Soru: $f: X \to Y$ ve $g: Y \to Z$ iki fonk. olsun, $A \subseteq Z$ için

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$ old. gösteriniz.

Çözüm:

$$x \in (g \circ f)^{-1}(A) \Leftrightarrow (g \circ f)(x) \in A \Leftrightarrow g(f(x)) \in A \Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(A)$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(g^{-1}(A))$$, ohalde eşitlik gerçeklenir.

Soru: I bir indis kümesi olsun $\forall \alpha \in I$ için $A_\alpha \subseteq X$ ve $B \subseteq X$ olsun.

$$B \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} (B \setminus A_\alpha)$$ old. gösteriniz.

Çözüm:

Soru: X ve Y iki küme olsun

a) $P(X) \cap P(Y) = P(X \cap Y)$ ve b) $P(X) \cup P(Y) \subseteq P(X \cup Y)$

old. gösteriniz.

Çözüm:

a) $A \in P(X) \cap P(Y) \Leftrightarrow A \subseteq X$ ve $A \subseteq Y$
$\Leftrightarrow A \subseteq X \cap Y \Leftrightarrow A \in P(X \cap Y)$

b) Yap...

Soru: $f: \mathbb{R} \to (-1,1)$

$x \to f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ fonk birebir, örtenliğini araştır.

Çözüm:

- f birebir mi?

$f(x_1) = f(x_2)$ ele alalım (amacımız; $x_1 \overset{?}{=} x_2$)

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{x_1}{1+|x_1|} = \frac{x_2}{1+|x_2|}}_{(i)} \Rightarrow \left|\frac{x_1}{1+|x_1|}\right| = \left|\frac{x_2}{1+|x_2|}\right| \Rightarrow |x_1| + |x_1 . x_2| = |x_2| + |x_1 . x_2|$$

$\Rightarrow |x_1| = |x_2|$ bulunur.

(i)'de $|x_1| = |x_2|$ yazarsak $x_1 = x_2$ eşitliğini elde ederiz.

Sonuç olarak f birebir bulunur.

- f örten mi?

Keyfi $y \in (-1,1)$ ele alalım (amacımız; $\exists x \overset{?}{\in} \mathbb{R}$ öyleki $f(x) = y$)

$f(x) = y$ oş $x \in \mathbb{R}$ var olup olmadığını araştıralım.

$$\frac{x}{1+|x|} = y \Rightarrow |x| = |y| + |x|.|y| \Rightarrow |x| = \frac{|y|}{1-|y|}$$

$$x = (1+|x|).y = \left(1 + \frac{|y|}{1-|y|}\right).y = \frac{y}{1-|y|}$$

$x = \dfrac{y}{1-|y|} \in \mathbb{R}$ old. f örtendir.

Soru: $f: (0,1) \to (a,b)$
$x \to f(x) = (1-x)a + bx$

fonk. birebir ve örtenliğini araştır.

Çözüm:

- f birebir mi?

$f(x_1) = f(x_2)$ olsun.

$\Rightarrow (1-x_1)a + bx_1 = (1-x_2)a + bx_2$

$\Rightarrow (x_2 - x_1)a + (x_1 - x_2)b = 0$

$\Rightarrow \underbrace{(a-b)}_{a \neq b}(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$, yani f birebir.

- f örten mi?

Keyfi $y \in (a,b)$ alalım.

$f(x) = y$ olacak şekilde $x \in (0,1)$ arıyoruz.

$\Rightarrow (1-x)a + bx = y \Rightarrow x(b-a) = y - a$

$\Rightarrow x = \dfrac{y-a}{b-a}$, $b-a > 0$

Peki bu bulunan değer $(0,1)$ aralığında mı?

$y \in (a,b)$ old. $0 < y-a < b-a \Rightarrow 0 < \dfrac{y-a}{b-a} < 1$

$\Rightarrow x \in (0,1)$

O halde f örtendir.

Soru: $f: A \to B$ ve $g: B \to C$ oü aşağıdakileri gösteriniz.

a) $g \circ f$ ~~üzerine~~ örten ise g ~~üzerinedir~~ örten

Çözüm:

$c \in C$ ele alalım. $g \circ f: A \to C$ ~~üzerine~~ örten old.

$\exists a \in A$ öyleki $g \circ f(a) = c$ dir.

$(g(f(a)) = c)$

$f(a) = b \in B$ mevcut olup $g(b) = c$ old. g ~~üzerinedir.~~ örtendir

b) $g \circ f$ birebir ise f birebir dir.

Çözüm:

$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \Rightarrow g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$

$\Rightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow f$ birebir.

($g \circ f$ birebir old.)

c) $g \circ f$ birebir ve f ~~üzerine~~ örten ise g birebir dir.

Çözüm:

$b_1, b_2 \in B$ için $g(b_1) = g(b_2)$ ele alalım.

f ~~üzerine~~ örten old. $b_1 \in B$ için $\exists a_1 \in A$ $f(a_1) = b_1$

$b_2 \in B$ için $\exists a_2 \in A$ $f(a_2) = b_2$ dir.

$g(b_1) = g(f(a_1)) = g \circ f(a_1)$

$g(b_2) = g(f(a_2)) = g \circ f(a_2)$ $\xrightarrow{g \circ f \text{ birebir}}$ $a_1 = a_2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow b_1 = b_2$

d) $g \circ f$ ~~üzerine~~ örten ve g birebir ise f ~~üzerinedir~~ örtendir

Çözüm:

$b \in B$ için $g(b) \in C \xRightarrow{g \circ f \text{ örten}} \exists a \in A$ $g \circ f(a) = g(b)$

$(g(f(a)) = g(b))$

$\xRightarrow{g \text{ birebir}}$ $f(a) = b$ oş $a \in A$ vardır.

yani f ~~üzerine~~ örten.

Soru: $f: X \to Y$ bir fonk olsun.

f ~~üzerine~~ örten $\iff \forall A \subseteq X$ için $Y \setminus f(A) \subseteq f(X \setminus A)$

Çözüm:

$(\Rightarrow)$ f ~~üzerine~~ örten olsun. $A \subseteq X$ ele alalım

$y \in Y \setminus f(A) \Rightarrow y \notin f(A) \Rightarrow \underbrace{\forall a \in A \text{ için } f(a) \neq y}_{(i)}$

ayrıca
$y \in Y$ ve f ~~üzerine~~ örten old. $\exists x \in X$ öyleki $f(x) = y$

(i)'den diyebiliriz ki bu x değeri A'nın elemanı değildir.

O halde $x \in X \setminus A$ olup $y = f(x) \in f(X \setminus A)$ dır.

Yani $Y \setminus f(A) \subseteq f(X \setminus A)$ olur.

$(\Leftarrow)$ $A = X$ alalım

$Y \setminus f(X) \subseteq f(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow f(X) = Y$

$\Rightarrow f$ ~~üzerine~~ örten.

(ödev)
Soru: $f: X \to Y$ bir fonk. olsun

f birebir $\iff \forall A \subseteq X$ için $f(X \setminus A) \subseteq Y \setminus f(A)$

Çözüm:

Soru: $f: X \to Y$ bir fonk. olsun

f birebir $\iff \forall A \subseteq X$ için $A = f^{-1}(f(A))$

Çözüm:

$(\Rightarrow)$ f birebir olsun. $A \subseteq X$ ele alalım.

$x \in f^{-1}(f(A)) \underset{f^{-1} \text{ in tanımından}}{\Rightarrow} f(x) \in f(A) \overset{\star}{\Rightarrow} \exists y \in A$ öyleki $f(y) = f(x)$.

$\underset{f \text{ birebir}}{\Rightarrow} y = x \in A$.

$\star$ Not: $f(x) \in f(A)$ ise $x \in A$ diye bilir miyiz?

Sonuç olarak $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$

$\boxed{A \subseteq f^{-1}(f(A)) \text{ ödev}}$ $\Rightarrow$ eşitlik gerçeklenir.

$(\Leftarrow)$ $a, b \in X$ için $f(a) = f(b)$ olsun. (gg/ $a = b$?)

$A = \{a\}$ olarak seçelim. $f(b) = f(a) \in f(A)$

$\Rightarrow a, b \in f^{-1}(f(A)) = A = \{a\} \Rightarrow a = b$

yani f birebir.

Ödev: $f: X \to Y$ bir fonk. olsun

f ~~üzerine~~ örten $\iff \forall B \subseteq Y$ için $B = f(f^{-1}(B))$

Soru: $f: X \to Y$ bir fonk. o.ü aşağıdaki ifadelerin denk olduğunu gösteriniz.

a) f birebir

b) $\forall A, B \in P(X)$ için $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

c) X'in her ayrık iki alt kümesi A ve B (yani $A \cap B = \phi$) için $f(A) \cap f(B) = \phi$

Çözüm:

- a) $\Rightarrow$ b)

$y \in f(A) \cap f(B) \Rightarrow \exists a \in A$ ve $\exists b \in B$ öyleki $y = f(a) = f(b)$.

$\underset{f \text{ birebir}}{\Rightarrow}$ $a = b \in A \cap B \Rightarrow y \in f(A \cap B)$

yani, $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$ $\Rightarrow$ eşitlik gerçeklenir.
(tersi her zaman geçerli old.)

- b) $\Rightarrow$ c) Açıktır.

- c) $\Rightarrow$ a)

$f(a) = f(b)$ ele alalım (gg/ $a = b$?)

eğer $a \neq b$ ise c)'de $A = \{a\}$ ve $B = \{b\}$ alalım.

$a \neq b$ old. $A \cap B = \phi$ olup $f(A) \cap f(B) = \phi$ old.

c) söylüyor halbuki $f(a) \in f(A) \cap f(B) \neq \phi$.

O halde $a = b$ olmalı.

Soru: X bir küme ve $P(X)$ onun kuvvet kümesi olmak üzere

a) $X \longrightarrow P(X)$ birebir fonk. bulun

b) $X \longrightarrow P(X)$ örten bir fonk. var mıdır?

{ Yol göst; örten fonk olmadığını $A=\{x\in X \mid x\notin f(x)\}$ kümesini düşünerek gösterin. }

Çözüm:

a) $$f: X \longrightarrow P(X)$$
$$x \longrightarrow \{x\}\in P(X)$$
şeklinde tanımlanan fonksiyonun birebir olduğu açıktır.

b) Varsayalım ki $f: X \longrightarrow P(X)$ örten bir fonk. olsun.

$A\in P(X)$ için $\exists y\in X$ öyle ki: $f(y)=A$

Şimdi y elemanının A'da olup olmadığını sorgulayalım

- $y\in \underset{(f(y))}{\overset{}{A}}=\{x\in X \mid x\notin f(x)\} \Rightarrow y\notin f(y)$

  yani $y\in f(y) \Rightarrow y\notin f(y)$

Çelişki

- $y\notin A=f(y) \Rightarrow y\in f(y)$

Her iki durumda olamayacağı için en baştaki varsayımımız yanlış olup X'den $P(X)$'e örten bir fonk olamaz.