teorisi ve uygulamalı matematik alanlarında önemli uygulamaların odağında olmuş ve birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Özellikle harmonik analizle ilgili özellikler, Grand Lebesgue uzaylarında detaylı bir şekilde incelenmiştir. Grand Lebesgue uzaylarının diferansiyel denklemlerle olan ilişkisi, özellikle integral operatörlerinin sınırlılığı açısından incelenmiştir. Bu konuda yapılan çalışmalar, uzayın özelliklerinin diferansiyel denklemlere nasıl yansıdığını göstermektedir. Ayrıca, C. Capone ve A. Fiorenza tarafından yapılan çalışmalarla dualite ve yansıma kavramları, H. Rafeiro ve A. Vargas tarafından yapılan çalışmaları ile de kompaktlık özellikleri Grand Lebesgue uzaylarında ele alınmıştır [10-13]. Öte yandan, ayrılabilir olmayan Grand Lebesgue uzayının ayrılabilir bir alt uzayı 2020 yılında tanımlanmıştır [14, 15]. Harmonik analizle ilgili birçok klasik özellik, Grand Lebesgue uzaylarına başarılı bir şekilde genişletilmiştir. Bu çalışmalar, bu uzayların matematiksel analizdeki yerini ve önemini pekiştirmektedir.

Değişken üslü Lebesgue uzaylarının kronolojisi, gelişim sürecine göre üç aşamaya ayrılabilir. İlk olarak 1931 yılında W. Orlicz [16] tarafından Değişken üslü Lebesgue uzayları tanıtılmıştır; ardından bu uzayların özellikleri, modüler uzaylar teorisinin özel bir durumu olarak H. Nakano tarafından [17, 18] daha da geliştirmiştir. Değişken üslü Lebesgue uzayları, Rus matematikçi I. V. Tsenov tarafından [19] bağımsız olarak keşfedilmiştir ve ilk olarak I. I. Sharapudinov [20-23] ve daha sonra Zhikov tarafından [24-32] kapsamlı bir şekilde

geliştirilmiştir. Bu matematikçiler, değişken üslü Lebesgue uzaylarının harmonik analiz ve varyasyonlar hesabı uygulamalarına ilk olarak ilgi duyanlardır. Bu dönemde, uzayların teorik yönleri üzerine önemli çalışmalar yapılmıştır.

Değişken üslü Lebesgue uzaylarının çalışmalarındaki üçüncü aşaması, genellikle 1991 yılında O. Kováčik ve J. Rákosník tarafından [33] yazılan makale ile başladığı düşünülmektedir. Bu makale sonrasında, bu uzaylara pek çok matematikçinin ilgi odağı olmuştur ve uzay üzerinde çalışmaya başlamıştır.

2000' li yıllarda, değişken üslü Lebesgue uzayları üzerine yapılan çalışmalar daha da genişlemiş olup özellikle elektroreolojik akışkanlar gibi problemlere dayanan uygulamalar bu alanda incelemede hız kazanmıştır.

Son zamanlarda, matematiğin farklı alanlarına uygulamalar kısmında grand-Lebesgue uzayları, değişken üslü Lebesgue uzayları vb. uzaylara ilgi artmıştır. Cauchy çekirdeğine sahip Singüler operatörün sınırlılık problemleri, maksimal fonksiyon, Hilbert dönüşümü gibi harmonik analizin birçok klasik sonuçları bu uzaylara genişletilmiştir. Bu sayede bu uzaylarda diferansiyel denklemler teorisi kısmi diferansiyel denklemler teorisi gibi problemlerin düşünülmesine olanak sağlamıştır.

Yaklaşım teorisinin önemli konusundan birisi, bir uzayın elemanlarının bazlar kullanılarak nasıl temsil edileceğidir. Yapılan disiplinler arası çalışmalarla birlikte difersnsiyel denklemler teorisinin problemlerine bağlı olarak ortaya çıkan yeni uzayların bazlık özelliklerinin araştırılması önem kazanmıştır.

$\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ üstel sisteminin Fourier serilerinin teorisi farklı uzaylarda iyi çalışılmıştır. $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ üstel sisteminin bazlık özellikleri üzerine çalışmalar klasik Lebesgue uzayı olan $L_p, (1 \le p < \infty)$ uzayında; A. Zigmund [34, 35], N. K. Bari [36] ve R. Edwards [37, 38] gibi tanınmış matematikçiler tarafından yapılmıştır. Grand Lebesgue uzayındaki araştırmalar ise M. I. Ismailov, Y. Zeren, K. Şimşir Acar ve I. F. Aliyarova tarafından 2022 yılında [39] çalışılmıştır. Değişken üslü Lebesgue uzaylardaki incelemeler ise B. T. Bilalov ve Z. G. Guseynov [40] tarafından 2008 yılında çalışılmıştır.

$\{\sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\{\cos nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ trigonometrik sistemlerinin bazlık özelliklerinin kararlılığı üzerine 2011 yılında $L_p, (1 \le p < \infty)$ uzayında çalışılmıştır. Grand

Lebesgue uzayında yine M. I. Ismailov, Y. Zeren, K. Şimşir Acar ve I. F. Aliyarova tarafından 2022 yılında [39] çalışılmıştır.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmanın temel amacı, disiplinler arası araştırmalar sonucunda diferansiyel denklemler teorisinde karşılaşılan belirli problemlerin çözümlerine yönelik yeni yaklaşımlar geliştirmektir. Mevcut problemlerin ele alındığı uzayların işlevsel yetersizlikleri, bu problemlerin daha uygun özelliklere sahip yeni fonksiyonel uzaylarda incelenmesi gerekliliğini ortaya koymaktadır. Bu kapsamda, yeni tanımlanan uzayların yapısal özelliklerinin, özellikle de baz yapılarına ilişkin temel niteliklerinin araştırılması önemli bir ihtiyaç olarak belirmiştir. Baz kavramı, bir uzayın elemanlarının temsilinde merkezi bir rol oynadığından, bu araştırmada kritik bir inceleme alanıdır.

Bu tezde, grand Lebesgue uzayı ve değişken üslü Lebesgue uzayları kapsamında üstel ve trigonometrik sistemlerin bazlık özellikleri detaylı olarak ele alınmıştır. Ayrıca, bu iki uzayın bir birleşimi niteliğinde olan grand değişken üslü Lebesgue uzayının bazlık özelliklerinin incelenmesine zemin hazırlayacak yapısal özellikler ortaya konmuştur. Uzayın literatürde yeni tanımlanmış olması sebebiyle grand Lebesgue uzayı ve değişken üslü Lebesgue uzaylarında elde edilmiş olan ve sistemlerin bazlık özellikleri incelenirken kullandığımız bir çok özellik (Hilbert dönüşümünün sınırlılığı gibi), grand değişken üslü Lebesgue uzayında hali hazırda incelenmeyi beklemektedir. Bu ise klasik sistemlerin bazlık özelliklerinin incelenebilmesi için kapsamlı bir hazırlık gerektiğini göstermektedir. Çalışma, yalnızca ilgili uzayların teorik altyapısını güçlendirmekle kalmayıp, diferansiyel denklemler teorisinde daha ileri yaklaşımların geliştirilmesine katkı sağlamayı hedeflemektedir.

1.3 Hipotez

$\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ klasik üstel sistemi ve $\{\sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ ile $\{\cos nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ trigonometrik sistemlerin bazlık özellikleri grand-Lebesgue uzaylarında ve daha sonra değişken üslü Lebesgue uzayında ele alınacaktır. Klasik sistemlerin standart olmayan Lebesgue uzaylarında incelenmesinde ayrılabilirlik gibi bazı temel problemler oluşabilmektedir. Bu gibi problemlerin üstesinden gelinebilmesi

adına, bu uzaylar öncelikle irdelenecektir. Daha sonra bu iki uzayın bir birleşimi olan grand değişken üslü Lebesgue uzayı, yapılacak ilerideki çalışmalara bir zemin olarak ele alınacaktır. Uzayın ayrılabilirliği, birbirleri içine gömülme teorileri incelenecektir.

2
TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1 $\mathbb{R}$ bir cisim ve X bu cisim üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı olsun.

$$\|\,.\,\|: X \to R\,, x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

1. $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

koşullarını sağlayan bu dönüşüme X üzerinde bir normdur. $(X, \|.\|)$ ikilisi normlu uzay olarak adlandırılır.

Tanım 2.2 X vektör uzayında $\|.\|_0$ ve $\|.\|_1$ normları verilsin. $\forall x \in X$ için

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_0 \leq \beta\|x\|_1$$

olacak şekilde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ varsa X vektör uzayındaki $\|.\|_0$ ve $\|.\|_1$ normlarına denk norm denir.

Tanım 2.3 $(X, \|.\|\ )$ bir normlu uzay, (x_n), X uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

ise, (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir.

Tanım 2.4 $(X, \|\,.\,\|)$ normlu uzay ve bu uzayda (x_n) bir dizi olsun.

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ sayısı için } n, m > n_\varepsilon \text{ iken } \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisi Cauchy dizisidir.

Tanım 2.5 $(X, \|\,.\,\|)$ normlu uzay olmak üzere, bu uzaydaki her Cauchy disizi X üzerinde bir limite yakınsıyorsa, $(X, \|\,.\,\|)$ normlu uzayına Banach uzayı (tam normlu uzay) denir.

Tanım 2.6 $(X, \|.\|)$ normlu uzay ve $D \subset X$ olsun. Elemanları D kümesinden olan her bir (x_n) dizisinin yakınsadığı değer X uzayının elemanı oluyorsa D kümesi X uzayında yoğun denir.

Tanım 2.7 $(X, \|.\|)$ normlu uzayı, sayılabilir yoğun bir alt küme içeriyorsa $(X, \|.\|)$ normlu uzayı ayrılabilirdir.

Tanım 2.8 X normlu uzay olsun. X^* uzayı, X' in dual uzayı olarak adlandırılır ve

$$X^* = \{f \mid f: X \to \mathbb{R}, lineer\ ve\ sürekli\}$$

şeklinde oluşturulur. Dual uzayın duali $(X^*)^* = X$ oluyorsa X uzayına yansımalı uzay denir [41].

Tanım 2.9 Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_X < \infty$$

özelliğine sahip olan her $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u$ olacak şekilde bir $u \in X$ varsa, bir başka ifadeyle

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} u_k - u \right\|_X = 0$$

oluyorsa $(X, \|.\|_X)$ normlu uzayına Riesz – Fischer özelliğini sağlıyor denir [42].

Teorem 2.10 Normlu bir lineer uzayın tam olması için gerek ve yeter koşul Riesz – Fischer özelliğine sahip olmasıdır [42].

Tanım 2.11 X ve Y aynı cisim üzerinde iki lineer uzay olsun. $D \subset X$ olmak üzere $T: D \to Y$ dönüşümüne operatör denir. Burada D kümesine T operatörünün tanım kümesi denir ve $D = D(T)$ ile gösterilir. $R = R(T) = T\big(D(T)\big) \subset Y$ kümesine de görüntü kümesi denir.

Tanım 2.12 $T: X \to Y$ bir operatör ve $b \in Y$ bir eleman olsun.$\forall x \in X$ için $T(x) = b$ ise T operatörüne sabit operatör denir.

Tanım 2.13 $T: X \to X$ bir operatör olsun. $\forall x \in X$ için $T(x) = x$ ise T operatörüne birim operatör denir ve I_X ile gösterilir.

Tanım 2.14 X ve Y aynı cisim üzerinde iki lineer uzay olsun. T tanım kümesi $D(T) \in X$ ve görüntü kümesi $R(T) \in Y$ olan $T: X \to Y$ bir operatör olsun. Eğer

$\forall x_1, x_2 \in D(T)$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2)$$

ise T'ye lineer operatör denir. Buradan keyfi $n \in N$ için

$$T(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 T(x_1) + \cdots + \alpha_n T(x_n)$$

olur. $i = \overline{1,n}$ iken $\alpha_i = 0$ alırsak $T(0) = 0$ olacağı aşikardır. $N(T) = \{x \in D(T): T(x) = 0\}$ uzayına T operatörünün çekirdeği denir [41].

Tanım 2.15 X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T: D(T) \rightarrow Y$ lineer operator olsun. Eğer $\forall x \in D(T)$ için

$$\|T(x)\|_Y \leq c\|x\|_X$$

olacak şekilde $c \in \mathbb{R}$ varsa T lineer operatörüne sınırlıdır denir.

Tanım 2.16 $T: X \rightarrow Y$ bir operatör olmak üzere, T operatörünün normu

$$\|T\| := \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.17 X ve Y iki normlu uzay ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T: D(T) \rightarrow Y$ herhangi bir operator olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\exists \delta > 0 \ni \forall x \in D(T), \|x - x_0\|_X < \delta \text{ iken } \|T(x) - T(x_0)\|_Y < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa T operatörüne $x_0 \in D(T)$ noktasında sürekli denir. Eğer $\forall x \in D(T)$ noktasında T sürekli ise, T operatörü süreklidir denir.

Teorem 2.18 X ve Y iki normlu uzay ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T: D(T) \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Buna göre,

1. T operatörünün sürekli olması için g.y.k. T' nin sınırlı olmasıdır.
2. T operatörü tek bir noktada sürekli ise tanımlı olduğu uzayda her noktada süreklidir [43].

Tanım 2.19 X ve Y iki normlu lineer uzay ve $X \subset Y$ olsun. $D(I) = R(I) = X$ olmak üzere $I: X \rightarrow Y$, $\forall x \in X$ için $I(x) = x \in Y$ olacak şekilde birim operatörünü tanımlansın. Tanımlanan bu operatör sürekli ise yani, $\forall x \in X$ için

$$\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$$

olacak şekilde $c > 0$ sabiti varsa X uzayı, Y uzayına sürekli gömülür denir. Dolayısıyla I operatörü X' den Y' ye bir gömme operatörü olur.

X'den Y' ye sürekli gömme mevcut olsun.

$$\|I\|_{X\hookrightarrow Y} := \frac{\|f\|_Y}{\|f\|_X}$$

ifadesine bu operatörün normu veya gömme sabiti denir. Eğer X ve Y normlu lineer uzaylar olmak üzere X' den Y' ye sürekli bir gömme mevcut ise

$$X \hookrightarrow Y$$

şeklinde ifade edilir.

$$X \hookrightarrow Y \text{ ve } Y \hookrightarrow X$$

aynı anda sağlanıyorsa

$$X \leftrightarrows Y$$

şeklinde gösterilir bu gömmenin kompakt olması halinde ise

$$X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$$

gösterimi kullanılmaktadır [42].

Tanım 2.20 f, (a, b) aralığında tanımlı reel değerli fonksiyon olsun. $\forall x, y \epsilon (a, b)$ ve $0 < t < 1$ olmak üzere için

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$$

sağlayan f fonksiyona ise kesin konveks fonksiyon denir. Bu tanım [a, b] kapalı aralığı için de verilebilir [5].

Tanım 2.21 $X \neq \emptyset$ bir küme ve $A \subset P(X)$ olsun.

1. $\emptyset , X \in A$
2. $\forall E \in A$ ise $E^c \in A$ (bütünleyene göre kapalılık)
3. $E_1, E_2, \dots, E_n \in A \Rightarrow \cup_{k=1}^{n}(E_k) \in A$ (sonlu birleşime göre kapalılık)

şartlarını sağlayan A topluluğuna X üzerinde bir cebir denir.

(3) şartının yerine

$\forall n \in \mathbb{N}, E_n \in A \Rightarrow \bigcup_{n\in N} E_n \in A$ (sayılabilir birleşime göre kapalı)

şartı sağlanırsa A topluluğuna X üzerinde bir σ-cebri denir [44].

Tanım 2.22 A topluluğu X üzerinde bir σ-cebri ise (X, A) ikilisine ölçülebilir uzay denir. A topluluğunun her bir elemanına ölçülebilir küme denir.

Teorem 2.23 X üzerinde bütün σ-cebirlerinin kesişimi yine bir σ-cebridir ve bu kesişim X üzerindeki en küçük σ-cebirdir.

Tanım 2.24 X bir küme ve $\tau \subset P(X)$ alt topluluğu verilsin.

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. $O_1, O_2 \in \tau$ ise $O_1 \cap O_2 \in \tau$
3. $\forall \alpha \in I$ için $O_\alpha \in \tau \Rightarrow \bigcup_{\alpha\in I} O_\alpha \in \tau$

özelliklerini sağlıyorsa τ' ya X üzerinde bir topoloji, (X, τ) ikilisine topolojik uzay denir.

Tanım 2.25 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X uzayının açık kümelerinin topluluğu olan $\tau \subset P(X)$ bir σ- cebir doğurmaktadır. Bu σ-cebire, Borel σ-cebir denir. B_X ile gösterilir. B_X in kümelerine Borel kümeleri denir [44].

Tanım 2.26 (X, A) bir ölçülebilir uzay olsun. μ: $A \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\forall E \in A$ için $\mu(E) \geq 0$
3. $\forall \{E_n\}_{n\in N}$ ayrık dizisi için

$$(\bigcup_{n\in N} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

özelliklerini sağlayan μ fonksiyonuna (X, A) üzerinde bir ölçü, (X, A, μ) üçlüsüne ölçü uzayı denir [44].

Tanım 2.27 $\forall E \in A$ için $\mu(E) < \infty$ ise μ' ye sonlu ölçü, (X, A, μ)' ye sonlu ölçü uzayı denir. $E_n \subseteq A$ için $X = \bigcup_{n\in N} E_n$ ve her n için $\mu(E_n) < \infty$ oluyorsa μ' ye σ-sonlu ölçü ve (X, A, μ)' ye de σ-sonlu ölçü uzayı denir. $\mu(E) = 0$ koşulunu gerçekleyen $E \in A$ kümelerine değersiz küme denir [44].

Uyarı 2.28 Bir özellik değersiz olan bir küme dışında her yerde doğru oluyorsa, bu özellik için "hemen- hemen her yerde (h.h.y)" doğru özellik denir.

Teorem 2.29 (X, A, μ) bir ölçü uzayı olsun. Bu durumda,

1. Monotonluk:
$$E, F \in A \text{ ve } E \subseteq F \implies \mu(E) \leq \mu(F)$$
2. Alt toplanırlılık:
Herhangi bir $\{E_n\}_{n\in N} \subseteq A$ için
$$\mu(\bigcup_{n\in N} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$
3. Alttan süreklilik:
$\{E_n\}_{n\in N} \subseteq A$ artan bir dizi ise
$$\mu(\bigcup_{n\in N} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$
4. Üstten süreklilik:
$\{E_n\}_{n\in N} \subseteq A$ azalan bir dizi ve $\mu(E_1) < \infty$ ise
$$\mu(\bigcap_{n\in N} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

özellikleri sağlanır [45].

Sonuç 2.30 (X, A, μ) bir ölçü uzayı olsun.

1. $\{A_n\}_{n\in N}$, A' daki elemanların artan bir dizisi ise
$$\mu\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$
2. $\{B_n\}_{n\in N}$, A' daki elemanların azalan bir dizisi ve $\mu(B_1) < \infty$
$$\mu\left(\lim_{n\to\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$$

olur [45].

Tanım 2.31 $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $\left(X, P(X)\right)$ bir ölçülebilir uzay olsun.

$\mu^*: P(X) \to [0, \infty]$ fonksiyonu

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\forall E \in P(X)$ için $\mu^*(E) \geq 0$
2. $E, F \in P(X)$ ve $E \subseteq F \implies \mu^*(E) \leq \mu^*(F)$ (Monotonluk)
3. $\{E_n\}_{n\in N} \subseteq P(X)$ dizisi için $\mu(\bigcup_{n\in N} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ (Alt toplanırlılık)

koşulları sağlanıyorsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir dış ölçü denir [44].

Her ölçünün dış ölçü olması gerekmez. Bir ölçünün dış ölçü olabilmesi için g.y.k. her σ- cebrinin $P(X)$ olmasıdır.

Tanım 2.32 (Lebesgue Dış Ölçüsü)

$\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathbb{R}$' nin açık ve sınırlı alt aralıklarının bir dizisi ve $A \subset \mathbb{R}$ için

$$O_A = \{(I_n): A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\}$$

olsun.

$$m^*(A) = inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} l\,(I_n) : (I_n) \in O_A\right\}$$

şeklinde tanımlanan

$$m^*: P(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$$

fonksiyonu bir dış ölçüdür. Bu ölçüye de reel sayıların Lebesgue dış ölçüsü denir.

Reel sayılarda her aralığın Lebesgue dış ölçüsü, bu aralığın uzunluğu olarak ifade edilir. Örneğin; I = [a, b], $I \subset R$ aralığı için $m^*(I) = b - a$ olur.

$\mathbb{R}^n$, n - Boyutlu uzayda Lebesgue dış ölçüsünü betimlemek için

$$I = \{x : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \ldots, n\}$$

n-boyutlu kapalı aralıkları ele alınsın. Alınan n- boyutlu bu aralıkların hacmi

$$v(I) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

olmak üzere $E \subset R^n$ uzayının keyfi birer alt kümesi için Lebesgue dış ölçü

$$m^*(E) = inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} v\,(I_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, I_n \text{ bir aralık}\right\}$$

şeklinde tanımlanır [44].

Tanım 2.33 (Lebesgue Ölçülebilir Küme)

X herhangi bir küme olmak üzere, $\mu^*: P(X) \to [0, \infty]$ bu küme üzerinde tanımlı bir dış ölçü olsun. Bir $E \subseteq \mathbb{R}$ kümesi için

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

eşitliği $\mu^*(A) < \infty$ koşulunu sağlayan her $A \subseteq X$ alt kümesi için sağlanıyorsa E kümesine μ^*-ölçülebilir küme denir.

Sonuç 2.34 Reel sayıların sayılabilir her alt kümesinin dış ölçüsü sıfırdır.

Tanım 2.35 X kümesinin bütün μ^*-ölçülebilir kümelerinin topluluğunu

$$M_X = \{E \subseteq X : E,\ \mu^* - \text{ölçü}lebilir\ \}$$

ile gösterelim. Özel olarak $X = \mathbb{R}$ ve $\mu^* = m^*$ alınırsa m^*-ölçülebilir kümelere Lebesgue ölçülebilir küme denir. M_R, Lebesgue ölçülebilir kümeler topluluğu olmak üzere

$$m^*{}_{|_{M_R}} = m : M_R \to [0, \infty]$$

tam ölçüsüne Lebesgue ölçüsü denir.

Sonuç 2.36 Dış ölçüsü sıfır olan her küme Lebesgue ölçülebilirdir [44].

Tanım 2.37 (X, A) bir ölçülebilir uzay olsun. $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\{x \in X: f(x) > a\} = f^{-1}\big((a, \infty)\big) \in A\ , a \in \mathbb{R}$$

oluyorsa f fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon denir [46].

$M(\mathbb{R}, A)$ ile X üzerinde tanımlı tüm genişletilmiş reel değerli μ-ölçülebilir fonksiyonların kümesi olan A kümesini temsil etmektedir.

Şimdi sunacağımız lemmadaki önermelerin denklikleri, ölçülebilir fonksiyonların tanımında kullanılan kümelerin yapılarında değişiklik yapma olanağı sağlamaktadır.

Önerme 2.38 (X, A) ölçülebilir uzayı verilsin. $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki önermeler birbirine eşdeğerdir:

1. f fonksiyonu ölçülebilirdir.
2. $\forall t \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}\big((t, \infty)\big) = \{x \in X: f(x) > t\} \in A$.
3. $\forall t \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}([t, +\infty)) = \{x \in X: f(x) \geq t\} \in A$.
4. $\forall t \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((-\infty, t)) = \{x \in X: f(x) < t\} \in A$.
5. $\forall t \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((-\infty, t])) = \{x \in X: f(x) \leq t\} \in A$.

Önerme 2.39 Ölçülebilir fonksiyonlar ile yapılabilecek bazı basit cebirsel işlemler sonucunda elde edilen fonksiyonlar yine bir ölçülebilir fonksiyondur.

Yani; $f\ ve\ g$ ölçülebilir fonksiyonlar ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\alpha f\ , f^2, f + g\ , fg\ , |f|$$

fonksiyonları da ölçülebilirdir [44].

Tanım 2.40 $X \neq \emptyset$ bir küme ve $E \subset X$ olsun.

$$\chi_{E(x)} = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

şeklinde betimlenen $\chi_{E(x)}: X \to [0, \infty)$ fonksiyonuna E kümesinin karakteristik fonksiyonu denir [42].

Teorem 2.41 (Fatou Lemması)

(X, A, μ) bir ölçülebilir uzay olsun. f_n, X' te negatif olmayan fonksiyon dizisi ise

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} (f_n)\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

eşitsizliği mevcuttur [44].

Tanım 2.42 X bir normlu uzay ve bu uzaydaki açık kümelerin bir ailesi $O = (O_i)_{i\in I}$ olsun (I indis kümesi). Eğer bir $E \subset X$ alt kümesi için $K \subset \bigcup_{i\in I} O_i$ oluyorsa O açık kümeler ailesine K kümesinin açık örtüsü denir.

Tanım 2.43 K kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa K kümesine kompakt (tıkız) denir.

Sonuç 2.44 $\mathbb{R}^n$ de kapalı ve sınırlı her küme kompakttır [41].

Tanım 2.45 $\varrho: M^+ \to [0, \infty]$ fonksiyonu, $\forall f, g \in M^+$ ve $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M^+$ için, $\forall \lambda \geq 0$ sabiti ve μ-ölçülebilir her $E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi için

$(B_1)\ \varrho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0\ (h.h.y.)$

$(B_2)\ \varrho(\lambda f) = \lambda \varrho(f)$

$(B_3)\ \varrho(f + g) \leq \varrho(f) + \varrho(g)$

$(B_4)\ 0 \leq g \leq f\ (h.h.y.) \Rightarrow \varrho(g) \leq \varrho(f)$ (Latis Özelliği)

$(B_5)\ 0 \leq f_n \uparrow f\ (h.h.y.) \Rightarrow \varrho(f_n) \uparrow \varrho(f)$ (Fatou Özelliği)

$(B_6)\ E \subset \Omega \Rightarrow \varrho(\chi_E) < \infty$

$(B_7)\ E \subset \Omega \Rightarrow \int_E f dx \leq C_E \varrho(f)$

özelliklerini sağlayan, E ve ρ ya bağlı fakat f' den bağımsız bir $0 < C_E < \infty$ sabiti mevcut ise $\varrho: M^+ \to [0, \infty]$ fonksiyonuna Banach fonksiyon normu denir [1].

Tanım 2.46 $\varrho: M^+ \to [0,\infty]$ bir Banach fonksiyon normu olsun. $\varrho(|f|) < \infty$ özelliğine sahip $\forall f \in M$ için ϱ tarafından üretilen uzay olan $X = X(\varrho)$ koleksiyonuna Banach fonksiyon uzayı denir. Ayrıca $\forall f \in X$ için

$$\|f\|_X = \varrho(|f|)$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 2.47 $X = X(\varrho)$ bir Banach fonksiyon uzayı olsun ve $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ X uzayında bir dizi olsun.

a) (Fatou özelliği)
   Eğer $0 \leq f_n \uparrow f$ $(h.h.y.)$ ise, o zaman ya $f \notin X$ ve $\|f_n\|_X \uparrow \infty$ ya da $f \in X$ ve $\|f_n\|_X \uparrow \|f\|_X$ olur.
b) (Fatou Lemması)
   Eğer $f_n \uparrow f$ $(h.h.y.)$ ve $\liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X < \infty$ ise $\|f\|_X < \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X$

olur [1].

Teorem 2.48 ρ bir Banach fonksiyon normu ve $X = X(\varrho)$ olsun. $\|f\|_X = \varrho(|f|)$ şeklinde tanımlansın. O zaman $(X, \|.\|_X)$ normlu lineer uzaydır. Ayrıca,

$$S \subset X \hookrightarrow M_0$$

dır [1].

Teorem 2.49 Her Banach fonksiyon uzayı Riesz-Fischer özelliğine sahiptir [42].

Sonuç 2.50 Her Banach fonksiyon uzayı tamdır.

Teorem 2.51 X ve Y aynı ölçüye sahip iki Banach fonksiyon uzayı olsun. Eğer $X \subset Y$ ise $X \hookrightarrow Y$ dir [1].

Tanım 2.52 $1 \leq p < +\infty$ ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue ölçüsü sonlu küme olsun.

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty$$

özelliğini sağlayan tüm ölçülebilir $f: \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonların uzayına Lebesgue uzayı denir ve $L_p(\Omega)$ ile gösterilir. Bu uzaydaki norm ise

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

şeklinde tanımlanır. $L_p(\Omega)$ klasik Lebesgue uzayı tanımlanan $\|f\|_{L_p(\Omega)}$ normuna göre hem normlu uzay hem de bir Banach uzaydır [5].

Teorem 2.53 (Beppo-Levi Teoremi)

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, E kümesi üzerinde μ-ölçülebilir fonksiyonların dizisi, hemen hemen her yerde $f_n \uparrow f$ ve $\int_E f_1 d\mu > -\infty$ olsun. Bu durumda hemen hemen her $x \in E$ için $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ limiti vardır, f fonksiyonu integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\, d\mu = \int_E f(x) d\mu$$

olur [5].

Teorem 2.54 (Hölder Eşitsizliği)

$1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olmak üzere $f \in L_p(\Omega)$ ve $g \in L_{p'}(\Omega)$ olsun. Dolayısıyla $fg \in L_1(\Omega)$ olur ve

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_{p'}(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 2.55 (Minkovski Eşitsizliği)

$1 < p < \infty$ olsun. $f, g \in L_p(\Omega)$ iken $f + g$, $L_p(\Omega)$ uzayına aittir ve

$$\|f + g\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 2.56 (Young Eşitsizliği)

$1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ve $a.b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.57 (Luzin Teoremi)

X ölçü uzayı olmak üzere, $\mu(X) < \infty$ ve $f: X \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun.

$\forall \varepsilon > 0$ için $\mu(A) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $g: X \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu mevcuttur. Burada, $A = \{x: f(x) \neq g(x)\}$ şeklindedir [45].

Şimdi üstel ve trigonometrik sistemlerin bazlık özelliklerini araştırırken kullanacağımız tanım ve teoremler verilecektir.

2.2 Bazlık Üzerine

Baz kavramı, ilk olarak 1927 yılında J. Schauder tarafından [47] tanımlanmıştır. Bir uzayın elamanların benzersiz olarak linner bağımsız şekilde yazmayı sağlamaktadır.

Tanım 2.58 X sonsuz boyutlu bir Banach uzayı ve $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bu uzayda bir dizi olsun. $\forall x \in X$ için

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n) e_n$$

olacak şekilde benzersiz bir $\{\alpha_n\}$ skaler katsayı dizisi mevcut ise $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, X uzayı için bir Schauder baz denir [47]. Burada $\{\alpha_n\}$, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ile biortogonal katsayı dizisidir [48].

Tanım 2.59 X bir Banach uzayı ve $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, X uzayında bir dizi olsun.

$$L[\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}] = \left\{ \sum_{i=-k}^{k} \alpha_i x_i : \alpha_i \in \mathbb{R} \; ve \; k \in \mathbb{N} \right\}$$

olmak üzere

$$\overline{L[\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}]} = X$$

oluyorsa, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sistemi X uzayında tamdır denir [48].

Tanım 2.60 X Banach uzayı olsun. X^*, X uzayının dual uzayı olmak üzere; $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, X uzayında ve $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, X^* uzayında olan iki sistem olsun.

$$< x_i, x_j^* >= x_j^*(x_i) = \delta_{ij}$$

eşitliği geçerli oluyorsa bu iki sistem biortagonaldir denir. Burada δ_{ij} fonksiyonu $i = j$ için 1, $i \neq j$ için 0 değerini alır [49].

Önerme 2.61 (Tamlık Koşulu)

X Banach uzayı ve X^*, X uzayının dual uzayı olsun. $f \in X^*$ olsun. $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sisteminin tam olması için gerek ve yeter koşul $\forall n \in \mathbb{N}$ için $< y_n, f > = f(y_n) = 0$ olması için $f = 0$ olmalıdır [48].

Tanım 2.62 (Minimallik)

X bir Banach uzayı ve $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bu uzayda bir sistem olsun. $\forall p \in \mathbb{N}$ için

$$x_p \notin \overline{L\left[\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_p}\right]} \ , \mathbb{N}_p = \mathbb{N}\backslash\{p\}$$

oluyor ise, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sistemi X uzayında minimaldir [48].

Önerme 2.63 (Minimallik Koşulu)

X bir Banach uzayı olmak üzere, uzaydaki bir sistemin minimal olması için gerek ve yeter koşul biortagonal sisteminin var olmasıdır [49].

Önerme 2.64 (Bazlık Koşulu) X Banach uzayı olsun. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sistemi, X uzayında bazdır ancak ve ancak

- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sistemi X uzayında tamdır.
- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sistemi X uzayında minimaldir.
- İzdüşüm (projeksiyon) fonksiyonları düzgün sınırlıdır. Yani, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sisteminin biortagonal sistemi olsun.$\exists K > 0 \ : \ \forall n, m \in \mathbb{N}_0$ ve $\forall x \in X$ için

$$\left\| \sum_{k=-m}^{n} f_k(x) x_k \right\|_X \leq K \|x\|_X.$$

koşullarının gerçeklenmesidir [39].

2.3 Değişken Üslü Lebesgue Uzayı Üzerine

Sabit üs ve değişken üsleri ayırt etmek için, değişken üs fonksiyonlarını her zaman $p(.)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.65 Ω, pozitif ölçülü, $\mathbb{R}^n$' in bir alt kümesi olmak üzere, $\mathcal{P}(\Omega)$ tüm Lebesgue ölçülebilir $p(.): \Omega \to [1, \infty]$ fonksiyonların ailesi olsun. $\mathcal{P}(\Omega)$ kümesinin elemanlarına üs fonksiyonu denir. Üs fonksiyonları sınırlı ya da sınırsız olabilir.

Bu durumu açıkça ortaya koyan $\Omega = (1, \infty)$ için $p(x) = x$ (sınırsız) ve $\Omega = (0,1)$ için $p(x) = 1/x$ (sınırlı) örnekler düşünülebilir [7].

$p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ üst fonksiyonunun tanım aralığına göre oluşan durumlara göre

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : p(x) = 1\}$$
$$\Omega_\infty = \{x \in \Omega : p(x) = \infty\}$$
$$\Omega_* = \{x \in \Omega : 1 < p(x) < \infty\}$$

şeklinde kanonik alt kümeleri tanımlansın.

$p(.)$ değişken üssü için $m(\Omega_*) = 0$ için $p_- = p_+ = 1$ ve $m(\Omega_*) > 0$ için

$$p_- = \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega_*} p(x) \ , p_+ = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega_*} p(x)$$

sayıları tanımlansın.

Bir $p(.)$ üs fonksiyonu verildiğinde $p'(.)$ eşlenik üs fonksiyonu olmak üzere $\frac{1}{\infty} = 0$ kabulü ile,

$$\frac{1}{p(.)} + \frac{1}{p'(.)} = 1 \, , x \in \Omega$$

dır. $p'(.)$ eşlenik üs fonksiyonu

$$p'(x) = \begin{cases} \infty & , x \in \Omega_1 \\ \dfrac{p(x)}{p(x)-1} & , x \in \Omega_* \\ 1 & , x \in \Omega_\infty \end{cases}$$

şeklindedir.

Tanım 2.66 $p(.) : \Omega \to [1, \infty]$ ölçülebilir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in \Omega$ için $|x - y| < \frac{1}{2}$ iken

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{c_0}{-log(|x - y|)}$$

eşitsizliğini sağlayan c_0 sabit sayısı varsa $p(.)$ ye lokal log-Hölder sürekli denir. Lokal log-Hölder sürekli $p(.)$ fonksiyonların sınıfı $\mathcal{P}^{log}(\Omega)$ ile gösterilir. $\forall x \in \Omega$ için

$$|p(x) - p_\infty| \leq \frac{c_\infty}{log(e + |x|)}$$

eşitsizliğini sağlayan p_∞ ve c_∞ sabitleri varsa $p(.)$ ye sonsuzda log-Hölder sürekli denir ve bu fonksiyon ailesi $\mathcal{P}_\infty^{log}(\Omega)$ ile gösterilir.

$$LH(\Omega) \coloneqq \mathcal{P}^{log}(\Omega) \cap \mathcal{P}_\infty^{log}(\Omega)$$

$p(.)$, lokal log-Hölder ve sonsuzda log-Hölder sürekli ise $p(.)$ ye log-Hölder sürekli (regüler) denir ve $p(.) \in LH(\Omega)$ dır.

Bu tanımın sonucu olarak, bir Ω kümesi verildiğinde aşağıdaki özellikler geçerlidir:

1. $p(.) \in \mathcal{P}^{log}(\Omega)$ ise $p(.)$ üs fonksiyonu düzgün süreklidir ve $\forall E \subset \Omega$ sınırlı kümesi için $p(.) \in L_\infty(E)$ dır.
2. $p(.) \in \mathcal{P}_\infty^{log}(\Omega)$ise $p(.) \in L_\infty(\Omega)$ dır.
3. Ω sınırlı ve $p(.) \in L_\infty(\Omega)$ ise bu durumda c_∞ sabiti $\|p(.)\|_\infty$ normuna, Ω nın çapına ve orjine olan uzaklığına bağlı olmak üzere $p(.) \in \mathcal{P}_\infty^{log}(\Omega)$ dir.
4. $\forall x, y \in \Omega$ ve $|x| \leq |y|$ için
$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{c}{log(e + |x|)}$$
olacak şekilde c sabit saysı varsa $p(.) \in \mathcal{P}_\infty^{log}(\Omega)$ dir.
5. $p_+ < \infty$ ise $p(.) \in \mathcal{P}^{log}(\Omega)$ olması $r(.) = \frac{1}{p(.)} \in \mathcal{P}^{log}(\Omega)$ olmasını varsaymakla eşdeğerdir. $x, y \in \Omega$ verildiğinde
$$\left|\frac{p(x) - p(y)}{(p_+)^2}\right| \leq \left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)}\right| \leq \left|\frac{p(x) - p(y)}{(p_-)^2}\right|$$
dir. Buna benzer olarak $p(.) \in \mathcal{P}_\infty^{log}(\Omega)$ olması için g.y.k. $r(.) = \frac{1}{p(.)} \in \mathcal{P}_\infty^{log}(\Omega)$ olmasıdır [7].

$\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ olacak şekilde iki küme verildiğinde $p(.) \in \mathcal{P}^{log}(\Omega)$ ise $\tilde{p}(.) = p(.)|_{\widetilde{\Omega}}$ kısıtlanışı $\mathcal{P}^{log}(\widetilde{\Omega})$ sınıfına ait olması, benzer şekilde $\mathcal{P}_\infty^{log}(\Omega)$ sınıfı için de aşikardır. Bunun tersi yani $LH(\widetilde{\Omega})$ sınıfında bir üs fonksiyonu verildiğinde $LH(\Omega)$ içinde bir foksiyona genişletmesi mümkündür. Şimdi vereceğimiz teorem bu genişlemeyi ifade etmektedir.

Teorem 2.67 (Genişleme Teoremi)

$\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ verilsin. $p(.) \in \mathcal{P}(\widetilde{\Omega})$ ve $p(.) \in LH(\widetilde{\Omega})$ olsun. Bu durumda aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\tilde{p}(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ fonksiyonu vardır:

i. $\tilde{p}(.) \in LH(\tilde{\Omega})$,

ii. $\tilde{p}(x) = p(x), x \in \tilde{\Omega}$,

iii. $\tilde{p}_- = p_-$ ve $\tilde{p}_+ = p_+$

[7]. İspatı için [50]' a bakınız.

Tanım 2.68 $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ ve f Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $p(.)$' ye bağlı modüler fonksiyon

$$\rho_{p(.),\Omega}(f) = \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx + \|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)}$$

şeklinde tanımlanır. f fonksiyonu Ω_∞ üzerinde sınırlı değil veya $f(.)^{p(.)} \notin L_1(\Omega \setminus \Omega_\infty)$ ise $\rho_{p(.),\Omega}(f) = +\infty$ şeklinde tanımlanır. $|\Omega_\infty| = 0$ olduğu zaman, özellikle $p_+ < \infty$ iken $\|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)} = 0$ olur. $|\Omega \setminus \Omega_\infty| = 0$ olduğunda ise $\rho_{p(.),\Omega}(f) = \|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)}$ olur [7].

Belirsizliğin olmadığı durumlarda $\rho_{p(.),\Omega}(f)$ modülerini daha basit olarak $\rho_{p(.)}(f)$ veya $\rho(f)$ şeklinde yazabilir.

Bu modüler tarafından değişken üslü Lebesgue uzayını şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$L_{p(.)}(\Omega) := \{f \mid bazı\ \lambda > 0\ için\ \rho_{p(.),\Omega}(f/\lambda) < \infty\}.$$

Şimdi ise modüler fonksiyonun özelliklerini ifade eden bir önerme verilecektir.

Önerme 2.69 Bir Ω kümesi ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verilsin.

i. $\forall f$ için $\rho(f) \geq 0$ ve $\rho(|f|) = \rho(f)$.

ii. $\rho(f) = 0$ olması için g.y.k. hemen hemen her $x \in \Omega$ için $f(x) = 0$ olmasıdır.

iii. $\rho(f) < +\infty$ ise hemen hemen her $x \in \Omega$ için $f(x) < +\infty$ olur.

iv. ρ konvekstir. Yani:

$\alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ için

$$\rho(\alpha f + \beta g) \leq \alpha\rho(f) + \beta\rho(g).$$

v. Eğer hemen hemen her yerde $|f(x)| \geq |g(x)|$ ise $\rho(f) \geq \rho(g)$ dir.

vi. ρ süreklilik özelliğine sahiptir:

Bazı $\Lambda > 0$ için $\rho(f/\Lambda) < \infty$ ise, o zaman $\lambda \mapsto \rho(f/\lambda)$ fonksiyonu süreklidir ve $[\Lambda, \infty)$ üzerinde azalandır. Ayrıca $\lambda \to \infty$ iken $\rho(f/\lambda) \to 0$ dır.

[7].

ρ nun konveksliğinin (dışbükey) doğrudan bir sonucu olarak, $\alpha > 1$ ise $\alpha\rho(f) \leq \rho(\alpha f)$, $0 < \alpha < 1$ ise $\rho(\alpha f) \leq \alpha\rho(f)$ dır.

Sonuç 2.70 Modüler fonksiyon $\rho(f+g) \leq \rho(f) + \rho(g)$ klasik üçgen eşitsizliğini sağlamaz. İşimize yarayacak şöyle bir eşitsizlik vardır:

$$1 \leq p < \infty \text{ ve } a, b \geq 0 \text{ için } (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Bu nedenle, hemen hemen her $x \in \Omega \backslash \Omega_\infty$ için

$$|f(x) + g(x)|^{p(x)} \leq 2^{p(x)-1}\big(|f(x)|^{p(x)} + |g(x)|^{p(x)}\big)$$

özellikle $p_+ < \infty$ ise

$$\rho(f+g) \leq 2^{p_+-1}\big(\rho(f) + \rho(g)\big)$$

dir [7]. Bunu modüler üçgen eşitsizliği olarak adlandıracağız.

Tanım 2.71 Bir Ω kümesi ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verilsin. Bazı $\lambda > 0$ için $\rho(f/\lambda) < \infty$ olursa f Lebesgue ölçülebilir fonksiyonu $L_{p(.)}(\Omega)$ uzayının elemanıdır. Eğer Ω kümesinin kompakt olan her U alt kümesi için $f \in L_{p(.)}(U)$ ise f ölçülebilir fonksiyonu $L^{Loc}_{p(.)}(\Omega)$ uzayının elamanıdır denir [7].

Açıklama 2.72 Önerme 2.69-(iii)' ye göre, eğer $f \in L_{p(.)}(\Omega)$ ise f hemen hemen her yerde sonludur.

Banach fonksiyon uzaylarında ölçülebilir fonksiyonlar üzerinde çalışırken, iki fonksiyonun hemen hemen her yerde eşit olması durumunda eşdeğer kabul edilmesi yaygın bir varsayımdır. Bu çerçevede, sıfır ölçüye sahip bir küme dışında $f(x) = 0$ eşitliği sağlanıyorsa, bu durum $f \equiv 0$ biçiminde ifade edilerek fonksiyonun sıfır fonksiyonu olarak değerlendirilecektir.

$L_{p(.)}(\Omega)$ fonksiyon uzayını tanımlarken, yalnızca tek bir λ değeri ile sınırlı kalmamakta ve daha genel bir yaklaşım benimsenmektedir. Örneğin; $L_{p(.)}(\Omega)$' yi $\rho(f) < \infty$ koşulunu sağlayan tüm f fonksiyonlarının kümesi olarak ele almak, bazı durumlarda geçerli olmayacaktır. Bu kapsamda, $p_+(\Omega \backslash \Omega_\infty) = \infty$ olduğunda uzayı

homojenleştirmek için bu durumu dikkate alarak daha genel bir yapı elde etmeyi amaçlıyoruz.

Açıklama 2.73 Eğer $p_+(\Omega\backslash\Omega_\infty) < \infty$ ise, $\rho(f) < \infty$ koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesi ile $L_{p(.)}(\Omega)$ uzayı çakışır.

Önerme 2.74 Bir Ω kümesi ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verildiğinde $f \in L_{p(.)}(\Omega)$ olması ancak ve ancak

$$\rho(f) = \int_{\Omega\backslash\Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx + \|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)} < \infty$$

olmasıyla doğrudur. Bu da ancak ve ancak $p_+(\Omega\backslash\Omega_\infty) < \infty$ veya $p_- = \infty$ olmasını varsaymakla eşdeğerdir [7].

Önerme 2.75 Bir Ω kümesi ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verildiğinde, eğer $p_+(\Omega\backslash\Omega_\infty) < \infty$ ise, o zaman $\forall\lambda \geq 1$ için

$$\rho(\lambda f) \leq \lambda^{p_+(\Omega\backslash\Omega_\infty)}\rho(f)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $p_+(\Omega) < \infty$ ve $\lambda \geq 1$ iken

$$\lambda^{p_-}\rho(f) \leq \rho(\lambda f) \leq \lambda^{p_+}\rho(f)$$

dir. $0 < \lambda < 1$ olduğunda ters eşitsizlikler doğrudur [7].

Teorem 2.76 Bir Ω kümesi ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verilsin. $L_{p(.)}(\Omega)$ bir vektör uzayıdır [51].

İspat: Tüm Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların kümesi bir vektör uzayı ve $0 \in L_{p(.)}(\Omega)$ olduğundan $\forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ için sıfırdan farklı $f, g \in L_{p(.)}(\Omega)$ ise bu durumda $\alpha f + \beta g \in L_{p(.)}(\Omega)$ olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Önerme 2.69-(v) özellik gereği $\rho(f/\lambda), \rho(g/\lambda) < \infty$ olacak şekilde $\lambda > 0$ vardır. $\mu = (|\alpha| + |\beta|)\lambda$ olarak alınır ve Önerme 2.69-(i), (iii) ve (iv) özellikleriyle birlikte

$$\rho\left(\frac{\alpha f + \beta g}{\mu}\right) = \rho\left(\frac{|\alpha f + \beta g|}{\mu}\right) \leq \rho\left(\frac{|\alpha|}{|\alpha| + |\beta|}\frac{|f|}{\lambda} + \frac{|\beta|}{|\alpha| + |\beta|}\frac{|g|}{\lambda}\right)$$
$$\leq \frac{|\alpha|}{|\alpha| + |\beta|}\rho\left(\frac{f}{\lambda}\right) + \frac{|\beta|}{|\alpha| + |\beta|}\rho\left(\frac{g}{\lambda}\right) < \infty$$

olur. ■

Önerme 2.77 $p(.):\Omega \to [0,1)$ Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $L_{p(.)}(\Omega)$ değişken üslü Lebesgue uzayının vektör uzayı olması için gerek ve yeter koşul $p_+(\Omega) < \infty$ olmasıdır [55].

Tanım 2.78 Ω kümesi ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verilsin ve f ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $L_{p(.)}(\Omega)$ uzayının normu

$$\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} = inf\{\lambda > 0 : \rho_{p(.),\Omega}(f/\lambda) \leq 1\}$$

şeklinde tanımlanır.

Sağ tarafta bulunan inf kümesi boş küme ise $\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} = \infty$ dir. Ω kümesinde bir belirsizlik yoksa $\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)}$ yerine $\|f\|_{p(.)}$ yazılabilir. Önerme 2.69-(vi) özelliğine göre $\forall f \in L_{p(.)}(\Omega)$ için $\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} < \infty$ olur. Buna denk olarak $f \notin L_{p(.)}(\Omega)$ iken $\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} = \infty$ olur. $1 \leq p \leq \infty$ için $p(.) = p_c$ olduğunda verilen tanım klasik Lebesgue uzayındaki norma denktir. Eğer $p < \infty$ ve

$$\int_{\Omega} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^p dx = 1$$

ise $\lambda = \|f\|_{L_p(\Omega)}$ dır. Bu durum $p = \infty$ olduğunda da doğrudur [51].

Teorem 2.79 $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ olsun. $\|.\|_{L_{p(.)}(\Omega)}$ fonksiyonu bir norm ve $\left(L_{p(.)}(\Omega),\ \|.\|_{L_{p(.)}(\Omega)}\right)$ normlu uzaydır. Tanımlanan bu norma göre de bir Banach fonksiyon uzayıdır [51].

İspat: $\|.\|_{L_{p(.)}(\Omega)}$ nin

1. $\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow f = 0.$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\|\alpha f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} = |\alpha| \|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)}.$
3. $\|f + g\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \leq \|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} + \|g\|_{L_{p(.)}(\Omega)}.$

norm koşullarını sağladığını gösterelim.

$f = 0$ ise her $\lambda > 0$ için $\rho(f/\lambda) = 0 \leq 1$ dir. Dolayısıyla, $\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} = 0$ dır.

Tersine, $\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} = 0$ olsun. Böylece $\forall \lambda > 0$ için

$$1 \geq \rho(f/\lambda) = \int\limits_{\Omega\backslash\Omega_\infty} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} dx + \|f/\lambda\|_{L_\infty(\Omega_\infty)}$$

dır. Modülün her bir terimini ayrı ayrı ele alalım. Dolayısıyla $\|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)} \leq \lambda$ olur. Bu yüzden hemen hemen her $x \in \Omega_\infty$ için $f(x) = 0$ dır. Benzer şekilde $\lambda < 1$ için,

$$1 \geq \lambda^{-p_-} \int\limits_{\Omega\backslash\Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx.$$

Dolayısıyla $\left\||f(.)|^{p(.)}\right\|_{L_1(\Omega_\infty)} = 0$ dır ve böylece hemen hemen her $x \in \Omega\backslash\Omega_\infty$ için $f(x) = |f(x)|^{p(x)} = 0$ olur. Böylece $f = 0$ olur (1) gösterilmiştir.

(2) özelliğini gösterelim. Burada $\alpha = 0$ olması durumunda (1) özelliğinden bu aşikardır.

$\alpha \neq 0$ olması halinde değişkenlerin değiştirilmesiyle,$\left(\frac{\lambda}{|\alpha|} = \mu\right)$

$$\begin{aligned}
\|\alpha f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} &= inf\left\{\lambda > 0 : \rho_{p(.),\Omega}\left(\frac{|\alpha| f}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \\
&= |\alpha| inf\left\{\frac{\lambda}{|\alpha|} > 0 : \rho_{p(.),\Omega}\left(\frac{f}{\frac{\lambda}{|\alpha|}}\right) \leq 1\right\} \\
&= |\alpha| inf\left\{\mu > 0 : \rho_{p(.),\Omega}\left(\frac{f}{\mu}\right) \leq 1\right\} \\
&= |\alpha| \|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Son olarak özellik (3) e bakalım. $\lambda_f > \|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)}$ ve $\lambda_g > \|g\|_{L_{p(.)}(\Omega)}$ ise $\rho_{p(.),\Omega}(f/\lambda_f) \leq 1$ ve $\rho_{p(.),\Omega}(g/\lambda_g) \leq 1$ dir. $\lambda = \lambda_f + \lambda_g$ olsun. Bu durumda $\lambda > 1$ için

$$\rho\left(\frac{f+g}{\lambda}\right) = \rho\left(\frac{\lambda_f}{\lambda}\frac{f}{\lambda_f} + \frac{\lambda_g}{\lambda}\frac{g}{\lambda_g}\right) \leq \frac{\lambda_f}{\lambda}\rho\left(\frac{f}{\lambda_f}\right) + \frac{\lambda_g}{\lambda}\rho\left(\frac{g}{\lambda_g}\right) \leq 1.$$

$\|f+g\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \leq \lambda_f + \lambda_g$ elde edilir. λ_f ve λ_g üzerinden infimum alınırak istenilen üçgen eşitsizliğine ulaşılmış olur. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Modüler fonksiyon için mevcut olan sıralama özelliği, norm içinde geçerlidir. Yani, hemen hemen her yerde $|f(x)| \leq |g(x)|$ ise $\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \leq \|g\|_{L_{p(.)}(\Omega)}$ dir.

Klasik Lebesgue uzayının önemli özelliklerinden olan, $1 < s < \infty$ için

$$\|f\|^s_{L_{sp}(\Omega)} = \||f|^s\|_{L_p(\Omega)}$$

üslerin homojenliği özelliği değişken üslü Lebesgue uzayında da geçerlidir.

Önerme 2.80 $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ ve $|\Omega_\infty| = 0$ olsun. $\frac{1}{p_-} \leq s < \infty$ olan $\forall s$ için,

$$\|f\|^s_{L_{sp(.)}(\Omega)} = \||f|^s\|_{L_{p(.)}(\Omega)}$$

olur [7].

İspat: $|\Omega_\infty| = 0$ olduğundan $\mu = \lambda^{1/s}$ alınırsa normun tanımından

$$\begin{aligned}\||f|^s\|_{L_{p(.)}(\Omega)} &= inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \left(\frac{|f(x)|^s}{\lambda}\right)^{p(x)} dx \leq 1\right\} \\ &= inf\left\{\mu^s > 0 : \int_\Omega \left(\frac{|f(x)|}{\mu}\right)^{sp(x)} dx \leq 1\right\} \\ &= \|f\|^s_{L_{sp(.)}(\Omega)}\end{aligned}$$ ■

Örnek 2.81 Eğer $|\Omega/\Omega_\infty| = 0$ ise, $\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} = \|f\|_{L_\infty(\Omega)}$ dır ve üsler homojendir. Ancak, $|\Omega_\infty| > 0$ ama $p(.)$ aynı şekilde sonsuz değilse o zaman bu özelliğin geçerli olmasına gerek yoktur. Bunu görmek için $\Omega = [-1,1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, -1 \leq x \leq 0 \\ 2,\ 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

ve

$$p(x) = \begin{cases} 1, -1 \leq x \leq 0 \\ \infty,\ 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

olsun. Daha sonra

$$\rho_{p(.)}\left(\frac{f^2}{\lambda}\right) = \int_{-1}^{0} \lambda^{-1} dx + 2^2\lambda^{-1} = 5\lambda^{-1},$$

ve $\|f^2\|_{L_{p(.)}(\Omega)} = 5$ dir. Öte yandan benzer bir hesaplama ile $\rho_{2p(.)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) = \lambda^{-2} + 2\lambda^{-1}$ elde edilir. Böylece, $\lambda^{-2} + 2\lambda^{-1} - 1 = 0$ ikinci dereceden denklemini çözersek $\|f\|^2_{L_{2p(.)}(\Omega)} = \left(\sqrt{2} - 1\right)^{-2} \neq 5$ elde edilir [7]. ■

Önerme 2.82 Ω kümesi ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verilsin. $f \in L_{p(.)}(\Omega)$ ve $\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} > 0$ ise, o zaman $\rho\left(f/\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)}\right) \leq 1$ dir. Ayrıca her $f \in L_{p(.)}(\Omega)$ için

$\rho\left(f/\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)}\right) = 1$ olması ancak ve ancak $p_+(\Omega\backslash\Omega_\infty) < \infty$ olmasıyla mümkündür [7].

Sonuç 2.83 Ω kümesi ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verilsin. Eğer $\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \leq 1$ ise, $\rho(f) \leq \|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)}$ ve $\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} > 1$ ise, $\rho(f) \geq \|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)}$ dir [7].

Sonuç 2.84 Ω kümesi ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verildiğinde, $p_+(\Omega) < \infty$ olduğunu varsayalım. Eğer $\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} > 1$ ise,

$$\rho(f)^{\frac{1}{p^+}} \leq \|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \leq \rho(f)^{\frac{1}{p^-}}$$

dir. Eğer $0 < \|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \leq 1$ ise,

$$\rho(f)^{\frac{1}{p^-}} \leq \|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \leq \rho(f)^{\frac{1}{p^+}}$$

dır. Eğer $p(.)$ sabit ise sonuç

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

özdeşliğine indirgenmiş olur [7].

Yukarıdaki sonuçların bir uygulaması olarak, genellikle Amemiya normu olarak adlandırılan $L_{p(.)}(\Omega)$ üzerinde eşdeğer bir norm vereceğiz.

Önerme 2.85 Ω kümesi ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verildiğinde,

$$\|f\|^A_{L_{p(.)}(\Omega)} = inf\{\lambda > 0 : \lambda + \lambda\rho_{p(.),\Omega}(f/\lambda)\}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $\forall f \in L_{p(.)}(\Omega)$ için

$$\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \leq \|f\|^A_{L_{p(.)}(\Omega)} \leq 2\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)}$$

[7].

İspat: Hem $\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)}$ hem de $\|f\|^A_{L_{p(.)}(\Omega)}$ homojen olduğundan, $\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} = 1$ ise $1 \leq \|f\|^A_{L_{p(.)}(\Omega)} \leq 2$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. İkinci taraftaki eşitsizlik, tanım ve Sonuç 2.83' e göre

$$\|f\|^A_{L_{p(.)}(\Omega)} \leq 1 + \rho(f) \leq 1 + \|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} = 2$$

şeklinde gösterilmiş olur. İlk eşitsizliği göstermek için, eğer $\lambda \geq 1$ ise $\lambda + \lambda\rho_{p(.),\Omega}(f/\lambda) \geq \lambda \geq 1$ olduğunu hatırlayalım. Diğer taraftan $0 < \lambda < 1$ ise Önerme 2.75' in ispatında olduğu gibi argümanı kullanarak

$$\lambda + \lambda\rho\left(\frac{f}{\lambda}\right) \geq \lambda^{1-p_-} \int_{\Omega\setminus\Omega_\infty} |f(x)|dx + \|f\|_{L_\infty(\Omega_\infty)} \geq \rho(f) = 1$$

olur. Daha sonra tüm $\lambda > 0$ üzerinden infumum alırsak istenilen eşitsizliği elde etmiş oluruz. ■

Teorem 2.86 (Genelleştirilmiş Hölder Eşitsizliği)

Ω kümesi ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verilsin. Tüm $f \in L_{p(.)}(\Omega)$ ve $g \in L_{p'(.)}(\Omega)$ için $fg \in L_1(\Omega)$ ve

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \leq C_{p(.)}\|f\|_{L_{p(.)}}\|g\|_{L_{p'(.)}}$$

dir, burada

$$C_{p(.)} = \left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{p^+} + 1\right)\|\chi_{\Omega_*}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_\infty}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_1}\|_\infty$$

dır. $C_{p(.)}$ nin tanımlanışında sondaki üç normun her biri 0 veya 1' e eşittir. Bunlardan en az biri 1' e eşit olmalıdır. Bu nedenle $p(.)$ sabit değilse $1 < C_{p(.)} \leq 4$ tür [7].

İspat: $\|f\|_{L_{p(.)}} = 0$ veya $\|g\|_{L_{p'(.)}} = 0$ ise, $fg \equiv 0$ dır. Dolayısıyla burada kanıtlanacak bir şey yoktur. Bu nedenle $\|f\|_{L_{p(.)}}$, $\|g\|_{L_{p'(.)}} > 0$ olduğunu varsayabiliriz. $|fg|$' nin integralini Ω_∞, Ω_1ve Ω_* ayrık kümeleri üzerinde düşünelim. $x \in \Omega_\infty$ ise, $p(x) = \infty$ ve $p'(x) = 1$ dir. Bu yüzden

$$\int_{\Omega_\infty} |f(x)g(x)|\,dx \leq \|f\chi_{\Omega_\infty}\|_\infty \|g\chi_{\Omega_\infty}\|_1$$

$$= \|f\chi_{\Omega_\infty}\|_{L_{p(.)}} \|g\chi_{\Omega_\infty}\|_{L_{p'(.)}} \leq \|f\|_{L_{p(.)}}\|g\|_{L_{p'(.)}} = 1$$

Benzer şekilde $p(.)$ ve $p'(.)$ nin rollerini yer değiştirirsek,

$$\int_{\Omega_1} |f(x)g(x)|\,dx \leq 1$$

eşitsizliğine sahip oluruz. Ω_* üzerinde integralin tahminini düşünürken Young eşitsizliğini kullanırsak

$$\int_{\Omega_*} |f(x)g(x)|\,dx \leq \int_{\Omega_*} \left(\frac{1}{p(x)}|f(x)|^{p(x)} + \frac{1}{p'(x)}|g(x)|^{p'(x)}\right) dx$$
$$\leq \frac{1}{p_-}\rho_{p(.)}(f) + \frac{1}{p'(.)_-}\rho_{p'(.)}(g)$$

elde edilir.

$$\frac{1}{p'(.)_-} = \frac{1}{(p_+)'} = 1 - \frac{1}{p_+} \text{ ve } \rho_{p(.)}(f), \rho_{p'(.)}(g) \leq 1$$

iken

$$\int_{\Omega_*} |f(x)g(x)|\,dx \leq \frac{1}{p_-} + 1 - \frac{1}{p_+}$$

elde edilir. Yukarıdaki terimler birleştirilerek ve karşılık gelen karakteristik fonksiyonun L_∞ normu 1' e eşit olduğunda her birinin tam olarak gerekli olduğu gerçeği kullanılarak

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\left(\frac{1}{p^-} - \frac{1}{p^+} + 1\right)\|\chi_{\Omega_*}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_\infty}\|_\infty + \|\chi_{\Omega_1}\|_\infty\right)\|f\|_{L_{p(.)}}\|g\|_{L_{p'(.)}}$$

eşitsizliğine sahip oluruz ki bu istenen eşitsizliktir. ■

Klasik Lebesgue uzaylarında, $1 \leq p, q, r \leq \infty$ ve $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ olan p, q, r için $f \in L_p(\Omega)$ ve $g \in L_q(\Omega)$ ise $fg \in L_r(\Omega)$ ve

$$\|fg\|_{L_r(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)}\|g\|_{L_q(\Omega)}$$

şeklinde olan Hölder eşitsizliğinin doğrudan sonucu, değişken üslü Lebesgue uzayları içinde geçerlidir.

Sonuç 2.87 $q(.), r(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ üs fonksiyonları verilsin. $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ fonksiyonu

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{r(x)}$$

olarak tanımlansın. O zaman bir K sabiti vardır, öyle ki her $f \in L_{q(.)}(\Omega)$ ve $g \in L_{r(.)}(\Omega)$ için $fg \in L_{p(.)}(\Omega)$ dir. Diğer taraftan,

$$\|fg\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \leq K\|f\|_{L_{q(.)}(\Omega)}\|g\|_{L_{r(.)}(\Omega)}$$

[7].

Şimdi, değişken üslü Lebesgue uzaylarının iç içe geçmelerini ele alacağız. Değişken Lebesgue uzayındaki her fonksiyonun yerel integrallenebilir olduğunu göstererek başlıyoruz. Bunu yapabilmek için basit ama kullanışlı olan aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 2.88 Bir Ω kümesi ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verildiğinde, eğer $E \subset \Omega$ iken $|E| < \infty$ ise $\chi_E \in L_{p(.)}(\Omega)$ ve $\|\chi_E\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \leq |E| + 1$ dir [7].

İspat: $\lambda = |E| + 1$ alalım. O zaman,

$$\rho\left(\frac{\chi_E}{\lambda}\right) = \int_{E\setminus\Omega_\infty} \lambda^{-p(x)}dx + \lambda^{-1}\left\|\chi_{E\cap\Omega_\infty}\right\|_\infty$$
$$\leq \lambda^{-p_-}|E| + \lambda^{-1} \leq \lambda^{-1}(|E| + 1) = 1$$

olup norm tanımıyla istenilen elde edilmiş olur. ■

Açıklama 2.89 Eğer $|\Omega_\infty| = 0$ ise, o zaman Sonuç 2.84' e göre E ve $p(.)$ ye bağlı daha keskin bir sınırlandırma elde ederiz:

$$\|\chi_E\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \leq max\left(|E|^{\frac{1}{p_-}}, |E|^{\frac{1}{p_+}}\right)$$

[7].

Önerme 2.90 Bir Ω kümesi ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verildiğinde, eğer $f \in L_{p(.)}(\Omega)$ ise f lokal (yerel) integrallenebilir [7].

İspat: $E \subset \Omega$ sonlu ölçüye sahip bir küme olsun. Genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği ve Lemma 2.88' den

$$\int_E |f(x)|\,dx \leq C\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)}\|\chi_E\|_{L_{p'(.)}(\Omega)} < \infty.$$

■

Şimdi $L_\infty(\Omega)$' nin $L_p(\Omega)$' ye gömülmesini ele alalım. Lemma 2.88' in kanıtından eğer $|\Omega\setminus\Omega_\infty| < \infty$ ise, $\chi_E \in L_{p(.)}(\Omega)$ olup bu da $L_\infty(\Omega) \subset L_{p(.)}(\Omega)$ anlamına

gelmektedir. Fakat, klasik Lebesgue uzaylarından farklı olarak bu gömme $|\Omega\backslash\Omega_\infty| = \infty$ olsa da geçerli olabilir.

Örnek 2.91 $\Omega = (1, \infty)$ ve $p(x) = x$ olsun. $1 \in L_{p(.)}(\Omega)$ ve bu yüzden $f \in L_\infty(\Omega)$ ise

$$\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \leq \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \|1\|_{L_{p(.)}(\Omega)} < \infty.$$

Daha genel olarak, bu gömmenin ne zaman geçerli olduğuna dair aşağıdaki karakterizasyon mevcuttur.

Önerme 2.92 Bir Ω kümesi ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verilsin. $1 \in L_{p(.)}(\Omega)$ ancak ve ancak $L_\infty(\Omega) \subset L_{p(.)}(\Omega)$ olmasıyla, bu da ancak ve ancak bazı $\lambda > 1$ için

$$\int_{\Omega\backslash\Omega_\infty} \lambda^{-p(x)}\, dx < \infty$$

ise doğrudur. Özellikle, gömme, $|\Omega| < \infty$ veya $\frac{1}{p(x)} \in LH_\infty(\Omega)$ ve $|x| \to \infty$ olarak $p(x) \to \infty$ iken geçerli olur [7].

Bunun bir sonucu olarak, $p(.)$ ve $q(.)$ üslerini $L_{q(.)}(\Omega) \subset L_{p(.)}(\Omega)$ olacak şekilde tamamen karakterize edebiliriz. Klasik Lebesgue uzaylarından farklı olarak, bu gömme $|\Omega| = \infty$ olduğunda dahi mümkündür. Klasik Lebesgue uzaylarında, eğer $|\Omega| < \infty$ ise, her zaman $p \geq q$ iken $L_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ dir.

Teorem 2.93 Bir Ω kümesi ve $p(.), q(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verildiğinde, $|\Omega| < \infty$ olduğunu varsayalım. Hemen hemen her yerde $q(x) \leq p(x)$ olduğunda $L_{p(x)}(\Omega) \subset L_{q(x)}(\Omega)$ olur. Ayrıca, bu durumda

$$\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \leq (1 + |\Omega|)\|f\|_{L_{q(.)}(\Omega)}$$

elde ederiz [51].

Sonuç 2.94 Bir Ω kümesi ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verildiğinde, $|\Omega| < \infty$ olduğunu varsayalım.

$$c_1\|f\|_{p_-} \leq \|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \leq c_2\|f\|_{p_+}$$

olacak şekilde $c_1, c_2 > 0$ sabitleri vardır [51].

Teorem 2.95 Herhangi bir Ω kümesi ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verilsin. O zaman, $L_{q(x)}(\Omega) \subset L_{p(x)}(\Omega)$ ve $\forall f \in L_{q(x)}(\Omega)$ için $\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \leq K\|f\|_{L_{q(.)}(\Omega)}$ olacak şekilde $K > 1$ sayısı vardır ancak ve ancak aşağıdaki koşullar sağlandığında:

(1) Hemen hemen her $x \in \Omega$ için $p(x) \leq q(x)$;

(2) Öyle bir $\lambda > 1$ vardır öyleki

$$\int_D \lambda^{-r(x)} dx < \infty,$$

burada, $D = \{x \in \Omega: p(x) < q(x)\}$ ve $r(.)$ ise aşağıdaki gibi tanımlanan hata üssüdür:

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{r(x)}$$

[51].

$\Phi: L_{p(.)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\|\Phi\| = \sup_{\|f\|_{L_{p(.)}} \leq 1} |\Phi(f)|$$

normu ile tanımlanan Φ sürekli lineer fonksiyonellerin $L_{p(.)}(\Omega)^*$ Banach uzayıdır.

Ölçülebilir bir g fonksiyonu verildiğinde,

$$\Phi_g(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

ile $L_{p(.)}(\Omega)$ üzerinde lineer fonksiyonel olan Φ_g tanımlansın.

Önerme 2.96 Bir Ω kümesi ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verilsin ve g ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda Φ_g, $L_{p(.)}(\Omega)$ üzerinde sürekli lineer fonksiyoneldir ancak ve ancak $g \in L_{p\prime(.)}(\Omega)$ dir. Ayrıca, $\|\Phi_g\| = \|g\|'_{L_{p'(.)}(\Omega)}$ ve böylece

$$k_{p'(.)}\|g\|_{L_{p'(.)}(\Omega)} \leq \|\Phi_g\| \leq K_{p'(.)}\|g\|_{L_{p'(.)}(\Omega)}$$

[7].

$g \to \Phi_g$ lineer eşlemesi, $L_{p\prime(.)}(\Omega)$ ile $L_{p(.)}(\Omega)^*$'ın bir alt uzayı arasında doğal bir tanımlama sağlar. $p(.)$ sınırlı olduğunda, dual uzayın elemanlarını bu şekilde elde ederiz.

Teorem 2.97 Ω bir küme ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verildiğinde, aşağıdakiler birbirine denktir:

(1) $p_+ < \infty$;

(2) $g \to \Phi_g$ eşlemesi bir izomorfizmdir: herhangi bir $g \in L_{p\prime(.)}(\Omega)$ verildiğinde, Φ_g fonksiyoneli sürekli ve lineerdir; tersine, herhangi bir $\Phi \in L_{p(.)}(\Omega)^*$ sürekli lineer foksiyoneli verildiğinde, $\Phi = \Phi_g$ ve $\|g\|_{L_{p\prime(.)}(\Omega)} \approx \|\Phi\|$ olacak şekilde tek türlü $g \in L_{p\prime(.)}(\Omega)$ vardır

Bu teoremden, $p_+ < \infty$ olduğunda dual uzay ile $L_{p(.)}(\Omega)$ ortak uzayının çakışık olduğunu söyleriz. Kolaylık olması açısından $L_{p(.)}(\Omega)^* = L_{p\prime(.)}(\Omega)$ şeklinde ifade edilecektir. Bu izomorfizm örtendir [7].

Sonuç 2.98 Ω bir küme ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verildiğinde $L_{p(.)}(\Omega)$ refleksif (yansımalı) bir uzaydır ancak ve ancak $1 < p_- \leq p_+ < \infty$ [7].

3
GRAND LEBESGUE UZAYLARI

Bu bölümde grand Lebesgue uzayının özellikleri ve ayrılabilir olmayan bu uzayın öteleme (shift) operatörü yardımıyla ayrılabilir alt uzayının tanımlandığı gösterilecektir. Ayrıca üstel ve trigonometrik sistemlerin bazlıkları ele alınacaktır.

3.1 Grand Lebesgue Uzayı ($L_{p)}(\Omega)$ Uzayı)

Tanım 3.1 $1 < p < +\infty$ ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Grand Lebesgue uzayları,

$$L_{p)}(\Omega) \coloneqq \left\{ f \mid f : \Omega \to \mathbb{R}\,,\ \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f(t)|^{p-\varepsilon} dt \right) < +\infty \right\}$$

şeklinde Ω üzerinde tanımlı f- ölçülebilir fonksiyonlardan oluşur. Grand Lebesgue uzayı,

$$\|f\|_{L_{p)}(\Omega)} \coloneqq \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < +\infty$$

şeklinde tanımlanan norma göre bir normlu uzaydır [5].

Teorem 3.2 $1 < p < +\infty$ ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $L_{p)}(\Omega)$ uzayı, $\|f\|_{L_{p)}(\Omega)}$ normuna göre bir Banach uzayıdır [5].

İspat: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $L_{p)}(\Omega)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Yani,

$$\lim_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_{L_{p)}(\Omega)} = \lim_{n,m\to\infty} \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f_m(x) - f_n(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = 0$$

dır. Dolayısıyla $\forall\varepsilon$ için $0 < \varepsilon < p-1$, $n, m > n_0$ iken

$$\sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f_m(x) - f_n(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \frac{\eta}{3}$$

olacak şekilde keyfi bir $\eta > 0$ sayısı için $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Ayrıca keyfi ε, $0 < \varepsilon < p-1$ sayısı için $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $L_{p-\varepsilon}(\Omega)$ de bir Cauchy dizisidir ve $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $L_{p-\varepsilon}(\Omega)$ deki limiti f olsun.

$n > n_0$ olsun. Supremum tanımı gereği $0 < \varepsilon_0(n) < p-1$ olacak şekilde n' ye bağlı $\varepsilon_0(n)$ vardır öyle ki

$$\|f-f_n\|_{L_{p)}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_{\Omega}|f-f_n|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leq \left(\frac{\varepsilon_0(n)}{|\Omega|}\int_{\Omega}|f-f_n|^{p-\varepsilon_0(n)}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0(n)}} + \frac{\eta}{3}$$

Ayrıca $m > n_1$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki

$$\left(\frac{\varepsilon_0(n)}{|\Omega|}\int_{\Omega}|f_m-f_n|^{p-\varepsilon_0(n)}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0(n)}} < \frac{\eta}{3}$$

dir. Bu yüzden $n, m > n_1$ olduğunda

$$\|f-f_n\|_{L_{p)}(\Omega)} \leq \left(\frac{\varepsilon_0(n)}{|\Omega|}\int_{\Omega}|f_m-f_n|^{p-\varepsilon_0(n)}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0(n)}}$$

$$+\left(\frac{\varepsilon_0(n)}{|\Omega|}\int_{\Omega}|f_m-f|^{p-\varepsilon_0(n)}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon_0(n)}} + \frac{\eta}{3}$$

$$< \frac{\eta}{3}+\frac{\eta}{3}+\frac{\eta}{3} = \eta$$

elde edilir. ■

Teorem 3.3 $\mathcal{M}_0$, Ω üzerinde ölçülebilir reel değerli fonksiyonların kümesi olmak üzere,

$\varrho: \mathcal{M}_0^+ \to [0,+\infty]$ ve $\forall\, f, g, f_n \in \mathcal{M}_0^+$ $(n = 1,2,\dots)$, $\forall \lambda \geq 0$ ve $\forall E \subset \Omega$ için

$$L_{p)} = \left\{ f \in \mathcal{M}_0^+ : \rho(|f|) = \|f\|_{L_{p)}(\Omega)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_{\Omega}|f(t)|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty \right\}$$

$L_{p)}(\Omega)$ grand Lebesgue uzayı bir Banach fonksiyon uzayıdır [57].

İspat: Banach fonksiyon normu olma koşullarını sağladığını göstermemiz yeterli olacaktır.

i. $\varrho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0\ (h.h.y.)$:

$\Rightarrow : \varrho(f) = 0$ olsun.

$$\|f\|_{L_{p)}} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\int_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = 0$$

$$\Rightarrow f = 0\ (h.h.y.).$$

$\Leftarrow : f = 0\ (h.h.y.)$ olsun. $A \subseteq \Omega$ vardır öyleki, $|A| = 0$ ve $\forall x \in \Omega \backslash A$ için $f(x) = 0$ dır. Buradan,

$$\|f\|_{L_{p)}} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \left(\int_{\Omega \backslash A} |f(x)|^{p-\varepsilon} dx + \int_{A} |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right) \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = 0$$

ii. $\varrho(\lambda f) = \lambda \varrho(f)$:

$$\varrho(\lambda f) = \|\lambda f\|_{L_{p)}} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |\lambda f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$= \lambda \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$= \lambda \|f\|_{L_{p)}}$$

$$= \lambda \varrho(f).$$

iii. $\varrho(f+g) \leq \varrho(f) + \varrho(g)$:

$$\varrho(f+g) = \|f+g\|_{L_{p)}} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f(x)+g(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leq \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left[\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} + \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |g(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \right]$$

$$\leq \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left[\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_{\Omega}|f(x)|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\right]$$

$$+\sup_{0<\varepsilon<p-1}\left[\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\left(\int_{\Omega}|g(x)|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\right]$$

$$= \|f\|_{L_{p)}} + \|g\|_{L_{p)}}$$

$$= \varrho(f) + \varrho(g)\,.$$

iv. $0 \leq g \leq f\ (h.h.y.) \Rightarrow \varrho(g) \leq \varrho(f)$:

$0 \leq g \leq f\ (h.h.y.)$ olduğundan

$$\int_{\Omega}|g(x)|^{p-\varepsilon}dx \leq \int_{\Omega}|f(x)|^{p-\varepsilon}dx.$$

$$\varrho(g) = \|g\|_{L_{p)}} = \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_{\Omega}|g(x)|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leq \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_{\Omega}|f(x)|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$= \|f\|_{L_{p)}} = \varrho(f).$$

v. $0 \leq f_n \uparrow f\ (h.h.y.) \Rightarrow \varrho(f_n) \uparrow \varrho(f)$:

$0 \leq f_n \uparrow f\ (h.h.y.)$ ise $\|f_n\|_{L_{p-\varepsilon}} \uparrow \|f\|_{L_{p-\varepsilon}}$ olup buradan

$$\varrho(f_n) = \|f_n\|_{L_{p)}} = \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_{\Omega}|f_n(x)|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$= \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\|f_n\|_{L_{p-\varepsilon}} \uparrow \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\|f\|_{L_{p-\varepsilon}}$$

$$= \varrho(f).$$

vi. $E \subset \Omega \Rightarrow \varrho(\chi_E) < \infty$:

E sonlu ölçüye sahip bir küme olsun.

$$\varrho(\chi_E) = \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_{\Omega}|\chi_E|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$= \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_{\Omega}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$= \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}E\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty .$$

vii. $E \subset \Omega \Rightarrow \int_E f dx \leq C_E \varrho(f)$:

$(0 < C_E < \infty , C_E\ \rho\ ve\ E\ ye\ bağlı, f'den\ bağımsız\ )$

E sonlu ölçüye sahip bir küme olsun. Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$\int_E f dx = \int_\Omega f\chi_E dx$$

$$\leq \left(\int_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon} dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_\Omega |\chi_E(x)|^{(p-\varepsilon)'} dx\right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}}$$

$$= \left(\int_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon} dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_E dx\right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} .$$

Böylece $L_{p)}(\Omega)$ bir Banach fonksiyon uzayıdır. ■

Teorem 3.4 $p > 1$ için $L_p(\Omega) \subsetneq L_{p)}(\Omega)$ dir [5].

İspat: $0 < \varepsilon < p - 1$ olmak üzere $t = \frac{p}{p-\varepsilon}$ ve $s = \frac{p}{\varepsilon}$ alınsın.

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{s} = \left(\frac{p-\varepsilon}{p}\right) + \frac{\varepsilon}{p} = 1.$$

$f \in L_p(\Omega)$ için Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left(\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon} dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\right) \leq \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{p-\varepsilon}{p}\cdot\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(|\Omega|^{\frac{\varepsilon}{p}}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$= \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(|\Omega|^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}}\right)$$

$$= (\varepsilon)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} |\Omega|^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} |\Omega|^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}} \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= (\varepsilon)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq (p)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}|f(x)|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$$

olur. Dolayısıyla

$$\sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_{\Omega}|f(x)|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}<\infty$$

olduğundan $f\in L_{p)}(\Omega)$ olur. ■

Aşağıdaki örnek, yukarıda verdiğimiz teoremdeki kapsamanın kesin olduğunu göstermektedir.

Örnek 3.5 $p>1$ için $\Omega=(0,1)$ ve $f(x)=x^{-\frac{1}{p}}$ olsun.

Şimdi $f\in L_{p)}(0,1)\backslash L_{p}(0,1)$ olduğunu gösterelim. Aslında,

$$\int_{0}^{1}|f(x)|^{p}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}(lnx|_{\varepsilon}^{1})=\infty$$

olduğu için $f\notin L_{p}(0,1)$ dir. Diğer yandan

$$\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\int_{0}^{1}\left(x^{-\frac{1}{p}}\right)^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}=\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\int_{0}^{1}x^{-1+\frac{\varepsilon}{p}}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$=\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\frac{p}{\varepsilon}x^{\frac{\varepsilon}{p}}\Big|_{0}^{1}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$=\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\left(\frac{p}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$=p^{\frac{1}{p-\varepsilon}}<p.$$

Buradan

$$\sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\varepsilon\int_{0}^{1}\left(x^{-\frac{1}{p}}\right)^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\leq p<\infty$$

elde edildiğinden $f\in L_{p)}(0,1)\backslash L_{p}(0,1)$ dır [5]. ■

$L_{p)}(\Omega)$ uzaylarının önemli özelliklerinden birisi $p > 1$ ve $0 < \varepsilon < p - 1$ için

$$L_p(\Omega) \subsetneq L_{p)}(\Omega) \subsetneq L_{p-\varepsilon}(\Omega)$$

belirtilen iç içe geçişme özelliğinin sağlanıyor olmasıdır.

Grand Lebesgue uzayınındaki zorluklardan birisi, $C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonlar kümesinin $L_{p)}(\Omega)$ uzayında yoğun olmamasıdır. Ancak, bu sorunun üstesinden gelebilmek için $C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonlarının $L_{p)}(\Omega)$ uzayında kapanışını tanımlayan bir karakterizasyon aşağıdaki teoremdeki gibidir.

Teorem 3.6 $L_{p)}(\Omega)$ uzayı, ayrılabilir uzay değildir. $C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyon kümesi $L_{p)}(\Omega)$ uzayında yoğun değildir. $\overline{C_0^\infty}|_{L_{p)}(\Omega)}$ kısıtlanışı

$$\overline{C_0^\infty}|_{L_{p)}(\Omega)} = \overline{\left\{ f \in L_{p)}(\Omega) : \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int_\Omega |f(x)|^{p-\varepsilon} dx = 0 \right\}}$$

uzayıdır [5].

İspat: $f \in \overline{C_0^\infty}|_{L_{p)}(\Omega)}$ olsun. Öyleyse $n \to \infty$ iken

$$\|f - f_n\|_{L_{p)}(\Omega)} \to 0$$

olacak şekilde bir $f_n \in \overline{C_0^\infty}$ fonksiyon dizisi mevcuttur.

$\delta > 0$ olmak üzere,

$$\left\| f - f_{n_0} \right\|_{L_{p)}} < \frac{\delta}{2} \; ve \; f_{n_0} \in \; C_0^\infty$$

olacak şekilde öyle bir n_0 seçilsin. f_{n_0} için Hölder eşitsizliğinden $\varepsilon \to 0$ için

$$\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_\Omega \left| f_{n_0} \right|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \leq \varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \left| f_{n_0} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \to 0$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $\varepsilon < \varepsilon_0$ olacak şekilde bir $\varepsilon_0 > 0$ mevcut olup

$$\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_\Omega \left| f_{n_0} \right|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \frac{\delta}{2}.$$

Sonuç olarak, $\varepsilon < \varepsilon_0$ iken

$$\left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_{\Omega}|f|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \leq \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_{\Omega}|f-f_{n_0}|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} + \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|}\int_{\Omega}|f_{n_0}|^{p-\varepsilon}dx\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leq \|f-f_{n_0}\|_{L_{p)}} + \frac{\delta}{2}$$

$$\leq \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2} = \delta$$

elde edilir. ■

Şimdi verilecek olan örnek ile $L_{p)}(\Omega)$ uzayının ayrılabilir olmadığı görülmektedir.

Örnek 3.7 $\forall\lambda \in (0,1)$ için aşağıdaki gibi tanımlanan $f_\lambda(t)$ fonksiyon ailesini ele alalım:

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t \leq \lambda \\ (t-\lambda)^{-\frac{1}{p}}, & \quad \lambda < t \leq 1 \end{cases}.$$

$$\sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\varepsilon\int_{\lambda}^{1}\left|(t-\lambda)^{-\frac{1}{p}}\right|^{p-\varepsilon}dt\right) = \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\varepsilon\int_{\lambda}^{1}(t-\lambda)^{-1+\frac{\varepsilon}{p}}dt\right)$$

$$= \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(p(t-\lambda)^{\frac{\varepsilon}{p}}\Big|_{\lambda}^{1}\right) < \infty$$

olup $f_\lambda \in L_{p)}(0,1)$ olduğu aşikardır. $1 > \mu > \lambda$ alındığı zaman

$$\|f_\mu - f_\lambda\|_{L_{p)}} = \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\varepsilon\int_{0}^{1}|f_\mu(t)-f_\lambda(t)|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\geq \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\varepsilon\int_{\lambda}^{\mu}(t-\lambda)^{-1+\frac{\varepsilon}{p}}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\geq \lim_{\varepsilon\to 0}\left(p(\mu-\lambda)^{\frac{\varepsilon}{p}}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = p^{\frac{1}{p}} > \varepsilon$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla $L_{p)}(\Omega)$ uzayının yoğun bir alt uzayı yoktur, ayrılabilir değildir [52].

Teorem 3.8 $L_{p)}(\Omega)$ uzayı yansımalı (refleksif) değildir [5].

İspat: $L_{p)}(\Omega)$ uzayının yansımalı olmaması, $\|f\|_{L_{p)}(\Omega)}$ normunun mutlak sürekli olmadığı bir f fonksiyonun varlığından kaynaklıdır. Bunun için

$$f(x) = x^{-\frac{1}{p}}, x \in (0,1)$$

fonksiyonu alındığında

$$\lim_{a\to 0} \sup_{\varepsilon>0} \left(\varepsilon \int_0^a (x)^{-1+\frac{\varepsilon}{p}} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \neq 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $L_{p)}(\Omega)$ uzayı yansımalı (refleksif) değildir. ■

Grand Lebesgue uzayı ayrılabilir olmadığı için üzerinde bazı uygulamalara olanak vermez. Bunlardan birisi de bazlık kavramıdır. Şimdi ötelemeye göre sürekli operatörün ürettiği $G_{p)}$ alt uzayını tanımlayacağız.

$\forall f \in L_{p)}(-\pi,\pi)$ ve $T_\delta f(x) = \begin{cases} f(x+\delta), & x+\delta \in [-\pi,\pi] \\ 0 \quad , & x+\delta \notin [-\pi,\pi] \end{cases}$ öteleme (shift) operatörü ($T_\delta f(x) = f(x+\delta)$) olmak üzere; $\widetilde{G_{p)}}(-\pi,\pi)$ uzayı

$$\lim_{\delta\to 0} \|T_\delta f - f\|_{L_{p)}} = 0$$

özellikli $f \in L_{p)}(-\pi,\pi)$ fonksiyonlarından oluşur. $\widetilde{G_{p)}}(-\pi,\pi)$ uzayın kapanışı $\overline{\widetilde{G_{p)}}(-\pi,\pi)} = G_{p)}(-\pi,\pi)$ olsun. $G_{p)}(-\pi,\pi)$ uzayı $f \in L_{p)}$ olmak koşuluyla,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{p-\varepsilon} dt = 0$$

özellikli fonksiyonlardan oluşmaktadır [53].

Teorem 3.9 $G_{p)}(\Omega) = \left\{ f \in L_{p)}(\Omega) : \|f(.+\delta) - f(.)\|_{L_{p)}} \to 0, \delta \to 0 \right\}$ şeklinde tanımlanan uzay, $\|.\|_{L_{p)}}$ normuna göre bir Banach uzayıdır (yani, $L_{p)}(\Omega)$ uzayının alt uzayıdır) [52].

Lemma 3.10 $1 < p < \infty$ olmak üzere, $C_0^\infty[-\pi,\pi]$ uzayı $G_{p)}(-\pi,\pi)$ uzayında yoğundur (yani, $\overline{C_0^\infty[-\pi,\pi]} = G_{p)}(-\pi,\pi)$ dir) ve $G_{p)}(-\pi,\pi)$ uzayı ayrılabilirdir [14].

İspat: Keyfi $\eta > 0$ ve keyfi $f \in G_{p)}(-\pi,\pi)$ fonksiyonu ele alınsın.

$\omega_\eta(t)$ çekirdeği aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\omega_\eta(t) = \begin{cases} c_\eta e^{-\frac{\eta^2}{\eta^2-|t|^2}}, & |t| \le \eta \\ 0 \quad , & |t| > \eta \end{cases}.$$

burada $c_\eta$sabit ve $\int_{-\infty}^{\infty} \omega_\eta(t)dt = 1$ dir. $f_\eta(.)$ fonksiyonu, f ile $\omega_\eta(t)$ nin konvolüsyonu olsun, yani

$$f_\eta(t) = \big(f * \omega_\eta\big)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\omega_\eta(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_\eta(t-s)f(s)ds\,.$$

Bu tanımlamanın doğruluğunu $L_{p)}(-\pi,\pi) \subset L_1(-\pi,\pi)$ kapsamasından söyleyebiliriz. $f_\eta(t)$ sonsuz mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere; Minkowski eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \|f - f_\eta\|_{p)} &= \left\| \int_{-\infty}^{\infty} f(.)\omega_\eta(s)ds - \int_{-\infty}^{\infty} f(.-s)\omega_\eta(s)ds \right\|_{p)} \\ &= \left\| \int_{-\infty}^{\infty} [f(.-s) - f(.)]\omega_\eta(s)ds \right\|_{p)} \\ &= \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} [f(t-s) - f(t)]\omega_\eta(s) \right|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} \omega_\eta(s) \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t-s) - f(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} ds \\ &\le (p-1) \sup_{|s|\le\eta} \|f(.-s) - f(.)\|_{p)} \to 0\,, \eta \to 0\,. \end{aligned}$$

Sonuç olarak, $C^\infty[-\pi,\pi]$ uzayı $G_{p)}(-\pi,\pi)$ uzayında yoğundur.

Keyfi $\eta > 0$ ve keyfi $f \in G_{p)}(-\pi,\pi)$ fonksiyonunu düşünelim. Yukarıda kanıtlandığı üzere $\exists g \in C^\infty[-\pi,\pi]$ vardır ki

$$\|f - g\|_{p)} < \frac{\eta}{3}.$$

$\delta > 0$ sayısını $\delta < \pi\left(\frac{\eta}{3(p-1)\|g\|_\infty}\right)^p$ olacak şekilde seçilsin. $E_\delta^+ = (\pi - \delta; \pi)$ ve $E_\delta^- = (-\pi; -\pi + \delta)$ uzunlukları δ olan aralıkları ve

$$g_\delta(t) = \begin{cases} g(t), & t \in (-\pi,\pi)\backslash(E_\delta^- \cup E_\delta^+) \\ 0\ , & t \in (E_\delta^- \cup E_\delta^+) \end{cases}$$

fonksiyonunu düşünelim.

$$\|g - g_\eta\|_{p)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} \int\limits_{E_\delta^- \cup E_\delta^+} |g(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leq \|g\|_\infty \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi} 2\delta\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \frac{\|g\|_\infty (p-1)\delta^{\frac{1}{p}}}{\pi^{\frac{1}{p}}} < \frac{\eta}{3}.$$

$$g_{\delta,\tau}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_\delta(t-s)\omega_\tau(s)ds\ , \tau \in \mathbb{R}$$

olsun. Açıkça görülebilir ki $\tau < \frac{\delta}{2}$ iken $g_{\delta,\tau}(t) \in C_0^\infty(-\pi,\pi)$ dir.

$$\|g_\delta - g_{\delta,\tau}\|_{p)} \to 0\ , \tau \to 0$$

olduğundan $\tau < \frac{\delta}{2}$ vardır, öyle ki

$$\|g_\delta - g_{\delta,\tau}\|_{p)} < \frac{\eta}{3}.$$

Yukarıda elde edilen eşitsizliklerden

$$\|f - g_{\delta,\tau}\|_{p)} \leq \|f-g\|_{p)} + \|g-g_\delta\|_{p)} + \|g_\delta - g_{\delta,\tau}\|_{p)} < \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} = \eta$$

yani, $C_0^\infty(-\pi,\pi)$ uzayı, $G_{p)}(-\pi,\pi)$ uzayında yoğundur. ■

Lemma 3.11

$$L_p(\Omega) \subset G_{p)}(\Omega) \subset L_{p)}(\Omega)$$

sürekli gömmesi mevcuttur ve $G_{p)}(\Omega)\backslash L_p(\Omega) \neq \emptyset$ dır [15].

İspat: Yapılan işlemler n-boyuta kolaylıkla taşınabileceğinden dolayı ispat $\Omega = (0,1)$ seçerek 1- boyut için verilecektir.

$L_{p)}(0,1)$ uzayı ayrılabilir olmadığından (Lemma 3.10 gereği) $G_{p)}(0,1) \subset L_{p)}(0,1)$ gömmesi kesindir.

$L_p(0,1) \subset G_{p)}(0,1)$ olduğunu aşağıdaki eşitsizlikten dolayı söylemek kolaydır:

$$\|f\|_{G_{p)}} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|f\|_{L_{p-\varepsilon}} \leq \|f\|_{L_p} \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} 2^{\frac{\varepsilon}{p(p-\varepsilon)}}$$

$$\leq (p-1)2^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p}.$$

$G_{p)}(0,1) \backslash L_p(0,1) \neq \emptyset$ olduğunu (yani gömmenin kesin olduğunu) göstermek için $G_{p)}(0,1)$ uzayında olup, $L_p(0,1)$ uzayında olmayan

$$f_n(t) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{p}}, & t \in [e^{-n^{2p}}, 1] \\ 0, & t \in \left[0, e^{-n^{2p}}\right) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f_n(t)$ fonksiyon dizisi ele alınsın.

$\|f_n\|_{L_{p)}(0,1)}$ ve $\|f_n\|_{L_p(0,1)}$ normları,

$$\|f_n\|_{L_{p)}(0,1)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon \int_0^1 t^{-1+\frac{\varepsilon}{p}} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = p$$

$$\|f_n\|_{L_p(0,1)} = \left(\int_{e^{-n^{2p}}}^1 t^{-1} dt \right)^{\frac{1}{p}} = n^2$$

şeklindedir. Bu yüzden

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|f_n\|_{L_{p)}(0,1)}}{n^2}$$

serisi $L_{p)}(0,1)$ de yakınsaktır.

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(t)}{n^2}$$

olsun.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için f_n, $G_{p)}(0,1)$ uzayına ait olduğundan $f \in G_{p)}(0,1)$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $f \notin L_p(0,1)$ olduğunu gösterelim:

$$S_m(t) = \sum_{n=1}^{m} \frac{f_n(t)}{n^2}, \forall m \in \mathbb{N}$$

kısmi toplamlar dizisini düşünelim.

$\forall m \in \mathbb{N}$ ve h.h.y $t \in (0,1)$ için $0 \leq S_m(t) \leq S_{m+1}(t)$ dir.

$L_p(0,1)$ uzayında $\forall \varepsilon \in (0, p-1)$ için $S_m \xrightarrow[m\to\infty]{} f$ olduğundan $\forall m \in \mathbb{N}$ ve $t \in (0,1)$ için h.h.y $|S_m(t)|^p \to |f(t)|^p$ dır. Levi teoreminden

$$\int_0^1 |S_m(t)|^p dt \to \int_0^1 |f(t)|^p dt \ , m \to \infty .$$

Öte yandan

$$\begin{aligned} \int_0^1 |S_m(t)|^p dt &= \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{m} \frac{f_n(t)}{n^2} \right|^p dt \\ &\geq \sum_{n=1}^{m} \frac{\int_0^1 |f_n(t)|^p dt}{n^{2p}} \\ &= \sum_{n=1}^{m} \frac{n^{2p}}{n^{2p}} \\ &= m \end{aligned}$$

olduğundan

$$\int_0^1 |S_m(t)|^p dt \to \infty \ , m \to \infty .$$

Sonuç olarak,

$$\int_0^1 |f(t)|^p dt = \infty$$

olduğundan dolayı da $f \notin L_p(0,1)$ dir. ■

3.2 $L_{p)}(\Omega)$ Uzayında Üstel Sistemin Bazlık Özellikleri

Bu bölümde $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sisteminin bazlık özellikleri $G_{p)}(-\pi,\pi)$ uzayında ele alınacaktır.

$1 < p < \infty$ olmak üzere, $G_{p)}(-\pi,\pi) \subset L_{p)}(-\pi,\pi)$ uzayında $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sisteminin normu:

$$\left\|e^{int}\right\|_{p)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|e^{int}\right|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$= \sup_{0<\varepsilon<p-1}\varepsilon^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = p-1$$

dir.

Şimdi vereceğimiz teorem ve lemmalar ile $\left\{e^{int}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sisteminin $G_{p)}(-\pi,\pi)$ uzayındaki bazlığı incelenecektir.

Teorem 3.12 $1 < p < \infty$ olmak üzere, $\left\{e^{int}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sistemi $G_{p)}(-\pi,\pi)$ uzayında tamdır [39].

İspat: Keyfi $\eta > 0$ ve keyfi $f \in G_{p)}(-\pi,\pi)$ fonksiyonunu düşünelim. Lemma 3.10 gereği $C_0^{\infty}(-\pi,\pi)$' ın $G_{p)}(-\pi,\pi)$ da yoğun olup, bir $g_n \in C_0^{\infty}[-\pi,\pi]$ fonksiyonu vardır öyle ki,

$$\|f-g_n\|_{G_{p)}(-\pi,\pi)} < \eta.$$

g_n fonksiyonunun Fourier serisine ait kısmi toplamlar dizisi g_n fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla,

$$\exists m_0\ \forall m > m_0 \quad \sup_{t\in[-\pi,\pi]}|g_n(t)-P_m(t)| < \eta,$$

burada

$$P_m(t) = \sum_{n=-m}^{m} v_n(g_n)e^{int}\ , m \in \mathbb{N}_0.$$

Buradan

$$\|g_n-P_m\|_{G_{p)}(-\pi,\pi)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g_n(t)-P_m(t)|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$< \eta \sup_{0<\varepsilon<p-1} e^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$< \eta(p-1).$$

Bu yüzden

$$\|f-P_m\|_{G_{p)}(-\pi,\pi)} \le \|f-g_n\|_{G_{p)}(-\pi,\pi)} + \|g_n-P_m\|_{G_{p)}(-\pi,\pi)}$$

$$< \eta + \eta(p-1) = \eta p$$

olup $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sistemi $G_{p)}(-\pi,\pi)$ uzayında tamdır. ■

Teorem 3.13 $1 < p < \infty$ olmak üzere, $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sistemi $L_{p)}(-\pi,\pi)$ grand Lebesgue uzayında minimaldir [39].

İspat:

$$v_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \ , f \in L_{p)}(-\pi,\pi)\ , n \in \mathbb{Z}$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyon sistemini ele alalım. Şimdi bu fonksiyonelin sınırlılığını gösterelim.

Herhangi bir $\varepsilon \in (0, p-1)$ için

$$\begin{aligned}
|v_n(f)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt \\
&\le \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}(2\pi)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \\
&= \left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}\varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&\le \varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}}\|f\|_{L_{p)}(-\pi,\pi)}
\end{aligned}$$

olup $v_n(f)$ fonksiyoneli sınırlıdır. Diğer taraftan her $n, m \in \mathbb{Z}$ için

$$v_n\left(e^{imt}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{imt}e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-m)t}dt = \delta_{nm}.$$

Yani, $v_n(.)$ fonksiyoneli ile $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sistemi biortagoneldir. Dolayısıyla $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sistemi $L_{p)}(-\pi,\pi)$ grand Lebesgue uzayında minimaldir. ■

Tanım: (Carleson Eğrisi)

Γ basit düzeltilebilir bir eğri olsun. $t \in \Gamma$ için

$$B(t,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-t| < r\}$$

$$D(t,r) = \Gamma \cap B(t,r)$$

olsun. Eğer en az bir $c_0 > 0$ tam sayısı varsa (burada $c_0, t\ ve\ r$' den bağımsız sabit) $|D(t,r)| \leq c_0 r$ koşulunu sağlayan bu durumda Γ düzeltilebilir eğrisine Carleson eğrisi denir [54].

Teorem 3.14 Γ basit düzeltilebilir bir eğri olsun.

$$S_\Gamma f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - t}d\zeta \ , t \in \Gamma$$

şeklinde ifade edilen S_Γ singüler operatörünün $L_{p)}(-\pi,\pi)$ grand Lebesgue uzayında sınırlı olması ancak ve ancak Γ eğrisinin Carleson eğrisi olmasıyla mümkündür [54].

$\gamma = \{\tau: |\tau| = 1\}$ bir birim çember olmak üzere, $t \in [-\pi,\pi]$ için

$$T : L_{p)}(\gamma) \ \rightarrow \ L_{p)}(-\pi,\pi)$$
$$Tf(t) = f(e^{it})$$

tanımlama operatörünü ele alalım. $G_{p)}(-\pi,\pi)$ uzayının T operatörü altındaki ters görüntüsü $G_{p)}(\gamma)$ uzayı ile ifade edilsin.

Teorem 3.15 $1 < p < \infty$ olmak üzere, S_γ singüler operatörü, $G_{p)}(\gamma)$ uzayında sınırlıdır [39].

İspat: S_γ singüler Teorem 3.14' den $L_{p)}(\gamma)$ uzayında sınırlıdır.

$M = \|S_\gamma\|_{L\left(L_{p)}(-\pi,\pi)\right)}$ olsun.

$\forall f \in G_{p)}(\gamma)$ için $S_\gamma f \in G_{p)}(\gamma)$ olduğunu gösterelim. $\forall \varepsilon > 0$ ve $f \in G_{p)}(\gamma)$ alınsın. $L_{p)}(\gamma)$, $G_{p)}(\gamma)$ içinde yoğun olduğu için $g \in L_{p)}(\gamma)$ vardır öyle ki,

$$\|f - g\|_{G_{p)}(-\pi,\pi)} \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

Dolayısıyla

$$\|S_\gamma f - S_\gamma g\|_{G_{p)}(-\pi,\pi)} \leq \|S_\gamma\|_{L\left(L_{p)}(-\pi,\pi)\right)}\|f - g\|_{G_{p)}(-\pi,\pi)} < \varepsilon.$$

$S_\gamma g \in L_{p)}(\gamma)$ olup, son bağıntıdan $S_\gamma f \in \overline{L_{p)}(\gamma)}$ dir. Yani, $S_\gamma f \in G_{p)}(\gamma)$ dir. ■

Şimdi $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ üstel sisteminin $G_{p)}(-\pi,\pi)$ uzayında bazlığı ile ilgili ana teoremi ve ispatını vereceğiz.

Teorem 3.16 $1 < p < \infty$ olsun. $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ üstel sistemi $G_{p)}(-\pi,\pi)$ uzayında bazdır [39].

İspat: Teorem 3.12 ve Teorem 3.13' den $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ üstel sistemi $G_{p)}(-\pi,\pi)$ uzayında tam ve minimaldir. İspatı tamamlamak için baz olma şartlarından 3. özelliği sağladığını gösterelim.

Keyfi $\eta > 0$ ve keyfi $f \in G_{p)}(-\pi,\pi)$ fonksiyonunu düşünelim.

$$S_{nm}(f)(x) = \sum_{k=-m}^{n} v_k(f)e^{ikx}, n, m \in \mathbb{N}_0$$

operatörünün sınırlılığını göstermeliyiz. Buna denk olarak aşağıdaki gibi tanımlanan projektörlerin düzgün sınırlılığını göstermek yeterlidir:

$$P_m(f)(x) = \sum_{n=-m}^{m} v_n(f)e^{inx}, f \in G_{p)}(-\pi,\pi), m \in \mathbb{N}_0.$$

$P_m(f)(x)$' yi aşağıdaki gibi dönüştürürsek:

$$P_m(f)(x) = \sum_{n=-m}^{m}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt\right)e^{inx}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{n=-m}^{m} e^{in(x-t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_m(x-t)dt,$$

$$K_m(t) = \frac{e^{-imt} - e^{i(m+1)t}}{1-e^{it}}.$$

Buradan $K_m(t)$ düzenlenirse,

$$K_m(t) = \frac{e^{-im(x-t)} - e^{i(m+1)(x-t)}}{1-e^{i(x-t)}}$$

$$= \frac{e^{i(m+1)t}}{e^{it}-e^{ix}}e^{-imx} - \frac{e^{imt}}{e^{it}-e^{ix}}e^{i(m+1)x}$$

elde edilir.

Yani, burada $e_m(t) = e^{imt}, m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$P_m(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_m(x-t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{e^{i(m+1)t}}{e^{it}-e^{ix}}e^{-imx}dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{e^{imt}}{e^{it}-e^{ix}}e^{i(m+1)x}dt$$

$$= e^{-imx}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{T^{-1}(fe_m)(\tau)}{\tau-e^{ix}}d\tau - e^{i(m+1)x}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{T^{-1}\left(fe_{-(m+1)}\right)(\tau)}{\tau-e^{ix}}d\tau$$

$$= e^{-imx}S_\gamma T^{-1}(fe_m)\left(e^{ix}\right) - e^{i(m+1)x}S_\gamma T^{-1}\left(fe_{-(m+1)}\right)\left(e^{ix}\right)$$

$$= e^{-imx}TS_\gamma T^{-1}(fe_m)(x) - e^{i(m+1)x}TS_\gamma T^{-1}\left(fe_{-(m+1)}\right)(x)$$

olur. S_γ singüler operatörü $G_{p)}(-\pi,\pi)$ ayrılabilir alt uzayında sınırlı olduğu için

$$\begin{aligned}\|P_m\|_{G_{p)}(-\pi,\pi)} &= \left\|e^{-imx}TS_\gamma T^{-1}(fe_m)(x)\right.\\ &\quad\left. - e^{i(m+1)x}TS_\gamma T^{-1}\left(fe_{-(m+1)}\right)(x)\right\|_{G_{p)}(-\pi,\pi)}\\ &\le \left\|S_\gamma T^{-1}(fe_m)\right\|_{G_{p)}(\gamma)} + \left\|S_\gamma T^{-1}\left(fe_{-(m+1)}\right)\right\|_{G_{p)}(\gamma)}\\ &\le M\|(fe_m)\|_{G_{p)}(-\pi,\pi)} + M\left\|\left(fe_{-(m+1)}\right)\right\|_{G_{p)}(-\pi,\pi)}\\ &= 2M\|f\|_{G_{p)}(-\pi,\pi)}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece P_m projektör operetörü düzgün sınırlıdır. Dolayısıyla $\left\{e^{int}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ üstel sistemi $G_{p)}(-\pi,\pi)$ uzayında bir bazdır. ■

3.3 $L_{p)}(\Omega)$ Uzayında Trigonometrik Sistemlerin Bazlık Özellikleri

Bu bölümde $\{\sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\{\cos nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ trigonometrik sistemlerinin bazlık özellikleri $G_{p)}(0,\pi)$ uzayında ele alınacaktır.

Teorem 3.17 $1 < p < \infty$ olsun. $\{\sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ trigonometrik sistemi $G_{p)}(0,\pi)$ uzayında bazdır [39].

İspat: İlk olarak minimalliğini incelenirse,

$\forall n \in \mathbb{N}$ ve $f \in L_{p)}(0,\pi)$ olsun.

$$g_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$$

lineer fonksiyonlardan oluşan $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sistemi tanımlansın. $0 < \varepsilon < p-1$ olmak üzere her $f \in L_{p)}(0,\pi)$ için

$$
\begin{aligned}
|g_n(f)| &= \left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt\right| = \frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt\right| \\
&\leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|f(t)|dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}|f(t)|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \pi^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \\
&= 2\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{\pi}|f(t)|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}} \\
&= 2\varepsilon^{-\frac{1}{p-\varepsilon}}\|f\|_{L_{p)}}.
\end{aligned}
$$

Böylece, g_n sistemi $L_{p)}(0,\pi)$ uzayında süreklidir.

Öte yandan,

$m \neq n$ için:

$$
\begin{aligned}
g_n(\sin mt) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin mt\sin nt\,dt \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(m+n)t - \cos(m-n)t]dt \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(m+n)t\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(m-n)t\,dt \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(m+n)t}{m+n}\right]\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(m-n)t}{m-n}\right]\Bigg|_0^{\pi} \\
&= -\frac{1}{\pi}(0-0) + \frac{1}{\pi}(0+0) = 0.
\end{aligned}
$$

$m = n$ için:

$$
g_n(\sin mt) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin mt\sin nt\,dt
$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin mt \sin mt \, dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin mt)^2 dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2mt) dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[t - \frac{\sin 2mt}{2m}\right]\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\pi = 1.$$

$g_n(\sin mt) = \delta_{mn}$ olduğundan $\{\sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ sistemi ile $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sistemi biortagoneldir. Dolayısıyla $\{\sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ sistemi $L_{p)}(0,\pi)$ uzayında minimaldir.

Keyfi olarak $f \in G_{p)}(0,\pi)$ fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyonu $[-\pi,\pi]$ aralığında aşağıdaki gibi genişletelim.

$$F(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0,\pi] \\ -f(-t), & t \in [-\pi,0) \end{cases}$$

$F \in G_{p)}(-\pi,\pi)$ olduğu aşikâr olup

$$\|F\|_{L_{p)}(-\pi,\pi)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(t)|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$= \sup_{0<\varepsilon<p-1}\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{\pi}|f(t)|^{p-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$= \|f\|_{L_{p)}(0,\pi)}$$

dir.

$\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ üstel sistemi $G_{p)}(-\pi,\pi)$ uzayında bir baz olduğundan $n \in \mathbb{Z}$ için

$$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

yazılabilir. Burada

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)e^{-int}dt$$

dir. Elimizdeki c_n katsayısı için

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)e^{-int}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)e^{-int}dt - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)e^{int}dt \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\left(e^{int} - e^{-int}\right)dt \\ &= \frac{1}{i\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt = \frac{1}{2i}g_n(f), n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Öte yandan $c_{-n} = -c_n$ olduğu açıktır. Bu nedenle $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{int} &= \sum_{n=1}^{m} c_n e^{int} - \sum_{n=1}^{m} c_n e^{-int} \\ &= \sum_{n=1}^{m} c_n\left(e^{int} - e^{-int}\right) \\ &= 2i\sum_{n=1}^{m} c_n \sin nt \\ &= \sum_{n=1}^{m} g_n(f)\sin nt \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$f(t) - \sum_{n=1}^{m} g_n(f)\sin nt$$

ifadesinin genişlemesi

$$F(t) - \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{int}$$

olup

$$\left\| F - \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{int} \right\|_{G_{p)}(-\pi,\pi)} = \left\| f - \sum_{n=1}^{m} g_n(f) \sin nt \right\|_{G_{p)}(0,\pi)}$$

yazabiliriz. $m \to \infty$ üzerinden limit alırsak

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(f) \sin nt$$

elde ederiz. Buradan da sonuç olarak $\{\sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ trigonometrik sistemi $G_{p)}(0,\pi)$ uzayında bazdır. Benzer şekilde $\{\cos nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ trigonometrik sistemi $G_{p)}(0,\pi)$ uzayında bazdır. ■

4
DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYINDA BAZLIK

Bu bölümde, değişken üslü Lebesgue uzaylarında yakınsaklık, yoğun alt kümeleri ve ayrılabilir uzay olduğunu ifade edeceğiz. Daha sonra uzayın ayrılabilir olduğundan $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ üstel sisteminin, $\{\cos nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\{\sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ trigonometrik sistemlerin uzayın bazları olduğu ispatlanacaktır.

4.1 $L_{p(.)}(\Omega)$ Uzayında Yakınsaklık

$L_{p(.)}(\Omega)$ değişken üslü Lebesgue uzayında üç tür yakınsaklık mevcuttur. Modüler, norm ve ölçü yakınsaklık. Bu bölümde bu yakınsama türleri ile ilgili tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 4.1 $p(.)\in\mathcal{P}(\Omega)$ olsun ve $\{f_k\}\subset L_{p(.)}(\Omega)$ bir fonksiyon dizisi verilsin. Eğer bazı $\beta>0$ için $k\to\infty$ iken $\rho\big(\beta(f-f_k)\big)\to 0$ oluyorsa, $f_k\to f$' e modüler yakınsar denir. $k\to\infty$ iken $\|f-f_k\|_{L_{p(.)}(\Omega)}\to 0$ oluyorsa $f_k\to f$' e normda yakınsar denir [7].

Norm yakınsamasını, modüler yakınsama ile bağlantıyı vurgulayacak şekilde yeniden formülize edebiliriz.

Önerme 4.2 $p(.)\in\mathcal{P}(\Omega)$ verildiğinde $\{f_k\}$ dizisi normda f fonksiyonuna yakınsar ise $\forall\beta>0$ için $k\to\infty$ iken $\rho\big(\beta(f-f_k)\big)\to 0$. Yani, normdaki yakınsaklık, modülerde yakınsama anlamına gelmektedir [7].

İspat: Diyelim ki önce normda $f_k\to f$ olsun. $\beta>0$ sayısını sabit tutalım. Daha sonra normun homojenliğinden,

$$\|\beta(f-f_k)\|_{L_{p(.)}(\Omega)}=\beta\|(f-f_k)\|_{L_{p(.)}(\Omega)}\to 0.$$

Bu yüzden Sonuç 2.83' e göre, yeterince büyük olan tüm k' lar için

$$\rho\big(\beta(f-f_k)\big)\le\|\beta(f-f_k)\|_{L_{p(.)}(\Omega)}\le 1,$$

ve böylece $\rho\big(\beta(f-f_k)\big)\to 0$ dır.

Tersini kanıtlamak için $\lambda>0$ sayısını sabit tutalım ve $\beta=\lambda^{-1}$ olsun. O zaman yeterince büyük olan tüm k' lar için $\rho\big((f-f_k)/\lambda\big)\le 1$ ve bu yüzden $\|f-f_k\|_{L_{p(.)}(\Omega)}\le\lambda$ dır. Bu herhangi bir λ için doğru olduğundan $\|f-f_k\|_{L_p(\Omega)}\to 0$. ■

Bunun tersi her zaman geçerli değildir.

Örnek 4.3 $\Omega=(1,\infty)$ ve $p(x)=x$ olsun. $f=1$ ve $f_k=\chi_{(1,k)}$ olarak tanımlansın. Modüler olarak $f_k\to f$ yakınsar. Çünkü $k\to\infty$ için

$$\rho\big((f-f_k)/2\big)=\int_k^{\infty}2^{-x}dx\to 0$$

olur. Diğer taraftan f_k normda f fonksiyonuna yakınsamaz çünkü tüm $k\ge 1$ için

$$\rho\big((f-f_k)\big)=\int_k^{\infty}1^{x}dx=\infty$$

olur, bu da $\|f-f_k\|_{L_{p(.)}(\Omega)}\ge 1$ anlamına gelmektedir [7].

Bu örnek $\Omega\backslash\Omega_\infty$ pozitif ölçüye sahip olduğu ve $\Omega\backslash\Omega_\infty$ üzerinde $p(.)$ nin sınırsız olduğu herhangi bir $L_{p(.)}$ uzayına genişletilebilir.

Teorem 4.4 Bir Ω kümesi ve $p(.)\in\mathcal{P}(\Omega)$ verildiğinde normdaki yakınsaklık ancak ve ancak $p_-=\infty$ veya $p_+(\Omega\backslash\Omega_\infty)<\infty$ olması durumunda modüler yakınsamaya eşdeğerdir [7].

Klasik Lebesgue uzaylarında yaygın olan monoton yakınsama teoremi, Fatou lemması ve Lebesgue baskın yakınsama teoremidir. İlk ikisinin versiyonları değişken üslü Lebesgue uzaylarında her zaman doğrudur, ancak üçüncüsü yalnızca üs fonksiyonu sınırlı olduğu durumda doğrudur. Şimdi bu sonuçların her birini sırayla inceleyeceğiz.

Teorem 4.5 (Monoton Yakınsama Teoremi) Verilen bir Ω kümesi ve $p(.)\in\mathcal{P}(\Omega)$ için $\{f_k\}\subset L_{p(.)}(\Omega)$ hemen hemen her yerde f fonksiyonuna noktasal olarak artan negatif olmayan fonksiyonlar dizisi olsun. Bu durumda ya $f\in L_{p(.)}(\Omega)$ ve $\|f_k\|_{L_{p(.)}(\Omega)}\to\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)}$ dır ya da $f\notin L_{p(.)}(\Omega)$ ve $\|f_k\|_{L_{p(.)}(\Omega)}\to\infty$. Sonuç

olarak $f \notin L_{p(.)}(\Omega)$ olduğunda $\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} = \infty$ olarak tanımlayacağımızdan dolayı her durum için $\|f_k\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \to \|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)}$ yazabiliriz [7].

Şimdi vereceğimiz teorem Fatou lemmasının bir benzeridir. Fatou lemmasının klasik versiyonunda, her $\{f_k\}$ dizisinin negatif olmadığını varsaymak gerekir. Ancak, normu aldığımız için vereceğimiz teoremde bu hipotez gerekli değildir.

Teorem 4.6 (Fatou Lemması)

Bir Ω kümesi ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verilsin. $\{f_k\} \subset L_{p(.)}(\Omega)$ fonksiyon dizisinin hemen hemen her yerde noktasal olarak $f_k \to f$ olduğunu varsayalım. Eğer

$$\liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_{L_{p(.)}(\Omega)} < \infty$$

ise $f \in L_{p(.)}(\Omega)$ ve $\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \leq \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_{L_{p(.)}(\Omega)}$ [7].

İspat: Yeni bir

$$g_k(x) = \inf_{m\geq k} |f_m(x)|$$

dizisini tanımlayalım. Daha sonra tüm $m \geq k$ için $g_k(x) \leq |f_m(x)|$ olur ve böylece $g_k \in L_{p(.)}(\Omega)$ dir. Ayrıca tanım gereği $\{g_k\}$ artan bir dizidir ve hemen hemen her $x \in \Omega$ için

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \liminf_{m\to\infty} |f_m(x)| = |f(x)|$$

dir. Bu yüzden, monoton yakınsama teoreminden

$$\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} = \lim_{k\to\infty} \|f_k\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \leq \lim_{k\to\infty} \left(\inf_{m\geq k} \|f_m\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \right) = \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_{L_{p(.)}(\Omega)} < \infty$$

ve $f \in L_{p(.)}(\Omega)$ elde edilir. ■

Yukarıda verilen son iki teoremden farklı olarak, Lebesgue baskın yakınsama teoreminin bir versiyonunu ispatlamak için $p_+ < \infty$ varsaymamız gerekmektedir. Ayrıca ispat, normdaki yakınsaklığı modüler yakınsaklıkla ilişkilendiren aşağıdaki Lemma yı gerektirir.

Lemma 4.7 $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ ve $p_+ < \infty$ olsun. Herhangi bir $\{f_k\} \subset L_{p(.)}(\Omega)$ fonksiyon dizisi ve $f \in L_{p(.)}(\Omega)$ olduğunda $\|f - f_k\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \to 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\rho(f - f_k) \to 0$ olmasıdır [51].

Teorem 4.8 (Lebesgue Baskın Yakınsama Teoremi) Bir Ω kümesi ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verildiğinde $p_+ < \infty$ olsun. Eğer $\{f_k\}$ dizisi hemen hemen her yerde noktasal olarak $f_k \to f$ yakınsar ve hemen hemen her yerde $|f_k(x)| \leq g(x)$ olacak biçimde $g \in L_{p(.)}(\Omega)$ varsa o zaman $f \in L_{p(.)}(\Omega)$ ve $k \to \infty$ iken $\|f - f_k\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \to 0$ [7].

İspat: $p_+ < \infty$ olsun. Önerme 2.74' e göre hemen hemen her yerde $x \in \Omega$ için,

$$|f(x) - f_k(x)|^{p(x)} \leq 2^{p(x)-1}\left(|f(x)|^{p(x)} + |f_k(x)|^{p(x)}\right)$$
$$\leq 2^{p_+}|g(x)|^{p(x)} \in L_1(\Omega).$$

Böylece klasik baskın yakınsaklık teoreminden $k \to \infty$ için $\rho(f - f_k) \to 0$ ve böylece Lemma 4.7' den $\|f - f_k\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \to 0$ olur. ■

Ayrıca $p_+ = \infty$ olduğunda sonuç her zaman yanlıştır.

Sonuç 4.9 Üçgen eşitsizliğinden baskın yakınsaklık teoreminin

$$\|f_k\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \to \|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)}$$

olduğunu söyeyebiliriz [7].

Şimdi ise baskın yakınsaklık teoreminin doğrudan bir sonucu olarak monoton yakınsama teoreminin daha güçlü halini vereceğiz.

Teorem 4.10 Bir Ω kümesi ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ ve $p_+ < \infty$ verildiğinde negatif olamayan f_k fonksiyonlar dizisinin hemen hemen her yerde noktasal olarak bir $f \in L_{p(.)}(\Omega)$ fonksiyonuna artarak yakınsadığını varsayalım. O zaman $\|f - f_k\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \to 0$ [7].

Klasik Lebesgue uzaylarında olduğu gibi norm yakınsaması, $p_- = \infty$ olmadığı sürece dizinin hemen hemen her yerde noktasal yakınsadığı anlamına gelmez.

Örnek 4.11 Bir Ω kümesi ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verildiğinde, eğer $|\Omega \backslash \Omega_\infty| > 0$ ise, $L_{p(.)}(\Omega)$ içinde $f_k \to 0$ norm yakınsak olan bir $\{f_k\}$ dizisi vardır ancak hemen hemen her yerde noktasal değildir [7].

İspat: $|\Omega \backslash \Omega_\infty| > 0$ olduğundan, $0 < |F| < \infty$ ve $p_+(F) < \infty$ koşulunu gerçekleyen bir $F \subset (\Omega \backslash \Omega_\infty)$ kümesi vardır. F kümesinin ikili ayrışımı $F = F_1^1 \cup F_2^1$ şeklinde olsun, burada F_1^1 ve F_2^1 kümeleri ayrıktır ve $|F|/2$ ölçüsüne sahiptir.

Bu ayrışımı tekrarlayalım. Daha sonra tümevarımla, $\forall i$ için F_j^i kümeleri ikili ayrık, $F = \cup_{j=1}^{2^i} F_j^i$ ve $\left|F_j^i\right|/2^i$ olacak şekilde bir $\left\{F_j^i : i \geq 1, 1 \leq j \leq 2^i\right\}$ kümeler koleksiyonunu elde ederiz. $g_j^i = \chi_{F_j^i}$ tarafından $\left\{g_j^i\right\}$ fonksiyonları koleksiyonunu tanımlayalım. Daha sonra Sonuç 2.94' ten

$$\left\|g_j^i\right\|_{L_{p(.)}(\Omega)} = \left\|g_j^i\right\|_{L_{p(.)}(F)} \leq C\left\|g_j^i\right\|_{p_+(F)} \leq C\left(\frac{|F|}{2^i}\right)^{1/p_+(F)}$$

elde edilir. $\{f_k\}$ dizisini $\{g_2^1, g_1^2, g_2^2, g_3^2, g_4^2, \ldots\}$ ile tanımlayalım. $k \to \infty$ için $\|f_k\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \to 0$ olur. Öte yandan, herhangi bir $x \in F$ verildiğinde $\forall i$ için $x \in F_j^i$ olacak şekilde j vardır, böylece $g_j^i(x) = 1$ olacak şekilde sonsuz çoklukta g_j^i fonksiyonu vardır. Bu nedenle $\{f_k\}$ dizisi hemen hemen her yerde noktasal olarak 0' a yakınsamaz. ■

Bu örneğe rağmen, her zaman hemen hemen her yerde noktasal olarak yakınsayan bir norm yakınsak dizinin yakınsak bir alt dizisini bulabiliriz. Bunu göstermek için biraz daha güçlü olan ölçü olarak yakınsaklık özelliğini ele alacağız. Ölçü yakınsamanın tanımını verelim.

Tanım 4.12 (Ölçü Yakınsak) Bir Ω kümesi ve bir $\{f_k\}$ fonksiyon dizisi verildiğinde, $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $K > 0$ vardır ki $k \geq K$ için

$$|\{x \in \Omega : \ |f(x) - f_k(x)| \geq \varepsilon\}| < \varepsilon$$

oluyorsa $f_k \to f$ ölçü olarak yakınsak denir [44]. (Burada f ve $\{f_k\}$ ölçülebilirdir.)

Eğer $\{f_k\}$ ölçü olarak f fonksiyonuna yakınsarsa, o zaman hemen hemen her yerde f fonksiyonuna yakınsayan bir $\left\{f_{k_j}\right\}$ alt dizisi vardır (bkz. [44]). Norm yakınsaması, klasik Lebesgue uzaylarında ölçü içinde yakınsamayı ifade eder ve aynısı değişken üslü Lebesgue uzayları için de geçerlidir.

Teorem 4.13 Bir Ω kümesi ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verilsin. Eğer $\{f_k\} \subset L_{p(.)}(\Omega)$ fonksiyon dizisi normda f' e yakınsıyorsa, o zaman ölçü olarakta f fonksiyonuna yakınsar [7].

Buradan, her norm yakınsak dizinin hemen hemen her yerde noktasal olarak yakınsayan bir alt diziye sahip olduğu sonucuna ulaşılmaktadır. Bu sonucu baskın

yakınsama teoreminin kısmi tersi olan biraz daha güçlü bir sonucun parçası olarak ifade ediyoruz.

Önerme 4.14 Ω bir küme ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ olsun. $\{f_k\} \subset L_{p(.)}(\Omega)$ fonksiyon dizisi normda f fonksiyonuna yakınsak olsun. Böylece $\left\{f_{k_j}\right\}$ alt dizisi ve $g \in L_{p(.)}(\Omega)$ vardır öyle ki, $\left\{f_{k_j}\right\}$ alt dizisi f fonksiyonuna hemen hemen her yerde noktasal olarak yakınsar ve hemen hemen her $x \in \Omega$ için $\left|f_{k_j}(x)\right| \leq g(x)$ olur.

Ölçüde yakınsama, modülde yakınsama ve normda yakınsama arasındaki bağlantı daha kapsamlı olarak ele alıp bu bölüm sonlandırılacaktır.

Teorem 4.15 Ω bir küme ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ olsun. Eğer $\{f_k\} \subset L_{p(.)}(\Omega)$ iken $\|f_k\|_{L_p(\Omega)} \to 0$ (veya ∞) ise $\rho(f_k) \to 0$ (veya ∞) dır. Bunun tersi ancak ve ancak $p_+(\Omega \backslash \Omega_\infty) < \infty$ ise geçerlidir [7].

Teorem 4.16 Ω bir küme ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verildiğinde, $p_+ < \infty$ olduğunu varsayalım. O zaman $f \in L_{p(.)}(\Omega)$ ve bir $\{f_k\} \subset L_{p(.)}(\Omega)$ dizisi için aşağıdakiler eşdeğerdir:

1. Norm yakınsak: $\|f - f_k\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \to 0$,
2. Modüler yakınsak: $\beta > 0$ için $k \to \infty$ iken $\rho\big(\beta(f - f_k)\big) \to 0$,
3. Ölçü yakınsak: $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists K > 0$ vardır ki $k \geq K$ için $|\{x \in \Omega : |f(x) - f_k(x)| \geq \varepsilon\}| < \varepsilon$ ve bazı $\gamma > 0$ için $\rho(\gamma f_k) \to \rho(\gamma f)$

[7].

4.2 $L_{p(.)}(\Omega)$ Uzayının Tamlığı ve Yoğun Alt Kümeleri

Bu bölümde $L_{p(.)}(\Omega)$ değişken üslü Lebesgue uzayının bir Banach uzayı olduğunu göstereceğiz ve bazı yoğun alt kümelerini tanıtacağız. Daha önceki bölümlerde $L_{p(.)}(\Omega)$ uzayının normlu bir vektör uzayı olduğunu kanıtladığımızdan Banach uzayı oldunu görmek için sadece tam olduğu gösterilecektir.

Tamlık ispatımız, klasik Lebesgue uzayları için standart ispatlardan birini takip eder ve bu nedenle bir önceki bölümde ispatlanan yakınsaklık teoremlerini yoğun bir şekilde içermektedir. Riesz-Fischer özelliği ile başlayalım.

Teorem 4.17 Ω bir küme ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verildiğinde, $\{f_k\} \subset L_{p(.)}(\Omega)$ dizisi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L_{p(.)}(\Omega)} < \infty$$

olacak şekilde olsun. O zaman $f \in L_{p(.)}(\Omega)$ vardır öyle ki, $i \to \infty$ iken

$$\sum_{k=1}^{i} f_k \to f$$

norm yakınsak ve

$$\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L_{p(.)}(\Omega)}$$

dır [7].

İspat: Ω üzerinde F fonksiyonunu ve $\{F_i\}$ dizisini sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \ , F_i(x) = \sum_{k=1}^{i} |f_k(x)|.$$

$\{F_i\}$ dizisi negatif olmayan ve hemen hemen her noktada F' ye artarak yakınsayan bir dizidir. Ayrıca, her i için

$$\|F_i\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{i} \|f_k\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L_{p(.)}(\Omega)} < \infty$$

olduğundan $F_i \in L_{p(.)}(\Omega)$ ve normu düzgün sınırlıdır. Diğer taraftan Teorem 4.5' e (Monoton Yakınsama Teoremi) göre $F \in L_{p(.)}(\Omega)$ dir. Özellikle Açıklama 2.72' ye göre F hemen hemen her yerde sonludur. Bu nedenle, $\{F_i\}$ dizisi hemen hemen her yerde noktasal yakınsaktır. Dolayısıyla $\{Y_i\}$ fonksiyonlar dizisini

$$Y_i(x) = \sum_{k=1}^{i} f_k(x)$$

ile tanımlarsak, o zaman bu dizi de mutlak yakınsaklık yakınsaklığı gerektirdiğinden dolayı hemen hemen her yerde noktasal yakınsar. Bu toplamı da f ile gösterelim. Şimdi $Y_0 = 0$ olsun; o zaman herhangi bir $j \geq 0$ için, $Y_i - Y_j \to f - Y_j$ yakınsaması hemen hemen her yerde noktasaldır. Ayrıca,

$$\liminf_{i\to\infty}\left\|Y_i - Y_j\right\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \le \liminf_{i\to\infty}\sum_{k=j+1}^{i}\|f_k\|_{L_{p(.)}(\Omega)} = \sum_{k=j+1}^{\infty}\|f_k\|_{L_{p(.)}(\Omega)} < \infty.$$

Fatou Lemmasından dolayı $j = 0$ alırsak,

$$\|f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \le \liminf_{i\to\infty}\|Y_i\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \le \sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_{L_{p(.)}(\Omega)}.$$

Daha genel olarak, $\forall j$ için aynı ifade şunu söyler,

$$\left\|f - Y_j\right\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \le \liminf_{i\to\infty}\left\|Y_i - Y_j\right\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \le \sum_{k=j+1}^{\infty}\|f_k\|_{L_{p(.)}(\Omega)}.$$

Sağ taraftaki toplam 0' a yakınsadığından dolayı normda $Y_j \to f$ olur. ■

Şimdi vereceğimiz teorem, Teorem 4.17' nin bir sonucu olup $L_{p(.)}(\Omega)$ uzayının tam olduğunu ifader.

Teorem 4.18 Ω bir küme ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ olsun. $L_{p(.)}(\Omega)$ uzayı tamdır. Yani, $L_{p(.)}(\Omega)$ uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsaktır [7].

İspat: $\{f_k\} \subset L_{p(.)}(\Omega)$ bir Cauchy dizisi olsun. $i, j \ge k_1$ için $\left\|f_i - f_j\right\|_{L_{p(.)}(\Omega)} < 2^{-1}$ olacak şekilde k_1 seçelim. $i, j \ge k_2$ için $\left\|f_i - f_j\right\|_{L_{p(.)}(\Omega)} < 2^{-2}$ olacak şekilde $k_2 > k_1$ seçelim. Bu şekilde devam eden seçimler sonucunda $\left\|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\right\|_{L_{p(.)}(\Omega)} < 2^{-j}$ olacak şekilde $\left\{f_{k_j}\right\}$, $k_{j+1} > k_j$ alt dizisi oluşur.

$g_1 = f_{k_1}$ ve $j > 1$ için $g_j = f_{k_j} - f_{k_{j-1}}$ ile yeni bir $\{g_j\}$ tanımlansın. $\forall j$ için

$$\sum_{i=1}^{j} g_i = f_{k_j}$$

teleskopik toplamını elde ederiz. Ayrıca,

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left\|g_j\right\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \le \|f_1\|_{L_{p(.)}(\Omega)} + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} < \infty$$

eşitsizliğine sahibiz. Bu yüzden Teorem 4.17 (Riesz-Fischer özelliğinden) normda $f_{k_j} \to f$ olacak şekilde $f \in L_{p(.)}(\Omega)$ fonksiyonu vardır. Son olarak üçgen eşitsizliğinden,

$$\|f_k - f\|_{L_{p(.)}(\Omega)} \leq \left\|f_k - f_{k_j}\right\|_{L_{p(.)}(\Omega)} + \left\|f_{k_j} - f\right\|_{L_{p(.)}(\Omega)}$$

elde ederiz. $\{f_k\}$ bir Cauchy dizisi olduğundan $f_k \to f$ normda yakınsaktır. Böylece ispat tamamlanmıştır. ■

Şimdi ise $L_{p(.)}(\Omega)$ uzayının yoğun alt kümelerini inceleyeceğiz. Açıklamaların basitleştirilmesi için Ω kümesini açık kabul edeceğiz.

Ω açık bir küme iken $C_c^\infty(\Omega)$ kümesi

$$C_c^\infty(\Omega) \coloneqq \{f \in C^\infty(\Omega): supp(f)\ kompakt\}$$

şeklinde tanımlanır ve burada $supp(f) = \overline{\{x \in \Omega, f(x) \neq 0\}}$ dir.

Teorem 4.19 Ω bir küme ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ verildiğinde, $p_+ < \infty$ olduğunu varsayalım. O zaman, $supp(f) \subset \Omega$ desteğe sahip sınırlı fonksiyonların kümesi $L_{p(.)}(\Omega)$ uzayında yoğundur [7].

Teorem 4.20 Ω bir küme ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ olsun. $p_+ < \infty$ iken Ω üzerinde ölçülebilir tüm sınırlı fonksiyonların kümesi $L_{p(.)}(\Omega)$ uzayında yoğundur [56].

Teorem 4.21 Ω bir küme ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ olsun. $p_+ < \infty$ olduğunda

$$L_{p(.)}(\Omega) \cap L_\infty(\Omega) = \{f \in L_{p(.)}(\Omega): f\ esasen\ sınırlı\}$$

kümesi $L_{p(.)}(\Omega)$ uzayında yoğundur [58].

Lemma 4.22 $1 \leq p^- \leq p^+ < \infty$ ve Ω açık bir küme olsun. $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı, $L_{p(.)}(\Omega)$ uzayında yoğundur [58].

İspat: $f \in L_{p(.)}(\Omega)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Teorem 4.20' den sınırlı bir $g \in L_{p(.)}(\Omega)$ fonksiyonu vardır ki, $\|f - g\|_{L_{p(.)}(\Omega)} < \varepsilon$. Luzin teoremine göre,

$$|U| < min\left\{1, \left(\frac{\varepsilon}{2\|g\|_{L_\infty(\Omega)}}\right)^{p_+}\right\},$$

$\forall x \in \Omega\backslash U$ için $g(x) = h(x)$ ve $sup|h(x)| = \sup_{x \in \Omega\backslash U} |g(x)| \leq \|g\|_{L_\infty(\Omega)}$ olacak şekilde bir h sürekli fonksiyonu ve açık bir U kümesi vardır. $\|g\|_{L_\infty(\Omega)}$ için üçgen eşitsizliğini kullanırsak

$$\|g - h\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \|g\|_{L_\infty(\Omega)} + \|h\|_{L_\infty(\Omega)} \leq 2\|g\|_{L_\infty(\Omega)}$$

yazabiliriz.

$$\rho\left(\frac{g-h}{\varepsilon}\right)=\int_{\Omega}\left|\frac{g(x)-h(x)}{\varepsilon}\right|^{p(x)}dx.$$

$k>0$ için $k^{p(x)}\leq max(1,k^{p_+})$ eşitsizliği sağlandığından dolayı

$$\rho\left(\frac{g-h}{\varepsilon}\right)\leq|U|\,max\left\{1,\left(\frac{2\|g\|_{L_\infty(\Omega)}}{\varepsilon}\right)^{p_+}\right\}\leq 1$$

olur. Yani, $\|g-h\|_{L_{p(.)}(\Omega)}\leq\varepsilon$. Böylece

$$\|f-h\|_{L_{p(.)}(\Omega)}\leq\|f-g\|_{L_{p(.)}(\Omega)}+\|g-h\|_{L_{p(.)}(\Omega)}\leq 2\varepsilon$$

dur. $p_+<\infty$ olduğundan, $C_0^\infty(\Omega)\subset L_{p(.)}(\Omega)$ ve $\rho\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)\leq max\left\{\frac{1}{\varepsilon^{p_-}},\frac{1}{\varepsilon^{p_+}}\right\}\rho(h)<\infty$ olur ve böylece sınırlı bir $D\subset\Omega$ açık kümesi için $\rho\left(\frac{h\chi_{\Omega\setminus D}}{\varepsilon}\right)\leq 1$ dir. Yani, $\|h-h\chi_D\|_{L_{p(.)}(\Omega)}\leq\varepsilon$.

$Q(x)$, $\sup_{x\in\Omega\setminus D}|h(x)-Q(x)|\leq\varepsilon\,min\{1,|D|^{-1}\}$ koşulunu sağlayan bir yaklaşım polinomu olsun. O zaman

$$\rho\left(\frac{h\chi_D-Q\chi_D}{\varepsilon}\right)\leq|D|\,min\{1,|D|^{-1}\}\leq 1$$

olur. Yani, $\|h\chi_D-Q\chi_D\|_{L_{p(.)}(\Omega)}\leq\varepsilon$ dur. Son olarak $\left\|h-h\chi_{\Omega\setminus D}\right\|_{L_{p(.)}(\Omega)}\leq\varepsilon$ durumuna benzer olarak yeterince küçük bir $a>0$ sabiti için $K_a=\{x\in D:dist(x,\partial D)\geq a\}$ kompakt kümesi de $\left\|Q\chi_D-Q\chi_{K_a}\right\|_{L_{p(.)}(\Omega)}\leq\varepsilon$ koşulunu sağlar. $x\in D$ için $0\leq\psi(x)\leq 1$ ve $x\in K_a$ için $\psi(x)=1$ olacak şekilde sürekli bir ψ fonksiyonu alırsak

$$\|Q\chi_D-Q\psi\|_{L_{p(.)}(\Omega)}\leq\left\|Q\chi_D-Q\chi_{K_a}\right\|_{L_{p(.)}(\Omega)}\leq\varepsilon$$

elde ederiz.

$$\begin{aligned}\|f-Q\psi\|_{L_{p(.)}(\Omega)}&\leq\|f-h\|_{L_{p(.)}(\Omega)}+\|h-h\chi_D\|_{L_{p(.)}(\Omega)}+\\&+\|h\chi_D-Q\chi_D\|_{L_{p(.)}(\Omega)}+\|Q\chi_D-Q\psi\|_{L_{p(.)}(\Omega)}\\&<2\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon\\&=5\varepsilon\end{aligned}$$

Böylece, $Q\psi\in C_0^\infty(\Omega)$ elde edilir. İspat tamamlanmış olur. ■

Yukarıda yoğunluk ile ilgili verilen teoremlerin $p_+ < \infty$ olduğunda sağlandığına dikkat edilmelidir. $p_+ = \infty$ olması halinde teoremlerde belirtilen kümeler $L_{p(.)}(\Omega)$ uzayında yoğun olmayacaktır [7].

Bir Banach uzayı sayılabilir ve yoğun bir alt kümeye sahipse ayrılabilir olduğundan aşağıdaki karakterizasyonu verebiliriz.

Teorem 4.23 Ω bir küme ve $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ olsun. $p_+ < \infty$ ise $L_{p(.)}(\Omega)$ uzayı ayrılabilirdir [7].

4.3 Üstel Sistemin Bazlığı

Şimdi $e_n(t) = e^{int}, n \in \mathbb{Z}$ sisteminin bazlığını $L_{p(.)}$ uzayında inceleyelim.

Lemma 4.24 $1 \leq p^- \leq p^+ < \infty$ olsun. $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sistemi $L_{p(.)}$ uzayı üzerinde tamdır [58].

İspat: $1 \leq p^- \leq p^+ < \infty$ olsun. Lemma 4.22' den $C_0^\infty[-\pi,\pi]$ uzayı, $L_{p(.)}$ uzayında yoğundur ve sonuç olarak $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sistemi $L_{p(.)}$ uzayında tamdır. ■

Lemma 4.25 $1 \leq p^- \leq p^+ < \infty$ olsun. $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sistemi $L_{p(.)}$ uzayı üzerinde minimaldir [40].

İspat:

$$e_n^*(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)dt \ , n \in \mathbb{Z}$$

$\{e_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar ailesini ele alalım. $q(.), p(.)$ ile eşlenik fonksiyon olsun. $1 \leq p^- \leq p^+ < \infty$ iken $L_{q(.)}$, $L_{p(.)}$ ye eşlenik uzaydır. Genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği ve Lemma 2.88' den $\forall f \in L_{p(.)}(-\pi,\pi)$ için

$$\begin{aligned} |e_n^*(f)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)dt\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|e^{-int} f(t)\right|dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} C \|f\|_{L_{p(.)}} \left\|\chi_{(-\pi,\pi)}\right\|_{L_{p'(.)}} < \infty$$

olur. Yani, $e_n^*, n \in \mathbb{Z}$ fonksiyonelleri $L_{p(.)}$ üzerinde süreklidir.

Diğer taraftan $e_m = e^{imt}$ olmak üzere,

$$e_n^*(e_m) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-m)t} dt = \delta_{nm}, \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

dır. Dolayısıyla $e_n^*(.)$ fonksiyoneli ile $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sistemi biortagonaldir. Önerme 2.63'ten $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sistemi $L_{p(.)}(-\pi,\pi)$ üzerinde minimaldir. ■

Tanım 4.26 (Hilbert Dönüşümü)

$$Hf(x) = p.v.\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{x-t} dt.$$

Şimdi $1 < p^- \leq p^+ < \infty$ ve $p(.) \in \mathcal{P}^{log}(-\pi,\pi)$ olsun. $\{e_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar ailesi

$$e_n^*(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t) dt \ , n \in \mathbb{Z}$$

şeklinde olsun. $\forall f \in L_{p(.)}$ için aşağıdaki kısmi toplamlar dizisini düşünelim:

$$S_m(f) = \sum_{n=-m}^{m} e_n^*(f) e_n.$$

$$S_m(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x-t) D_m(t) dt$$

burada

$$D_m(t) = \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

Dirichlet çekirdeğidir. Böylece

$$S_m(f) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} \tilde{f}(x-t) dt$$

elde edilir. $\tilde{f}(t)$ ise periyodik olarak $f(t)$ fonksiyonunun eksen boyunca genişletilmesidir.

$f_x^m(t)$ ile

$$f_x^m(t) = \frac{1}{4\pi}\frac{x-t}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}\ sin\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)(x-t)\right)f(t)$$

fonksiyonunu gösterilsin.

$$\frac{f_x^m(t)}{x-t} = \frac{1}{4\pi}\frac{sin\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)(x-t)\right)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}\ f(t)$$

ifadesinde her iki tarafın integralini alalım.

$$p.v.\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_x^m(t)}{x-t}dt = p.v.\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi}\frac{sin\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)(x-t)\right)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}\ f(t)dt$$

olup eşitliğin sağ tarafında $t \to x-t$ dönüşümünü uygularsak

$$p.v.\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi}\frac{sin\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\frac{t}{2}}\ f(x-t)dt$$

olur. Eşitliğin sol tarafı ise $f_x^m(t)$ fonksiyonunun Hilbert dönüşümüdür. Böylece

$$|S_m(f)| = \left|\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\tilde{f}(x-t)dt\right|$$

$$\leq \left|p.v.\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi}\frac{sin\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\frac{t}{2}}\ f(x-t)dt\right| = \left|H\left(f_x^m(t)\right)\right|$$

[59]' dan H Hilbert dönüşümü $L_{p(.)}$ den $L_{p(.)}$' ye sınırlı bir dönüşüm olduğu bilindiğinden

$$\left|H\left(f_x^m(t)\right)\right| \leq M|f_x^m(t)|$$

yazılır. Ayrıca hemen hemen her yerde $(-\pi,\pi)$ üzerinde $|f_x(t)| \le M|g(t)|$ iken $\|f_x(t)\|_{L_{p(.)}} \le M\|g(t)\|_{L_{p(.)}}$dir. Burada M, x' ten bağımsız bir sabittir. Böylece $f_x^m(t)$ fonksiyonu için

$$|f_x^m(t)| \le M_1|f(t)|$$

yazabiliriz, burada M_1 x' ten ve m' den bağımsızdır. Bu ilişkilerden

$$|S_m(f)| \le \left|H\left(f_x^m(t)\right)\right| \le M|f_x^m(t)| \le M_1|f(t)|$$

elde edilir. Bu ilişkilerin kabulünden ve H' nin $L_{p(.)}$ uzayında sınırlılığıyla

$$\left\|\sum_{n=1}^{m} e_n^*(f)e_n\right\|_{L_{p(.)}} \le M_1\|f\|_{L_{p(.)}}$$

elde edilir. Burada M_1 bir sabit (f ve m' den bağımsız). Sonuç olarak, bazlık koşulunu sağlayan $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sistemi $L_{p(.)}$ değişken üslü Lebesgue uzayında bir bazdır [40]. ■

4.4 Trigonometrik Sistemin Bazlığı

Bu bölümde $\{\sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ trigonometrik sisteminin bazlığı incelenecektir.

$\{\sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ sisteminin $L_{p(.)}(0,\pi)$ uzayında minimalliğini gösterelim.

$\forall n \in \mathbb{N}$ ve $f \in L_{p(.)}(0,\pi)$ için

$$v_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\, dt$$

lineer fonksiyonlardan oluşan $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sistemi tanımlansın. $p(.) \in \mathcal{P}(\Omega)$ olmak üzere her $f \in L_{p(.)}(0,\pi)$ için genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği ve Lemma 2.88' den

$$\begin{aligned} |v_n(f)| &= \left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\, dt\right| \\ &\le \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|f(t)|dt \\ &\le \frac{2}{\pi}C(p_-;p_+)\|f\|_{L_{p(.)}}\left\|\chi_{(0,\pi)}\right\|_{L_{p'(.)}} < \infty \end{aligned}$$

olur. Böylece v_n fonksiyonlar sistemi $L_{p(.)}(0,\pi)$ uzayında sınırlı (sürekli) dır.

Diğer yandan, $m \neq n$ için

$$v_n(\sin mt) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin mt \sin nt\, dt = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\cos(m+n)t - \cos(m-n)t]dt$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(m+n)t\, dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(m-n)t\, dt$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(m+n)t}{m+n}\right]\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(m-n)t}{m-n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{\pi}(0-0) + \frac{1}{\pi}(0+0) = 0.$$

$m = n$ için

$$v_n(\sin mt) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin mt \sin nt\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin mt \sin mt\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin mt)^2 dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2mt)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[t - \frac{\sin 2mt}{2m}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\pi = 1.$$

$v_n(\sin mt) = \delta_{mn}$ olduğundan $\{\sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ sistemi ile $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sistemi biortagoneldir. Dolayısıyla $\{\sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ sistemi $L_{p(.)}(0,\pi)$ uzayında minimaldir.

Keyfi olarak $f \in L_{p(.)}(0,\pi)$ fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyonu $[-\pi,\pi]$ aralığında aşağıdaki gibi genişletelim.

$$F(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0,\pi] \\ -f(-t), & t \in [-\pi,0) \end{cases}$$

$F \in L_{p(.)}(-\pi,\pi)$ olduğu aşikâr olup

$$\|F\|_{L_{p(.)}(-\pi,\pi)} = inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$$

$$= inf\left\{\lambda > 0 : \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{F(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\}$$

$$= inf\left\{\lambda > 0 : 2\int_{0}^{\pi} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\}$$

$$= 2.inf\left\{\lambda > 0 : \int_{0}^{\pi} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\}$$

$$= 2\|f\|_{L_{p(.)}(0,\pi)}$$

dir.

$\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ üstel sistemi $L_{p(.)}(-\pi,\pi)$ uzayında bir baz olduğundan $n \in \mathbb{Z}$ için

$$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

yazılabilir. Burada

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)e^{-int}dt$$

dir. Elimizdeki c_n katsayısı için

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)e^{-int}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)e^{-int}dt - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)e^{int}dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\left(e^{int} - e^{-int}\right)dt$$

$$= -\frac{i}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\left(\frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}\right)dt$$

$$= \frac{1}{i\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt$$

$$= \frac{1}{2i} v_n(f), n \in \mathbb{N}.$$

Öte yandan $c_{-n} = -c_n$ olduğu açıktır. Bu nedenle $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\sum_{n=-m}^{m} c_n e^{int} &= \sum_{n=1}^{m} c_n e^{int} - \sum_{n=1}^{m} c_n e^{-int} \\ &= \sum_{n=1}^{m} c_n \left(e^{int} - e^{-int}\right) \\ &= 2i \sum_{n=1}^{m} c_n \sin nt \\ &= \sum_{n=1}^{m} v_n(f) \sin nt\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$f(t) - \sum_{n=1}^{m} v_n(f) \sin nt$$

ifadesinin genişlemesi

$$F(t) - \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{int}$$

olup

$$\left\| F - \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{int} \right\|_{L_{p(.)}(-\pi,\pi)} = 2. \left\| f - \sum_{n=1}^{m} v_n(f) \sin nt \right\|_{L_{p(.)}(0,\pi)}$$

yazabiliriz. $m \to \infty$ üzerinden limit alırsak

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(f) \sin nt$$

elde ederiz. Buradan da sonuç olarak $\{\sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ trigonometrik sistemi $L_{p(.)}(0,\pi)$ uzayında bazdır. Benzer şekilde $\{\cos nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ trigonometrik sistemi $L_{p(.)}(0,\pi)$ uzayında bazdır. ■

5
GRAND DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYI

Bu bölümde, 2014 yılında [60]' ta tanıtılan $L_{p(.),\theta}$ ve $\mathcal{L}_{p(.),\theta}$ yeni Banach fonksiyon uzaylarına yer verilmiştir. $L_{p(.),\theta}$ ve $\mathcal{L}_{p(.),\theta}$ uzayları, standart olmayan değişken üslü Lebesgue uzayı ve grand Lebesgue uzayı olan iki fonksiyon uzayını kapsar nitelikte olan ve son yıllarda üzerinde araştırmaların yoğunlaşıldığı fonksiyon uzaylarındandır. Bu uzaylar refleksif (yansımalı) ve ayrılabilir olmayan Banach uzayıdır. Bu bölümde $X \subset \mathbb{R}^n$ pozitif ölçülü bir küme olmak üzere, $\mathcal{P}(X)$ tüm Lebesgue ölçülebilir $p(.)$ üs fonksiyonların ailesini ifade etmektedir.

Tanım 5.1 $\theta > 0$ olsun. $L_{p(.),\theta}(X)$ grand değişken üslü Lebesgue uzayları

$$\|f\|_{L_{p(.),\theta}(X)} := \sup_{0<\varepsilon<p_- -1} \varepsilon^{\frac{\theta}{p_- -\varepsilon}} \|f\|_{L_{p(x)-\varepsilon}(X)}$$

normunun sonlu olduğu tüm ölçülebilir $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonların uzayıdır [60]. $L_{p(.),\theta}(X)$ uzayı ile birlikte

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{p(.),\theta}(X)} := \sup_{0<\varepsilon<p_- -1} \left\| \varepsilon^{\frac{\theta}{p_- -\varepsilon}} f \right\|_{L_{p(x)-\varepsilon}(X)}$$

normu ile $\mathcal{L}_{p(.),\theta}(X)$ uzayı tanımlansın [60].

Lemma 5.2 Aşağıdaki sürekli gömme sağlanmaktadır:

$$\mathcal{L}_{p(.),\theta}(X) \hookrightarrow L_{p(.),\theta}(X)$$

[61].

İspat: $p_- \leq p(x)$ olduğundan, küçük bir $\varepsilon > 0$ için $\varepsilon^{\frac{\theta}{p_- -\varepsilon}} \leq \varepsilon^{\frac{\theta}{p(x)-\varepsilon}}$ olur. Bu yüzden

her $\varepsilon \in (0, p_- - 1)$ için

$$\varepsilon^{\frac{\theta}{p_- -\varepsilon}} \|f\|_{L_{p(x)-\varepsilon}(X)} \leq c_p \left\| \varepsilon^{\frac{\theta}{p_- -\varepsilon}} f \right\|_{L_{p(x)-\varepsilon}(X)}$$

olur. Buradaki c_p pozitif sabiti yalnızca p' ye bağlıdır [60]. ■

Sonuç 5.3 Öyle bir f fonksiyonu vardır ki $f \in L_{p(.),\theta}(X)$ fakat $f \notin \mathcal{L}_{p(.),\theta}(X)$ dir.

Gerçekten, $0 < \theta < 1, X = [0,1], d\mu = dx$ ve $d(x,y) = |x-y|$ olsun.

p_1, p_2 birer sabit ve $1 < p_2 < \theta p_1$ için

$$p(x) = \begin{cases} p_1, & x \in [0,1/2] \\ p_2, & x \in (1/2,1] \end{cases}$$

olsun. Varsayalım ki

$$f(x) = \begin{cases} x^{-\frac{1}{p_1}}, & x \in [0,1/2] \\ 1 \quad , & x \in (1/2,1]. \end{cases}$$

Bu durumda kolayca gösterilebilir ki $f \in L_{p(.),\theta}(X)$ fakat $f \notin \mathcal{L}_{p(.),\theta}(X)$ dir [60].

$X \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir küme olsun. Eğer $p(.) = p = sabit$ ise o zaman $L_{p(.),\theta}(X) = \mathcal{L}_{p(.),\theta}(X)$ ve bu ise [62]' de tanıtılan $L_{p),\theta}(X)$ grand Lebesgue uzayına, $p(.) = p = sabit$ ve $\theta = 1$ olması durumunda ise [9]' da tanıtılan $L_{p)}(X)$ uzayına karşılık gelmektedir [60].

Önerme 5.4 $p(.), q(.) \in P(X)$ olsun.

$$L_{p(x)}(X) \hookrightarrow L_{q(x)}(X)$$

sürekli gömmesi ancak ve ancak $p(x) \geq q(x)$ ise geçerlidir. Ayrıca gömme normu $1 + \mu(X)$ değerini aşamaz [33].

Önerme 5.5 $p(.) \in P(X)$ ve $\theta > 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

a) $L_{p(.),\theta}(X)$ ve $\mathcal{L}_{p(.),\theta}(X)$ uzayları tamdır. Yani, Banach uzayıdır.

b) $L_{p(.)}(X)$' nin $L_{p(.),\theta}(X)$ $\left(\mathcal{L}_{p(.),\theta}(X)\right)$ içindeki kapanışı

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\frac{\theta}{p_- - \varepsilon}} \|f(.)\|_{L_{p(.)-\varepsilon}(X)} = 0 \left(\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| \varepsilon^{\frac{\theta}{p_- - \varepsilon}} f(.) \right\|_{L_{p(.)-\varepsilon}(X)} = 0 \right)$$

özelliğine sahip $f \in L_{p(.),\theta}(X)$ $\left(f \in \mathcal{L}_{p(.),\theta}(X)\right)$ fonksiyonlarından oluşur [60].

İspat:

a) $\mathcal{L}_{p(.),\theta}(X)$ için ispat vereceğiz. $L_{p(.),\theta}(X)$ için kanıt benzerdir.

$\{f_n\}$, $\mathcal{L}_{p(.),\theta}(X)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun.

$$\varepsilon^{\frac{\theta}{p_- - \varepsilon}}\|f\|_{L_{p(x)-\varepsilon}(X)} \le c_p \left\|\varepsilon^{\frac{\theta}{p_- - \varepsilon}} f\right\|_{L_{p(x)-\varepsilon}(X)}, \varepsilon \in (0, p_- - 1)$$

olduğundan her $\varepsilon \in (0, p_- - 1)$ için $\{f_n\}$ $L_{p(.)-\varepsilon}(X)$ uzayında bir Cauchy dizisidir. Öyle bir f fonksiyonu vardır ki her $\varepsilon \in (0, p_- - 1)$ için $\|f - f_n\|_{L_{p(.)-\varepsilon}(X)} \to 0$.

Burada f, ε' dan bağımsızdır. Bu durum Önerme 5.4' ten dolayıdır.

$\eta > 0$ olsun. O zaman $N(\eta) > 0$ vardır öyle ki $\forall \varepsilon \in (0, p_- - 1)$ için

$$\left\|\varepsilon^{\frac{\theta}{p(.)-\varepsilon}}(f_n - f_m)\right\|_{L_{p(.)-\varepsilon}(X)} < \frac{\eta}{3}, \qquad n, m > N(\eta).$$

$n > N(\eta)$ için bir $\varepsilon_0(n) \in (0, p_- - 1)$ vardır ki

$$\|f - f_n\|_{L_{p(.),\theta}(X)} \le \left\|\varepsilon_0(n)^{\frac{\theta}{p(.)-\varepsilon_0(n)}}(f - f_n)\right\|_{L_{p(.)-\varepsilon_0(n)}(X)} + \frac{\eta}{3}.$$

Ayrıca, öyle bir M sayısı vardır ki, eğer $m > M$ ise, o zaman

$$\left\|\varepsilon_0(n)^{\frac{\theta}{p(.)-\varepsilon_0(n)}}(f - f_m)\right\|_{L_{p(.)-\varepsilon_0(n)}(X)} \le \varepsilon_0(n)^{\frac{\theta}{p_+ - \varepsilon_0(n)}}\|(f - f_m)\|_{L_{p(.)-\varepsilon_0(n)}(X)} \le \frac{\eta}{3}.$$

Bu tahminler toparlanacak olursa $n > N_1(\eta)$ ve $m > M$ için

$$\begin{aligned}\|f - f_n\|_{L_{p(.),\theta}(X)} &\le \left\|\varepsilon_0(n)^{\frac{\theta}{p(.)-\varepsilon_0(n)}}(f - f_n)\right\|_{L_{p(.)-\varepsilon_0(n)}(X)} + \frac{\eta}{3} \\ &\le \left\|\varepsilon_0(n)^{\frac{\theta}{p(.)-\varepsilon_0(n)}}(f_n - f_m)\right\|_{L_{p(.)-\varepsilon_0(n)}(X)} \\ &\quad + \left\|\varepsilon_0(n)^{\frac{\theta}{p(.)-\varepsilon_0(n)}}(f - f_m)\right\|_{L_{p(.)-\varepsilon_0(n)}(X)} + \frac{\eta}{3} \le \eta.\end{aligned}$$

b) $\mathcal{L}_{p(.),\theta}(X)$ için ispatı vereceğiz. $L_{p(.),\theta}(X)$ normu için kanıt aynıdır.

$\mathcal{L}_{p(.),\theta}(X)$ içinde $L_{p(.)}(X)$' nin kapanışını $\left[L_{p(.)}\right]_{p(.),\theta}$ ile gösterelim. $f \in \left[L_{p(.)}\right]_{p(.),\theta}$ için $L_{p(.)}(X)$ içinde $\|f - f_n\|_{L_{p(.),\theta}(X)} \to 0$ olacak şekilde bir $\{f_n\}$ dizisi vardır. $\delta > 0$ olsun ve n_0 bir doğal sayısı için

$$\|f - f_{n_0}\|_{L_{p(.),\theta}(X)} < \frac{\delta}{2} \quad ve \quad f_{n_0} \in L_{p(.)}(X).$$

Önerme 5.4' ten dolayı $\varepsilon \to 0$ iken

$$\left\| \varepsilon^{\frac{\theta}{p(.)-\varepsilon}} f_{n_0} \right\|_{L_{p(.)-\varepsilon}(X)} \leq \left(1+\mu(X)\right) \left\| \varepsilon^{\frac{\theta}{p(.)-\varepsilon}} f_{n_0} \right\|_{L_{p(.)}(X)} \leq \left(1+\mu(X)\right) \varepsilon^{\frac{\theta}{p(.)-\varepsilon}} \left\| f_{n_0} \right\|_{L_{p(.)}(X)} \to 0.$$

Böylece bir ε_0 sayısı vardır öyle ki $\varepsilon < \varepsilon_0$ ise $\left\| \varepsilon^{\frac{\theta}{p(.)-\varepsilon}} f_{n_0} \right\|_{L_{p(.)-\varepsilon}(X)} < \frac{\delta}{2}$ dir.

Sonuç olarak, $\varepsilon < \varepsilon_0$ iken

$$\left\| \varepsilon^{\frac{\theta}{p(.)-\varepsilon}} f \right\|_{L_{p(.)-\varepsilon}(X)} \leq \left\| \varepsilon^{\frac{\theta}{p(.)-\varepsilon}} \left(f - f_{n_0}\right) \right\|_{L_{p(.)-\varepsilon}(X)} + \left\| \varepsilon^{\frac{\theta}{p(.)-\varepsilon}} f_{n_0} \right\|_{L_{p(.)-\varepsilon}(X)}$$

$$\leq \left\| f - f_{n_0} \right\|_{L_{p(.),\theta}(X)} + \frac{\delta}{2} \leq \delta$$

olur. ■

Önerme 5.6 $p(.) \in P(X)$ olsun. Aşağıdaki gömmeler geçerlidir:

$$L_{p(.)}(X) \hookrightarrow L_{p(.),\theta}(X) \hookrightarrow L_{p(.)-\varepsilon}(X) \ , 0 < \varepsilon < p_- - 1;$$

$$L_{p(.)}(X) \hookrightarrow \mathcal{L}_{p(.),\theta}(X) \hookrightarrow L_{p(.)-\varepsilon}(X) \ , 0 < \varepsilon < p_- — 1$$

[61].

6
SONUÇ

Bu çalışmamızda bize ilham olan bazı fiziksel problemlerin incelenmesinde ortaya çıkan spektral problemler için üstel ve trigonometrik sistemlerin bazlık özellikleri ayrılabilir olmayan grand Lebesgue uzaylarında ve değişken üslü Lebesgue uzaylarında bazlık özelliklerini inceledik. Bazlık özellikleri, üstel ve trigonometrik sistemlerin yardımı ile bir spektral problemin özfonksiyonlar sisteminin bazlığını ilgili fonksiyon uzayında elde etmede önemli bir yere sahiptir. Bazlık kritrleri ve yakın bazlar teorisi ile problemin özfonksiyonlar sisteminin bazlığı elde edilebilmektedir. Özfonksiyonlar sisteminin bazlığının önemi ise, özellikle kısmi diferansiyel denklemlerin elde edilen sonuçlarının incelenebilmesine olanak sağlamasıdır.

Standart Lebesgue uzaylarının özellikle bazı lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çalışılmasında yetersiz kalması sebebiyle ortaya çıkan ve bu alanda bir çok uygulaması olan grand-Lebesgue, değişken üslü Lebesgue ve bu uzayları içerisinde barındıran grand değişken üslü Lebesgue uzayı çalışmalarımızı genişletebileceğimiz bir uzaydır. Bu nedenle bu çalışmamızın değerli okurlarına bu uzay üzerine spektral problemlerin özfonksiyonlar sisteminin bazlık özellikleri açık problemler olarak verilebilir. Örneğin ortasında bir yük bulunan sicimin titreşim probleminin grand değişken üslü uzaylarda incelenmesinde, standart trigonometrik sistemin bu uzayda bazlık özelliklerinden yararlanılacaktır. Bu ise bizim bir sonraki amacımızı oluşturmaktadır.

KAYNAKÇA

[1] C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Pure and Applied Mathematics vol. 129. New York: Academic Press, 1988.

[2] D. R. Adams, *Morrey Spaces.* Switzerland: Springer International Publishing, 2015.

[3] V. M. Kokilashvili, A. Meskhi, H. Rafeiro, and S. G. Samko, *Integral Operators in Non-Standard Function Spaces. Volume 1, Variable Exponent Lebesgue and Amalgam Spaces*. Birkhäuser, 2016.

[4] V. M. Kokilashvili, A. Meskhi, H. Rafeiro and S. G. Samko, *Integral Operators in Non-Standard Function Spaces. Volume 2, Variable Exponent Hölder, Morrey--Campanato and Grand Spaces*. Birkhäuser, 2016.

[5] R. E. Castillo and H. Rafeiro, *An Introductory Course in Lebesgue Cpaces*. Cham: Springer, 2016.

[6] P. Harjulehto and P. Hasto, "Orlicz Spaces and Generalized Orlicz Spaces Introduction," *ORLICZ SPACES AND GENERALIZED ORLICZ SPACES, 2236*, pp. 1-12, 2019.

[7] D. V. Cruz-Uribe and A. Fiorenza, *Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis*. Springer Science & Business Media, 2013.

[8] W. A. J. Luxemburg, *Banach Function Spaces* (No. 6). Van Gorcum, 1955.

[9] T. Iwaniec and C. Sbordone, "On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 119, pp. 129-143, 1992.

[10] V. Kokilashvili, "Boundedness criteria for singular integrals in weighted grand lebesgue spaces," *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 170 no. 1, 2010.

[11] H. Rafeiro and A. Vargas, "On the compactness in grand spaces," *Georgian Mathematical Journal*, vol. *22*, no. 1, pp. 141-152, 2015.

[12] A. Fiorenza, "Duality and reflexivity in grand Lebesgue spaces," *Collectanea Mathematica*, pp. 131-148, 2000.

[13] C. Capone and A. Fiorenza, "On small Lebesgue spaces," *Journal of Function Spaces*, vol. 3, no. 1, pp. 73-89.

[14] Y. Zeren, M. ISMAILOV, and C. Karacam, "Korovkin-type theorems and their statistical versions in grand Lebesgue spaces," *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 44, no. 3, pp. 1027-1041, 2020.

[15] Y. Zeren, M. ISMAILOV, and F. Şirin, "On basicity of the system of eigenfunctions of one discontinuous spectral problem for second order differential equation for grand-Lebesgue space," *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 44, no. 5, pp. 1595-1611, 2020.

[16] W. Orlicz, "Über konjugierte exponentenfolgeni," *Studia Mathematica*, vol. 3, no.1, pp. 200-211, 1931.

[17] H. Nakano, *Modulared Semi-Ordered Linear Spaces*. Tokyo: Maruzen Co., 1950.

[18] H. Nakano, *Topology and linear topological spaces*. Tokyo: Maruzen Co., 1951.

[19] I. Tsenov, "Generalization of the problem of best approximation of a function in the space L_s," *Uch. Zap. Dagestan Gos. Univ*, vol. 7, pp. 25-37, 1961.

[20] I. I. Šarapudinov, "The topology of the space $L_{p(t)}([0,1])$," *Mat. Zametki*, vol. 26, no. 4, pp. 613-632, 1979.

[21] I. I. Sharapudinov, "Approximation of functions in the metric of the space $L_{p(t)}([a,b])$ and quadrature formulas," *Constructive Function Theory*, vol. 81, pp. 189-193, 1983.

[22] I. I. Sharapudinov, "On the basis property of the Haar system in the space and the principle of localization in the mean," *Mathematics of the USSR-Sbornik*, vol. 58, no. 1, p. 279, 1987.

[23] I. I. Sharapudinov, "Uniform boundedness in $L_p(p = p(x))$ of some families of convolution operators," *Mathematical Notes*, vol. 59, no. 2, pp. 205-212, 1996.

[24] V. V. Zhikov, "Problems of convergence, duality, and averaging for a class of functionals of the calculus of variations," in *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 267, no. 3, pp. 524-528, 1982.

[25] V. V. E. Zhikov, "Questions of convergence, duality, and averaging for functionals of the calculus of variations," *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 23, no. 2, p. 243, 1984.

[26] V. V. E. Zhikov, "Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory," *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, vol. 29, no. 1, p. 33, 1987.

[27] V. V. E. Zhikov, "The Lavrent'ev effect and averaging of nonlinear variational problems," *Differentsial'nye Uravneniya*, vol. 27, no.1, pp. 42-50, 1991.

[28] V. V. E. Zhikov, "On passage to the limit in nonlinear variational problems," *Matematicheskii Sbornik*, vol. 183, no. 8, pp. 47-84, 1992.

[29] V. V. Zhikov, "On the homogenization of nonlinear variational problems in perforated domains," *Russian Journal of Mathematical Physics*, vol. 2, no. 3, pp. 393–408, 1994.

[30] V. V. Zhikov, "On Lavrentiev's Phenomenon," *Russian J. Math. Phys.* vol. 3, 1995.

[31] V. V. E. Zhikov, "Meyer-type estimates for solving the nonlinear Stokes system," *Differentsial'nye Uravneniya*, vol. 33, no. 1, pp. 107-114, 1997.

[32] V. V. Zhikov, "On some variational problems," *Russian J. Math. Phys.*, vol. 5, no. 1, p. 105, 1997.

[33] O. Kováčik and J. Rákosník, "On spaces $L_{p(x)}$ and $W_{k,p(x)}$," *Czechoslovak Mathematical Journal*, vol. 41, no. 4, pp. 592-618, 1991.

[34] A. Zigmund, *Trigonometric series* (Vol. 1, 616 p.). Moscow: Mir, 1965. (in Russian).

[35] A. Zigmund, *Trigonometric series* (Vol. 2, 540p.). M., Mir, 1965. (in Russian).

[36] N. K. Bari, *Trigonometric series*. Izdat. Fiz. Mat. Lit., Moscow, 1961.

[37] R. Edwards, *Fourier series* (Vol. 1, 264p.). M., Mir, 1985. (in Russian).

[38] R. Edwards, *Fourier series* (Vol. 2, 400p.). M., Mir, 1985. (in Russian).

[39] M. Ismailov, Y. Zeren, K. Şimşir Acar, and I. F. Aliyarova, "On basicity of exponential and trigonometric systems in grand Lebesgue spaces," *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, vol. 51, no. 6, pp. 1577-1587, 2022.

[40] B. T. Bilalov and Z. G. Guseynov, "Bases from exponents in Lebesgue spaces of functions with variable summability exponent," *Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci*, vol. 27, no. 1, pp. 43-48, 2008.

[41] B. Musayev ve M. Alp, *Fonksiyonel analiz.* Balcı Yayınları, Kütahya, 2000.

[42] L. Pick, A. Kufner, O. John, and S. Fucík, *Function spaces, 1*. Walter de Gruyter, 2012.

[43] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications* (Vol. 17). John Wiley & Sons, 1991.

[44] H. L. Royden, *Real Analysis*. Macmillan Publishing Company, New York, 1988.

[45] W. Rudin, *Functional Analysis.* McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.

[46] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure.* John Wiley & Sons, 2014.

[47] J. Schauder, "Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen," *Mathematische Zeitschrift*, vol. 26, no. 1, pp. 47-65, 1927.

[48] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Appl. Num. Harmon. Anal., Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2003.

[49] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II: Function Spaces* (Vol. 97). Springer Science & Business Media, 2013.

[50] Y. Shizuta and S. Kawashima, "Systems of equations of hyperbolic-parabolic type with applications to the discrete Boltzmann equation," *Hokkaido Mathematical Journal*, vol. 14, no. 2, pp. 249-275, 1985.

[51] D. V. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, M. Ruzhansky, J. Wirth, and S. Tikhonov, *Variable Lebesgue Spaces and Hyperbolic Systems*. Basel: Birkhäuser, 2014.

[52] B. T. Bilalov and S. R. Sadigova, “On solvability in the small of higher order elliptic equations in grand-Sobolev spaces,” *Complex Variables and Elliptic Equations*, vol. 66, no. 12, pp. 2117-2130, 2021.

[53] B. T. Bilalov, *Some Questions of Approximation.* Baku: Elm, 2016.

[54] V. Kokilashvili, “Boundedness criterion for the Cauchy singular integral operator in weighted grand Lebesgue spaces and application to the Riemann problem,” in *Proc. A. Razmadze Math. Inst*, vol. 151, pp. 129-133, 2009.

[55] I. I. Sharapudinov, “Some questions of approximation theory in the Lebesgue spaces with variable exponent,” *Itogi Nauki. Yug Rossii. Mat. Monograf*, 5, p. 267, 2012.

[56] X. Fan and D. Zhao, “On the spaces $L_{p(x)}(\Omega)$ and $W_{m,p(x)}(\Omega)$,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 263, no. 2, pp. 424-446, 2001.

[57] C. Capone, M. R. Formica, and R. Giova, “Grand Lebesgue spaces with respect to measurable functions,” *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 85, pp. 125-131, 2013.

[58] M. Izuki, E. Nakai, and Y. Sawano, “Function spaces with variable exponents–an introduction–,” *Scientiae Mathematicae Japonicae*, vol. 77, no. 2, pp. 187-315, 2014.

[59] V. Kokilashvili and S. Samko, “Singular integrals in weighted Lebesgue spaces with variable exponent,” 2003.

[60] V. Kokilashvili and A. Meskhi, “Maximal and Calderón–Zygmund operators in grand variable exponent Lebesgue spaces,” *Georgian Mathematical Journal*, vol. 21, no. 4, pp. 447-461, 2014.

[61] V. M. Kokilashvili, A. Meskhi, H. Rafeiro, and S. G. Samko, *Integral Operators in Non-Standard Function Spaces.* Volume 3, Advances in Grand Function Spaces, Birkhäuser, 2024.

[62] L. Greco, T. Iwaniec, and C. Sbordone, “Inverting the p-harmonic operator,” Manuscripta Mathematica, vol. 92, no. 1, pp. 249-258, 1997.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirileri

1. M. Özükanar, F. Şirin, and Y. Zeren, "On basicity of the exponential system in grand variable exponent Lebesgue spaces," 7th *International HYBRID Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA-2024),* May 8-11, İstanbul, Türkiye, 2024.