T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BERGMAN UZAYINDA HANKEL OPERATÖRLERİ

Destan BALOTU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Doç. Dr. Erdal GÜL

Ağustos, 2022

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BERGMAN UZAYINDA HANKEL OPERATÖRLERİ

Destan BALOTU tarafından hazırlanan tez çalışması 28.07.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matemetik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Erdal GÜL
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Erdal GÜL, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Ömer GÖK, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN, Üye
İstanbul Üniversitesi _____

Danışmanım Doç. Dr. Erdal GÜL sorumlulugunda tarafımca hazırlanan BERGMAN UZAYINDA HANKEL OPERATÖRLERİ başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdigimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandıgımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Destan BALOTU

İmza

TEŞEKKÜR

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca olduğu gibi bu çalışma sırasında da destek ve emeklerini esirgemeyen, her daim bilgisinden ve tecrübesinden istifade ettiğim tez danışmanım Doç. Dr. Erdal GÜL'e ve tüm sıkıntılı anlarımda yanımda duran ve beni destekleyen aileme teşekkürü borç bilirim.

Destan BALOTU

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ vi

KISALTMA LİSTESİ vii

ÖZET viii

ABSTRACT ix

1 GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti . . . 1

1.2 Tezin Amacı . . . 2

1.3 Hipotez . . . 2

2 SINIRLI LİNEER OPERATÖRLER 3

2.1 Banach Uzayları Üzerinde Sınırlı Operatörler . . . 3

2.2 Hilbert Uzayları Üzerinde Sınırlı Operatörler . . . 7

2.2.1 The Yıldız University Period . . . 10

2.3 Schatten Sınıfı Operatörler . . . 14

3 L^p UZAYLARI ÜZERİNDE İNTEGRAL OPERATÖRLER 16

3.1 Hölder Eşitsizliği . . . 16

3.2 Hilbert Schmidt Integral Operatörleri . . . 18

3.3 Schur Teoremi . . . 20

3.4 Birim Disk Üzerinde İntegral Operatörler . . . 21

4 BERGMAN UZAYLARI 25

4.1 Möbius Grubu . . . 25

4.2 Bergman Metriği . . . 26

4.3 Bergman Uzayları . . . 28

5 BERGMAN UZAYINDA TOEPLİTZ OPERATÖRLERİ 31

5.1 Toeplitz Operatörleri . . . 31

5.2 Carleson Tipi Ölçümler . . . 33

6 BERGMAN UZAYINDA HANKEL OPERATÖRLERİ **37**

6.1 Bergman Metriğinde Sınırlı Ortalama Salınım 37

6.2 Bergman Metriğinde VMO 43

6.3 Sınırlı Hankel Operatörleri 45

6.4 Kompakt Hankel Operatörleri 47

6.5 Küçük Hankel Operatörleri 49

7 SONUÇ VE ÖNERİLER **51**

KAYNAKÇA **52**

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR **53**

SİMGE LİSTESİ

$MO_r(f)(z)$	Bergman Metriğinde f'in z Noktasında Ortalama Salınımı
$\omega_r(f)(z)$	Bergman Metriğinde z Noktasında f'in Salınımı
β	Bergman Metriğinde Uzaklık Fonksiyonu
$\sigma(T)$	Bir lineer Operatörün Spektrumu
$H(\mathbb{D})$	Birim Disk $\mathbb{D}$'deki Analitik Fonksiyonların Uzayı
dA	Birim Disk $\mathbb{D}$ Üzerinde Alan Ölçümü
$\widehat{f_r}(z)$	Birim Disk $\mathbb{D}$ Üzerindeki Ortalama Fonksiyon
BO_r	Birim Disk $\mathbb{D}$ Üzerinde Ortalama Salınımlı Sürekli Fonksiyonların Uzayı
ρ	Birim Disk $\mathbb{D}$ Üzerinde Pseudo-Hiperbolik Metrik
$BMO_r(\mathbb{D})$	Birim Disk $\mathbb{D}$ Üzerinde Sınırlı Ortalama Salınımlı Fonksiyonların Uzayı
$\gamma(t)$	Düzgün Eğri
$l(\gamma)$	Düzgün eğri γ'nın Hiperbolik Metrikte Uzunluğu
H_f	Hankel Operatörü
H	Hilbert Uzayı
$\mathbb{C}$	Karmaşık Sayılar Düzlemi
$\mathbb{D}$	Karmaşık Sayılar Düzlemi Üzerinde Birim Disk
VMO	Küçük Ortalama Salınım
ϕ	Möbius Eşlemesi
$Aut(\mathbb{D})$	Möbius Eşlemelerinin Kümesi
$(X, d\mu)$	Ölçüm Uzayı
BMO	Sınırlı Ortalama Salınım
BO	Sınırlı Salınım
VO	Yok Olan Salınım

KISALTMA LİSTESİ

h.h.	Hemen Hemen
h.h.h.	Hemem Hemen Her Yerde
inf	İnfimum
lim	Limit
sup	Supremeum

ÖZET

Bergman Uzayında Hankel Operatörleri

Destan BALOTU

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç Dr. Erdal GÜL

Hankel operatörleri, Toeplitz operatörleri ile yakından ilişkilidir. Toeplitz ope-ratörleri ile ilgili birçok problem Hankel operatörleri ile formüle edilebilir ve bunun tersi de geçerlidir. Birim diskten Hardy uzayında, Hankel operatörleri tek türlü ifade edilirler. Ancak, Bergman uzayında, büyük ve küçük Hankel operatörleri olarak adlandırılan Hankel operatörlerinin iki farklı türü vardır. Bergman uzayındaki küçük Hankel operatörleri daha çok Hardy uzayındaki Hankel operatörleri gibi davranırlar. Büyük Hankel operatörlerinin çalışmasında ilk büyük ilerleme 1986 yılında Axler tarafından verilmiştir. Küçük Hankel operatörlerinin genel bir teorisi 1987 yılında Janson-Peetre-Rochberg tarafından geliştirilmiştir. Bu çalışmada, Bergman uzayın-daki (büyük) Hankel operatörleri için sınırlılık ve kompaktlık özellikleri, kompleks düzlemdeki birim disk üzerinde tanımlı yerel integre edilebilir fonksiyonların, Berg-man metriğindeki ortalama salınımları üzerinde incelenmiştir. Ayrıca burada, sınırlı ve kompakt Hankel operatörleri ağırlıklı ve ağırlıklı olmayan Bergman uzayları üzerindeki Bergman metriğinde sınırlı ortalama salınım fonksiyonlarının karakterizasyonu olarak ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bergman uzayları, Hankel operatörleri, Toeplitz operatörleri

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

Hankel Operatos On The Bergman Space

Destan BALOTU

Department of Mathematics
Master of Science Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Erdal GÜL

Hankel operators are closely related to Toeplitz operators. Many problems with Toeplitz operators can be formulated with Hankel operators and vice versa. In Hardy space of the unit disk, Hankel operators are expressed in a uniform way. However, in Bergman space there are two different types of Hankel operators, called major and minor Hankel operators. Small Hankel operators in Bergman space behave more like Hankel operators in Hardy space. The first major advance in the study of large Hankel operators was made by Axler in 1986. A general theory of small Hankel operators was developed by Janson-Peetre-Rochberg in 1987. In this study, boundedness and compactness properties for the (big) Hankel operators in Bergman space are investigated on the mean oscillations of the locally integrable functions defined on the unit disk in the complex plane in the Bergman metric. Also here, bounded and compact Hankel operators are considered as the characterization of bounded mean oscillation functions in Bergman metric on weighted and unweighted Bergman spaces.

Keywords: Bergman spaces, Hankel operators, Toeplitz operators

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Stroethoff 1990 yılında kompleks düzlemin $\mathbb{D}$ birim diskinde sınırlı simgeye sahip Hankel operatörünün kompaktlığı için bir karakterizasyon vermiştir. Bu sonuç daha sonra yine Stroethoff tarafından n boyutlu kompleks düzlemdeki açık birim yuvar ve poli-disk durumunda genelleştirildi. Zheng [1989] ve Stroethoff-Zheng [1992] aynı probleme farklı bir yaklaşım getirmiştir. 1992 yılında Luecking birim diskten Bergman uzayları üzerindeki Hankel operatörlerinin belirli sınıflarının karakterizasyonlarını verdi. Axler-Gorkin[1988] ve Zheng [1988], $H_f^* H_g$ çarpımının kompakt olduğu problemi çalışmışlardır. Burada f ve g'nin D de sınırlı ve eşlenik analitik olduğu durumu incelendi. Aynı problem Hardy uzayındaki Hankel operatörleri için Axler-Chang-Sarason [1978] ve Volberg [1982] tarafından incelenmiştir. Schatten sınıfı Hankel operatörlerinin, açık birim diskten Bergman uzayında eşlenik analitik sembolleri ile karakterizasyonu Arazy-Fisher-Peetre tarafından elde edildi [1988]. Daha sonra Arazy-Fisher-Janson- Peetre [1990], Wallsten [1990] ve Zhu [1991] $\mathbb{C}^n$ 'deki açık birim yuvar için benzer sonuçlar vermişlerdir.

Analitik olmayan simgelere sahip Schatten sınıfı Hankel operatörleri için karakterizasyonlar, açık birim yuvar durumunda Zhu [1991] ve sınırlı simetrik alan durumunda Zheng [1990] tarafından elde edildi. Bir küçük Hankel operatörünün Schatten sınıfına girmesi için gerekli ve yeterli koşullar Janson-Peetre- Rochberg tarafından elde edilmiştir, [1987].

Bergman uzayında Schatten sınıfı Hankel operatörleri ile ilgili diğer sonuçlar Ahlmann [7], Arazy [15], Arazy-Fisher-Peetre [1990], Arazy-Fisher-Janson-Peetre [1990], Bonsall [1986], Janson [1988], Rochberg [1990] ve Rochberg-Semmes [1989] tarafından verilmiştir. f bir kesin psödokonveks domen üzerinde düzgün sürekli olmak üzere Hf Hankel operatörünün kompaktlığı Venugopalkrishna [1972] tarafından kanıtlanmıştır. Burada Bergman uzayındaki Hankel operatörleri ve iyi bilinen Neumann operatörü arasında kesin bir ilişki sunulmaktadır. Bu fikir Salinas

[1989] tarafından daha ileri sürülmüştür. Kesin konveks bir domenden ve bir düzlem domenden Bergman uzayındaki Hankel operatörleri ile ilgili sonuçlar Li [1992, 1993, 1994] tarafından verilmektedir. Kesin psödokonveks domenden Bergman uzayında küçük Hankel operatörleri Coupet [1989] tarafından tartışılmaktadır.

1.2 Tezin Amacı

Üzerinde çeşitli karakterizasyonlar, integral gösterimler, atomik ayrışma, karmaşık enterpolasyon, optimal noktasal tahminler, dualite, Carleson tipi ölçümler ve çeşitli özel durumların çalışıldığı Begman uzaylarını ve bu uzaylar üzerinde tanımlı Hankel operatörlerinin sınırlılık, kompaktlık gibi önemli özelliklerini incelemektir.

1.3 Hipotez

Öncelikle Banach ve Hilbert uzaylarının tanımı ve bu uzayların, Hankel operatörleri konusunda gerekli çeşitli özellikleri işlenecektir. Toeplitz ve Hankel operatörleri integral operatörler olduğu için integral operatörler teorisi ayrıntısıyla incelenecektir. Bergman uzayı üzerinde çalıştığımızdan Möbius grubu ve Bergman metriğinin incelenmesiyle birlikte Bergman uzaylarının genel hatlarını vermek. Toeplitz ope-ratörleri ile Hankel operatörleri yakından ilişkili olduğu için Toeplitz operatörlerinin genel özelliklerini vermek. Nihayetinde, $L_a^2(dA_\alpha)$ Bergman uzayı üzerindeki büyük Hankel operatörlerinin sınırlılık ve kompaktlık özelliklerini incelemek.

2
SINIRLI LİNEER OPERATÖRLER

Bu bölümde genel olarak Banach uzayları üzerinde ve özelde ise Hilbert uzayları üzerinde tanımlı sınırlı lineer operatörler hakkında kısa bir bilgi vereceğiz. Materyal, fonksiyonel analizde bilinen temel bir konu olduğu için, burada iyi bilinen teoremlerin kanıtlarını vermeyeceğiz. Kanıtlar genel fonksiyonel analiz kitaplarında bulunabilir.

2.1 Banach Uzayları Üzerinde Sınırlı Operatörler

X bir kompleks lineer uzay olsun. X üzerinde tanımlı aşağıdaki koşulları sağlayan negatif olmayan $\|\ \|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm denir: $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in C$ kompleks sayısı için
(a) $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
(b) $\|ax\| = |a|\,\|x\|$.
(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Bu durumda $(X, \|\ \|)$ ikilisine bir normlu uzay denir. Buradaki (c) koşulu üçgen eşitsizliği olarak adlandırılır. Eğer X deki her Cauchy dizisi yakınsak ise normlu uzay bir Banach uzayı adını alır:

(d) $\{x_n\}$, X'te bir Cauchy dizisi, yani; $n \longrightarrow \infty$, $m \longrightarrow \infty$ olduğunda $\|x_n - x_m\| \longrightarrow 0$ ise, $n \longrightarrow +\infty$ iken $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ koşulunu sağlayan bir $x \in X$ vektörü vardır.

Açıkça,

$$d(x, y) = \|x - y\|, \qquad x, y \in X \tag{2.1}$$

şeklinde X üzerinde bir uzaklık (distance) fonksiyonu tanımlanır. Bu uzaklık fonksiyo-nu ile X üzerinde üretilen topolojiye "norm topolojisi" denir. Yukarıdaki (d) koşulu X'in $\|\ \|$ normunda tam (complete) olduğunu belirtir. Buradan Banach uzayının bir tam normlu uzay demek olduğu anlaşılır.

X üzerinde kompleks değerli bir lineer F fonksiyonu $C > 0$ olmak üzere,

$$F(x)| \leq C \|x - y\|, \qquad x \in X, \tag{2.2}$$

şartını sağlıyorsa o fonksiyon X üzerinde bir sınırlı lineer fonksiyonel diye adlandırılır. Eğer $F : X \to C$ lineerse o zaman F'in sınırlı olması için gerek ve yeter şart F'in, X'in norm topolojisinde sürekli olmasıdır.

Bir normlu uzay X için, tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayı X^* ile gösterilir. $X*$ açıkça bir vektör uzayıdır. Ayrıca X^*,

$$\|F\| = sup\{|F(x)| : \|x\| \leq 1\} = sup\{|F(x)| : \|x\| = 1\}, \tag{2.3}$$

normu ile birlikte bir Banach uzayı olur. X^* vektör uzayına yukarıdaki normla, X'in dual uzayı denir. Şimdi, ileride sıkça kullanacağımız bazı örnekleri verelim.

Örnek 2.1. μ, Ω üzerinde σ-sonlu bir ölçüm olsun. $0 < p < +\infty$ için $L^p(\Omega, d\mu)$,

$$\|f\| = \left[\int_\omega |f(x)|^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} < +\infty \tag{2.4}$$

şartını sağlayan, Ω üzerindeki kompleks değerli fonksiyonların uzayıdır.$1 \leq p \leq \infty$ aralığında $L^p(\Omega, d\mu)$'nin bir Banach uzayı olduğu iyi biliniyor.

Örnek 2.2. $L^\infty(\Omega, d\mu)$,

$$\|f\| = \text{ess sup}\{|f(x)| : x \in \Omega\} < +\infty \tag{2.5}$$

şartını sağlayan Ω üzerindeki f fonksiyonlarının kümesidir.

Teorem 2.1. *Eğer* $1 \leq p < +\infty$ *ve* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *ise o zaman*

$$\left(L^p(\Omega, d\mu)\right)^* = L^q(\Omega, d\mu) \tag{2.6}$$

olur. Öyle ki, her bir $g \in L^q(\Omega, d\mu)$ *fonksiyonu,* $\left(L^p(\Omega, d\mu)\right)$ *üzerinde*

$$F_g(f) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)} d\mu(x), \qquad f \in L^p(\Omega, d\mu) \tag{2.7}$$

şeklinde bir sınırlı lineer F_g *fonksiyonunu üretir ve* $L^p(\Omega, d\mu)$ *üzerindeki her sınırlı lineer fonksiyonel bu yolla bulunur.*

Tanım 2.1. X ve Y Banach uzayları ve $T : X \longrightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer

sabit bir $C > 0$ reel sayısı için

$$\|Tx\| \leq C \|x\|, \qquad x \in X \tag{2.8}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T'ye sınırlı lineer operatör denir.

T'nin lineerlik özelliğinden faydalanarak T'nin sınırlı olması için gerek ve yeter şartın T'nin, X ve Y norm topolojisine göre sürekli olması olduğunu kolayca gösterebiliriz.

Banach uzayları teorisindeki en temel sonuçlardan biri "Açık tasvir (dönüşüm) teoremi" olduğunu söyleyebiliriz. Bu teorem aşağıdaki şekilde ifade edilir:

Teorem 2.2. *Eğer $T : X \longrightarrow Y$, bir X Banach uzayından diğer bir Y Banach uzayına giden üzerine(surjective) sınırlı lineer bir operatör ise, o zaman T, X'teki açık kümeleri Y'deki açık kümelere götürür.*

Açık tasvir teoreminin özel bir hali şu şekildedir: Eğer T bir Banach uzayından diğerine giden bire bir, üzerine ve sınırlı bir lineer operatör ise, o zaman T'nin terside sınırlıdır.

Banach uzayları üzerindeki başka önemli bir sonuç ise "Kapalı Çizge Teoremi"dir. Bu da aşağıdaki şekilde ifade edilir:

Teorem 2.3. *T, bir Banach uzayı X'ten diğer bir Banach uzayı Y'ye giden bir lineer operatör ve $\{(x, Tx) : x \in X\}$ kümesi(T'nin çizgesi denir) olsun. Eğer bu çizge $X \times Y$'de kapalıysa, o zaman T sınırlıdır.*

Banach uzayları teorisinde açık tasvir teoremi, kapalı çizge teoremi, Hahn-Banach (genişleme) teoremi ve düzgün sınırlılık teoremlerinin en temel sonuçlar olduğu iyi bilinmektedir. İlk ikisini burada ifade ettik. Şimdi önce Hahn-Banach teoreminden başlayarak diğer ikisini ifade edelim.

Teorem 2.4. *Eğer F, bir X Banach uzayının alt uzayı üzerinde bir sınırlı lineer fonksiyonel ise, o zaman F, tüm X uzayı üzerinde bir sınırlı lineer fonksiyonele normu aynı kalmak üzere genişletilebilir.*

Bu teoremin sonuçlarından biri her Banach uzayı, sınırlı lineer fonksiyoneller bolluğuna sahiptir.

Literatürde düzgün sınırlılık teoreminin bir çok versiyonu vardır. Burada aşağıdaki gibi özel bir versiyonunu ifade ediyoruz.

Teorem 2.5. *$\{F_\alpha\}$, bir X Banach uzayından diğer bir Y Banach uzayına giden sınırlı lineer operatörlerin bir koleksiyonu ve $\forall x \in X$ için $sup_\alpha \|F_\alpha x\|$ sonlu olsun. O zaman $sup_\alpha \|F_\alpha\|$ da sonludur.*

Bir X Banach uzayının norm topolojisi dışında, aynı uzay üzerinde, zayıf topoloji denilen, diğer bir yararlı topolojiye ihtiyacımız var. X üzerindeki zayıf topoloji. X deki tüm zayıf yakınsak ağları belirterek X üzerindeki zayıf topolojiyi tanımlarız.

Tanım 2.2. Bir $\{x_\alpha\}$ ağı, X de eğer her hangi bir $F \in X^*$ için kompleks sayılardan oluşan $\{F(x_\alpha)\}$ ağı yakınsaksa, zayıf yakınsıyor denir.

Eğer bir Banach uzayı diğer bir Banach uzayının duali ise, o zaman onun üzerinde başka bir topoloji tanımlanır. Bu topoloji zayıf-yıldız yada zayıf* topolojidir. Bir $\{F_\alpha\}$ ağının X^* da zayıf*(weak star) yakınsak olabilmesi için, $\forall x \in X$ kompleks sayılardan oluşan $\{F_\alpha(x)\}$ netinin yakınsak olması gerekir. Belki zayıf-yıldız topolojisinin en önemli sonucu Alaoğlu'nun aşağıdaki teoremidir:

Teorem 2.6. *X^* Banach uzayının kapalı birim yuvarı, zayıf* topolojisinde kompakttır.*

X bir Banach uzayı ve X_0, X'in kapalı bir alt uzayı olsun. O zaman X üzerinde bir denklik bağıntısı oluşturabiliriz: $x \sim y$ olabilmesi için gerek ve yeter şart $x - y \in X_0$ olmasıdır. X/X_0, bu denklik bağıntısı tarafından üretilen koset uzayını (coset space) göstersin. O zaman X/X_0 yine bir kompleks vektör uzayıdır. Ayrıca X/X_0,

$$\|x + X_0\| = \inf\{\|y\| : x - y \in X_0 \tag{2.9}$$

bölüm normuyla bir Banach uzayıdır. X/X_0 normlu uzayı, X_0 tarafından üretilmiş X'in bölüm uzayıdır.

Eğer X ve Y Banach uzayları ve $T : X \to Y$ bir sınırlı lineer operatör ise, o zaman açıkça görülür ki T'nin çekirdeği(kernel), X'in kapalı bir alt kümesidir. Eğer T ayrıca örten (surjective) operatör ise, o zaman açık dönüşüm teoremi gereği Y, X'in T'nin çekirdeği tarafından üretilmiş bölüm(quotient) uzayına izomorfiktir. İki Banach uzayının eğer birinden diğerine giden bire-bir ve örten (bijective) sınırlı lineer bir dönüşüm varsa izomorfik olduğunu söyleriz; açık dönüşüm teoremi, bu dönüşümün tersinin de sınırlı olmasını zorunlu kılar.

X ve Y Banach uzayı olsunlar ve $T : X \to Y$ sınırlı bir lineer operatör olsun. O zaman T, $T^* : Y^* \to X^*$ lineer operatörünü

$$T^*(F)(x) = F(Tx), \qquad x \in X, F \in Y^* \tag{2.10}$$

eşitliğini sağlıyacak şekilde üretir. T^* operatörünün sınırlı olduğunu ve $\|T^*\| = \|T\|$ eşitliğinin sağlandığını göstermek zor değildir. Burada T^* operatörü, T'nin eşleniğidir (adjointidir).

Teorem 2.7. *$(\Omega, d\mu)$ bir σ-sonlu ölçüm uzayı, $1 \leq p < +\infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. G, $\Omega \times \Omega$ üzerinde kompleks değerli bir fonksiyon ve T*

$$Tf(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y) d\mu(y) \tag{2.11}$$

ile tanımlanmış bir integral operatör olsun. Eğer T, $L^p(\Omega, d\mu)$ üzerinde sınırlı ise o zaman onun T^* adjointi, $L^q(\Omega, d\mu)$ üzerindeki

$$T^* f(x) = \int_\Omega \overline{G(y,x)} f(y) d\mu(y) \tag{2.12}$$

integral operatörüdür.

2.2 Hilbert Uzayları Üzerinde Sınırlı Operatörler

Tanım 2.3. H bir kompleks lineer uzay olsun. $H \times H$'den C'ye tanımlı kompleks değerli bir $(x,y) \longmapsto \langle x,y \rangle$ fonksiyonu eğer
(a) $\langle x,y \rangle$, x'te lineer.
(b) Herhangi bir $x \in H$ için $\langle x,x \rangle$ negatif olmayan bir reel sayı ve $\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(c) $\overline{\langle x,y \rangle} = \langle y,x \rangle$.
şartlarını sağlıyorsa H üzerinde iç çarpım diye adlandırılır.

Burada (a) ve (c) den görüldüğü üzere $\langle x,y \rangle$, y'de eşlenik lineerdir (conjugate linear). İç çarpım uzayının direkt bir özelliği Cauchy-Schwartz eşitsizliğidir. Yani, $\forall x, y \in H$ için

$$|\langle x,y \rangle|^2 \leq \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle \tag{2.13}$$

eşitsizliğidir. Ayrıca eşitliğin gerçekleşmesi için gerek ve yeter şartın vektörlerden birisinin, diğerinin bir skalar katına eşit olmasıdır. İç çarpım uzaylarında norm

$$\|x\| = \langle x,x \rangle^{\frac{1}{2}}, \qquad x \in H \tag{2.14}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer yukarıdaki gibi iç çarpım uzayından üretilen norm tam ise yani; eğer H yukarıdaki norm ile tanımlı bir Banach uzayıysa o zaman H'ye Hilbert

uzayı denir. Hilbert uzayının diğer bir temel özelliği ortonormal tabanının olmasıdır.

Tanım 2.4. Bir H Hilbert uzayında, bir $\{e_n\}$ vektör dizisi
(a) $\{e_n\}$'deki vektörlerden her biri diğeriyle ortoganal.
(b) Her bir e_n birim vektör.
(c) Her bir $x \in H$ için

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \tag{2.15}$$

serisi H'nin norm topolojisinde yakınsaktır.
(a), (b), (c) şartlarını sağlıyorsa ortonormal tabandır denir.

Bu tanımdan, eğer $\{e_n\}$, H'nin ortonormal tabanı ise, o zaman

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \tag{2.16}$$

eşitliği kolayca çıkarılabilir.

Teorem 2.8. *Bir H Hilbert uzayında herhangi bir y vektörü için*

$$F_y(x) = \langle x, y \rangle, \qquad x \in H \tag{2.17}$$

olacak şekilde H üzerinde bir sınırlı lineer F_y fonksiyoneli tanımlanabilir. Tersine, eğer F, H üzerinde sınırlı bir fonksiyonel ise, o zaman $F = F_y$ eşitliğini sağlayan H'de tek bir y vektörü vardır.

Bu sonuç Riesz temsil (representation) teoremi diye adlandırılır. H bir Hilbert uzayıysa, Riesz temsil teoremini $H^* = H$ olarak yeniden formüle edebiliriz, bu nedenle H, H^*'ye anti-lineer izomorfiktir.

Bunun direk bir sonucu eğer bir dizi $\{x_n\}$'nin H'de 0'a zayıf yakınsaması(weakly convergent) için gerek ve yeter şart $\forall x \in H$, $\langle x_n, x \rangle$'in C'de 0'a yakınsamasıdır.

Riesz Teoremi gereği eğer T, H üzerinde sınırlı bir operatörse, o zaman T'nin eşleniği T^*, H üzerinde sınırlıdır. T ile T^* arasındaki ilişki

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \tag{2.18}$$

şitliği ile gösterilir. Bu gösterimin önemli bir sonucu olarak T^*'nin eşleniği gene T'dir. Bir Hilbert uzayı üzerindeki bir T sınırlı lineer operatörü, eğer $T = T^*$ ise o zaman kendine eş (self adjoint) operatör denir. Eğer T, H üzerinde kendine eş operatörse

o zaman $\forall x \in H$ için, $\langle Tx, y\rangle$ olduğunu çıkarması kolaydır. Tersi de bu durum için doğrudur. Ayrıca T kendine eş operatör olduğunda

$$\|T\| = sup\{|\langle Tx, y\rangle| : \|x\| = 1\} \tag{2.19}$$

normu gerçeklenir. Eğer $\langle Tx, x\rangle$ iç çarpımı $\forall x \in H$ için negatif olmayan sayıysa , o zaman T'ye pozitif operatör denir. Aslında her bir pozitif operatör kendine eştir. Her hangi bir pozitif sayı için olduğu gibi pozitif operatörlerinde üssü alınabilir. Eğer n pozitif bir sayıysa ve T, H üzerinde pozitif bir operatörse, o zaman operatörün n'inci kökü $T^{\frac{1}{n}}$ şeklinde gösterilir ve $(T^{\frac{1}{n}})^n = T$ eşitliğiyle tanımlanır. T, H üzerinde herhangi bir sınırlı operatör olsun. O zaman T^*T bir pozitif operatördür. $|T|$ şeklinde gösterilen T^*T operatörünün kare kökü operatör teorisnde önemli bir yer tutar.

$\{e_n\}$ ve $\{\sigma_n\}$, H'de ortonormal taban olsunlar. H üzerinde

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sigma_n \tag{2.20}$$

şeklinde bir T operatörü tanımlayalım. T'nin lineer bire bir ve üzerine operatör olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca, genel Pisagoryan teoremi gereği T bir izometridir. Bu demek oluyor ki;

$$\|Tx\| = \|x\| \tag{2.21}$$

eşitliği gerçeklenir. Buna denk olarak bir U birim operatörü sınırlı lineer operatördür ve $UU^* = U^*U = I$ özelliğini sağlar.

Tanım 2.5. Bir H Hilbert uzayı üzerindeki bir T sınırlı operatörü eğer $T^*T = TT^*$ eşitlini sağlıyorsa normal operatördür denir.

Örnek 2.3. Normal olmayan operatöre örnek olarak geriye kayan(backward shift) S operatörü örnek verilebilir: $\{e_n\}$, H'nin bir ortonormal tabanı olsun, o zaman $\forall n \geq 2$ için $Se_1 = 0$ ve $Se_n = Se_{n-1}$, olur. Kolayca ispatlanabilir ki, S^*S'in bir boyutlu çekirdeği(kernel) varken $SS^* = I$ dir.

Tanım 2.6. Bir H Hilbert uzayı üzerindeki sınırlı lineer T operatörünün spektrumu

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \ \text{ tersi olmayan}\} \tag{2.22}$$

şeklinde tanımlanır.

$\sigma(T)$ kümesi, $\mathbb{C}$ boş olmayan kapalı bir kümedir ve 0 merkezli $\|T\|$ yarıçaplı bir disk içindedir.

Söz konusu normal operatörler olduğunda $\sigma(T)$ spektrumu en iyi şekilde anlaşılır.

Teorem 2.9. *$\|T\|$, H üzerinde bir normal operatör ve f, $\sigma(T)$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman H üzerinde tek olarak tanımlı $f(T)$ operatörü vardır ki;*
(a) $f(T)$, f'e lineer biçimde bağlı,
(b) Eğer $f(z) = z^n$ ise, o zaman $f(T) = T^n$,
(c) $\sigma\big(f(T)\big) = f\big(\sigma(T)\big)$,
şartlarını sağlar. Buna normal operatörler için spektral teorem de denir.

Sonuç 2.1. *Yukarıdaki teoremin bir çok sonucu vardır. İlki, T bir normal operatör olsun. O zaman T kendine eş olabilmesi için gerek ve yeter şart $\sigma(T)$'nın reel sayılardan oluşmasıdır; ikincisi, T'nin pozitif olabilmesi için gerek ve yeter şart $\sigma(T)$'nin negatif olmayan sayılardan oluşmasıdır; üçüncüsü, T'nin birim operatör olabilmesi için gerek ve yeter şart $\sigma(T)$'nın unimodular sayılardan oluşmasıdır.*

2.2.1 The Yıldız University Period

Tanım 2.7. H bir ayrılabilir Hilbert uzayı olsun. H'nin kapalı bir yuvarı, $\forall x \in H$ için $\|x\| \leq 1$ şartını sağlayan vektörlerden oluşur ve $B_1(H)$ ile gösterilir.

Tanım 2.8. H üzerindeki bir lineer T operatörü, eğer $T(B_1)$, H'nin norm topolojisinde kompaktsa o zaman T'ye kompakttır denir.

Teorem 2.10. *H üzerindeki bir T lineer operatörünün kompakt olabilmesi için gerek ve yeter şartın $T(B_1)$'in H'de kompakt kapanışa sahip olmasıdır.*

İspat. Gerek şartını görmesi kolaydır. Yeter kısmını ıspatlamak için farz edelim ki $T(B_1)$, H'de kompakt kapanışı var olsun. Bilhassa $T(B_1)$, H'de sınırlıdır. Bundan kolayca çıkan sonuç T'nin H üzerinde sınırlı lineer operatör olmasıdır. $\{x_\alpha\}$, H'de bir net olsun. Şöyle ki; bu net x'e zayıf yakınsasın ve y, H'nin bir vektörü olsun. O zaman

$$\lim_\alpha \langle Tx_\alpha, y\rangle = \lim_\alpha \langle x_\alpha, T^*y\rangle = \lim_\alpha \langle x, T^*y\rangle = \lim_\alpha \langle Tx, y\rangle \tag{2.23}$$

eşitlikleri gerçeklenir ve T'nin H üzerinde zayıf yakınsak(weakly continuous) olduğu görülür. Riesz temsil ve Agaoglu'nun teoremleri gereği, B_1, H'de zayıf kompakttır. Bundan çıkan sonuç $T(B_1)$, H_1'de zayıf kompakttır. Bihassa $T(B_1)$, H'de zayıf kompakttır ve sonuçta $T(B_1)$, H'de norm kapalıdır. $T(B_1)$'in kompakt kapanışı olduğundan görüyoruz ki $T(B_1)$, norm topolojisinde kompakttır ve buradan T'nin kompakt operatör olduğu ortaya çıkar. ■

Teorem 2.11. *H üzerindeki bir T operatörünün kompakt olabilmesi için gerek ve yeter şart, H'deki her hangi bir $\{x_n\}$ dizisi için öyle bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır ki, $\{Tx_{n_k}\}$'in norm topolojisinde yakınsıyor olmasıdır.*

İspat. Eğer T kompaktsa o zaman $\{x_n\}$'in sınırlılığı, $\{Tx_n\}$'in kompakt bir küme içerisinde olmasını gerektirir. O zaman $\{Tx_n\}$ yakınsak bir alt dizisi vardır.

Diğer taraftan H'deki bir kümenin kompakt olabilmesi için gerek ve yeter şart H'deki her hangi bir dizinin yakınsak bir alt dizi içermesidir. Böylece T'nin kompakt olmayışı, B_1'deki bir $\{x_n\}$ dizisi için $\{Tx_n\}$'nin yakınsak bir alt dizi içermeyişini gerektirecektir. ■

Teorem 2.12. *H üzerindeki bir T operatörünün kompakt olabilmesi için gerek ve yeter şart, $x_n \to 0$ zayıf yakınsadığında $\|Tx_n\| \to 0$ olmasıdır.*

İspat. T kompakt ve $x_n \to 0$'a H'de zayıfça yakınsasın. Biz $\|Tx_n\| \to 0$ olduğunu göstereceğiz. Farz edelim tersi olsun. O zaman $\forall n$ ve $\exists\, \epsilon > 0$ için $\|Tx_n\| \geq \epsilon$ olacak şekilde bir alt dizi bulunabilir. Uniform sınırlılık teoremi gereği $\{x_n\}$'nin zayıf yakınsaması $\|x\|$'in sınırlı olmasını gerektirir. Bir önceki teorem gereği öyle bir $\{x_n\}$ dizisi vardır ki; $\{Tx_{n_k}\}$, H'de bir y vektörüne yakınsar. Bihassa $\{Tx_{n_k}\}$, y'ye zayıf yakınsar. Teorem 2.11'in ispatı gereği T zayıf sürekli bir operatördür. Böylece $x_n \to 0$ zayıf yakınsaması $Tx_{n_k} \to 0$ zayıf yakınsamasını gerektirir. Zayıf limitin tekliği $y = 0$'ı verir ve $\|Tx_n\| \to 0$ olur. Bu da $\|Tx_n\| \geq \epsilon$ ile çelişir.

Tersine, eğer T kompakt değilse o zaman Teorem 2.11 gereği; B_1'de öyle bir $\{x_n\}$ dizisi vardır ki, $\{Tx_n\}$'in her hangi yakınsak bir alt dizisi yoktur. Alaoglu'nun teoremi gereği B_1, zayıf topolojide kompakttır. Böylece $\{x_n\}$ zayıf yakınsak alt dizisi vardır. Buradan devam ederek sahip olduğumuz $\{x_n\}$ zayıf yakınsak dizisinin T operatörü altındaki görüntüsünün yakınsak bir alt dizisi yoktur. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 2.13. *Eğer T, H üzerinde kompakt bir operatörse, o zaman H üzerinde her hangi bir S operatörü için TS ve ST'nin her ikisi de kompakttır. Eğer S ayrıca kompakt ise, o zaman $T + S$ kompakt olur.*

İspat. $\{x_n\}$, H'de 0'a zayıf yakınsayan bir dizi olsun. T'nin kompaktlığı $\|Tx_n\| \to 0$ olmasını zorunlu kılar. Böylece S sınırlı olduğundan $\|ST^*x_n\| \to 0$ olur. Ayrıca Teorem 2.10 gereği, S'nin sınırlılığı, S'nin zayıf sürekli olmasını zorunlu kılar. Buradan H'de $Sx_n \to 0$ zayıf yakınsadığı görülür ve T'nin kompaktlığı $\|TSx_n\| \to 0$ limitini zorunlu kılar. Teorem 2.12 gereği hem ST hem de TS kompakttır. $T + S$'nin kompaktlığı da Teorem 2.12 yardımıyla ispatlanabilir. ■

Teorem 2.14. *H üzerindeki bir T operatörün kompakt olması için gerek ve yeter şart T^*'ın kompakt olmasıdır.*

İspat. $(T^*)^* = T$ olduğundan T'nin kompakt olması T^*'nin kompakt olmasını zorunlu kıldığını göstermek yeterlidir. $\{x_n\}$, H'de 0'a zayıf yakınsasın. O zaman, ilkin uniform

sınırlılık teoremi gereği $\forall n$ için öyle bir C vardır ki $\|x\| \leq C$ eşitsizliğini sağlar; ikinci olarak, Teorem 2.10'un ispatı gereği T^* zayıf sürekli olduğundan T^*x_n, H'de 0'a zayıf yakınsar. Cauchy-Schwarz eşitsizliği gereği $\forall n$ için

$$\|T^*x_n\|^2 = \langle TT^*x_n, x_n\rangle \leq C\,\|TT^*x_n\| \tag{2.24}$$

gerçekleşir. Teorem 2.12 gereği,T'nin kompaktlığı ve $T^*x_n \to 0$ zayıf yakınsadığında $\|TT^*x_n\| \to 0$ olur. Böylece $\|TT^*x_n\| \to 0$ olduğunda gene Teorem 2.12 gereği T^* kompakttır. ■

Teorem 2.15. *H üzerindeki bir doğrusal T operatörü olmak üzere,*

$$T \text{ kompakttır} \iff TT^* \text{ kompakttır} \iff |T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}} \text{ kompakttır} \tag{2.25}$$

ilişkisi geçerlidir.

İspat. Teorem 2.13 gereği, T kompaktsa T^*T'de kompakttır. Eğer $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ kompakt ise o zaman Teorem 2.13 ve T'nin kutup ayrışımından yararlanarak T'nin kompakt olduğu gösterilebilir.

Geriye T^*T'nin kompaktlığının $|T|$'nin kompaktlığını zorunlu kıldığını göstermek kalıyor. $S = |T|$ olsun. O zaman $S^2 = T^*T$ olur. H'de 0'a zayıf yakınsayan bir $\{x_n\}$ dizisi verilsin. S^2'nin kompaktlığı $\left\|S^2x_n\right\| \to 0$ limitini zorunlu kılar ve uniform sınırlılık teoremi gereği $\|x_n\|$ normu sınırlı olur. Böylece

$$\|Sx_n\|^2 = \langle S^2x_n, x_n\rangle \leq \|x_n\|\left\|S^2x_n\right\| \tag{2.26}$$

eşitsizliği gerçekleşir. Bu da bize $\|Sx_n\| \to 0$ limitini verir. Buradan Teorem 2.12 gereği S'nin kompakt olduğu görülür. ■

Teorem 2.16. *Eğer $\{T_n\}$, H üzerinde bir kompakt operatörler dizisiyse ve $\|T_n - T\| \to 0$ şartını sağlayan bir T operatörü varsa o zaman T'de kompakttır.*

İspat. $\{x_n\}$ H'de 0'a zayıf yakınsayan bir dizi olsun. O zaman T_k'nin kompaktlığı, $n \to \infty$ iken $\forall k$ için $\|T_kx_n\| \to 0$ limitini zorunlu kılar. Bizim $\|Tx_n\| \to 0$ limitini göstermemiz gerekiyor. Uniform sınırlılık teoremi gereği, $\forall n$ için $\|x_n\| \leq 1$ Verili bir $\epsilon > 0$ için biz öyle bir K bulabiliriz ki $\|T_K - T\| < \epsilon$ eşitsizliği sağlanır. Öyle bir N sayısı ssçelim ki $\forall n \geq N$ için $\|T_Kx_n\| < \epsilon$ eşitsizliğini sağlasın. O zaman $\forall n \geq N$ için

$$\|Tx_n\| \leq \|Tx_n - T_Kx_n\| + \|T_Kx_n\| < 2\epsilon \tag{2.27}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Böylece $n \to \infty$ iken $\|Tx_n\| \to 0$ limiti gerçeklenir ve Teorem 2.12'nin yardımıyla ispat tamamlanmış olur. ■

H Hilbert uzayı üzerindeki tüm sınırlı lineer operatörlerin cebiri $\mathscr{L}$ sembolü ile gösterilir. Bu

$$\|T\| = sup\big\{\, \|Tx\| : x \in B_1(H)\big\}, \qquad T \in \mathscr{L}(H) \tag{2.28}$$

normuyla oluşturulmuş bir Banach uzayıdır. $\mathscr{L}(H)$'in bir alt kümesine, eğer kümedeki her bir elemanın eşleniğide kümedeyse kendine-eş denir. Yukarıdaki operatör normu
(a) $\|T\| = \|T^*\|, \qquad \forall T \in \mathscr{L}(H),$
(b) $\|TS\| \leq \|T\|\,\|S\| \qquad \forall T, S \in \mathscr{L}(H).$
(c) I Birim operatörünün normu 1'dir,
özelliklerine sahiptir.

Bir Banach cebiri, bir tam uzaydaki bütün x, y'ler için $\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|$ şartını sağlayan bir kompleks cebirdir. Eğer cebir bir e birim elemanı içeriyorsa bunun normu 1'e eşit olmalıdır.Bir C^* cebiri, bir Banach cebiri üzerindeki dürev(involution) $x \mapsto x^*$ ile birlikte
(a) x^{**}=x bütün x vektörleri için,
(b) $(ax + by)^* = \bar{a}x^* + \bar{b}y^*, \qquad \forall x, y$ ve bütün kompleks a, b sayıları için.
(c) $(xy)^* = y^*x^*,$
(d) $\|x^*x\| = \|x\|^2, \qquad \forall x,$
özelliklerini sağlamasından oluşur.

$\mathscr{K}(H)$, veya basitçe $\mathscr{K}$, H üzerindeki tüm kompakt operatörlerin kümesini simgeler. Biz şimdiye kadar $\mathscr{K}$'nın kapalı, kendine-eş ve $\mathscr{L}(H)$'ın iki taraflı ideali olduğunu göstermiş olduk. Böylece $\mathscr{K}$, $\mathscr{L}(H)$'in C^*-alt cebiri olmuş olur. $\mathscr{K}(H)$'nin, $\mathscr{L}(H)$'nin tek düzgün kapalı iki taraflı ideali olduğu biliniyor.

Teorem 2.17. *$\{e_n\}$ ve $\{\sigma_n\}$, H'de ortonormal kümeler olsun ve $\{\lambda_n\}$ 0'a yakınsayan bir kompleks sayılar dizisi olsun. T, H üzerinde*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle \sigma_n, \qquad x \in H \tag{2.28}$$

olacak şekilde bir lineer operatör olsun. O zaman T kompakttır.

İspat. Farz edelim ki $\{x_k\}$, H'de 0'a zayıfça yakınsayan bir dizi olsun. O zaman $\forall n$ için,

$$lim_{k\to\infty} \langle x_k, e_n\rangle = 0 \tag{2.29}$$

olur ve öyle bir sabit $C > 0$ vardır ki $\|x_k\| \leq C, \quad \forall k$ için sağlar. $\epsilon > 0$ verilsin ve N

$$|\lambda_n| < \epsilon, \qquad n > N \tag{2.30}$$

eşitsizliğini sağlayan bir pozitif sayı olsun. Pisagorian teoremi gereği,

$$\|Tx_k\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^2 |\langle x_k, e_n\rangle + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle x_k, e_n\rangle|^2 \tag{2.31}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^2 |\langle x_k, e_n\rangle|^2 + \epsilon^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |\langle x_k, e_n\rangle|^2 \tag{2.32}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Yukarıdaki eşitsizlikteki ikinci eleman $C^2\epsilon^2$'ye eşittir veya daha küçüktür. Birinci eleman ise $k \to \infty$ olunca 0'a yakınsar. Buradan çıkan sonuç $k \to \infty$ giderken $\|Tx_k\| \to 0$ olur ve sonuçta Teorem 2.12 gereği T kompakttır. ■

2.3 Schatten Sınıfı Operatörler

Şunu hatırlarsak: Eğer T, ayrılabilir bir H Hilbert uzayı üzerinde bir kompakt operatörse, o zaman H'de öyle $\{e_n\}$ ve $\{\sigma_n\}$ ortonormal kümeleri vardır ki, λ_n, T'nin n'inci tekil değerini simgelemek üzere

$$Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, e_n\rangle \sigma_n, \qquad x \in H \tag{2.33}$$

biçiminde bir ifadeydi.

Teorem 2.18. *Eğer T, $\{\lambda_n\}$ tekil değerleri ile H üzerinde bir kompakt operatör ise, o zaman H'nin her hangi bir $\{x_n\}$ ortonormal tabanı için*

$$\sum_n |\lambda_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |Tx_n|^2 = \sum_{n,m=1}^{\infty} \langle Tx_n, x_m\rangle|^2 \tag{2.34}$$

ifadesi geçerlidir.

İspat. Sadece ilk eşitliğin kanıtlanması yeterlidir. İkincisi Parseval ve Fubini teoreminden gelir.

$$Tx = \sum_k \lambda_k \langle x, e_k\rangle \sigma_k, \qquad x \in H \tag{2.35}$$

T'nin kanonik ayrışımı olsun. O zaman H'nin herhangi bir $\{x_n\}$ ortonormal tabanı için, Parseval teoremi gereği,

$$|Tx_n|^2 = \sum_k |\lambda|^2 \langle x_n, e_k\rangle|^2 \tag{2.36}$$

ifadesi gerçeklenir. Fubini ve Parseval teoremini tekrar uygularsak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n\| = \sum_k |\lambda|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, e_k\rangle|^2 \tag{2.37}$$

$$\sum_k |\lambda|^2 \|e_k\|^2 = \sum_k |\lambda|^2 \tag{2.38}$$

eşitliklerini elde ederiz. ■

Teorem 2.19. *Eğer T, H üzerinde bir pozitif kompakt operatörse ve*

$$Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, e_n\rangle \; e_k, \qquad x \in H,$$

T'nin kanonik ayrışımıysa, o zaman H'nin herhangi bir $\{\sigma_k\}$ ortonormal tabanı için

$$\sum_n \lambda_n = \sum_{k=1}^{\infty} \langle T\sigma_k, \sigma_k\rangle \tag{2.39}$$

ifadesi doğrudur.

İspat. Eğer $\{\sigma_k\}$, H için bir ortonormal taban ise, o zaman

$$\langle T\sigma_k, \sigma_k\rangle = \sum_n \lambda_n |\langle \sigma_k, e_n\rangle|^2 \tag{2.40}$$

olur. Parseval teoremi gereği,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle T\sigma_k, \sigma_k\rangle = \sigma_k \lambda_n \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \sigma_k, e_n\rangle|^2 = \sum_n \lambda_n \tag{2.41}$$

olur. ■

3
L^p UZAYLARI ÜZERİNDE İNTEGRAL OPERATÖRLER

İntegral operatörler analizin önemli konuları arasında yer alır. Bilhassa tezimizin konusu olan Hankel operatörleri, Toeplitz operatörleri ve bileşke operatörleri integral operatörleri olarak bilinirler. Bu bölüm genel integral operatörler ile ilgili iki önemli sonuç içermektedir. Bunlar, Hilbert-Schmidt integral operatörlerinin nitelendirilmesi ve belirli bir integral operatörün L^p üzerinde sınırlı oluşunu test eden Schur testidir. Ayrıca burada, çekirdekleri Bergman çekirdeğinden oluşturulan birim disk üzerindeki bir integral operatör ailesi üzerinde durulacaktır.

3.1 Hölder Eşitsizliği

Hölder eşitsizliğinin, genelde integral çalışmalarında özelde de integral operatörlerinde kullanılan en temel yaklaşımlardan biri olduğunu söylemek bilinen bir gerçektir. Hölder eşitsizliğinin en bilinen formuyla başlıyoruz.

Teorem 3.1. *$p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve μ, X üzerinde bir pozitif ölçüm olsun. Eğer $f \in L^p(X, d\mu)$ ve $g \in L^q(X, d\mu)$ ise, o zaman $f\,g \in L^1(X, d\mu)$ ve*

$$\left| \int_X f\,\bar{g}\,d\mu \right| \leq \left[\int_X |f|^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_X |g|^q d\mu \right]^{\frac{1}{q}} \tag{3.1}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Verilmesi gereken bazı özel durumlar söz konusudur. Önce, eğer μ sonluysa, o zaman yukarıdaki teoremde $g = 1$ alarak, $p \geq 1$ için $L^p(X, d\mu) \subset \mathrm{L}^1(X, d\mu)$ olduğunu gösterebiliriz. Bilhassa eğer μ olasılık ölçümüyse, o zaman $\forall p \geq 1$ ve $f \in L^p(X, d\mu)$ için

$$\left| \int_X f\,d\mu \right| \leq \left| \int_X |f|^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}} \tag{3.2}$$

eşitsizliği çıkarılır. İkinci olarak, eqer μ ayrık ölçümse yani; eğer μ sayılabilir

sonsuzlukta noktaların kümesi ise o zaman bütün $\{a_k\} \in l^p$ ve $\{b_k\} \in l^q$ dizileri için

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k \right| \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^q \right]^{\frac{1}{q}} \tag{3.3}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Aşağıdaki iki bulgu $p \leq 1$ olması durumundaki Hölder eşitsizlikleridir.

Teorem 3.2. *μ, X üzerinde bir olasılık ölçümü olsun. Eğer $0 < p \leq 1$ ve $f \in L^1(X, d\mu)$ ise, o zaman $f \in L^p(X, d\mu)$ ve*

$$\left[\int_X |f|^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_X |f| d\mu \tag{3.4}$$

eşitsizlilkeri doğrudur.

İspat. $p = 1$ için durum açıktır. $0 < p < 1$ için araştırıyor olacağız. $r = \frac{1}{p}$ ve $f \in L^1(X, d\mu)$ olsun. O zaman $1 < r < \infty$ ve $g = |f|^p \in L^r(X, d\mu)$ olur. (3.2) gereği

$$\left| \int_X |g| d\mu \right| \leq \left[\int_X |g|^r d\mu \right]^{\frac{1}{r}} \tag{3.5}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Kolayca görülür ki buda (3.4)'e denktir.

■

Teorem 3.3. *$0 < p \leq 1$ ve $\{a_n\} \in l^p$ olsun. O zaman $\{a_n\} \in l^1$ olup*

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \tag{3.6}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. Genelliği bozmadan, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p = 1$ olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda $\forall k$ için $|a_k| \leq 1$ olur ve

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p |a_k|^{1-p} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p = 1 \tag{3.7}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Bu da teoremi kanıtlar. ■

3.2 Hilbert Schmidt Integral Operatörleri

$(X, d\mu)$ bir ölçüm uzayı ve K, $X \times X$ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olsun. O zaman K, $L^2(X, d\mu)$ üzerinde

$$Tf(x) = \int_X K(x,y) f(y) d\mu(y), \qquad f \in L^2(X, d\mu). \tag{3.8}$$

şeklinde bir T lineer operatörü üretir. T operatörü K çekirdekli integral operatörü diye adlandırılır. Genelde K çekirdeği sınırlı olduğunda bile bir integral operatörü sınırsız olur. Bir T integral operatörünün sınırlılığını kontrol etmenin kolay yolu yoktur. Bu kısımda farz edebiliriz ki K, $X \times X$ üzerinde öyle bir fonksiyon ki, üretilen T operatörü $L^2(X, d\mu)$ üzerinde sınırlıdır. Bir sonraki kısımda T'nin sınırlılığını garantileyen K üzerindeki koşulu göstereceğiz.

$L^2(X, d\mu)$ üzerindeki bir iç çarpım

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu \tag{3.9}$$

biçiminde verilir. $L^2(X, d\mu)$ üzerindeki Cauchy Schwart eşitsizliği, Hölder eşitsizliğinin özel bir hali olup

$$\left| \int_X f \bar{g} d\mu \right| \leq \left[\int_X |f|^2 d\mu \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_X |g|^2 d\mu \right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.10}$$

biçimindedir. Cauchy Schwartz eşitsizliğinden kolayca takip edilebilir ki eğer μ, X üzerinde sonlu ölçümse ve K, $X \times X$ üzerinde sonlu bir fonksiyon ise o zaman üretilen T integral operatörü $L^2(X, d\mu)$ üzerinde sonludur. Benzer şekilde, Hölder eşitsizliği, eğer μ sonlu ve K sınırlı ise $\forall p \in [1, +\infty]$ için T'nin $L^2(X, d\mu)$ üzerinde sınırlı olmasını zorunlu kılar. Tez boyunca μ'nün σ-sonlu ölçüm olduğunu(böylece Fubini'nin teoremini kullanabiliriz) ve $L^2(d\mu)$ uzayının ayrılabilir bir uzay olduğunu varsayacağız.

$\{e_n\}$, $L^2(X, d\mu)$ için bir ortonormal taban olsun. Eğer T, $L^2(X, d\mu)$ üzerinde Hilbert-Schmidt operatörü ise o zaman biz Teorem 2.18'den biliyoruz ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n,m=1}^{\infty} |\langle Te_n, e_m \rangle|^2 \tag{3.11}$$

serisi yakınsar ve bu toplam $\{e_n\}$ ortonormal tabanından bağımsızdır. Her hangi pozitif

m, n tam sayıları için, $\sigma_{n,m}$, $X \times X$ üzerinde bir fonksiyon olsun ve

$$\sigma_{n,m}(x,y) = e_n(x)e_m(y) \tag{3.12}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $\{\sigma_{n,m}\}$, $L^2(X \times X, d\mu \times d\mu)$'de bir ortonormal küme olur. $K(x,y)$'yi

$$K(x,y) = \sum_{n,m=1} \langle Te_n, e_m \rangle \sigma_{n,m}(x,y), \qquad x,y \in X \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlayalım. Yukarıdaki serinin kat sayılarının kare toplanabilirliği, serinin $L^2(X \times X, d\mu \times d\mu)$'de yakınsak olmasını zorunlu kılıyor ve bu nedenle sonuç fonksiyonu K, $L^2(X \times X, d\mu \times d\mu)$'nin elemanıdır. Ayrıca, eğer K tarafından üretilmiş S integral operatörü $L^2(X, d\mu)$ üzerine ise, o zaman

$$\langle Se_n, e_m \rangle = \langle Te_n, e_m \rangle \qquad n,m \geq 1 \tag{3.14}$$

eşitliği meydana gelir. Buradan $S = T$ olur. Böylece $L^2(X, d\mu)$ üzerindeki her bir Hilbert-Schmidt operatörü, $L^2(X, d\mu)$'deki bir fonksiyon tarafından üretilmiş olur. Aşağıdaki teorem tersinin de doğru olduğunu gösterir.

Teorem 3.4. *$L^2(X, d\mu)$ üzerindeki bir T operatörünün Hilbert-Schmidt olabilmesi için gerek ve yeter koşul $L^2(X \times X, d\mu \times d\mu)$'daki bir K fonksiyonunun*

$$Tf(x) = \int_X K(x,y)f(y)\, d\mu(y), \qquad \forall f \in L^2(X, d\mu) \tag{3.15}$$

biçimini sağlayacak şekilde var olmasıdır.

İspat. $L^2(X, d\mu)$ üzerindeki her Hilbert-Schmidt operatörünün $L^2(X \times X, d\mu \times d\mu)$'de çekirdeği bulunan bir integral operatör olduğunu görmüştük. Diğer taraftan, eğer K $L^2(X \times X, d\mu \times d\mu)$'da bir fonksiyon ve T

$$Tf(x) = \int_X K(x,y)f(y)\, d\mu(y), \qquad f \in L^2(X, d\mu) \tag{3.16}$$

biçiminde bir operatör olsun. T'nin Hilbert-Schmidt olduğunu göstermeliyiz.

$\{e_n\}$, $L^2(X, d\mu)$'nin bir ortonormal tabanı olsun. Her hangi bir $n \geq 1$ ve hemen hemen (h.h.) her $x \in X$ için $K_x(y) = \overline{K(x,y)}$ olduğunda $Te_n(x) = \langle e_n, K_x \rangle$ eşitliği geçerlidir. Parseval özdeşliği gereği

$$\sum_{n=1}^{\infty} |Te_n(x)|^2 = \|K_x\|^2 = \int_X |K(x,y)|^2\, d\mu(y), \qquad \text{h. h. } \forall x \in X \tag{3.17}$$

bağıntıları gerçeklenir. Fubini teoremi uygulanırsa

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\|Te_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_X |Te_n(x)|^2\,d\mu(x)\\ &= \int_X \sum_{n=1}^{\infty}|Te_n(x)|^2\,d\mu(x)\\ &= \int_X\int_X K(x,y)|^2\,d\mu(x)\,d\mu(y)\\ &\leq +\infty \end{aligned} \tag{3.18}$$

elde edilir ve buradan T'nin Hilbert-Schmidt olduğu görülür. ■

3.3 Schur Teoremi

(X,μ) bir ölçüm uzayı ve K, $X\times X$ üzerinde bir fonksiyon olsun. T, K çekirdekli

$$Tf(x) = \int_X K(x,y)f(y)\,d\mu(y) \tag{3.19}$$

biçiminde bir integral operatör olsun. Bu kısımda K üzerinde, K ile bağlantılı T operatörünün $1<p<+\infty$ durumunda sınırlılığı için yeterli şartı göstereceğiz. Bu sonuç Schur teoremi veya Schur testi diye adlandırılır.

Teorem 3.5 (Schur Teoremi)**.** *K, $X\times X$ üzerinde negatif olmayan bir ölçüm, T, K çekirdekli bir integral operatör ve $1<p<+\infty$ için $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. Eğer pozitif C_1 ve C_2 sayıları ve X üzerinde ölçülebir bir h fonksiyonu*

$$\int_X K(x,y)h(y)^q\,d\mu(y) \leq C_1 h(x)^q, \qquad h.\ h.\ \forall x\in X, \tag{3.20}$$

$$\int_X K(x,y)h(x)^p\,d\mu(x) \leq C_2 h(y)^p, \qquad h.\ h.\ \forall y\in X \tag{3.21}$$

biçimlerini sağlıyorsa, o zaman T, $L^p(X,d\mu)$ üzerinde bir sınırlı lineer operatördür ve $\|T\|\leq C_1^{\frac{1}{q}}C_2^{\frac{1}{p}}$ dir.

İspat. Bu sonuç Hölder eşitsizliğinden ve Fubini teoreminden çıkarılır. Aslında, eğer $f\in L^p(X,d\mu)$ ise o zaman hemen hemen her $x\in X$ için

İspat.

$$|Tf(x)| \leq \int_X K(x,y)h(y)h(y)^{-1}|f(y)|\,d\mu(y) \tag{3.22}$$

eşitsizliği gerçeklenir ve Hölder eşitsizliğinden

$$|Tf(x)| \leq \left[\int_X K(x,y)h(y)h(y)^q \, d\mu(y)\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_X K(x,y)h(y)h(y)^{-p}|f(y)|^p \, d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p}} \tag{3.23}$$

sonucuna ulaşırız. Fubini teoreminden ve varsayımın ikinci eşitsizliğinden

$$\int_X |Tf|^p \, d\mu \leq C_1^{\frac{p}{q}} \int_X |f(y)|^p h(y)^{-p}|f(y)|^p \, d\mu(y) \int_X K(x,y)h(x)^p \, d\mu(x)$$

$$\leq C_1^{\frac{p}{q}} C_2 \int_X |f(y)|^p \, d\mu(y) \tag{3.24}$$

ifadelerine ulaşırız. Böylece T, $L^p(X, d\mu)$ üzerinde bir sınırlı lineer operatördür ve $\|T\| \leq C_1^{\frac{1}{q}} C_2^{\frac{1}{p}}$ olur. ■

3.4 Birim Disk Üzerinde İntegral Operatörler

$\mathbb{C}$ kompleks düzlem olsun.

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \tag{3.24}$$

kümesine (açık) birim disk denir. $\mathbb{D}$ üzerindeki alan ölçümünü belirtmek için dA sembolü kullanılır. $\mathbb{D}$'nin alan ölçümü 1 olacak şekilde normalleştirilir. Kartezyen ve kutupsal koordinatları hesaba katarsak

$$z = x + iy = re^{i\theta} \tag{3.25}$$

olmak üzere

$$dA(z) = \frac{1}{\pi} dx dy = \frac{r}{\pi} dr d\theta \tag{3.26}$$

ifadesi tanımlanır. [1]'de aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 3.6 ([1]). *Bir α reel sayısı için*

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^\alpha \, dA(z) < \infty \tag{3.27}$$

olması için gerek ve yeter koşul $\alpha > -1$ olmasıdır.

İspat. Kutupsal koordinatlarda

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^\alpha \, dA(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-r^2)^\alpha r \, dr \int_0^{2\pi} d\theta \tag{3.28}$$

$$= \int_0^1 (1-r)^\alpha \, dr$$

$$= \begin{cases} +\infty & \alpha \leq -1, \\ (\alpha+1)^{-1} & \alpha > -1 \end{cases} \tag{3.29}$$

ifadeleri gerçeklenir. Buradan da teorem ıspatlanmış olur. ■

Aşağıdaki integral yakınsamaları, birim diskteki fonksiyon uzayları üzerindeki operatörlerin araştırılmasında temel niteliğindedir.

Teorem 3.7 ([2]). *$z \in \mathbb{D}$, c reel bir sayı, $t > -1$ ve*

$$I_{c,t}(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^t}{|1-z\overline{w}|^{2+t+c}} dA(w) \tag{3.30}$$

olsun.
(a) Eğer $c < 0$ ise, o zaman $I_{c,t}$, z'nin bir fonksiyonu olarak, $\mathbb{D}$ üzerinde üstten ve alttan sınırlıdır.
(b) Eğer $c > 0$ise , o zaman

$$I_{c,t} \sim \frac{1}{(1-|z|^2)^c}, \qquad |z| \to 1^-. \tag{3.31}$$

(c) Eğer $c = 0$ ise, o zaman

$$I_{0,t} \sim \log \frac{1}{1-|z|^2}, \qquad |z| \to 1^-. \tag{3.32}$$

İspat. $t > -1$ olduğundan $I_{c,t}(z)$ integrali $\forall x \in \mathbb{D}$ için geçerlidir.

$$\lambda = \frac{1}{2}(2+t+c) \tag{3.33}$$

lduğunu kabul edelim. Eğer $\lambda = 0$ veya negatif bir sayı ise o zaman açıkça görülür ki $c < 0$ ve $I_{c,t}(z)$, z'de sınırlıdır. Eğer λ ne 0 ne de negatif sayı ise o zaman

$$\frac{1}{(1-z\overline{w})^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)}{n!\Gamma(\lambda)} z^n \overline{w}^n \tag{3.34}$$

$(1-|w|^2)^t dA(w)$'ın rotasyon korunumu gereği

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^t}{|1-z\bar{w}|^{2\lambda}} dA(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{(n!)^2\Gamma(\lambda)^2} |z|^{2n} \int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^t |w|^{2n}\, dA(w)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{(n!)^2\Gamma(\lambda)^2} |z|^{2n} \int_0^1 (1-r)^t r^n\, dr$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{(n!)^2\Gamma(\lambda)^2} \frac{\Gamma(t+1)(\Gamma(n+1)}{\Gamma(t+n+2)} |z|^{2n}$$

$$= \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(\lambda)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)^2}{n!\Gamma(n+t+2)} |z|^{2n} \tag{3.35}$$

eşitlikleri gerçeklenir. Stirling formülü gereği

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{c-1} |z|^{2n} \sim \frac{1}{(1-|z|^2)^c}, \qquad |z| \to 1^- \tag{3.36}$$

yaklaşımı olur çünkü; aşağıdaki eşitlikten

$$\frac{1}{(1-|z|^2)^c} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+c)}{n!\Gamma(c)} |z|^{2n} \tag{3.37}$$

ve

$$\frac{\Gamma(n+c)}{n!} \sim n^{c-1} \tag{3.38}$$

Stirling yaklaşımıyla istenilen ifadeye ulaşılınabilir. ■

Tanım 3.1. Eğer α bir reel parametre ise, $\alpha > -1$ için $c_\alpha = \alpha + 1$ ve $\alpha \leq -1$ için $c_\alpha = 1$ olmak üzere, $\mathbb{D}$ üzerinde bir pozitif dA_α Borel ölçümü

$$dA_\alpha(z) = c_\alpha (1-|z|^2)^\alpha dA(z) \tag{3.39}$$

biçiminde tanımlanır.

dA_α ölçümünün bir olasılık ölçümü olması için gerek ve yeter koşul $\alpha > -1$ olması gerektiğini belirtelim.
Her hangi reel a, b, c parametreleri için

$$S_{a,b,c} f(z) = (1-|z|^2)^a \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^b}{|1-z\overline{w}|^c} f(w) dA(w) \tag{3.40}$$

ve

$$T_{a,b,c} f(z) = (1-|z|^2)^a \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^b}{(1-z\overline{w})^c} f(w) dA(w) \tag{3.41}$$

biçimlerine integraller operatörler tanımlanır.

Teorem 3.8 ([3]). *α reel bir sayı ve $p > 1$ olsun. Eğer c ne 0'a eşit ne de negatif bir sayıysa aşağıdaki durumlar denktir.*
(a) $S = S_{a,b,c}$ operatörü $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ üzerinde sınırlıdır.
(b) $T = T_{a,b,c}$ operatörü $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ üzerinde sınırlıdır.
(c) Parametreler $c \leq 2 + a + b$ ve $-pa < \alpha + 1 < p(b + 1)$ şartlarını sağlar.

4
BERGMAN UZAYLARI

Bu bölümde Bergman uzayları, Möbius grubu ve açık birim disk üzerindeki Bergman metriği konuları ele alınacaktır. Bu konular, ileride vereceğimiz Hankel operatörlerinin analizi için temel niteliğindedir.

4.1 Möbius Grubu

Analitik, bire bir ve örten olan bir $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ fonksiyonuna bir Möbius tasviri denir. Kompleks analizden bir Möbius tasvirinin tersinin analitik olduğu elde edilir. Böylece bir Möbius tasvirinin terside yine bir Möbius tasviridir.

$Aut(\mathbb{D})$ ile $\mathbb{D}$'nin tüm Möbius tasvirlerinin kümesini gösterelim. $Aut(\mathbb{D})$, tasvirlerin bileşkesi altında bir gruptur. Bu gruba Möbius grubu veya $\mathbb{D}$'nin otomorfizm grubu denir.

ϕ'nin, $Aut(\mathbb{D})$'ye ait olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\phi(z) = e^{i\theta}\phi_a(z), \qquad z \in \mathbb{D} \tag{4.1}$$

olacak şekilde bir θ reel sayısının ve bir $a \in \mathbb{D}$ noktasının var olmasıdır. Burada

$$\phi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \bar{a}z}, \qquad z \in \mathbb{D} \tag{4.2}$$

0 ve a noktalarını değiştiren özel bir Möbius tasviridir. Ayrıca ϕ,nin $Aut(\mathbb{D})$'ye ait olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\phi(z) = \phi_a(e^{i\theta}z), \qquad z \in \mathbb{D} \tag{4.3}$$

olacak şekilde bir θ reel sayısının ve bir $a \in \mathbb{D}$ noktasının var olduğu gösterilebilir. Böylece, topolojik olarak Möbius grubu $\mathbb{D} \times \partial\mathbb{D}$'ye homeomorfiktir.

Şimdi, özel $\phi_a(z)$ Möbius tasvirlerinin involüsyonlar ya da involut otomorfizmler

olarak bilinen temel özelliklerini verelim.

Teorem 4.1 ([4]). *Herhangi bir $a \in \mathbb{D}$ ve $z \in \mathbb{D}$ için, $\phi_a(a) = 0$, $\phi_a(0) = a$ ve $\phi_a \circ \phi_a(z) = z$ olur ve ayrıca*

$$\phi^{'}(z) = -\frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2} \tag{4.4}$$

ve

$$1-|\phi_a(z)|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|)^2}{|1-\overline{a}z|^2} \tag{4.5}$$

eşitlikleri gerçeklenir.

Her hangi bir analitik $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tasvirinin reel Jacobien determinantı $|\phi^{'}(z)|^2$ olduğundan aşağıdaki değişkenlerin değişimi formülü (4.4) eşitliğinin bir sonucudur.

Teorem 4.2 ([5]). *Eğer $f \in L^1(\mathbb{D}, dA)$ ise veya f negatif olmayan bir sayı ise, o zaman*

$$\int_{\mathbb{D}} f \circ \phi_a(z)\, dA(z) = \int_{\mathbb{D}} f(z) \frac{(1-|a|^2)^2}{|1-\overline{a}z|^4}\, dA(z) \tag{4.6}$$

olur.

Daha genel olarak eğer α reel bir sayı ise ve dA_α, (3.40)'da belirtildiği gibi bir ölçümse, o zaman aşağıdaki değişkenlerin değişmesi formülü elde edilir.

Teorem 4.3. *Eğer $f \in L^1(\mathbb{D}, dA)$ ise veya eğer f negatif olmayan bir sayı ise, o zaman*

$$\int_{\mathbb{D}} f \circ \phi_a(z) dA_\alpha(z) = \int_{\mathbb{D}} f(z) \frac{(1-|a|^2)^{2+\alpha}}{|1-\overline{a}z|^{2(2+\alpha)}}\, dA_\alpha(z) \tag{4.7}$$

olur.

4.2 Bergman Metriği

$\mathbb{D}$ üzerinde bir pseudo-hiperbolik metrik

$$\rho(z,w) = \left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right|, \qquad z,w \in \mathbb{D} \tag{4.8}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu $\mathbb{D}$ üzerinde bir metriktir ve kolayca Möbius eşlemesi altında korunumlu olduğu kolaylıkla kontrol edilebilir. Yani, $\forall \phi \in Aut(\mathbb{D})$ ve $\forall z, w \in \mathbb{D}$

$$\rho(\phi(z), \phi(w)) = \rho(z,w) \tag{4.9}$$

eşitliği sağlanır.

$\mathbb{D}$ üzerinde hiperbolik veye Bergman metriğini kullanmak genelde daha uygundur. Bu sonsuz küçük $\sqrt{H(z)}ds$ Bergman metriği ile hesaplnaır. Onun gösterimi

$$H(z) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \log \frac{1}{1-|z|^2} = \frac{1}{(1-|z|^2)^2} \tag{4.10}$$

biçimindedir.

Tanım 4.1. Eğer $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$ için, birim diskte bir düzgün(smooth) eğri ise, o zaman hiperbolik metrikte $\gamma(t)$'nın uzunluğu

$$l(\gamma) = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|\, dt}{1-|\gamma(t)|^2} \tag{4.11}$$

şeklinde hesaplanır. Parçalı düzgün eğrilerin uzunluğu her bir pürüzsüz eğrilerin uzunluğunun toplamından oluşur.

Bergman metriğinde aralık fonksiyonu β simgesi ile gösterilir ve

$$\beta(z,w) = \inf\, l(\gamma) \tag{4.12}$$

şeklinde tanımlanır. Burada infimum, z'den w'ye giden tüm parçalı pürüzsüz eğriler üzerinden alınır. $\forall z, w \in \mathbb{D}$ için

$$\beta(z,w) = \frac{1}{2} \log \frac{1+\rho(z,w)}{1-\rho(z,w)} \tag{4.13}$$

eşitliği literatürde iyi bilinir. Özellikle, $\forall z \in \mathbb{D}$ için

$$\beta(z,0) = \frac{1}{2} \log \frac{1+|z|}{1-|z|} = \tanh^{-1}(|z|) \tag{4.14}$$

ve $\forall z, w \in \mathbb{D}$ için

$$\beta(z,w) = \tanh^{-1}(\rho(z,w)) \tag{4.15}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Birim disk, hiperbolik metrikte tamdır. Yani; her hangi iki $z, w \in \mathbb{D}$ noktaları için, z'den w'ye giden bir yay vardır ki, jeodezik adı verilen bu yay hiperbolik metrikte minimum uzunluktadır. Örneğin; orjinden her hangi bir $z \in \mathbb{D}$'ye giden jeodezik $\gamma(t) = tz,\ 0 \leq t \leq 1$ doğru parçası ile verilir. Daha genel olarak, her hangi verilen iki z ve $w \in \mathbb{D}$ noktaları için z ve w'den geçen tek bir $C_{z,w}$ çemberi vardır ki, bu çember birim çembere diktir. O zaman z ve w arasındaki jeodezik, D'de yer alan z ve w arasındaki $C_{z,w}$ yayıdır.

Hiperbolik metrik, Möbius tasviri altında değişmezdir: $\forall z, w$, ve $\forall \phi \in Aut(\mathbb{D})$ için

$$\beta(\phi(z), \phi(w)) = \phi(z, w) \tag{4.16}$$

eşitliği geçerlidir. Pseudu hiperbolik metrik üstten 1 ile sınırlıyken, hiperbolik metrik sınırsızdır.

Her hangi bir $z \in \mathbb{D}$ ve $r < 0$ için hiperbolik disk

$$D(z, r) = \{w \in \mathbb{D} : \beta(w, z) < r\} \tag{4.17}$$

şeklinde tanımlanır. $|D|$ ise normalleştirilmiş dA alan ölçümüne göre $\mathbb{D}$'de ölçülebilir bir D kümesinin alanını temsil eder.

Teorem 4.4 ([6]). *$r > 0$, $z \in \mathbb{D}$ ve $D(z, r)$, z noktasındaki hiperbolik disk olsun. O zaman $s = tanh(r) \in (0, 1)$ olmak üzere*
(a) $|D(z, r)| = (1 - |z|^2)^2 s^2 / (1 - |z|^2 s^2)^2$.
(b) $inf\{|1 - z\overline{w}|^{-1} : w \in D(z, r)\} = (1 - s|z|)/(1 - |z|^2)$.
(c) $sup\{|1\text{-}z\overline{w}|^{-1} : w \in D(z, r)\} = (1 + s|z|)/(1 - |z|^2)$.

(b) ve (c)nin sonucu olarak $\beta(z, w)$ sınırlı ise

$$|1 - z\overline{w}| \sim 1 - |z|^2 \sim 1 - |w|^2 \tag{4.18}$$

yaklaşıkıkları olur. Bunu (a) ile birleştirirsek $|D(z, r_1)|$, $|D(w, r_2)|$ ile karşılaştırılabilir. Teorem 4.4'in diğer bir sonucu her hangi bir reel α ve pozitif r için

$$A_\alpha(D(z, r)) \sim (1 - |z|^2)^{2+\alpha}, \qquad z \in \mathbb{D} \tag{4.19}$$

yaklaşıklığı elde edilir.

4.3 Bergman Uzayları

Tanım 4.2. $p > 0$ ve $\alpha > -1$ için, $H(\mathbb{D})$, $\mathbb{D}$'de analitik fonksiyonların uzayını göstermek üzere Bergman uzayları

$$L^p_a(dA_\alpha) = H(\mathbb{D}) \cap L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha) \tag{4.20}$$

biçiminde tanımlanır.

Bu kısıma f , $\mathbb{D}$'de analitik bir fonksiyon olmak üzere $|f|^p$ biçimindeki fonksiyonlar için

alt-ortalama değer teoremiyle başlıyoruz.

Teorem 4.5 ([4]). *$p > 0$ ve $0 < r < 1$ olsun. O zaman bütün analitik f fonksiyonları için*

$$|f(0)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \tag{4.21}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. f, özdeş olarak 0 olmadıkça, $\mathbb{D}$ üzerinde sayılabilir çoklukta sıfır görüntüsüne sahiptir. Bu nedenle, $|z| = r$'de hiç bir 0 görüntüsü olmayan f'lerde $r \in (0,1)$ için çözmek yeterlidir.

Bir $r \in (0,1)$ sabitleyelim ve farzedelim ki f, $|z| = r$ üzerinde hiç sıfır görüntüsüne sahip olmasın. Ayrıca $f(0) \neq 0$ olsun. Aksi halde aranan sonucun elde edilmesi kolaydır. Şimdi, $g(z) = f(rz)$, $\overline{\mathbb{D}}$ kapalı diski üzerinde analitiktir ve birim çember üzerinde "0" değerini almaz. $\{a_1, a_2, a_3, .., a_n\}$, g'nin $\mathbb{D}$'deki sıfırları olsun ve

$$B(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{a_k} \frac{a_k - z}{1 - \overline{a}_k z} \tag{4.22}$$

biçiminde sonlu bir Blaschke çarpımı tanımlayalım.
O zaman $h = g/B$ bir analitik fonksiyondur ve $\overline{\mathbb{D}}$ üzerinde "0" görüntüsü olmaz. Böylece $\overline{\mathbb{D}}$ üzerinde analitik h^p fonksiyonu tanımlayabiliriz. Analitik fonksiyonlar için ortalama teorem gereği,

$$h^p(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^p(e^{i\theta}) \, d\theta \tag{4.23}$$

eşitliği geçerlidir. Her iki tarafın modüllerini alırsak

$$\frac{|f(0)|^p}{|B(0)|^p} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(e^{i\theta})|^p \, d\theta \tag{4.24}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $|z| = 1$ için $0 < |B(0) \leq 1$ ve $|B(z) = 1$ olur. Sonuç olarak

$$|f(0)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(e^{i\theta})|^p \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \tag{4.25}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Yukarıdaki teoerem ve kolay bir dönüşüm argümanı gereği, eğer f, Ω üzerinde analitikse ve $a \in \Omega$ ise, o zaman $\forall p > 0$, $\forall r > 0$ ve a merkezli r yarı çaplı disk

Ω'da yer almak üzere

$$|f(a)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|^p \, d\theta \tag{4.26}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu, $|f(a)|^p$ için alt ortalama değer özelliğidir. Bu harmonik analizde standart bir sonuçtur.

Aşağıdaki yaklaşım ise Teorem 4.5'in alan integrali versiyonudur.

Teorem 4.6 ([4]). *f, $\mathbb{D}$'de analitik olsun. O zaman $\forall p > 0$ ve $\alpha > -1$*

$$|f(0)|^p \leq \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, dA_\alpha(z) \tag{4.27}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Teorem 4.5 ve kutupsal koordinatlarda integrali kullanarak sonuca ulaşırız. ■

5
BERGMAN UZAYINDA TOEPLİTZ OPERATÖRLERİ

Birim diskte analitik fonksiyonların uzayı üzerinde tanımlı operatörlerin incelenmesi önemlidir. Bu operatörler Toeplitz operatörleri ve Hankel operatörleridir. Toeplitz operatörleri, Hankel operatörleri ile yakından bağlantılı olduğu için önce Toeplitz operatörlerini Bergman uzayları üzerinde ele alıyoruz.

5.1 Toeplitz Operatörleri

Bu bölüm boyunca bir $\alpha > -1$ ağırlık parametresi(weight parameter) sabitleyip, $L^2_a(dA_\alpha)$ Bergman uzayını ve

$$P_\alpha : L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha) \to L^2_a(dA_\alpha) \tag{5.1}$$

Bergman projeksiyonunu dikkate alacağız. Burada P_α operatörü

$$P_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} K_\alpha(z,w) f(w)\, dA_\alpha(w) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}\, dA_\alpha \tag{5.2}$$

biçiminde ifade edilen bir integral operatördür.

Bir $\phi \in L^\infty(\mathbb{D})$ fonksiyonu verilsin. $L^2_a(dA_\alpha)$ üzerinde bir T_ϕ operatörünü

$$T_\phi f = P_\alpha(\phi f), \qquad f \in L^2_a(dA_\alpha) \tag{5.3}$$

biçiminde tanımlayalım. T_ϕ operatörü, $L^2_a(dA_\alpha)$ Bergman uzayı üzerinde ϕ sembollü Toeplitz operatörü diye adlandırılır. P_α Bergman projeksiyonunun $L^2_a(dA_\alpha)$ üzerindeki normu 1 olduğundan $\left\|T_\phi\right\| \leq \|\phi\|_\infty$ eşitsizliği geçerlidir. P_α Bergman projeksiyonunun integral gösterilimini kullanarak, T_ϕ'yi

$$T_\phi f(z) = \int_{\mathbb{D}} K_\alpha(z,w)\phi(w) f(w)\, dA_\alpha(w) \tag{5.4}$$

$$= \int_{\mathbb{D}} \frac{\phi(w) f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} \, dA_\alpha(w) \tag{5.5}$$

biçiminde bir integral operatör olarak ifade edebiliriz. Açıkca, T_ϕ integral operatörü, α parametresine bağlıdır. Karışıklık ihtimalinin olduğu yerde T_ϕ yerine $T_\phi^{(\alpha)}$ sembolünü kullanacağız.

Teorem 5.1. *a ve b kompleks sayılar ve ϕ ve ψ, $\mathbb{D}$ üzerinde sınırlı fonksiyonlar olsun. O zaman*
(a) $T_{a\phi+b\psi} = aT_\phi + bT_\psi$,
(b) $T_{\overline{\phi}} = T_\phi^*$,
(c) Eğer $\phi > 0$ ise, o zaman $T_\phi \geq 0$ ifadeleri geçerlidir.
Ayrıca, eğer $\phi \in H^\infty$ ise, o zaman
(d) $T_\psi T_\phi = T_{\psi\phi}$,
(e) $T_{\bar{\phi}} T\psi = T_{\bar{\phi}\psi}$ *ifadeleri geçerlidir.*

Toeplitz operatörleri $\mathbb{D}$ açık birim diski üzerindeki sonlu ölçümler için de tanımlanabilir. Aslında μ, $\mathbb{D}$ üzerinde sonlu kompleks Borel ölçümüyse

$$T_\mu : H^\infty \to H(\mathbb{D})$$

biçiminde bir operatör tanımlanır ve integral formülü gereği

$$T_\mu f(z) = \int_{\mathbb{D}} K_\alpha(z,w) f(w) \, d\mu(w) \tag{5.6}$$

biçimini alır. Eğer $\forall f \in H^\infty$

$$\int_{\mathbb{D}} |T_\mu f|^2 \, dA_\alpha \leq C \int_{\mathbb{D}} |f|^2 \, dA_\alpha \tag{5.7}$$

ifadesini sağlayan sabit bir C sayısı varsa, o zaman T_μ, $L_a^2(dA_\alpha)$ üzerinde sınırlıdır.

Tanım 5.1. Eğer T_μ, $L_a^2(dA_\alpha)$ üzerinde sınırlıysa, o zaman $L_a^2(dA_\alpha)$ üzerinde T_μ'in Berezin dönüşümü

$$\begin{aligned}
\widetilde{T_\mu}(z) = \langle T_\mu k_z, k_z \rangle &= \frac{1}{\sqrt{K(z,z)}} \langle T_\mu K_z, K_z \rangle = \frac{(T_\mu k_z)(z)}{\sqrt{K(z,z)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{K(z,z)}} \int_{\mathbb{D}} K(z,w) k_z(w) \, d\mu(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} |k_z(w)|^2 \, d\mu(w)
\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$= \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{2+\alpha}}{|1-z\overline{w}|^{2(2+\alpha)}}\, d\mu(w) \tag{5.9}$$

ifadesi ile verilir.

Daha genel olarak gelişigüzel sonlu bir μ ölçümünün Berezin dönüşümünü tanımlamak için yukardaki integral formülünü kullanacağız. Bu dönüşüm $B_\alpha\mu$ veya $\widetilde{\mu}$ ile gösterilir.

$$d\mu(z) = \phi(z)dA_\alpha(z), \qquad \phi \in L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha) \tag{5.10}$$

olduğunda $T_\mu = T_\phi$ yazabiliriz. Bilhassa eğer ϕ sınırlıysa, o zaman Bergman uzayı üzerinde alışıldık Toeplitz operatörüne sahibiz.

Farz edelim $\phi \in L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ ve T_ϕ, $L^2_a(dA_\alpha)$ üzerinde sınırlı olsun. $\widetilde{T}$'nin yukarıdaki formülü ϕ fonksiyonunun Berezin dönüşümüyle uyuşur, yani;

$$B_\alpha\phi(z) = \widetilde{T}(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{2+\alpha}}{|1-z\overline{w}|^{2(2+\alpha)}}\phi(w)dA_\alpha(w) \tag{5.11}$$

eşitlikleri uyuşur.

Ayrıca P_α'nın tanım kümesini onun integral gösterimini kullanarak $L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$'ya genişletirsek, o zaman her hangi bir $f \in H^\infty$ için

$$T_\phi(z) = \int_{\mathbb{D}} K(z,w)f(w)\phi(w)\, dA_\alpha(w) = P_\alpha(\phi f)(z) \tag{5.12}$$

ifadesine ulaşırız. Bilhassa eğer $\phi \in L^1_a(dA_\alpha)$ ise, o zaman $\forall f \in H^\infty$ $T_\alpha f = \phi f$ eşitliği doğru olur. Bundan çıkan sonuç

$$\phi \text{ analitik} : (T_\phi,\ L^2_a(dA_\alpha) \text{ üzerinde sınırlı}) \iff (\phi \in H^\infty) \tag{5.13}$$

ifadesi geçerlidir.

5.2 Carleson Tipi Ölçümler

Carleson Ölçümleri, modern kompleks analizde Hardy uzayları çalışmasında ve BMO (Sınırlı Ortalama Salınım)'da temel niteliğindedir. Bu kısımda ağırlıklı Berg-man uzayları için Carlesın ölçümü kavramını inceleyeceğiz ve Toeplitz operatörleri kavramıyla ilişkilendireceğiz. Burada bahsi geçen Toeplitz operatörlerinin sembolleri pozitif Borel ölçümleridir.

μ, $\mathbb{D}$ üzerinde sonlu pozitif Borel ölçümü ve $p > 0$ olsun. μ, $L^p_a(dA_\alpha)$ Bergman uzayı

için bir Carleson ölçümü denmesi için gerek koşul, $\forall f \in L^p_a(dA_\alpha)$

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p d\mu(z) \leq C \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z) \tag{5.14}$$

eşitsizliğini sağlayan sabit bir $C > 0$ sayısının olmasıdır. μ'nun $L^p_a(dA_\alpha)$'da Carleson olması için gerek ve yeter koşul $L^p_a(dA_\alpha \subset L^p(\mathbb{D}, d\mu)$ ve kapsama fonksiyonu(inclusion map)

$$i_p : L^p_a(dA_\alpha) \to L^p(\mathbb{D}, d\mu) \tag{5.15}$$

sınırlı olmasıdır.

Farz edelim μ, $L^p_a(dA_\alpha)$ için Carleson olsun. μ'nun $L^p_a(dA_\alpha)$ için yok olan Carleson denmesi için gerek koşul yukarıdaki kapsama fonksiyonu i_p'nin ompakt olmasıdır. Buradaki kompaktlığın anlamı: $L^p_a(dA_\alpha)$'da $\{f_n\}$ sınırlı dizisi kompakt kümelerde 0'a düzgün yakınsadığında

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{D}} |f_n(z)|^p d\mu(z) = 0 \tag{5.16}$$

eşitliğinin gerçeklenmesidir. $L^p_a(dA_\alpha)$'dan diğer L^p uzaylarına giden kompakt operatörler aynı tarzda tanımlanır. Bilhassa $L^p_a(dA_\alpha)$ üzerindeki kompakt operatörler buna dahildir. Normal aile argümanı gereği, " $\{f_n\}$, kompakt kümede O'a düzgünce yakınsar" koşulu "$\{f_n\}$, $\mathbb{D}$'de 0'a noktasal yakınsar" koşuluyla yer değiştirebilir.

β'nın $\mathbb{D}$ üzerinde Bergman metriği olduğunu hatırlayalım. Her hangi bir $r > 0$ ve $a \in \mathbb{D}$ için

$$D(z, r) = \{z \in \mathbb{D} : \beta(z, r) < r\} \tag{5.17}$$

eşitliği Bergman diskini ve $|D(z, r)|$, $D(z, r)$'nin normalleştirilmiş alanını simgeler.

Teorem 5.2 ([7]). *Farz edelim ki μ, $\mathbb{D}$ üzerinde sonlu pozitif Borel ölçümü, $p > 0$, $\alpha > -1$ ve $r > 0$ olsun. O zaman μ'nun $L^p_a(dA_\alpha)$ için Carleson ölçümü olması için gerek ve yeter koşul,*

$$sup\left\{ \frac{\mu\big(D(a, r)\big)}{(1 - |a|^2)^{2+\alpha}} : a \in \mathbb{D} \right\} < \infty \tag{5.18}$$

Yukarıdaki teoremden çıkan sonuç, Carleson ölçümü olma özelliği p'den bağımsızdır. Yani, eğer μ, her hangi bir p'de $L^p_a(dA_\alpha)$ için Carleson ölçümüyse, o zaman μ bütün p'lerde $L^p_a(dA_\alpha)$ için Carleson ölçümüdür.

Aşağıdaki teorem Bergman uzayları için Carleson ölçümü ile sınırlı Toeplitz operatörleri arasındaki bağlantıyı gösteriyor. $\widetilde{\mu}$'nin, μ sonlu ölçümünün Berezin sembolü olduğu hatırlanırsa, o zaman k_z'nin $L^2_a(dA_\alpha)$'nin normal çekirdeği(normalised

reproducing kernels) simgelediği yerde

$$\widetilde{\mu}(z) = \int_{\mathbb{D}} |k_z(w)|^2 d\mu(w), \qquad z \in \mathbb{D} \tag{5.19}$$

biçimindedir.

$T\mu$, $L^2_a(dA\alpha)$ üzerinde sınırlıyken $\widetilde{\mu}(z)$, $T\mu$ Toeplitz operatörünün Berezin dönüşümüdür.

Teorem 5.3 ([7]). *μ, $\mathbb{D}$ üzerinde sonlu pozitif Borel ölçümü olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.*
(a) $T\mu$, $L^2_a(dA\alpha)$ üzerinde sınırlıdır.
(b) $\widetilde{\mu}(z)$, $\mathbb{D}$ üzerinde sınırlıdır.
(c) μ, $L^p_a(dA\alpha)$ için bir Carleson ölçümüdür.

İspat. Berezin sembolünün tanımı gereği ve k_z, $L^2_a(dA_\alpha)$'da birim vektör olduğu için (a) şartı sağlandığında (b)'de gerçeklenir. Şimdi Teorem 5.3 yardımıyla da (b) şartı sağlandığında (c)'ni olduğu gösterilinebilir. Şimdi (c) şartı sağlandığında (a)'nın da doğrulanacağını gösterelim.

Eğer μ, $L^p_a(dA_\alpha)$ için bir Carleson ölçümüyse o zaman öyle bir $C > 0$ vardır ki; bütün $f \in L^1_a(dA_\alpha)$ için

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)| d\mu(z) \leq C \int_{\mathbb{D}} |f(z)| dA\alpha(z) \tag{5.20}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer $f, g \in H^\infty$ ise, o zaman $fg \in L^1_a(dA_\alpha)$ olur ve

$$T_\mu f(z)| \leq C||f||_\infty \int_{\mathbb{D}} |K_\alpha(z,w)| dA_\alpha(w) \tag{5.21}$$

olur. Teorem 3.7 ile birlikte bu eşitsizlik sonucu $T_\mu f \in L^2_a(dA-\alpha)$ olur. Benzer şekilde (c) şartı Fubini teoremi ile birlikte kullanıldığında

$$\langle T_\mu f, g\rangle = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)} d\mu(z) \tag{5.22}$$

olur. Bunun sonucunda

$$\begin{aligned} |\langle T_\mu f, g\rangle| &= \left| \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}\, d\mu(z) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{D}} |f(z)g(z)|\, d\mu(z) \end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\leq C \int_{\mathbb{D}} |f(z)g(z)| dA_\alpha(z)$$
$$\leq C||f||\,||g|| \tag{5.24}$$

olur. Burada $||\ ||$, $L^2_a(dA_\alpha)$'nın normudur. H^∞, $L^2_a(dA_\alpha)$'da yoğun olduğundan T_μ, $L^2_a(dA_\alpha)$ üzerinde sınırlıdır. ■

Aşağıdaki teorem, teorem 5.2 ve 5.3'ün direkt bir sonucudur.

Teorem 5.4 ([8]). *Eğer ϕ, $L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$'da negatif olmayan bir fonksiyon ve $r > 0$ ise, o zaman aşağıdakiler denktir.*
(a) T_ϕ, $L^2_a(dA\alpha)$'da sınırlıdır.
(b) $B_\alpha\phi(z)$, $\mathbb{D}$ üzerinde sınırlıdır.
(c) $\widehat{\phi_r}(z)$, $\mathbb{D}$ üzerinde sınırlıdır.

Teorem 5.5 ([8]). *Eğer ϕ, $L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$'da negatif olmayan bir fonksiyon ve $r > 0$ ise, o zaman aşağıdaki durumlar denktir.*
(a) T_ϕ, $L^2_a(dA_\alpha)$ üzerinde kompakttır.
(b) $|z| \to 1^-$ iken $B_\alpha\phi(z) \to 0$ olur.
(c) $|z| \to 1^-$ iken $\widehat{\phi_r}(z) \to 0$ olur.

6
BERGMAN UZAYINDA HANKEL OPERATÖRLERİ

Bu bölüm $L^2_a(dA_\alpha)$ üzerindeki Hankel operatörlerine ayrılmıştır. Bu bölümün anahtar kavramı, $\mathbb{D}$ üzerinde yerel integrallenebilir fonksiyonun Bergman metriğinde ortalama değer(mean value) salınımıdır. İlk kısımda, Bergman metriğinde sınırlı ortalama salınımlı fonksiyonların niteliklerini vereceğiz. $L^2_a(dA_\alpha)$ Bergman uzayı üzerinde sınırlılığı, kompaktlığı ve Hankel operatörleri H_f ve $H_{\bar{f}}$ için Bergman metriğinde f'in ortalama salınımı üzerinde temellendiğini göstereceğiz.

6.1 Bergman Metriğinde Sınırlı Ortalama Salınım

$\mathbb{D}$ üzerinde Bergman metriği

$$\phi_z(w) = \frac{z-w}{1-\bar{z}w}, \qquad w \in \mathbb{D} \tag{6.1}$$

olduğunda

$$\beta(z,w) = \frac{1}{2}\log\frac{|1+\phi_z(w)|}{|1-\phi_z(w)|} \tag{6.2}$$

şeklinde hesaplandığını hatırlayalım.

Tanım 6.1. $z \in \mathbb{D}$ ve $r < 0$ için

$$D(z,r) = \{w \in \mathbb{D} : \beta(z,w) < r\} \tag{6.3}$$

ifadesi z merkezli r yarıçaplı Bergman diski tanımlar.

Bölüm boyunca sabit bir α ağırlık parametresi belirleyip $L^2_a(dA_\alpha)$ Hankel operatörleri üzerinde çalışacağız. $\mathbb{D}$'de deki her hangi bir Lebesgue ölçülebilir S kümesi için

$$A_\alpha(S) = \int_S dA_\alpha \tag{6.4}$$

ifadesi S'nin dA_α ölçümüdür.

Tanım 6.2. Eğer f, birim disk üzerinde tanımlı yerel alan integrallenebilir fir fonksiyon ise, o zaman $\mathbb{D}$ üzerindeki ortalama(averaging) $\widehat{f_r}(z)$ fonksiyonu

$$\widehat{f_r}(z) = \frac{1}{A_\alpha(D(z,r))} \int_{D(z,r)} f(w) dA_\alpha(w), \qquad z \in \mathbb{D} \tag{6.5}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 6.3. Eğer f, ayrıca alan ölçümüne göre yerel integrallenebilir bir fonksiyon ise, o zaman Bergman metriğinde z noktasında f'in ortalama salınımı

$$MO_r(f)(z) = \left[\frac{1}{A_\alpha(D(z,r))} \int_{D(z,r)} |f(w) - \widehat{f_r}(z)|^2 dA_\alpha(w) \right]^{\frac{1}{2}} \tag{6.6}$$

şeklinde tanımlanır.

Her hangi bir $z \in \mathbb{D}$ için

$$MO_r(f)(z) = \left[\widehat{|f|_r^2}(z) - |\widehat{f_r}(z)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{6.7}$$

güzel eşitliğide bir takım işlemlerden sonra gerçeklenebilir.

Ayrıca $MO_r(f)(z)$ fonksiyonu

$$\left[\frac{1}{2A_\alpha(D(z,r))^2} \int_{D(z,r)} \int_{D(z,r)} |f(u) - f(v)|^2 dA_\alpha(u) dA_\alpha(v) \right]^{\frac{1}{2}} \tag{6.8}$$

ifadesine eşittir.

Tanım 6.4. Bir f fonksiyonu eğer, $MO_r(f)(z)$, $\mathbb{D}$ üzerinde sınırlıysa Bergman metriğinde sınırlı ortalama salınım özelliğine sahiptir denir.

$\mathbb{D}$ üzerinde sınırlı ortalama salınımlı fonksiyonların uzayı $BMO_r(\mathbb{D})$ ile gösterilir. f'in bu uzaydaki normu

$$\|f\|_{BMO_r} = sup\{MO_r(f)(z) : z \in \mathbb{D}\} \tag{6.9}$$

İlerde $BMO_r(\mathbb{D})$ uzayının r'den bağımsız olduğunu ve bütün $\| \ \|_{BMO_r}$ yarı normlarının denk olduğunu göstereceğiz. BMO_r yukardaki yarı normda tamdır.

Tanım 6.5. $\mathbb{D}$ üzerinde bir f sürekli fonksiyonu için Bergman metriğinde bir z noktasında f'in salınımı $\omega_r(f)(z)$,

$$\omega_r(f)(z) = sup\left\{|f(z) - f(w)| : w \in D(z,r)\right\} \tag{6.10}$$

şeklinde tanımlanır.

$\mathbb{D}$ üzerinde sürekli bir f fonksiyonu, eğer $\omega_r(f)$, $\mathbb{D}$'de sınırlıysa o zaman Bergman metriğinde sınırlı salınıma sahiptir denir. BO_r, $\mathbb{D}$ üzerinde sınırlı salınımlı sürekli fonksiyonların uzayını simgeler. Bu uzaydaki bir f fonksiyonunun yarı normu da

$$\|f\|_{BO_r} = sup\{\omega_r(f)(z) : z \in \mathbb{D}\} \tag{6.11}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzay, bu yarı normda tamdır. Aşağıdaki teorem BO_r uzayının r'den bağımsız olduğunu ve bütün $\|\ \|_{BMO_r}$ yarı normlarının denk olduğunu gösterir.

Teorem 6.1. *$\mathbb{D}$ üzerindeki bütün f sürekli fonksiyonları ve pozitif r ve s sayıları için*

$$C^{-1}\|f\|_{BO_r} \leq \|f\|_{BO_s} \leq C\|f\|_{BO_r} \tag{6.12}$$

eşitsizliğini sağlayan sabit bir $C > 0$ sayısı vardır.

İspat. $r < s$ olduğunu varsayalım. O zaman $\mathbb{D}$ üzerindeki bütün f fonksiyonları için

$$\|f\|_{BO_r} \leq \|f\|_{BO_s} \tag{6.13}$$

lduğu açıktır. N öyle bir pozitif sayı olsun ki, her hangi bir $z \in D(0,s))$ için, $0 = z_0, z_1, .., , z_N = z$, $\beta(z_{i-1}, z_i) < r$, $1 \leq i \leq N$ gerçekleşsin. Möbius korunumu gereği, eğer $\beta(z,w) < s$ ise, o zaman $1 \leq i \leq N$ için $\beta(z_{i-1}, z_i) < r$ olacak şekilde $z = z_0, z_1, .., z_N = w$ eşitliği vardır. Bundan çıkan sonuç

$$\begin{aligned} |f(z) - f(w)| &\leq \sum_{i=1}^{N} |f(z_{i-1} - f(z_i)| \\ &\leq N \sup\{\omega_r(f)(z) : z \in \mathbb{D}\} \end{aligned} \tag{6.14}$$

eşitsizlikleridir. ■

Bütün $\beta(z,w) < s$'ler üzerinde supremum alarak, $\mathbb{D}$ üzerindeki bütün f sürekli fonksiyonları için

$$\|f\|_{BO_r} \leq N\|f\|_{BO_s} \tag{6.15}$$

eşitsizliği elde edilir.

Yukarıdaki teorem BO_r uzayının r'den bağımsız olduğunu gösteriyor. Bu nedenle kısaca $BO = BO_1$ yazabiliriz ve normu

$$\|f\|_{BO} = \sup\{\omega(f)(z) : z \in \mathbb{D}\} \tag{6.16}$$

$$\|f\|_{BO} = \sup\{|f(z)-f(w)| : \beta(z,w) \le 1\} \tag{6.17}$$

şeklinde yazılabilir.

Aşağıdaki teorem BO'daki fonksiyonların nerdeyse Lipschitz olduğunu gösterir.

Lemma 6.1 ([9]). *$\mathbb{D}$ üzerindeki bir sürekli f fonksiyonunun BO'ya ait olması için gerek ve yeter koşul, $\forall z, w \in \mathbb{D}$*

$$|f(z)-f(w)| \le C(\beta(z,w)+1) \tag{6.18}$$

olacak şekilde sabit bir $C > 0$ sayısının olmasıdır.

İspat. Farz edelim $f \in BO$ olsun. O zaman. $\beta(z,w) < 1$ olduğunda istenen eşitsizlik ortadadır. $\beta(z,w) > 1$ sabitleyelim ve $\gamma(t)$, $0 \le t \le$, Bergman metriğinde z'den w'ye giden bir jeodesik olsun. $N = \big[\beta(z,w)\big] + 1$ ve $t_i = i/N$, $0 \le i \le N$ olmak üzere

$$\beta(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) = \frac{\beta(z,w)}{N} \le 1 \tag{6.19}$$

eşitsizliği gerçeklenir ve bu sonucu takip ederek

$$\begin{aligned} |f(z)-f(w)| &\le \sum_{i=1}^{N} \Big|f\big(\gamma(t_{i-1})\big) - f\big(\gamma(t_i)\big)\Big| \\ &\le N\|f\|_{BO} \le \|f\|_{BO}\big(\beta(z,w)+1\big) \end{aligned} \tag{6.20}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece her $f \in BO$ için istenen Lipschitz tipi yaklaşım çıkarılmış olur. ■

(6.7)'yi hatırlarsak

$$MO_r(f)(z) = \Big[\widehat{|f|_r^2}(z) - |\widehat{f_r}(z)|^2\Big]^{\frac{1}{2}} \le \Big[\widehat{|f|_r^2}(z)\Big]^{\frac{1}{2}}, \qquad z \in \mathbb{D} \tag{6.21}$$

biçimindeydi.

Tanım 6.6.

$$\|f\|_{BA_r} = \left\{\Big[\widehat{|f|_r^2}(z)\Big]^{\frac{1}{2}} : z \in \mathbb{D}\right\} < +\infty \tag{6.22}$$

ifadesini sağlayan f fonksiyonlarının uzayı BA_r'dir.

Teorem 5.5 gereği $f \in BA_r$ olması için gerek ve yeter koşul B_α, $L^2_a(dA_\alpha)$ ile bağlantılı Berezin dönüşümü olmak üzere $B_\alpha(|f|^2)(z)$'nin $\mathbb{D}$ üzerinde sınırlı olmasıdır. Bilhassa,

$\|f\|_{BA_r}$

$$\|f\|_{BA} = \sup\left\{[B_\alpha(|f|^2)(z)]^{\frac{1}{2}} : z \in \mathbb{D}\right\} \tag{6.23}$$

sabit(invariant) normuyla karşılaştırılabilir. Bundan çıkan sonuç BA_r'nin r'den bağımsız olması ve bütün $\|\ \|_{BA_r}$ normlarının denk olmasıdır.

Her hangi bir $f \in L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ ve $z \in \mathbb{D}$ için, $MO_\alpha(f)(z)$

$$MO_\alpha(f)(z) = \left[B_\alpha(|f|^2)(z) - |B_\alpha f(z)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{6.24}$$

$$= \left[\int_{\mathbb{D}} |f(w) - B_\alpha f(z)|^2 |k_z(w)|^2 dA_\alpha(w)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\int_{\mathbb{D}} |f \circ \phi_z(w) - B_\alpha f(z)|^2 |k_z(w)|^2 dA_\alpha\right]^{\frac{1}{2}} \tag{6.25}$$

şeklinde gösterilinebilir ve

$$\|f\|_{BMO_\delta} = \sup\left\{MO_\alpha(f)(z) : z \in \mathbb{D}\right\} \tag{6.26}$$

normu tanımlansın. BMO_δ, $\|f\|_{BMO_\delta} < \infty$ eşitsizliğini sağlayan f'lerin uzayı olsun. Gene BMO_δ tanımımız gösteriyor ki ağırlık parametresi α'ya dayanıyor. Fakat aşağıdaki teoremin sonucu olarak görülebilir ki BMO_δ, δ'dan bağımsızdır.

Lemma 6.2. *Eğer $f \in BMO_{2r}$ ise, o zaman $\widehat{f_r}(z) \in BO$ ve $f(z) - \widehat{f_r}(z) \in BA$ olur ve öyle bir sabit C sayısı bulunabilir ki*

$$\left\|\widehat{f_r}\right\| \leq C\|f\|_{BMO_{2r}}, \qquad \left\|f - \widehat{f_r}\right\| \leq \|f\|_{BMO_{2r}} \tag{6.27}$$

ifadesi sağlanır.

Bu kısımın asıl sonucu aşağıdaki teoremdir.

Teorem 6.2 ([9])**.** *Farz edelim $r > 0$ ve $f \in L^2(\mathbb{D}, dA)$ olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.*
$f \in BMO_{2r}$
(b) $f_1 \in BO$ ve $f_2 \in BA$ olmak üzere $f = f_1 + f_2$ olur.
(c) $f \in BMO_\delta$. Dahası

$$\|f\|_{BMO_{2r}}, \qquad \|f_1\|_{BO} + \|f_2\|_{BA}, \qquad \|f\|_{BMO_\delta} \tag{6.28}$$

nitelikleri, $f \in BMO_\delta$ için karşılaştırılabilirdir.

İspat.

$$f_1 = \overline{f_r}, \qquad f_2 = f - \overline{f_r} \tag{6.29}$$

şekilnde yazarsak, O zaman (a) şıkkı olursa Lemma 6.2 gereği (b)'de gerçeklenir. Teorem 4.4 gereği de (c) şıkkı olursa (a) şıkkı gerçeklenir. Bunun nasıl olduğunu gösterelim.

$$MO_\alpha(f)(z)^2 = B_\alpha(|f|^2)(z) - |B_\alpha f(z)|^2 \tag{6.30}$$

olduğundan

$$MO_\alpha(f)(z)^2 = \int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} |f(u)-f(v)|^2 |k_z(u)|^2 |k_z(u)|^2 \, dA_\alpha(u) dA_\alpha(v) \tag{6.31}$$

eşitliğindeki integral

$$\int_{D(z,2r)}\int_{D(z,2r)} |f(u)-f(v)|^2 |k_z(u)|^2 |k_z(u)|^2 \, dA_\alpha(u) dA_\alpha(v) \tag{6.32}$$

integraline eşit veya daha büyüktür.

c sabit bir sayı olmak üzere, eğer

$$|k_z(w)|^2 \geq c A_\alpha(D(z,2r))^{-1}, \qquad w \in D(z,2r) \tag{6.33}$$

olursa, o zaman yukarıdaki integral

$$\frac{c^2}{A_\alpha(D(z,2r))^2} \int_{D(z,2r)}\int_{D(z,2r)} |f(u)-f(v)|^2 \, dA_\alpha(u) dA_\alpha(v) \tag{6.34}$$

integralinden daha büyük veya eşittir. Son integral $2c^2 MO_{2r}(f)(z)$'ye eşittir. Bundan da (c) olması durumunda (a)'nın onu takip ettiği ortaya çıkıyor. Şimdi bir tek (b) olması durumunda (c)'nin gerçeklenmesini ispatlamak kalıyor. Eğer $f \in BO$ ise, o zaman Lemma 6.1 gereği $\forall u, v \in \mathbb{D}$

$$|f(u)-f(v)| \leq \|f\|_{BO} \, (\beta(u,v)+1) \tag{6.35}$$

eşitsizliği olur. Bunu takip edersek

$$\begin{aligned} MO_\alpha(f)(z) &= \int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} |f(u)-f(v)|^2 |k_z(u)|^2 |k_z(u)|^2 \, dA_\alpha(u) dA_\alpha(v) \\ &\leq \|f\|_{BO}^2 \int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} \big(\beta(u,v)+1\big)^2 |k_z(u)|^2 |k_z(u)|^2 \, dA_\alpha(u) dA_\alpha(v) \end{aligned} \tag{6.36}$$

$$\leq \|f\|_{BO}^2 \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \left(\beta(u,v)+1\right)^2 dA_\alpha(u) dA_\alpha(v) \tag{6.37}$$

ifadeleri gerçeklenir. Yukarıdaki son eşitlik değişken değşiminden ve Bergman metriği invaryantından kaynaklanıyor. Direkt bir hesaplama ile

$$\int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \left(\beta(u,v)+1\right)^2 dA_\alpha(u) dA_\alpha(v) < \infty \tag{6.38}$$

sonucu ortaya çıkar. $\forall f \in BO$ öyle bir C sabit sayısı bulabiliriz ki

$$\|f\|_{BMO_\delta} \leq C \|f\|_{BO} \tag{6.39}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Eğer $f \in BA$ ise, o zaman

$$MO_\alpha(f)(z)^2 = B_\alpha(|f|^2)(z) - |B_\alpha f(z)|^2 \leq B_\alpha(|f|^2)(z) \tag{6.40}$$

olduğundan

$$\sup\left\{B_\alpha(|f|^2)(z) : z \in \mathbb{D}\right\} < \infty \tag{6.41}$$

olur. Bütün $f \in BA$ için

$$\|f\|_{BMO_\delta} \leq \|f\|_{BA} \tag{6.42}$$

ifadesini elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Yukarıdaki teoremdeki (b) şartı r ve α'dan bağımsız olduğu için $BMO_r = BMO_\delta$ eşitliğide r ve α'dan bağımsız olur. Dahası bütün $||\ ||_{BMO_r}$ yarı normları denk olur ve onların hepsi $||\ ||_{BMO_\delta}$ normuna denk olur. Bu nedenle yukarıdaki (b) şartını

$$BMO_\delta = BO + BA \tag{6.43}$$

biçiminde de ifade edebiliriz.

6.2 Bergman Metriğinde VMO

Tanım 6.7.

$$\lim_{|z|\to 1^-} [B_\delta(|f|^2)(z) - |B_\delta(f)|^2] = 0 \tag{6.44}$$

imitini sağlayan f'lerden oluşan uzay VMO_δ(Küçük ortalama salınım) diye adlandırılır.

Açıkça görülür ki VMO_δ, BMO_δ'nın kapalı alt uzayıdır. $f \in VMO_\delta$ ve $\phi \in Aut(\mathbb{D})$ olduğu zaman VMO_δ, $f \circ \phi \in VMO_\delta$ anlamında Möbius invaryantıdır.

Tanım 6.8.

$$\lim_{|z|\to 1^-} \omega_r(f)(z) = 0 \tag{6.45}$$

limitini sağlayan $f \in BO$ fonksiyonlarının uzayına VO(Vanishing Oscillation) denir.

Bu uzayın kapalı olduğu açıktır. VO'nun r'den bağımsız olduğu kolayca gösterilebilir.

Tanım 6.9.

$$\lim_{|z|\to 1^-} B_\alpha(|f|^2)(z) = 0 \tag{6.46}$$

imitini sağlayan $f \in BA$ fonksiyonlarının uzayı VA diye adlandırılır.

Teorem 6.3 ([8]). *$r > 0$ ve $f \in BMO_\delta$ olsun. O zaman aşağıdaki şartlar denktir.*
(a) $f \in VMO_\delta$.
(b) $|z| \to 1$ iken $\widehat{|f|_r^2}(z) - |\widehat{f_r}(z)|^2 \to 0$ olur.
(c) $f = f_1 + f_2 \in VO + VA$.
Ayrıca, (c)'deki parçalanma $f_1 = B_\alpha f$ veya $f_1 = \widehat{f_r}$ alarak gerçekleştirilebilir.

Teorem 6.4 ([8]). *VO, BO'da $C(\overline{\mathbb{D}})$ tarafından üretilir.*

İspat. Farz edelim $f \in VO$ olsun ve her hangi bir $r < (0,1)$ ve $z \in \mathbb{D}$ için $f_r(z) = f(rz)$ olsun. O zaman $r \to 1^-$ iken $f_r \in C(\overline{\mathbb{D}})$ ve $\|f - f_r\|_{BO} \to 0$ olur. Aslında verilen her hangi bir $\epsilon > 0$ için $f \in VO$ oluyorsa, o zaman öyle bir $\delta \in (0,1)$ vardır ki, bütün $\delta^2 < z < 1$ ve $\beta(z,w) \le 1$ için $|f(z) - f(w) < \epsilon$ ifadesi elde edilir. Şimdi eğer $\delta < r < 1$ ise, o zaman $f_r \in C(\overline{\mathbb{D}})$ ve $\|f - f_r\|_{BO}$ ifadesi

$$\sup\Big\{\Big|\big(f(z) - f(rz)\big) - \big(f(w) - f(rw)\big)\Big|\Big\} : |z| \le \delta, w \in D(z,1)\Big\} \tag{6.47}$$

$$\sup\Big\{\Big|\big(f(z) - f(w)\big) - \big(f(rz) - f(rw)\big)\Big|\Big\} : |z| \le w \in D(z,1)\Big\} \tag{6.48}$$

supremumlarının toplamına eşit veya daha küçüktür. Yukarıdaki ikinci toplanan $\beta(rz, rw) \le \beta(z,w)$ olduğundan 2ϵ'dan küçüktür. Yukarıdaki ilk toplanan $|z| \to 1^-$ olduğunda düzgün süreklilik gereği 0'a gider. Bundan

$$\limsup_{r\to 1^-} \|f - f_r\|_{BO} \le 2\epsilon \tag{6.49}$$

ifadesi elde edilir. Her hangi bir $\epsilon > 0$ için, her ne zaman $f \in VO$ olduğunda $r \to 1^-$ iken $\|f_r\|_{BO} \to 0$ olur. ■

Teorem 6.5. *VA, $\mathbb{D}$'de kompakt supportu olan BA'daki fonksiyonlar tarafından üretilir.*

Sonuç 6.1. *VMO_δ, $\mathbb{C}(\overline{\mathbb{D}})$ ve kompakt supportu olan fonksiyonlar tarafından üretilen BMO_δ'nın kapalı alt uzayıdır.*

İspat. u yukarıdaki iki teorem gereği

$$VMO_\delta = VO + VA \tag{6.50}$$

olan ayrılmadan ve BO ve BA'daki yakınsaklığın BMO_δ'da yakınsaklık getirmesindendir.

6.3 Sınırlı Hankel Operatörleri

Bergman projeksiyonunun

$$P_\alpha : L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha) \longrightarrow L^2_a(dA_\alpha) \tag{6.51}$$

biçiminde bir ortogonal projeksiyon olduğunu hatırlayalım.

$$K_\alpha(z,w) = \frac{1}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} \tag{6.52}$$

çekirdekli bir integral operatördür.

$$P_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} K_\alpha(z,w) f(w) dA_\alpha(w), \qquad f \in L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha) \tag{6.53}$$

biçimindeydi. Bir $f \in L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ fonksiyonu verilsin. Tanım ve görüntü kümesi

$$H_f : L^2_a(dA_\alpha) \to (L^2_a(dA_\alpha)^\perp = L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha) \ominus L^2_a(dA_\alpha) \tag{6.54}$$

olan bir H_f operatörü

$$H_f g = (I - P_\alpha)(fg), \qquad g \in L^2_a(dA_\alpha). \tag{6.55}$$

eklinde tanımlansın. Bu H_f'ye, $L^2_a(dA_\alpha)$ üzerinde f sembollü Hankel operatörü denir. H_f genelde sınırsızdır. Fakat, eğer $f \in L^\infty(\mathbb{D})$ ise, o zaman H_f, $L^2_a(dA_\alpha)$ üzerinde sınırlıdır ve normu $\left\|H_f\right\| \leqslant \|f\|_\infty$ ifadesindeki gibi üstten sınırlı olur. Aşağıdaki integral Hankel operatörün normunu hesaplarken yardımcı olur:

$$H_f g(z) = \int_{\mathbb{D}} \big(f(z) - f(w)\big) K_\alpha(z,w) g(w) dA_\alpha(w), \qquad g \in L^2(dA_\alpha). \tag{6.56}$$

Bergman uzayı üzerindeki Hankel operatörleri, Bergman uzayı üzerindeki Toeplitz operatörleri ile yakından ilişkilidir. Hankel ve Toeplitz operatörleri arasındaki

aşağıdaki ilişki, $L^2_a(dA_\alpha)$'de iç çarpımı kullanarak kanıtlanabilir:

$$H^*_f H_f = T_{\bar{f}g} - T_{\bar{f}} T_g \tag{6.57}$$

Yukarıdaki formülün özel bir durumu ise

$$H^*_f H_f = T_{|f|^2} - T_{\bar{f}} T_f \tag{6.58}$$

biçimindedir.
Bu kısımda, bağlantılı H_f Hankel operatörleri sınırlı olan reel değerli $f \in L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ fonksiyonlarını nitelendiriyoruz. Bu, H_f ve $H_{\bar{f}}$ operatörleri sınırlı olan $f \in L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ fonksiyonlarını nitelendirmeye denktir.

Teorem 6.6 ([10], [11])**.**

$$Tf(z) = \int_{\mathbb{D}} |K_\alpha(z,w)| \beta(z,w) f(w) dA_\alpha(w) \tag{6.59}$$

biçiminde tanımlanan T operatörü $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ üzerinde sınırlıdır.

Lemma 6.3. *$\forall f \in BO$, $\left\|H_f\right\| \leqslant C \|f\|_{BO}$ olmasını sağlayan sabit bir $C > 0$ sayısı vardır.*

İspat. Lemma 6.1'in kanıtı gereği $\forall \in z, w \in \mathbb{D}$

$$|f(z) - f(w)| \leq \|f\|_{BO} (\beta(z,w) + 1) \tag{6.60}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Hankel operatörlerinin integral formu gereği

$$|H_f g(z)| \leq \|f\|_{BO} \int_{\mathbb{D}} \frac{\beta(z,w)+1}{|1 - z\overline{w}|^{2+\alpha}} |g(w)| \, dA_\alpha(w) \tag{6.61}$$

ifadesine ulaşırız. İstenen sonuca Teorem 6.6 gereği ve

$$g \mapsto \int_{\mathbb{D}} \frac{|g(w)|}{|1 - z\overline{w}|^{2+\alpha}} \, dA_\alpha(w) \tag{6.62}$$

operötörü $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ üzerinde sınırlı olmasından ötürü ulaşırız. ■

Lemma 6.4. *$\forall f \in BA$, $\left\|H_f\right\| \leqslant C \|f\|_{BA}$ olmasını sağlayan sabit bir $C > 0$ sayısı vardır.*

İspat. Farz edelim $g \in H^\infty$ olsun. Bu fonksiyon $L^2_a(dA_\alpha)$'da denktir. O zaman

$$\left\|H_{fg}\right\|^2 = \|(I - P)(fg)\|^2 \leq \|fg\|^2 \tag{6.63}$$

$$= \int_{\mathbb{D}} |f(z)^2||g(z)|^2 \, dA_\alpha(z) \tag{6.64}$$

ifadesi gerçeklenir. $f \in BA$ olduğundan Teorem 5.3 gereği öyle bir C sayısı vardır ki $\forall g$ için

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)g(z)|^2 \, dA_\alpha(z) \leq C \int_{\mathbb{D}} |g(z)|^2 \, dA_\alpha(z) \tag{6.65}$$

ifadesine ulaşırız. Böylece de ispat tamamlanmış olur.

■

$$BMO_\delta = BO + BA \tag{6.66}$$

ayrılışı göz önünde bulundurursak görürüz ki eğer $f \in BMO_\delta$ ise, o zaman H_f ve $H_{\overline{f}}$ operatörlerinin her ikisi de $L^2_a(dA_\alpha)$ üzerinde sınırlıdır ve normu f'den bağımsız sabit bir C sayısı vardır ki

$$\left\|H_f\right\| \leqslant C \left\|f\right\|_{BMO_\delta}, \qquad \left\|H_{\bar{f}}\right\| \leqslant C \left\|f\right\|_{BMO_\delta} \tag{6.67}$$

ifadeleri sağlanır.

Teorem 6.7 ([10], [11])**.** *Bir f fonksiyounun BMO_δ içinde olması için gerek ve yeter koşul H_f ve $H_{\overline{f}}$ operatörlerinin her ikisi de $L^2_a(dA_\alpha)$ üzerinde sınırlı olmasıdır. Dahası öyle bir sabit $C > 0$ sayısı vardır ki $\forall f \in BMO_\delta$*

$$\left\|f\right\|_{BMO_\delta} \leq \left\|H_f\right\| + \left\|H_{\overline{f}}\right\| \leq C \left\|f\right\|_{BMO_\delta} \tag{6.68}$$

ifadesi geçerlidir.

6.4 Kompakt Hankel Operatörleri

Bu kısımda $f \in BMO_\delta$ ile bağlantılı H_f ve $H_{\overline{f}}$ operatörlerinin her ikisinin de $L^2_a(dA_\alpha)$ üzerinde kompakt olduğu, f fonksiyonlarını nitelendiriyoruz. Bu H_f, $L^2_a(dA_\alpha)$ üzerinde kompakt olacak şekilde reel değerli $f \in BMO_\delta$ fonksiyonlarını nitelendirmeye denktir. Doğal olarak bu problemin cevabı şudur ki: H_f ve $H_{\overline{f}}$ operatörlerinin her ikisi de $L^2_a(dA_\alpha)$ üzerinde kompakt olması için gerek ve yeter koşul $f \in VMO_\delta$ olmasıdır. Burada Hankel operatörleri için bir iz formülü ile başlıyoruz.

Teorem 6.8. *Her hangi bir $f \in \mathscr{B}$ için $d\lambda$, $\mathbb{D}$ üzerinde Möbius invaryant ölçümü olmak üzere*

$$tr(H^*_{\overline{f}} H_{\overline{f}}) = (\alpha + 1) \int_{\mathbb{D}} \left[B_\alpha(|f|^2)(z) - |B_\alpha f(z)|^2\right] d\lambda(z) \tag{6.69}$$

$$= \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(z)-f(w)|^2}{|1-z\overline{w}|^{2(2+\alpha)}}\, dA_\alpha(z) dA_\alpha(z) \tag{6.70}$$

şeklinde bir iz formülü sağlanır.

Sonuç 6.2. *$\mathscr{D}$ ile Dirichlet uzayını gösterelim. O zaman eğer f, $\mathbb{D}$'de analitik ise $tr(H_{\overline{f}}^* H_{\overline{f}}) < \infty$ olması için gerek ve yeter şart $f \in \mathscr{D}$ olmasıdır.*

Yukarıdaki teoremin direkt bir sonucu eğer f bir polinomsa $H_{\overline{f}}$'nin $L_a^2(dA_\alpha)$ üzerinde kompakt olmasıdır. Her hangi $f, g \in H^\infty(\mathbb{D})$ için

$$H_{\overline{fg}}^* H_{\overline{fg}} = T_{\overline{f}} H_{\overline{f}}^* H_{\overline{fg}} T_g \tag{6.71}$$

(bkz. 6.58 ve Teorem 5.1) ifadesi doğru olduğundan, bütün $n, m \geq 0$ için $H_{\overline{z^n} z^m}$ kompakttır. $f \mapsto H_f$, $C(\overline{\mathbb{D}})$'den sınırlı operatörler uzayına giden ($L_a^2(dA_\alpha)$'den $L_a^2(dA_\alpha))^\perp$'ye giden norm sürekli olduğundan, ve Stone-Weierstrass teoremi gereği, $C(\overline{\mathbb{D}})$), $\overline{z^n} z^m$ fonksiyonları tarafından üretildiğinden H_f'nin bütün $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$ kompakt olduğunu sonucuna ulaşırız. Eğer $f \in BMO_\delta$ ise, o zaman H_f, $L_a^2(dA_\alpha)$ üzerinde kompakttır. Bunun nedeni eğer f, $\mathbb{D}$'de kompakt support var ise o zaman

$$H_f^* H_{\overline{f}} = T_{|f|^2} - T_{\overline{f}} T_f \leq T_{|f|^2} \tag{6.72}$$

ve $T_{|f|^2}$, $L_a^2(dA_\alpha)$ üzerinde kompakttır. Şimdi bu kısımın önemli bir sonucunu kanıtlayabiliriz.

Teorem 6.9 ([12], [13])**.**

$$f \in BMO_\delta : (H_f \; ve \; H_{\overline{f}},\; L_a^2(dA_\alpha) \; \textit{üzerinde} \; \textbf{\textit{kompakt}}) \Rightarrow f \in VMO_\delta \tag{6.73}$$

İspat. $|z| \to 1^-$ olurken $k_z \to 0$, $L_a^2(dA_\alpha)$'de zayıf yakınsadığında eğer H_f ve$H_{\overline{f}}$'nin her ikiside $L_a^2(dA_\alpha)$ üzerinde kompakt ise $f \in VMO_\delta$ olur.

Diğer taraftan eğer $f \in VMO_\delta$ ise, o zaman Teorem 6.3 gereği, $f_1 \in VO$ ve $f_2 \in VA$ olmak üzere $f = f_1 + f_2$ ifadesi gerçeklenir. VO, $C(\mathbb{D})$ tarafından üretildiği için(bkz. Teorem 6.4) H_{f_1} kompakttır. VA, BMO_δ'deki $\mathbb{D}$'de kompakt supportu olan fonksiyonlar tarafından üretildiği(bkz. Teorem 6.5) için H_{f_2} kompakttır. Böylece $H_f = H_{f_1} + H_{f_2}$ kompakttır ve böylece teorem kanıtlanmış olur. ■

6.5 Küçük Hankel Operatörleri

$\overline{L^2_a(dA_\alpha)}$, $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ uzayındaki eşlenik analitik fonksiyonların uzayı olsun.

$$\overline{L^2_a(dA_\alpha)} = \left\{\overline{f} : f \in L^2_a(dA_\alpha)\right\} \tag{6.74}$$

uzayının, $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$'ın kapalı alt uzay olduğu açıkça bellidir. $\overline{P}_\alpha$, $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$'den $\overline{L^2_a(dA_\alpha)}$'nin üzerine giden ortogonal bir projeksiyon olsun. Verilen bir $f \in L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ için küçük Hankel operatörü

$$h_f : L^2_a(dA_\alpha) \to \overline{L^2_a(dA_\alpha)} \tag{6.75}$$

uzayları arasındaki

$$h_f g = \overline{P}_\alpha(f g), \qquad g \in L^2_a(dA_\alpha) \tag{6.76}$$

şeklinde bir operatördür. h_f operatörü genelde sınırsızdır. Bununla birlikte, eğer f sınırlı ise h_f operatörüde sınırlıdır ve açıkca $\left\|h_f\right\| \leqslant \|f\|_\infty$ yazılır. Eğer Q, $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$'dan sabit bir sayıya giden rank-bir projeksiyon ise I özdeşlik operatörünü ve P_α $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$'dan $L^2_a(dA_\alpha)$'ye giden bir ortogonal projeksiyonu simgelemek üzere $\overline{P}_\alpha - Q \leq I - P_\alpha$ olduğu açıkça görülür. h_f'nin küçük Hankel operatörü diye adlandırılmasının sebebi budur. Büyük Hankel operatörü H_f, daha büyük bir projeksiyon olan $I - P_\alpha$ üzerinden tanımlanır.

Küçük Hankel operatörü h_f aynı zamanda bir integral operatördür. Aslında $\overline{P}_\alpha$

$$K_\alpha(z, w) = \frac{1}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} \tag{6.77}$$

çekirdekli

$$\overline{P}_\alpha g(z) = \int_{\mathbb{D}} K_\alpha(z, w) g(w)\, dA_\alpha, \qquad g \in L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha) \tag{6.78}$$

şeklinde verilen bir projeksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} h_f g &= \int_{\mathbb{D}} K_\alpha(z, w) g(w)\, dA_\alpha \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w) g(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}}\, dA_\alpha(w) \end{aligned} \tag{6.79}$$

formüllerine ulaşılır. Küçük Hankel operatörlerini çalışırken h_f yerine $h_{\overline{f}}$'nin çalışılmasının daha faydalı olduğu görülmektedir. Küçük Hankel operatörünün tanımında $\overline{P}_\alpha$'nın kullanılması bu düşünceyi destekeler. Son olarak, kısa ama önemli bir sonucu aşağıda verelim.

Teorem 6.10. *Eğer $f \in L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ ise o zaman $L^2_a(dA_\alpha)$'da yoğun olan tüm $g \in H^\infty$ için $h_{\overline{f}} g = h_{\overline{P_\alpha f}} g$ eşitliği gerçeklenir.*

İspat. $\langle\, , \rangle$, $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$'da bir iç çarpım olsun ve bir $h \in L^2_a(dA_\alpha)$'yı sabit tutalım. O zaman

$$\langle h_{\overline{f}}, \overline{h} \rangle = \langle gh, P_\alpha f \rangle = \langle h_{\overline{P_\alpha f}} g, \overline{h} \rangle \tag{6.80}$$

ifadesi gereğince teorem ispatlanmış olur. ■

7
SONUÇ VE ÖNERİLER

$L^2_a(dA_\alpha)$ Bergman uzayı üzerindeki Toeplitz ve Hankel operatörlerinin özellikleri detaylı olarak incelenmiş oldu. Bu alan daha çok araştırmaya ihtiyaç duymaktadır. Bloch ve Besov uzayları üzerinde çalışarak Bergman uzayları ile ilgili benzerlikler üzerinden araştırmalar ilerletilebilir. Toeplitz ve Hankel operatörlerinin bileşkesinden oluşmuş operatörler üzerinden ilginç sonuçlara varılabilir.

KAYNAKÇA

[1] M. Range, *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables.* Springer-Verlag, 1980.

[2] W. Rudin, *Function Theory in the Unit Ball of C^n.* Springer, 1980.

[3] F. Forelli, W. Rudin, "Projections on spaces of holomorphic functions on balls," *Indiana University Mathematics Journal*, vol. 24, pp. 593-602, 1974.

[4] A.I. Markushevich, *Theory of Functions of a complex variable.* American Mathematical Society, 2005.

[5] K.H. Zhu, *Operator Theory in Function Spaces.* Marcel Dekker Inc., 1990.

[6] S. Bergman, The Kernel Function and Conformal Mapping. American Mathematical Society, 1950.

[7] G. McDonald, C. Sundberg, "Toeplitz operators on the disc," *Indiana University Mathematics Journal*, vol. 58, pp. 143-154, 1979.

[8] K.H. Zhu, "VMO, ESV, and Toeplitz operators on the Bergman space," *Transactions of American Mathematical Society,* vol. 302, pp. 617-646, 1987.

[9] K.H. Zhu, "BMO and Hankel operators on the Bergman spaces, *Pasific Journal of Mathematics*, vol. 155, pp. 377-395, 1992.

[10] F.F. Bonsall, "Boundedness of Hankel matrices," *Journal of London Mathematical Society*, vol 29, pp. 289-300, 1984.

[11] F.F. Bonsall, "Criteria for boundedness and compactness of Hankel operators," *Contemporary Mathematics*, vol. 32, pp. 83-95, 1984.

[12] K. Stroethorf, "Compact Hankel operators on the Bergman space," *Illionis Journal of Mathematics*, vol. 34, pp. 159-174, 1990.

[13] K. Stroethorf, "Compact Hankel operators on the Bergman space of the unit ball and polydisc in C^n," *Journal of Operator Theory*, vol. 23, pp. 153-170, 1990

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirisi

1. D. Balotu, E. Gül, “Some Basic Properties of Hankel Operators on Bergman Spaces”, the 5th International Conference of Mathematical Sciences (ICMS 2021), Istanbul, Turkey, 23-27 June 2021.