T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KANTOR KÜMESİNİN FRAKTAL GEOMETRİ UYGULAMALARI

İpek Ebru KARAÇAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Prof. Dr. Salim YÜCE

Ocak, 2021

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KANTOR KÜMESİNİN FRAKTAL GEOMETRİ UYGULAMALARI

İpek Ebru KARAÇAY tarafından hazırlanan tez çalışması 27.01.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Salim YÜCE
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Salim YÜCE, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU, Üye
İstanbul Gelişim Üniversitesi _____

Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Danışmanım Prof. Dr. Salim YÜCE sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Kantor Kümesinin Fraktal Geometri Uygulamaları başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

İpek Ebru KARAÇAY

İmza

Dedicated to my family

TEŞEKKÜR

Bu tezde bilgilerinden çokca yararlandığım danışmanım, kıymetli hocam Prof. Dr. Salim Yüce'ye; her zaman yanımda olan ve beni destekleyen aileme; ve Yüce Research grubu hocalarıma ve arkadaşlarıma en içten şükranlarımı sunarım.

İpek Ebru KARAÇAY

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ vii

KISALTMA LİSTESİ viii

ŞEKİL LİSTESİ ix

ÖZET x

ABSTRACT xi

1 GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti . . . 1

1.2 Tezin Amacı . . . 2

1.3 Orijinal Katkı . . . 2

2 TEMEL KAVRAMLAR 3

2.1 Fraktal Nedir? . . . 3

2.2 Kendine Benzerlik . . . 3

2.2.1 Tam Kendine Benzerlik . . . 3

2.2.2 İstatiksel Kendine Benzerlik: . . . 3

2.3 Tekrarlı Fonksiyon Sistemleri . . . 4

2.3.1 $\mathbb{R}$ Kümesinde TFS . . . 4

2.3.2 $\mathbb{R}^2$ Kümesi Üzerinde TFS . . . 4

2.4 Topolojik Boyut . . . 5

2.5 Fraktal Boyut . . . 5

2.5.1 Kutu Sayma Boyutu . . . 6

2.5.2 Mandelbrot'un Kendine Benzerlik Boyutu . . . 7

2.5.3 Moran Denklemi . . . 8

3 GENELLEŞTİRİLMİŞ KANTOR KÜMESİ 10

3.1 Genelleştirilmiş Kantor Kümesi . . . 10

3.2 Genelleştirilmiş Kantor Kümesinin TFS . . . 13

3.3 Genelleştirilmiş Kantor Kümesinin Boyut Hesabı . . . 14

4 GENELLEŞTİRİLMİŞ KANTOR KÜMESİNE YENİ BİR YAKLAŞIM 15
4.1 $\mathbb{R}$ Kümesinin Alt Kümesi 15
4.1.1 Eğri Üzerinde İnceleme 18
4.1.2 $\mathbb{R}$ Kümesinin Alt Kümesinde Tekrarlı Fonksiyon Sistemleri . . . 24
4.1.3 $\mathbb{R}$ Kümesinin Alt Kümesinde Boyut 25
4.2 $\mathbb{R}^2$ Kümesinin Alt Kümesi 28
4.2.1 Yüzey Üzerinde İnceleme 32
4.2.2 $\mathbb{R}^2$ Kümesinin Alt Kümesinde Tekrarlı Fonksiyon Sistemleri . . . 34
4.2.3 $\mathbb{R}^2$ Kümesinin Alt Kümesinde Boyut 36
4.3 $\mathbb{R}^3$ Kümesinin Alt Kümesi 41
4.3.1 $\mathbb{R}^3$ Kümesinin Alt Kümesinde Tekrarlı Fonksiyon Sistemleri . . . 45
4.3.2 $\mathbb{R}^3$ Kümesinin Alt Kümesinde Boyut 49

5 TİYATRO VE RESİMDE FRAKTAL GEOMETRİ 53
5.1 Stanislavski'nin Birimlere Ayırma Yöntemine Fraktal Bir Yaklaşım . . . 53
5.1.1 Stanislavski'nin Birimlere Ayırma Yöntemi 53
5.1.2 Stanislavski'nin Birimlere Ayırma Yöntemi Kullanılarak Bir Oyun Metni Fraktal Olarak Düşünülebilir Mi? 54
5.1.3 Stanislavski'nin Metoduna Fraktal Yaklaşım 54
5.2 Resim Sanatı Üzerinde Fraktal Geometri Etkisi 56

6 SONUÇ VE ÖNERİLER 60

KAYNAKÇA 61

A TANIMLAR 63

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR 64

SİMGE LİSTESİ

V	$[0,1]$ aralığı için genelleştirilmiş Kantor kümesinde atılan parçaların oluşturduğu küme
C	$[0,1]$ aralığı için genelleştirilmiş Kantor kümesinde elde kalan parçaların oluşturduğu küme
D	Fraktal boyut
J	Her bir adımda atılan aralıklar
I	Her bir adımda elde kalan aralıklar
$\mathbb{V}$	$\mathbb{R}$ kümesinde genelleştirilmiş Kantor yapıdan atılan parçaların oluşturduğu küme
$\mathfrak{C}$	$\mathbb{R}$ kümesinde genelleştirilmiş Kantor yapının elde kalan parçalarının oluşturduğu küme
$\mathbb{V}^2$	$\mathbb{R}^2$ kümesinde genelleştirilmiş Kantor yapıdan atılan parçaların oluşturduğu küme
$\mathfrak{C}^2$	$\mathbb{R}^2$ kümesinde genelleştirilmiş Kantor yapının elde kalan parçalarının oluşturduğu küme
$\mathbb{V}^3$	$\mathbb{R}^3$ kümesinde genelleştirilmiş Kantor yapıdan atılan parçaların oluşturduğu küme
$\mathfrak{C}^3$	$\mathbb{R}^3$ kümesinde genelleştirilmiş Kantor yapının elde kalan parçalarının oluşturduğu küme
D_T	Topolojik boyut

KISALTMA LİSTESİ

TFS	Tekrarlı Fonksiyon Sistemleri

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 4.1 $[a,b]$ aralığında $(2n+1)$ parçaya ayrılan fraktal yapı 15
Şekil 4.2 Her bir adımda 5 parçaya ayrılan çember eğrisi 22
Şekil 4.3 Üçlü Kantor kümesi 26
Şekil 4.4 $[a,b]\times[c,d]$ için $(2n+1)$ parçaya ayrılan fraktal yapı 28
Şekil 4.5 $[a,b]\times[a,b]$ için $(2n+1)$ bölüme ayrılarak oluşan fraktal yapı . . . 32
Şekil 4.6 $\theta=\frac{\pi}{4}$ dönmeli Kantor karesi 35
Şekil 4.7 $[0,5]\times[0,5]$ bölgesini 5 parçaya ayırarak oluşan fraktal yapı 37
Şekil 4.8 $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ için $(2n+1)$ parçaya ayrılan fraktal yapı . . . 41
Şekil 4.9 $[a,b]\times[a,b]\times[a,b]$ için $(2n+1)$ parçaya ayrılan fraktal yapı . . . 44
Şekil 4.10 Kantor küpünde dönme 47
Şekil 4.11 $[0,5]\times[0,5]\times[0,5]$ için 5 parçaya ayrılan fraktal yapı 50
Şekil 5.1 Üçlü Kantor kümesi ile Stanislavski'nin birimlere ayırma yönteminin modellemesi 55
Şekil 5.2 Kantor kümesi 5 parçaya bölünerek oluşan model ile Stanislavski'nin birimlere ayırma yönteminin modellemesi 56
Şekil 5.3 Fraktal sanat örneği [16] 57
Şekil 5.4 Fraktal sanat örneği [17] 58
Şekil 5.5 Salvador Dali'nin Savaşın Yüzü tablosu, 1940, Boijmans Van Beuningen müzesi, Rotterdam [18] 59
Şekil 5.6 Salvador Dali'nin Savaşın Yüzü tablosu incelemesi [18] 59

ÖZET

Kantor Kümesinin Fraktal Geometri Uygulamaları

İpek Ebru KARAÇAY

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Salim YÜCE

Bu tezde, ilk olarak fraktal geometri de kullanılan temel bilgiler verilmiştir. Daha sonra Kantor kümesi $\mathbb{R}$ sayıların alt kümesi olan $[a,b]$ kapalı aralığı için tanımlanmıştır. Bu aralıktaki noktaların oluşturduğu küme için uzunluk hesabı yapılmıştır. Daha sonrasında bu aralık için tekrarlı fonksiyon sistemi oluşturulmuş ve boyut hesabı yapılmıştır. Bunlardan yola çıkarak eğrinin $[a,b]$ aralığındaki geometrik yorumu incelenmiştir.

Benzer şekilde, $[a,b]\times[c,d]$ ve $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ aralıklarının oluşturduğu bölge için Kantor tanımı yapılmıştır. Daha sonra bu bölgelerde uzunluk ve alan hesaplamaları yapılmıştır. Bu bölgelerdeki genelleştirilmiş Kantor yapıları için tekrarlı fonksiyon sistemleri oluşturulmuş ve boyut hesabı yapılmıştır. Bunlardan yola çıkarak bu bölgenin yüzey üzerinde geometrik incelemesi yapılmıştır.

Son bölümde fraktal geometrinin tiyatro ve resim üzerine uygulaması yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Fraktal geometri, Kantor kümesi, tekrarlı fonksiyon sistemleri, tiyatro, sanat

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

Fractal Geometry Applications of the Cantor Set

İpek Ebru KARAÇAY

Department of Mathematics
Master of Science Thesis

Advisor: Prof. Dr. Salim YUCE

In this thesis, firstly the fundamental information of fractal geometry was explained. Then Cantor set is defined for the $[a, b]$ closed interval, which is a subset of the set of real numbers. Moreover, the length is calculated for the set formed by the points in this interval $[a, b]$. Dimension calculation was made for this interval and fractal structure that was obtained with iterated function systems. Based on these, $[a, b]$ interval was examined on the curve.

Similarly, Cantor set is defined for the $[a, b] \times [c, d]$ and $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ closed interval. Then area and volume are calculated for these intervals. Dimension calculation was made for these intervals and fractal structures that were obtained with iterated function systems. Based on these, this region was examined on the surface.

Finally, fractal geometry has been applied to painting and theater.

Keywords: Fractal geometry, Cantor set, iterated function system, theatre, art

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

İlk matematiksel fraktal kavramı ilk kez Karl Weierstrass tarafından 1861 de sürekli fakat hiçbir noktada diferansiyellenemeyen eğri için kullanılmıştır. Fraktal geometri 1975 yılında B. Mandelbrot'un kuadratik polinomlara kompleks sayılar vermesi ile oluşturduğu Mandelbrot kümesini keşfi ile ortaya çıkmıştır. Fraktal, Latincesi "fractus" parçalanmış, bölünmüş anlamına gelen bir kelimedir. Fraktal geometri pek çok farklı disiplinlerle çalışılmıştır. Özellikle günlük hayatta olmak üzere tıptan, sanata pek çok alanda çalışmalar yapılmıştır. Fraktal geometrinin ortaya çıkışında da Mandelbrot'un kendi kendine sorduğu "İngiltere kıyısının uzunluğu ne kadardır?" sorusunun önemi vardır. Mandelbrot Klasik Öklid geometrisi ile bu sorunun cevabını bulamayacağını düşünerek yeni çalışmalara başlamıştır [1].

Fraktal geometri Mandelbrot tarafından 1975 yılında tanımlanmış olsa da Mandelbrot'un fraktal geometriyi tanımlamasından çok önceleri o zamanlar fraktal olarak adlandırılmaksızın fraktal benzeri yapılar tanımlanmıştır. Matematiksel anlamda ilk çalışılan fraktal Kantor kümesidir. Kantor kümesi 1883 yılında G. Cantor tarafından tanımlanmıştır [2]. Bunun dışında Sierpinski şapkası gibi yapılarda tanımlanmıştı fakat bu yapıların tanımlandığı yıllarda henüz Fraktal Geometri ortaya çıkmamıştı. Fraktal geometrinin ortaya çıkışı bilgisayar teknolojilerinin gelişmesi ile olmuştur.

Mandelbrot tarafından fraktal geometrinin tanımlanması ile fraktallar için önemli özellik olan kendine benzerlik tanımlanmıştır. Daha sonra fraktalların elde edilmesinde önemli bir yapı olan tekrarlı fonksiyon sistemleri ve fraktalların ayırt edici özellikleri olan fraktal boyut kavramları tanımlanmıştır.

Kantor kümeleri ile ilgili yıllar içinde pek çok çalışma yapılmış olsa da geometrik olarak genelleştirilerek incelenmesi ile ilgili asıl çalışmalar 2010'lu yıllarda yapılmaya başlanmıştır. 2011 yılında genelleştirilmiş Kantor kümeleri $[0,1]$ aralığı için

tanımlanarak bu aralık da uzunluk [3] ve boyut [4] hesaplamaları yapılarak tekrarlı fonksiyon sistemleri oluşturulmuştur [5].

1.2 Tezin Amacı

Bu tezde daha öncesinde $[0,1]$ aralığı için genelleştirilmesi yapılmış olan Kantor kümelerinin $[a,b]$ aralığı için genelleştirmesi yapılarak daha geniş bir alanda çalışılması sağlanmıştır. Daha sonra bu genelleme $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ kümeleri içinde incelenerek genelleştirilmiş Kantor kümesinin fraktal geometrisi incelenmiştir. Son bölümde ise bu genelleştirmeden yararlanarak tiyatro üzerinde uygulaması yapılmış ve fraktal geometrinin resim sanatı üzerinde incelemesi yapılmıştır.

1.3 Orijinal Katkı

Genelleştirilmiş Kantor kümesinin daha geniş bir alandaki genellemesi yapılarak $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, ve $\mathbb{R}^3$ kümeleri üzerinde genelleştirilmiş olan Kantor kümelerinin fraktal geometrisi incelenmiştir. Daha sonra Kantor genellemesinin sanat üzerinde uygulaması yapılmıştır.

2
TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde fraktal yapının tanımı verilerek fraktal yapılar için önemli tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1 Fraktal Nedir?

Tanım 2.1. Mandelbrot fraktalı;

i. Kendine Benzerlik(Self-Similarity)

ii. Tekrarlı Oluşum (Iterative formation)

iii. Kesirli Boyut (Fractional dimension)

özelliklerine sahip nesneler olarak tanımlar [1].

2.2 Kendine Benzerlik

2.2.1 Tam Kendine Benzerlik

Bir uzayda bulunan $a = (a_1, a_2, \dots)$ noktalar kümesi A olmak üzere $0 < r < 1$ olacak şekilde r küçülme oranı ile benzerlik dönüşümü uygulandığında A kümesi $ra = (ra_1, ra_2, \dots)$ noktalarından oluşan rA kümesine dönüşür. A kümesi X tane birbirinden farklı ra kümesinin birleşimi ile oluşuyorsa tam olarak kendine benzer bir kümedir [6].

2.2.2 İstatiksel Kendine Benzerlik:

Parçalara ayrılmış olan yapıda küçük parça büyütülüp incelendiğinde elde edilen parça orijinali ile birebir aynı olmadığı görülebilir. Bütünün bir parçasıdır ve bütüne benzer fakat birebir aynısı değildir. Parçalar farklı ölçeklerde büyütülüp küçülmüştür.

Bu durum istatiksel kendine benzerlik olarak adlandırılır. Bu gibi kendine benzer yapılarda değerlerin belirlenmesi ölçek büyütülüp küçüldükçe değişir [7].

2.3 Tekrarlı Fonksiyon Sistemleri

Tanım 2.2. Tekrarlı Fonksiyon Sistemi Fraktal üretmek için genel bir metottur. Bir nokta ya da bir şekil alınıp onun yerine kendisiyle aynı olan daha çok sayıda farklı oranda şekil konulmak üzere fraktal elde edilir [8].

2.3.1 $\mathbb{R}$ Kümesinde TFS

Tanım 2.3. $r > 0$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $\mathbb{R}$ üzerinde merkezi α ve oranı r olan genişleme fonksiyonu;

$$\begin{aligned} F_i &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\to F_i(x) = r_i x + (1 - r_i)\alpha_i \end{aligned} \tag{2.1}$$

ile tanımlanır. Burada i her bir adımdaki parçayı ifade etmektedir [9].

2.3.2 $\mathbb{R}^2$ Kümesi Üzerinde TFS

Tanım 2.4. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere

$$x' = ax + by \tag{2.2}$$

$$y' = cx + dy \tag{2.3}$$

dönme dönüşümlerini ele alınır. Burada

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

matrisi dönme matrisidir. Orjin etrafında dönme açısı θ olan genel dönmenin matris formundaki denklemi;

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

şeklindedir. Şimdi bu matrise büzülme ya da genişleme dönüşümü uygulanırsa; büzülme katsayısı r olmak üzere $x'' = rx'$ ve $y'' = ry'$ için

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

elde edilir. Son olarak x'' ve y'' dönüşümlerine öteleme uygulanırsa;

$x''' = x'' + e$ ve $y''' = y'' + f$ için

$$\begin{bmatrix} x''' \\ y''' \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

elde edilir [10].

2.4 Topolojik Boyut

Tanım 2.5. Poincare'e göre topolojik boyut şu şekilde tanımlanır; Bir geometrik nesnenin topolojik boyutu o geometrik nesneyi parçalara bölmek için kullanılan diğer geometrik nesnelerin boyutundan 1 fazladır. Dolayısıyla noktalar parçalara ayrılmaz ve topolojik boyutları 0 dır; eğrileri parçalamak için noktalar kullanıldığı için eğrilerin topolojik boyutu 1 olur; yüzeyleri parçalamak için ise eğriler kullanıldığı için yüzeylerin topolojik boyutu 2 olur; uzayları parçalamak için yüzeyler kullanıldığı için uzayın topolojik boyutu 3 olur. Mandelbrot'un kıyı şerit uzunluğu hesaplama probleminde topolojik boyut kullanılamaz. Çünkü karaların kıyıları topolojik olarak çembere özdeştir ve tüm çemberlerin topolojik boyutu 1 dir. Dolayısıyla topolojik boyut ile kıyılar birbirinden ayırt edilemez [1].

2.5 Fraktal Boyut

Tanım 2.6. Fraktal boyut topolojik değil, metrik bir kavramdır ve temeli Hausdorff ve Becicovitch tarafından atılmıştır. Topolojik ve fraktal boyut arasında şu şekilde bir ilişki vardır; $\mathbb{R}$ uzayında D ve D_T en az 0, en çok E olabilir. D_T her zaman tamsayıdır fakat D tamsayı olmak zorunda değildir. Öklid geometrisinde $D = D_T$ olur. Diğer durumlarda $D > D_T$ dir [1].

Mandelbrot'a göre, Hausdorff-Besicovitch boyutunun topolojik boyutundan büyük olan kümelere fraktal küme denir [1].

Tanım 2.7. Fraktal boyut kendine benzerlik özelliği kullanılarak açıklanırsa;

Bir doğru parçası düşünüldüğünde tek boyutludur ve bu doğru parçası N eşit parçaya ayrılarak $r = \frac{1}{N}$ oranında küçültülebilir.

Bir kare düşünüldüğünde 2 boyutludur ve $r = \frac{1}{\sqrt{N}}$ oranında küçültülerek kendine

benzer N eşit kare oluşturulur.

Bir küp düşünüldüğünde ise 3 boyutludur ve $r = \frac{1}{\sqrt[3]{N}}$ oranında küçültülebilir.

Genel olarak D boyutlu kendine benzer bir obje $r = \frac{1}{\sqrt[D]{N}}$ oranında küçültülebilir. Burada fraktal (benzerlik) boyutu olarak ifade edilen D;

$$r = \frac{1}{\sqrt[D]{N}} \tag{2.8}$$

ve

$$D = \frac{log(N)}{log\left(\frac{1}{r}\right)} \tag{2.9}$$

elde edilir [10].

Mandelbrot'a göre fraktalın bir başka tanımı; "Fraktal, boyutu topolojik boyuttan farklı olan kendi kendine benzer bir kümedir" [11].

2.5.1 Kutu Sayma Boyutu

Tanım 2.8. Nesneyi sabit kenar uzunluğu r olan karelerle örterek bu karelerin $N(r)$ sayısının $\sum r$ değerine bağlı olarak inceleyen yöntem olarak ifade edilir.

$N(r)$ ile $\frac{1}{r}$ arasındaki ilişki;

$$N(r) = (\frac{1}{r})^d \tag{2.10}$$

olmak üzere, (2.10) ifadesinde her iki tarafın logaritması alınırsa;

$$\log(N(r)) = (\log(\frac{1}{r}))^d = d \log \frac{1}{r} \tag{2.11}$$

bulunur. Buradan kutu sayma boyutu;

$$d_k = \lim_{\alpha \to 0} \frac{logN(r_\alpha)}{log(\frac{1}{r_\alpha})} \tag{2.12}$$

şeklinde bulunur [1, 10].

Tanım 2.9. (2.12) denklemindeki limit değerini görmek yavaş olabilir. Bu yüzden buna alternatif bir yöntem olarak;

$$\log(N(r)) = d \log \frac{1}{r} \tag{2.13}$$

ifadesi eğimi d olan bir doğru olarak düşünülür. $\log N(r)$ noktaları ile karşısındaki $\log \frac{1}{r}$ noktaları işaretlendiğinde, elde edilen noktalar eğimi d_k olan bir doğru üzerindedir. Bu metot ile boyutu bulmaya log-log yaklaşımı adı verilir [7, 10].

2.5.2 Mandelbrot'un Kendine Benzerlik Boyutu

Tanım 2.10. Bir küçük ölçü birimi r olarak seçilir. Daha sonra dolambaçlı çizginin uzunluğu r cinsinden ölçülür. Kabul edelim ki r ölçütü N defa kullanılmış olsun, yani total ölçü Nr olsun. O zaman Mandelbrot'un tanımına göre fraktal boyut;

$$d = \lim_{r \to 0} \frac{logN}{log(\frac{1}{r})} \tag{2.14}$$

ile verilir. Burada d dolambaçlık çizgisinin dolambaçlık derecesidir.

Uygulamada $\frac{logN}{log\frac{1}{r}}$ kesri sabit bir değer olan d limitine yaklaşır. Bazı hallerde kesrin değeri her adımda aynı kalır. O zaman (2.14) denklemi;

$$\begin{aligned} d &= \frac{logN}{log\frac{1}{r}} \\ logN &= dlog(\frac{1}{r}) \\ logN &= log(\frac{1}{r})^d \end{aligned} \tag{2.15}$$

biçiminde yazılabilir [1, 10].

Tanım 2.11. Kendisinin N kopyasından oluşmuş her biri r küçültme çarpanlı benzerlik ölçeğine sahip bir kendine benzer şekil için benzerlik boyutu

$$d_b = \frac{logN}{log\frac{1}{r}} \tag{2.16}$$

şeklinde tanımlanır [1].

2.5.3 Moran Denklemi

Tanım 2.12. Kendine benzerlik boyutunda tüm parçalar aynı ölçekli olarak kabul edilmektedir. Fakat parçaları farklı ölçeklerde olan kendine benzer fraktal yapılar olabilir. Bu durumda ölçekleri $r_1, r_2, \ldots, r_N$ olan N parçaya bölünmüş olan bir fraktal yapı için benzerlik boyutunun genelleştirilmesi gereklidir.

$$d_b = \frac{logN}{log\frac{1}{r}} \tag{2.17}$$

ifadesinde her bir parça için boyut aynı ve $d_b = d$ olsun [7]. O halde denklem;

$$d(log\frac{1}{r}) = logN \tag{2.18}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$(\frac{1}{r})^d = N \tag{2.19}$$

yazılabilir. Böylece

$$1 = N.r^d \tag{2.20}$$

elde edilir ve fraktal bölündüğünde her bir kopyası için aynı r yi veren

$$1 = r^d + \cdots + r^d; Ntane, r^d \tag{2.21}$$

ifadesi elde edilir. Her bir r kopyası için r_i alınırsa, d benzerlik boyutunu için

$$1 = {r_1}^d + \cdots + {r_N}^d \tag{2.22}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadeye Moran denklemi denir [10].

Teorem 2.1. *Her bir r_i , $0 < r_i < 1$ olduğu sürece, Moran denkleminin çözümü tektir ve $d = d_b$ benzerlik boyutudur.*

İspat.

$$\begin{aligned} f &: [0, \infty) \to [0, \infty) \\ & f(d) \to \sum_{i=1} {r_i}^d, r_i \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.23}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonu ele alalım. f üstel bir fonksiyondur. Üstel fonksiyonlar sürekli olduğu için f süreklidir. $f(0) = n \geq 1$ ve $\lim_{d\to\infty} f(d) = 0 < 1$

dir. f sürekli olduğundan ortalama değer teoreminden dolayı en az bir d vardır. f fonksiyonun türevi

$$f'(d) = \sum_{i=1}^{d} {r_i}^d log r_i \tag{2.24}$$

olup sıfırdan küçüktür. Dolayısıyla f azalandır. f azalan olduğu için birebirdir.

Moran denklemi $f(d) = 1$ şeklinde tanımlanmıştı. Dolayısıyla $f(d) = f(d_b) = 1$ olmak üzere $d = d_b$ olur [9]. ■

3
GENELLEŞTİRİLMİŞ KANTOR KÜMESİ

Bu bölümde $[0,1]$ aralığı için tanımlanmış olan genelleştirilmiş Kantor kümesi anlatılmıştır. Bu yapının tekrarlı fonksiyon sistemleri ile oluşumu gösterilmiş ve boyut hesabı yapılmıştır.

3.1 Genelleştirilmiş Kantor Kümesi

Tanım 3.1. Başlangıç: Reel sayıların $[0,1]$ aralığını C_0 ile gösterilir.

1. Adım: C_0 aralığını $(2n+1)$ parçaya ayrılır. İlk ve son parça kalacak şekilde parçalardan biri alınıp biri atılarak n tane aralık atılır. Geriye uzunlukları $\dfrac{1}{2n+1}$ olan $n+1$ tane kapalı aralık kalır;

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= \left[0, \frac{1}{2n+1}\right] \\ &\vdots \\ I_{1,n+1} &= \left[\frac{2n}{2n+1}, 1\right] \end{aligned} \tag{3.1}$$

şeklindedir. Buradan

$$C_1 = I_{1,1} \cup I_{1,2} \cup \cdots \cup I_{1,n+1} \tag{3.2}$$

elde edilir.

2. Adım: $I_{1,1}, \ldots, I_{1,n+1}$ aralıklarının her birine 1. Adımda uygulanan yöntem uygulanır. Her bir aralıktan n tane parça atılmak üzere toplam $n(n+1)$ parça atılır ve geriye her birinin uzunluğu $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ olmak üzere $(n+1)^2$ tane parça kalır. Bu kalan parçalar;

$$\begin{aligned} I_{2,1} &= \left[0, \frac{1}{(2n+1)^2}\right] \\ &\vdots \\ I_{2,(n+1)^2} &= \left[\frac{4n(n+1)}{(2n+1)^2}, 1\right] \end{aligned} \tag{3.3}$$

şeklindedir. Buradan

$$C_2 = I_{2,1} \cup I_{2,2} \cup \cdots \cup I_{2,(n+1)^2} \tag{3.4}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse genel olarak m. aşamada atılan açık aralıklar;

$$V_m = J_{m,1} \cup \cdots \cup J_{m,(n+1)^{m-1}} = \cup_{k=1}^{(n+1)^{m-1}} J_{m,k} \tag{3.5}$$

şeklindedir. Kalan kapalı aralıklar ise $(n+1)^{(m-1)}$ tanedir ve

$$C_m = I_{m,1} \cup \cdots \cup I_{m,(n+1)^m} = \cup_{k=1}^{(n+1)^m} J_{m,k} \tag{3.6}$$

şeklinde gösterilir. Buradan;

$$V = \cup_{k=1}^{\infty} V_m = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \tag{3.7}$$

ve

$$C = \cap_{k=1}^{\infty} C_m = C_1 \cap C_2 \cap \ldots \tag{3.8}$$

şeklindedir. Burada V atılan kümelerin hepsidir; C elde kalan kısımlardır. Tanım gereğince,

$$V \cup C = [0,1] \tag{3.9}$$

ve

$$V \cap C = \emptyset \tag{3.10}$$

olduğu açıktır [4, 12].

Elde edilen kümelerin uzunlukları:

Parçaların uzunluklarını hesaplamak için öncelikle atılan parçaların uzunlukları hesaplanır.

$$\begin{aligned} m(V_1) &= \frac{n}{2n+1}, \\ m(V_2) &= \frac{n(n+1)}{(2n+1)^2}, \\ m(V_3) &= \frac{n(n+1)^2}{(2n+1)^3}, \\ &\vdots \\ m(V_m) &= \frac{n(n+1)^{(m-1)}}{(2n+1)^m} \end{aligned} \tag{3.11}$$

V_m kümeleri birbirinden ayrık olduğundan,

$$\begin{aligned} m(V) &= m(V_1)+m(V_2)+m(V_3)+\dots \\ m(V) &= \frac{n}{2n+1}+\frac{n(n+1)}{(2n+1)^2}+\frac{n(n+1)^2}{(2n+1)^3}+\dots \\ m(V) &= \frac{n}{2n+1}\left[1+\frac{n+1}{2n+1}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)^2}+\dots\right] \end{aligned} \tag{3.12}$$

yazılır. Elde edilen bu toplamda parantez içindeki toplam sonsuz geometrik seridir. İlk terimi $a=1$ ve ortak çarpanı $r=\frac{n+1}{2n+1}$ dir. $\left|\frac{n+1}{2n+1}\right|<1$ olduğundan bu toplam;

$$\begin{aligned} \frac{a}{1-r} &= \frac{1}{1-\frac{n+1}{2n+1}}=\frac{2n+1}{n} \\ m(V) &= \frac{n}{2n+1}.\frac{2n+1}{n}=1 \end{aligned} \tag{3.13}$$

bulunur. $m([0,1]) = 1$ dir.

$$\begin{aligned} V \cup C &= [0,1] \\ m(V \cup C) &= m(V) + m(C) + m(V \cap C) \\ 1 &= 1 + m(C) + 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

ve buradan $m(C) = 0$ bulunur [3].

3.2 Genelleştirilmiş Kantor Kümesinin TFS

Tanım 3.2. $[0,1]$ aralığına genelleştirilmiş olan Kantor kümesinin her bir adımındaki parçaları tekrarlı fonksiyon sistemleri kullanılarak elde edilir.

$$\begin{aligned} F_i &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\to F_i(x) = r_i x + (1 - r_i)\alpha_i, i \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{3.15}$$

şeklinde yazılır. Her $r_i = r = \frac{1}{2n+1}$ dir. İlk iki adım için bu parçaları TFS ile gösterilirse;

1. Adım:

1. Parça İçin: $\alpha_1 = 0$ ve $r = \dfrac{1}{2n+1}$ olmak üzere

$$F_{1,1}(x) = \frac{1}{2n+1}.x + \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).0 = \frac{x}{2n+1} \tag{3.16}$$

şeklindedir.

$$\vdots$$

(n+1). Parça İçin: $\alpha_{(n+1)} = 1$ ve $r = \dfrac{1}{2n+1}$ olmak üzere

$$F_{1,(n+1)}(x) = \frac{1}{2n+1}.x + \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).1 = \frac{x+2n}{2n+1} \tag{3.17}$$

şeklindedir. İkinci adımda oluşan parçalar için TFS;

2. Adım:

1. Parça İçin: $\alpha_1 = 0$ ve $r = \dfrac{1}{(2n+1)}$ olmak üzere

$$F_{2,1}(x) = F(F_{1,1}(x)) = \frac{1}{(2n+1)}.\frac{x+2n.0}{2n+1} + \left(\frac{2n}{(2n+1)}\right).0 = \frac{x}{(2n+1)^2} \tag{3.18}$$

şeklindedir.

$$\vdots$$

$(n+1)^2$. Parça İçin: $\alpha_{(n+1)^2} = 1$ ve $r = \dfrac{1}{(2n+1)}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} F_{2,(n+1)^2}(x) = F(F_{1,(n+1)}(x)) &= \frac{1}{(2n+1)}.\frac{x+2n}{2n+1} + \left(\frac{2n}{(2n+1)}\right).1 \\ &= \frac{x+2n}{(2n+1)^2} + \frac{2n}{(2n+1)} \end{aligned} \tag{3.19}$$

şeklinde elde edilir [5].

3.3 Genelleştirilmiş Kantor Kümesinin Boyut Hesabı

Tanım 3.3. Her bir adımdaki $(n+1)^m$ tane parçanın uzunluğu $\dfrac{1}{(2n+1)^m}$ olmak üzere $[0,1]$ aralığı için genelleştirilmiş Kantor kümesinin boyut hesabı;

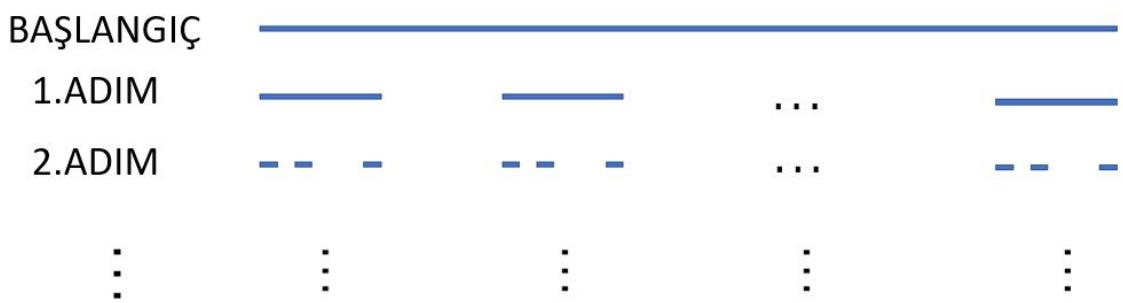
$$d_{(2n+1)} = \lim_{m\to 0} \frac{\log(n+1)^m}{log\left(\frac{1}{\frac{1}{(2n+1)^m}}\right)} = \frac{\log(n+1)}{log(2n+1)} \tag{3.20}$$

şeklinde bulunur [4].

4
GENELLEŞTİRİLMİŞ KANTOR KÜMESİNE YENİ BİR YAKLAŞIM

Tezin bu orijinal bölümünde öncelikle $\mathbb{R}$ sayıların alt kümesi olan $[0,1]$ aralığı için genelleştirilmiş olan Kantor kümesi yapısı $[a,b]$ aralığına genişletilerek incelenmiş ve bu aralık için eğri üzerinde de inceleme yapılmıştır. Bu kısım [13] numaralı kaynakta belirtilen sempozyumda sunulmuştur. Daha sonrasında $\mathbb{R}^2$ kümesinin alt kümesinde incelemesi yapılmıştır ve inceleme yüzey üzerine genişletilmiştir. Son olarak $\mathbb{R}^3$ kümesinin alt kümesinde incelemesi yapılarak bölüm tamamlanmıştır.

4.1 $\mathbb{R}$ Kümesinin Alt Kümesi



Şekil 4.1 $[a,b]$ aralığında $(2n+1)$ parçaya ayrılan fraktal yapı

Tanım 4.1. Başlangıç: Reel sayıların $[a,b]$ aralığını $\mathfrak{C}_0$ ile gösterilir.

1. Adım: $\mathfrak{C}_0$ aralığı $(2n+1)$ parçaya ayırılır. İlk ve son parça kalacak şekilde parçalardan biri alınıp biri atılarak n tane aralık atılır. Geriye uzunlukları $\dfrac{b-a}{2n+1}$ olan $n+1$ tane kapalı aralık kalır;

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= \left[a, \frac{2na+b}{2n+1}\right], \\ &\vdots \\ I_{1,n+1} &= \left[\frac{2nb+a}{2n+1}, b\right] \end{aligned} \tag{4.1}$$

şeklindedir. Buradan

$$\mathfrak{C}_1 = I_{1,1} \cup I_{1,2} \cup \cdots \cup I_{1,n+1} \tag{4.2}$$

elde edilir.

2. Adım: Şimdi $I_{1,1}, \ldots, I_{1,n+1}$ aralıklarının her birine 1. Adımda uygulanan yöntem uygulanır. Her bir aralıktan n tane parça atılmak üzere toplam $n(n+1)$ parça atılır ve geriye her birinin uzunluğu $\dfrac{b-a}{(2n+1)^2}$ olan $(n+1)^2$ tane parça kalır. Bu kalan parçalar;

$$\begin{aligned} I_{2,1} &= \left[a, \frac{4na(n+1)+b}{(2n+1)^2}\right], \\ &\vdots \\ I_{2,(n+1)^2} &= \left[\frac{4nb(n+1)-a}{(2n+1)^2}, b\right] \end{aligned} \tag{4.3}$$

şeklindedir. Buradan

$$\mathfrak{C}_2 = I_{2,1} \cup I_{2,2} \cup \cdots \cup I_{2,(n+1)^2} \tag{4.4}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse genel olarak m. aşamada atılan açık aralıklar;

$$\mathbb{V}_m = J_{m,1} \cup \cdots \cup J_{m,(n+1)^{m-1}} = \cup_{k=1}^{(n+1)^{m-1}} J_{m,k} \tag{4.5}$$

şeklindedir. Kalan kapalı aralıklar ise $(n+1)^{(m-1)}$ tanedir ve

$$\mathfrak{C}_m = I_{m,1} \cup \cdots \cup I_{m,(n+1)^m} = \cup_{k=1}^{(n+1)^m} J_{m,k} \tag{4.6}$$

şeklinde gösterilir. Buradan;

$$\mathbb{V} = \cup_{k=1}^{\infty} \mathbb{V}_m = \mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2 \cup \ldots \tag{4.7}$$

ve

$$\mathfrak{C} = \cap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{C}_m = \mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_2 \cap \ldots \tag{4.8}$$

şeklindedir. $\mathbb{V}$ atılan kümelerin hepsidir; $\mathfrak{C}$ geriye kalan genelleştirilmiş Kantor yapıdır. Tanım gereğince,

$$\mathbb{V} \cup \mathfrak{C} = [a, b] \tag{4.9}$$

ve

$$\mathbb{V} \cap \mathfrak{C} = \emptyset \tag{4.10}$$

olduğu açıktır.

Elde edilen kümelerin uzunlukları hesaplanırsa:
Parçaların uzunluklarını hesaplamak için öncelikle atılan parçaların uzunlukları hesaplanır.

Birinci adımdaki parçanın uzunluğu;

$$m(\mathbb{V}_1) = \frac{(b-a)n}{2n+1} \tag{4.11}$$

şeklindedir. İkinci adım için parça uzunluğu;

$$m(\mathbb{V}_2) = \frac{(b-a)n(n+1)}{(2n+1)^2} \tag{4.12}$$

şeklindedir. Üçüncü adım için ise;

$$m(\mathbb{V}_3) = \frac{(b-a)n(n+1)^2}{(2n+1)^3} \tag{4.13}$$

elde edilir. Genel olarak m. adım için;

$$m(\mathbb{V}_m) = \frac{(b-a)n(n+1)^{(m-1)}}{(2n+1)^m} \tag{4.14}$$

elde edilir.

$\mathbb{V}_m$ kümeleri birbirinden ayrık olduğundan,

$$\begin{aligned} m(\mathbb{V}) &= m(\mathbb{V}_1)+m(\mathbb{V}_2)+m(\mathbb{V}_3)+\dots \\ m(\mathbb{V}) &= \frac{(b-a)n}{2n+1}+\frac{(b-a)n(n+1)}{(2n+1)^2}+\frac{(b-a)n(n+1)^2}{(2n+1)^3}+\dots \\ m(\mathbb{V}) &= \frac{(b-a)n}{2n+1}\left(1+\frac{n+1}{2n+1}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)^2}+\dots\right) \end{aligned} \tag{4.15}$$

yazılır. Elde edilen bu toplamda parantez içindeki toplam sonsuz geometrik seridir. İlk terimi $a=1$ ve ortak çarpanı $r=\frac{n+1}{2n+1}$ dir. $\left|\frac{n+1}{2n+1}\right|<1$ olduğundan bu toplam;

$$\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{n+1}{2n+1}}=\frac{2n+1}{n} \tag{4.16}$$

olmak üzere

$$m(\mathbb{V})=\frac{(b-a)n}{2n+1}.\frac{2n+1}{n}=(b-a) \tag{4.17}$$

bulunur. $m([a,b])=(b-a)$ dir.

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\cup\mathfrak{C} &= [a,b] \\ m(\mathbb{V}\cup\mathfrak{C}) &= m(\mathbb{V})+m(\mathfrak{C})+m(\mathbb{V}\cap\mathfrak{C}) \\ (b-a) &= (b-a)+m(\mathfrak{C})+0 \end{aligned} \tag{4.18}$$

ve buradan $(\mathfrak{C})=0$ bulunur.

4.1.1 Eğri Üzerinde İnceleme

Tanım 4.2. α, $[a,b]$ aralığında birim hızlı bir eğri olsun.

$$\begin{aligned} \alpha : [a,b] &\to E^2 \\ t &\to \alpha(t) \end{aligned} \tag{4.19}$$

$\alpha(t)$ birim hızlı olduğundan $||\alpha'(t)||=1$ dir.

Bu eğrinin uzunluğu;

$$\int_a^b ||\alpha'(t)||dt = \int_a^b dt = (b-a) \tag{4.20}$$

olarak bulunur.

Daha sonra bu eğri $(2n+1)$ parçaya ayrılır. Baştaki ve sondaki parça kalacak şekilde bir parça bırakılıp bir parça atılır.

1. Adım: Eğri $(2n+1)$ parçaya ayırıldığında geriye $(n+1)$ parça kalmak üzere toplam n tane parça atılır. Atılan aralıklar:

$$\begin{aligned} J_{1,1} &= \left(\frac{2na+b}{2n+1}, \frac{2na+2b-a}{2n+1}\right), \\ &\vdots \\ J_{1,n} &= \left(\frac{2nb+2a-b}{2n+1}, \frac{2nb+a}{2n+1}\right) \end{aligned} \tag{4.21}$$

olmak üzere atılan parçaların uzunlukları toplamı;

$$\int_{\frac{2na+b}{2n+1}}^{\frac{2na+2b-a}{2n+1}} dt + \cdots + \int_{\frac{2nb+2a-b}{2n+1}}^{\frac{2nb+a}{2n+1}} dt = \frac{n(b-a)}{2n+1} \tag{4.22}$$

olarak bulunur.

2. Adım: 1. Adımda geriye kalan her bir parça tekrar $(2n+1)$ parçaya ayrılır ve 1. Adımda uygulanan yöntem uygulanarak aradaki parçalar atılır.

$$\begin{aligned}
J_{2,1_1} &= \left(\frac{4n^2a+4na+b}{(2n+1)^2}, \frac{4n^2a+4a+2b-a}{(2n+1)^2}\right),\\
&\vdots\\
J_{2,1_n} &= \left(\frac{4n^2a+2nb+2na-b}{(2n+1)^2}, \frac{4n^2a+2nb+2na+a}{(2n+1)^2}\right),\\
&\vdots\\
J_{2,(n+1)_1} &= \left(\frac{4n^2b+2na+2nb+b}{(2n+1)^2}, \frac{4n^2b+2na+2nb+2b-a}{(2n+1)^2}\right),\\
&\vdots\\
J_{2,(n+1)_n} &= \left(\frac{4n^2b+4nb+2a-b}{(2n+1)^2}, \frac{4n^2b+4nb+a}{(2n+1)^2}\right)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

olmak üzere atılan parçaların uzunlukları toplamı;

$$\int_{\frac{4n^2a+4na+b}{(2n+1)^2}}^{\frac{4n^2a+4na+2b-a}{(2n+1)^2}} dt + \cdots + \int_{\frac{4n^2b+4nb+2a-b}{(2n+1)^2}}^{\frac{4n^2b+4nb+a}{(2n+1)^2}} dt = \frac{n(n+1)(b-a)}{(2n+1)^2} \tag{4.24}$$

olarak bulunur.

Bu şekilde tüm adımlar yapılarak devam edilirse;

Birinci adım için,

$$l(\mathbb{V}_1) = \frac{n(b-a)}{2n+1} \tag{4.25}$$

İkinci adım için,

$$l(\mathbb{V}_2) = \frac{n(n+1)(b-a)}{(2n+1)^2} \tag{4.26}$$

Ve üçüncü adım için,

$$l(\mathbb{V}_3) = \frac{n(n+1)^2(b-a)}{(2n+1)^3} \tag{4.27}$$

olmak üzere genel olarak m. adım için,

$$l(\mathbb{V}_m) = \frac{n(n+1)^{m-1}(b-a)}{(2n+1)^m} \tag{4.28}$$

elde edilir. $\mathbb{V}_m$ kümeleri birbirinden ayrık olduğundan;

$$\begin{aligned} l(\mathbb{V}) &= l(\mathbb{V}_1)+l(\mathbb{V}_2)+l(\mathbb{V}_3)+\dots \\ l(\mathbb{V}) &= \frac{(b-a)n}{2n+1}+\frac{(b-a)n(n+1)}{(2n+1)^2}+\frac{(b-a)n(n+1)^2}{(2n+1)^3}+\dots \\ l(\mathbb{V}) &= \frac{(b-a)n}{2n+1}\left(1+\frac{n+1}{2n+1}+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)^2}+\dots\right) \end{aligned} \tag{4.29}$$

yazılır. Elde edilen bu toplamda parantez içindeki toplam sonsuz geometrik seridir. İlk terimi $a=1$ ve ortak çarpanı $r=\dfrac{n+1}{2n+1}$ dir. $\left|\dfrac{n+1}{2n+1}\right|<1$ olduğundan bu toplam;

$$\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\dfrac{n+1}{2n+1}} = \frac{2n+1}{n} \tag{4.30}$$

olmak üzere

$$\ell(\mathbb{V}) = \frac{(b-a)n}{2n+1}.\frac{2n+1}{n} = (b-a) \tag{4.31}$$

bulunur. Buradan

$$\ell(\mathbb{V}) = (b-a) \tag{4.32}$$

ve

$$\ell(\mathfrak{C}) = 0 \tag{4.33}$$

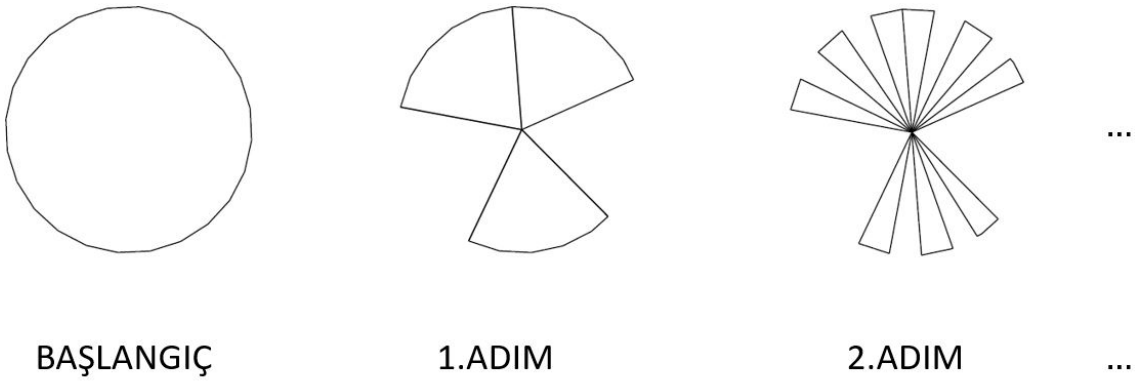
elde edilir.

Sonuç 4.1. *Elde edilen sonuçlardan görüldüğü gibi işlemler eğriler teorisine aktarıldığında da sonuçlar aynı elde edilmiştir ve elde kalan fraktal yapının uzunluğu sıfır olarak bulunmuştur.*

Örnek 4.1.

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 2\pi] &\to S' \\ t &\to \alpha(t) = (cost, sint) \end{aligned} \tag{4.34}$$

fraktal eğrisinin uzunluğunu $n = 5$ parça için bulunuz.



Şekil 4.2 Her bir adımda 5 parçaya ayrılan çember eğrisi

$||\alpha'(t)|| = ||(-sint)^2 + (cost)^2|| = 1$ dir. Bu eğrinin uzunluğu;

$$\int_0^{2\pi} ||\alpha'(t)|| dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \tag{4.35}$$

Eğri 5 parçaya ayrılır. İlk ve son parçalar kalacak şekilde bir parça bırakılıp bir parça atılır. Birinci adımda atılan parçaların uzunlukları toplamı;

$$\ell(\mathbb{V}_1) = \int_{\frac{2\pi}{5}}^{\frac{4\pi}{5}} dt + \int_{\frac{6\pi}{5}}^{\frac{8\pi}{5}} dt = \frac{4\pi}{5} \tag{4.36}$$

şeklinde elde edilir. İkinci adımda atılan parçaların uzunlukları toplamı;

$$\ell(\mathbb{V}_2) = \int_{\frac{2\pi}{25}}^{\frac{4\pi}{25}} dt + \cdots + \int_{\frac{46\pi}{25}}^{\frac{48\pi}{25}} dt = 6\left(\frac{2\pi}{25}\right) = \frac{12\pi}{25} \tag{4.37}$$

şeklinde ve üçüncü adımda atılan parçaların uzunlukları toplamı;

$$\ell(\mathbb{V}_3) = \int_{\frac{2\pi}{125}}^{\frac{4\pi}{125}} dt + \cdots + \int_{\frac{246\pi}{125}}^{\frac{248\pi}{125}} dt = 18\left(\frac{2\pi}{125}\right) = \frac{36\pi}{125} \tag{4.38}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde diğer adımlarda yapıldığında;

$$\ell(\mathbb{V}) = \ell(\mathbb{V}_1) + \ell(\mathbb{V}_2) + \ell(\mathbb{V}_3) + \cdots = \frac{4\pi}{5} + \frac{12\pi}{25} + \frac{36\pi}{125} + \ldots \tag{4.39}$$

şeklinde sonsuz geometrik bir seri elde edilir. Bu serinin toplamına bakıldığında, ilk terimi $\frac{4\pi}{5}$ ve ortak çarpanı $r = \frac{3}{5}$ dir. $\left|\frac{3}{5}\right| < 1$ olduğundan bu toplam;

$$\ell(\mathbb{V}) = \frac{\frac{4\pi}{5}}{1-\frac{3}{5}} = 2\pi \tag{4.40}$$

olarak bulunur. Başlangıçtaki eğrinin uzunluğu da 2π olduğundan atılan parçalar dışında geriye kalan fraktal parçaların uzunlukları toplamı $\ell(\mathfrak{C}) = 0$ bulunur.

Sonuç 4.2. *Uzunluk* $[0,1]$ *aralığı için genelleştirilmiş Kantor kümelerinde olduğu gibi* $[a,b]$ *aralığına genelleştirilmiş Kantor kümelerinde de sıfır olarak bulunur. Dolayısıyla uzunluk bu fraktal yapı için karakteristik bir özellik belirtmemektedir. Kantor yapılarında karakteristik özelliği belirleyen boyut kavramıdır.*

4.1.2 $\mathbb{R}$ Kümesinin Alt Kümesinde Tekrarlı Fonksiyon Sistemleri

Tanım 4.3. $[a,b]$ aralığında genelleştirilmiş olan Kantor kümesinin her bir adımındaki parçaları tekrarlı fonksiyon sistemleri ile elde edilir.

$$\begin{aligned} F_i &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to F_i(x) = r_i x + (1-r_i)\alpha_i \end{aligned} \tag{4.41}$$

olmak üzere her $r_i = r = \dfrac{1}{2n+1}$ ve i her bir adımdaki parça sayısıdır. İlk adım için bu TFS;

1. Adım:

1. Parça İçin: $\alpha_1 = a$ ve $r = \dfrac{1}{2n+1}$ olmak üzere

$$F_{1,1}(x) = \frac{1}{2n+1}.x + \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)a = \frac{x+2na}{2n+1} \tag{4.42}$$

şeklindedir.

$$\vdots$$

(n+1). Parça İçin: $\alpha_{(n+1)} = b$ ve $r = \dfrac{1}{2n+1}$ olmak üzere

$$F_{1,(n+1)}(x) = \frac{1}{2n+1}.x + \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)b = \frac{x+2nb}{2n+1} \tag{4.43}$$

şeklindedir. İkinci adım için TFS;

2. Adım:

1. Parça İçin: $\alpha_1 = a$ ve $r = \dfrac{1}{(2n+1)}$ olmak üzere

$$F_{2,1}(x) = F(F_{1,1}(x)) = \frac{1}{(2n+1)}.\frac{x+2na}{2n+1} + \left(\frac{2n}{(2n+1)}\right)a = \frac{x+2na}{(2n+1)^2} + \frac{2na}{(2n+1)} \tag{4.44}$$

şeklindedir.

$$\vdots$$

$\underline{(n+1)^2}$**. Parça İçin:** $\alpha_{(n+1)^2} = b$ ve $r = \dfrac{1}{(2n+1)}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} F_{2,(n+1)^2}(x) = F(F_{1,(n+1)}(x)) &= \frac{1}{(2n+1)}.\frac{x+2nb}{2n+1} + \left(\frac{2n}{(2n+1)}\right) b \\ &= \frac{x+2nb}{(2n+1)^2} + \frac{2nb}{(2n+1)} \end{aligned} \tag{4.45}$$

şeklinde elde edilir.

Diğer adımlarda benzer işlemler yapılarak bulunabilir.

4.1.3 $\mathbb{R}$ Kümesinin Alt Kümesinde Boyut

Tanım 4.4. Her bir adımdaki $(n+1)^m$ tane parçanın uzunluğu $\dfrac{1}{(2n+1)^m}$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$ adım sayısı) olmak üzere; $[a, b]$ aralığı için genelleştirilmiş Kantor kümesinin boyut hesabı;

$$d_{(2n+1)} = \lim_{m\to 0} \frac{\log(n+1)^m}{log\left(\dfrac{1}{\frac{1}{(2n+1)^m}}\right)} = \frac{\log(n+1)}{log(2n+1)} \tag{4.46}$$

şeklinde bulunur.

Sonuç 4.3. *Boyut hesaplaması aralığa değil parça sayısına ve parça sayısının küçülme(büyüme) oranına bağlı olduğundan* $[0, 1]$ *aralığında tanımlanan genelleştirilmiş Kantor kümesinin boyutu ile* $[a, b]$ *aralığında hesaplanan boyut aynı sonucu vermektedir.*

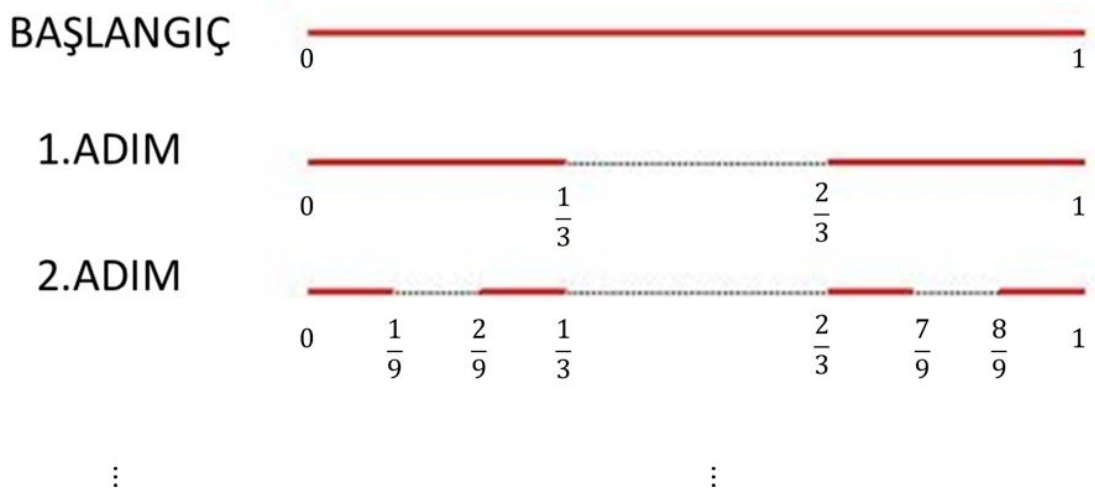
Sonuç 4.4. $[a, b]$ *aralığı için oluşturulan yapı için öncelikle uzunluk hesabı yapıldı. Çünkü uzunluk fraktallar için karakteristik bir özellik belirtmemekteydi. Yapılan işlemler sonucunda elde edilen yapı için de karakteristik bir özellik belirtmediği görüldü. Daha sonra fraktallar için önemli bir özellik olan kendine benzerlikten yararlanarak tekrarlı fonksiyon sistemleri oluşturuldu. Son olarak da boyutuna bakıldığında; topolojik boyutu bu aralık noktalardan oluştuğu için 0 dir, fakat fraktal boyutuna bakıldığında sıfırdan büyük birden küçük bir değer olduğu görülür. Yani fraktal boyutu bir tam sayı değildir ve topolojik boyuttan büyüktür. Dolayısıyla tanımlanmış olan bu yapı Mandelbrot'un tanımlamış olduğu fraktal küme özelliklerinin hepsini sağlamaktadır. Bu yüzden bu yapı genelleştirilmiş Kantor kümesine yeni bir yaklaşım olarak düşünülebilir.*

Örnek 4.2. Üçlü Kantor kümesini;

a.) tanımlayarak,

b.) TFS,

c.) boyutunu bulunuz.



Şekil 4.3 Üçlü Kantor kümesi

a.) Üçlü Kantor kümesi $\mathbb{R}$ sayılar kümesinin bir alt kümesidir. $C_0 = [0,1]$ alınır ve daha sonra bu aralık 3 eşit parçaya ayrılarak ortadaki parça atılır ve birinci adım için geriye $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$ ve $C_2 = \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ aralıkları kalır.

Diğer adımlarda da elde kalan her parça 3 eşit parçaya ayrılır ve ortadaki parçalar atılır. Bu işlem sonsuza kadar devam ettiğinde $C_0, C_1, C_2, \ldots$ azalan dizisi elde edilir. Bu dizinin $n \to \infty$ için limiti C ile gösterilirse;

C Üçlü Kantor kümesi

$$C = \cap_{k=1}^{\infty} C_m \tag{4.47}$$

şeklinde elde edilir.

b.) TFS;

$$\begin{aligned} &F_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &\quad x \to F_i(x) = r_i x + (1 - r_i)\alpha_i, i \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{4.48}$$

şeklinde tanımlanmıştı.

1. Adım:

1. Parça İçin: $\alpha_1 = 0$ ve $r = \frac{1}{3}$ olmak üzere

$$F_{1,1}(1) = \frac{1}{3}.x = \frac{x}{3} \tag{4.49}$$

2. Parça İçin: $\alpha_2 = 1$ ve $r = \frac{1}{3}$ olmak üzere

$$F_{1,2}(1) = \frac{1}{3}.x + \frac{2}{3}.1 = \frac{x+2}{3} \tag{4.50}$$

şeklindedir.

2. Adım:

1. Parça İçin: $\alpha_1 = 0$ ve $r = \frac{1}{3}$ olmak üzere

$$F_{2,1}(1) = F(F_{1,1}(x)) = \frac{1}{3}.\frac{x}{3} = \frac{x}{9} \tag{4.51}$$

2. Parça İçin: $\alpha_2 = \frac{1}{3}$ ve $r = \frac{1}{3}$ olmak üzere

$$F_{2,2}(1) = F(F_{1,1}) = \frac{1}{3}.\frac{x}{3} + \frac{2}{3}.\frac{1}{3} = \frac{x+2}{9} \tag{4.52}$$

3. Parça İçin: $\alpha_3 = \frac{2}{3}$ ve $r = \frac{1}{3}$ olmak üzere

$$F_{2,3}(1) = F(F_{1,2}) = \frac{1}{3}.\frac{(x+2)}{3} + \frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{x+6}{9} \tag{4.53}$$

4. Parça İçin: $\alpha_4 = 1$ ve $r = \frac{1}{3}$ olmak üzere

$$F_{2,4}(1) \quad = \quad F(F_{1,2}) = \frac{1}{3}.\frac{(x+2)}{3} + \frac{2}{3}.1 = \frac{(x+8)}{9} \tag{4.54}$$

şeklinde elde edilir. Diğer adımlarda benzer işlemler yapılarak elde edilir.

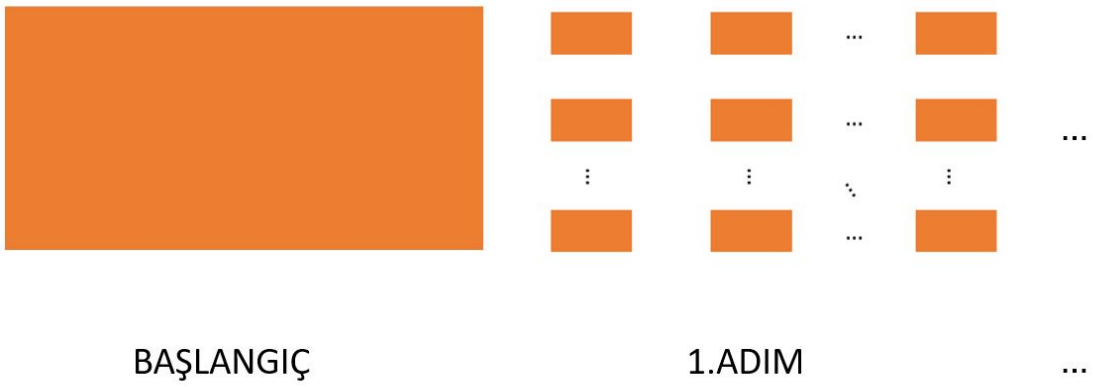
c.) Her bir adımdaki 2^m tane parçanın uzunluğu $\frac{1}{3^m}$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$ adım sayısı) olmak üzere üçlü Kantor kümesinin boyutu;

$$d_{(C)} = \lim_{m\to 0} \frac{\log 2^m}{log\left(\frac{1}{\frac{1}{(3)^m}}\right)} = \frac{\log 2}{log 3} = 0,6309 \tag{4.55}$$

olarak bulunur.

4.2 $\mathbb{R}^2$ Kümesinin Alt Kümesi

Tanım 4.5. $\mathbb{R}^2$ kümesinin alt kümesi için genelleştirilmiş Kantor fraktal yapısı Şekil 4.4 de görülmektedir.



Şekil 4.4 $[a, b] \times [c, d]$ için $(2n + 1)$ parçaya ayrılan fraktal yapı

Başlangıç: Reel sayıların $[a, b] \times [c, d]$ aralıklarını oluşturduğu bölge $\mathbb{C}_0^2$ ile gösterilir.

1. Adım: $\mathbb{C}_0^2$ bölgenin eksenleri $(2n + 1)$ parçaya ayrılır. Şekilde de görüldüğü gibi $(3n^2 + 2n)$ tane alanı atılır. Geriye alanları $\frac{(b-a)(d-c)}{(2n+1)^2}$ olan $(n+1)^2$ tane kare kalır;

$$
\begin{aligned}
I_{1,1} &= \left[a, \frac{2na+b}{2n+1}\right] \times \left[c, \frac{2nc+d}{2n+1}\right], \\
&\vdots \\
I_{1,(n+1)^2} &= \left[\frac{2nb+a}{2n+1}, b\right] \times \left[\frac{2nd+c}{2n+1}, d\right]
\end{aligned} \tag{4.56}
$$

olmak üzere;

$$
\mathfrak{C}_1^2 = I_{1,1} \cup I_{1,2} \cup \cdots \cup I_{1,(n+1)^2} \tag{4.57}
$$

şeklinde yazılır.

2. Adım: $\mathfrak{C}_1^2$ bölgesindeki her bir alanın eksenleri tekrar (2n+1) parçaya ayrılarak 1. Adımda uygulanan yöntem uygulanırsa;
her bir alandan $3n^2+2n$ tane parça atılmak üzere toplam $(3n^2+2n)(n+1)^2$ parça atılır ve geriye her birinin alanı $\dfrac{(b-a)(d-c)}{(2n+1)^4}$ olmak üzere $(n+1)^4$ tane parça kalır.

$$
\begin{aligned}
I_{2,1} &= \left[a, \frac{4na(n+1)+b}{(2n+1)^2}\right] \times \left[c, \frac{4nc(n+1)+d}{(2n+1)^2}\right], \\
&\vdots \\
I_{2,(n+1)^4} &= \left[\frac{4nb(n+1)-a}{(2n+1)^2}, b\right] \times \left[\frac{4nd(n+1)-c}{(2n+1)^2}, d\right]
\end{aligned} \tag{4.58}
$$

elde edilir. Buradan

$$
\mathfrak{C}_2^2 = I_{2,1} \cup I_{2,2} \cup \cdots \cup I_{2,(n+1)^4} \tag{4.59}
$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse genel olarak m. adımda atılan alanlar $(3n^2+2n).(n+1)^{2(m-1)}$ tanedir ve

$$
\mathbb{V}_m^2 = J_{m,1} \cup \cdots \cup J_{m,(3n^2+2n).(n+1)^2} = \cup_{k=1}^{(3n^2+2n).(n+1)^{2(m-1)}} J_{m,k} \tag{4.60}
$$

ile gösterilir. Kalan alanlar ise $(n+1)^{(2m)}$ tanedir.

$$
\mathfrak{C}_m^2 = I_{m,1} \cup \cdots \cup I_{m,(n+1)^{2m}} = \cup_{k=1}^{(n+1)^{2m}} J_{m,k} \tag{4.61}
$$

şeklinde gösterilir. Buradan;

$$
\mathbb{V}^2 = \cup_{k=1}^{\infty} \mathbb{V}_m^2 = \mathbb{V}_1^2 \cup \mathbb{V}_2^2 \cup \ldots \tag{4.62}
$$

ve

$$\mathfrak{C}^2 \quad = \quad \cap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{C}_m^2 = \mathfrak{C}_1^2 \cap \mathfrak{C}_2^2 \cap \ldots \tag{4.63}$$

şeklindedir. $\mathbb{V}^2$ atılan alanların hepsidir; $\mathfrak{C}^2$ geriye kalan genelleştirilmiş Kantor yapıdır. Tanım gereğince,

$$\mathbb{V}^2 \cup \mathfrak{C}^2 \quad = \quad [a,b] \times [c,d] \tag{4.64}$$

ve

$$\mathbb{V}^2 \cap \mathfrak{C}^2 \quad = \quad \emptyset \tag{4.65}$$

yazılır.

Elde edilen parçaların alanları hesaplanırsa:
Parçaların alanları hesaplanabilmesi için öncelikle atılan bölgelerin alanları hesaplanır. Birinci adım için,

$$A(\mathbb{V}_1^2) = \frac{(b-a)(d-c)(3n^2+2n)}{(2n+1)^2} \tag{4.66}$$

İkinci adım için,

$$A(\mathbb{V}_2^2) = \frac{(b-a)(d-c)(3n^2+2n)(n+1)^2}{(2n+1)^4} \tag{4.67}$$

Ve üçüncü adım için,

$$A(\mathbb{V}_3^2) = \frac{(b-a)(d-c)(3n^2+2n)(n+1)^4}{(2n+1)^6} \tag{4.68}$$

olmak üzere m. adımda,

$$A(\mathbb{V}_m^2) = \frac{(b-a)(d-c)(3n^2+2n)(n+1)^{(2m-2)}}{(2n+1)^{2m}} \tag{4.69}$$

elde edilir. $\mathbb{V}_m^2$ kümeleri birbirinden ayrık olduğundan,

$$\begin{aligned} A(\mathbb{V}^2) &= A(\mathbb{V}_1^2)+A(\mathbb{V}_2^2)+A(\mathbb{V}_3^2)+\dots \\ A(\mathbb{V}^2) &= \frac{(b-a)(d-c)(3n^2+2n)}{(2n+1)^2}+\frac{(b-a)(d-c)(3n^2+2n)(n+1)^2}{(2n+1)^4} \\ &+ \frac{(b-a)(d-c)(3n^2+2n)(n+1)^4}{(2n+1)^6}+\dots \\ A(\mathbb{V}^2) &= \frac{(b-a)(d-c)(3n^2+2n)}{(2n+1)^2}\left[1+\frac{(n+1)^2}{(2n+1)^2}+\frac{(n+1)^4}{(2n+1)^4}+\dots\right] \end{aligned} \tag{4.70}$$

yazılır. Elde edilen bu toplamda parantez içindeki toplam sonsuz geometrik seridir. İlk terimi $a=1$ ve ortak çarpanı $r=\frac{(n+1)^2}{(2n+1)^2}$ dir. $\left|\frac{(n+1)^2}{(2n+1)^2}\right|<1$ olduğundan bu toplam;

$$\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{(n+1)^2}{(2n+1)^2}}=\frac{(2n+1)^2}{3n^2+2n} \tag{4.71}$$

ve

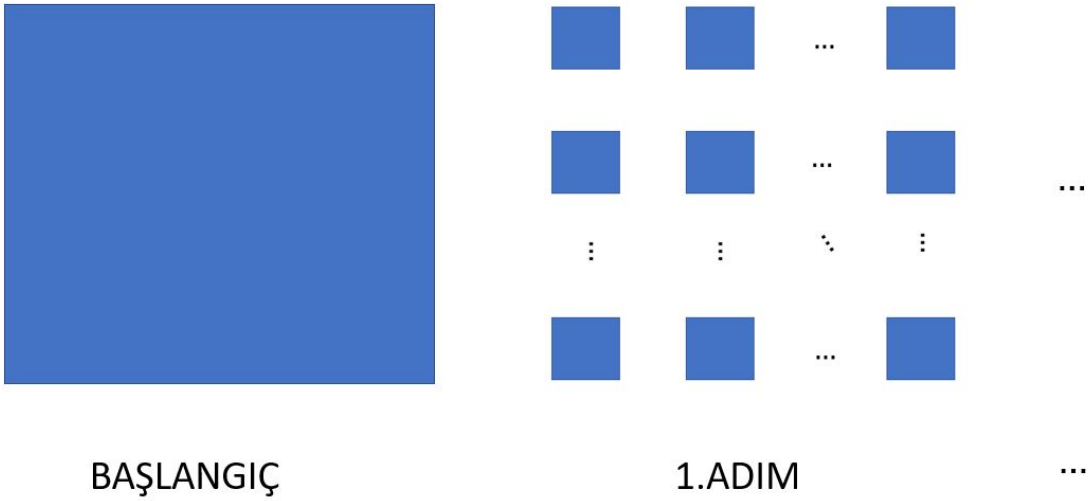
$$A(\mathbb{V}^2)=\frac{(b-a)(d-c).(3n^2+2n)}{(2n+1)^2}.\frac{(2n+1)^2}{(3n^2+2n)}=(b-a)(d-c) \tag{4.72}$$

bulunur. $A([a,b]\times[c,d])=(b-a)(d-c)$ elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathbb{V}^2\cup\mathfrak{C}^2 &= [a,b]\times[c,d] \\ A(\mathbb{V}^2\cup\mathfrak{C}^2) &= A(\mathbb{V}^2)+A(\mathfrak{C}^2)+A(\mathbb{V}^2\cap\mathfrak{C}^2) \\ (b-a)(d-c) &= (b-a)(d-c)+A(\mathfrak{C}^2)+0 \end{aligned} \tag{4.73}$$

ve buradan $A(\mathbb{C}^2)=0$ bulunur.

Özel Durum: Özel olarak yukarıda yapılan işlemler Şekil 4.5 de görüldüğü gibi $[a,b]\times[a,b]$ aralığında incelendiğinde de elde kalan fraktal yapıdaki karelerin alanları toplamı sıfır olarak bulunur. Sonuçlar hem $[a,b]\times[c,d]$ hem de $[a,b]\times[a,b]$ için aynı çıktığından bundan sonraki işlemler $[a,b]\times[a,b]$ üzerinden yapılmıştır.



Şekil 4.5 $[a,b]\times[a,b]$ için $(2n+1)$ bölüme ayrılarak oluşan fraktal yapı

4.2.1 Yüzey Üzerinde İnceleme

Tanım 4.6.

$$\begin{aligned}\phi : [a,b]\times[c,d] &\to E^3 \\ (u,v) &\to \phi(u,v)\end{aligned} \tag{4.74}$$

yüzeyi alınırsa, tanımlanan yüzeyin alanı;

$$A = \int_a^b \int_c^d (\sqrt{EG-F^2})dudv \tag{4.75}$$

ile bulunur. Özel olarak $\sqrt{EG-F^2} = ||\phi_u \times \phi_v|| = 1$ olsun. Yani yüzeyin normal vektörünün boyu 1 olsun. O halde alan;

$$A = \int_a^b \int_c^d dudv = (d-c)(b-a) \tag{4.76}$$

bulunur.

1. Adım: Bu yüzey $(2n+1)$ parçaya ayrılıp, ilk ve son parça kalacak şekilde bir parça

alınıp bir parça atılırsa atılan parçaların alanları;

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{\frac{2na+2b-a}{2n+1}}^{\frac{2na+b}{2n+1}} \int_{\frac{2nc+2d-c}{2n+1}}^{\frac{2nc+d}{2n+1}} dudv + \dots \\ &+ \int_{\frac{2nb+a}{2n+1}}^{\frac{2nb-b+2a}{2n+1}} \int_{\frac{2nd+c}{2n+1}}^{\frac{2nd-d+2c}{2n+1}} dudv \end{aligned} \tag{4.77}$$

olmak üzere;

$$A_1 = (3n^2+2n)\left[\frac{(b-a)(d-c)}{(2n+1)^2}\right] \tag{4.78}$$

şeklinde bulunur.

2. Adım: 1. Adımdaki yüzey tekrar $(2n+1)$ parçaya ayrılıp, ilk ve son parça kalacak şekilde bir parça alınıp bir parça atılırsa atılan parçaların alanları;

$$A_2 = \int_{\frac{4n^2a+4na+2b-a}{(2n+1)^2}}^{\frac{4n^2a+4na+b}{(2n+1)^2}} \int_{\frac{4n^2c+4nc+2d-c}{(2n+1)^2}}^{\frac{4n^2c+4nc+d}{(2n+1)^2}} dudv + \dots \tag{4.79}$$

$$+ \int_{\frac{4n^2b+4nb+a}{(2n+1)^2}}^{\frac{4n^2b+4nb+2a-b}{(2n+1)^2}} \int_{\frac{4n^2d+4nd+c}{(2n+1)^2}}^{\frac{4n^2d+4nd+2c-d}{(2n+1)^2}} dudv$$

ve

$$A_2 = (3n^2+2n)(n+1)^2\left[\frac{(b-a)(d-c)}{(2n+1)^4}\right] \tag{4.80}$$

elde edilir. Bu şekilde sonsuza kadar devam edilirse atılan yüzeylerin alanları;

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + \dots \\ A &= (3n^2+2n)\left[\frac{(b-a)(d-c)}{(2n+1)^2}\right] + (3n^2+2n)(n+1)^2\left[\frac{(b-a)(d-c)}{(2n+1)^4}\right] + \dots \end{aligned} \tag{4.81}$$

şeklinde sonsuz geometrik bir seri elde edilir.

İlk terimi $a = (3n^2+2n)\left[\frac{(b-a)(d-c)}{(2n+1)^2}\right]$ ve ortak çarpanı $r = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)^2}$ dir. $\left|\frac{(n+1)^2}{(2n+1)^2}\right| < 1$ olduğundan bu toplam;

$$A = (b-a)(c-d) \tag{4.82}$$

olarak bulunur. Başlangıçta tanımlanan yüzeyin alanına eşit çıktığı için elde kalan fraktal yüzeylerin alanı 0 olarak bulunur.

Sonuç 4.5. *Elde edilen sonuçlardan da görüldüğü gibi işlemler yüzeyler teorisine aktarıldığında da aynı sonuçlar elde edilmiş ve elde kalan fraktal yapının alanı sıfır olarak bulunmuştur.*

Sonuç 4.6. *Hem $[a,b]\times[c,d]$ aralığı ile oluşturulan fraktal yapı hem de $[a,b]\times[a,b]$ aralığı ile oluşturulan fraktal yapı için alan sıfır olarak bulunmuştur. $[a,b]$ aralığında hesaplanan uzunluk hesabı gibi $[a,b]\times[c,d]$ ve $[a,b]\times[a,b]$ aralıklarının oluşturduğu bölgelerinde hesaplanan alan fraktallar için karakteristik bir özellik belirtmemektedir.*

4.2.2 $\mathbb{R}^2$ Kümesinin Alt Kümesinde Tekrarlı Fonksiyon Sistemleri

Tanım 4.7.

$$F_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \tag{4.83}$$

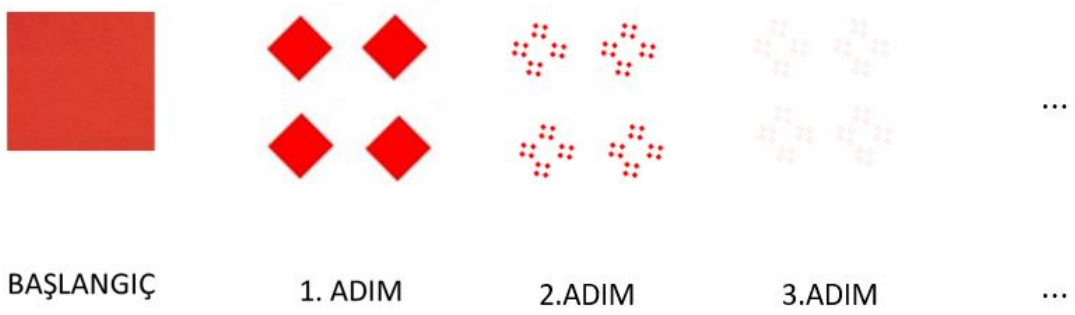
olmak üzere birinci adımda; $1 \le i \le (n+1)^2$, $\theta = 0$ için $F = \{F_1, F_2, \dots, F_{(n+1)^2}\}$ olmak

üzere TFS;

$$
\begin{aligned}
F_1\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{b-a}{2n+1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \\
F_2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{b-a}{2n+1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2na+2b-a}{2n+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \\
&\vdots \\
F_r\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{b-a}{2n+1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2na+2b-a}{2n+1} \end{bmatrix}, \\
&\vdots \\
F_{(n+1)^2}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{b-a}{2n+1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2nb+a}{2n+1} \\ \frac{2nb+a}{2n+1} \end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{4.84}
$$

şeklinde bulunur benzer şekilde birinci adımda elde edilenler ikinci adımda kullanılarak diğer adımlar elde edilir.

Örnek 4.3. Kantor karesinin $\theta = \frac{\pi}{4}$ dönmeli TFS bulunuz.



Şekil 4.6 $\theta = \frac{\pi}{4}$ dönmeli Kantor karesi

Birinci adım için; $F_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $1 \leq i \leq 4$, $cos\theta = cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $sin\theta = sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olmak üzere $F = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ tekrarlı fonksiyon sistemi;

$$
\begin{aligned}
F_1\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \\
F_2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \\
F_3\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \\
F_4\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{4.85}
$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde diğer adımlar yapılarak diğer adımların TFS elde edilir.

4.2.3 $\mathbb{R}^2$ Kümesinin Alt Kümesinde Boyut

Tanım 4.8. Her bir adımda $(n+1)^{2m}$ tane kare vardır. Bu karelerin her birinin kenarları bütünün $\frac{1}{(2n+1)^m}$ kadardır. Dolayısıyla küçülme oranı $\frac{1}{(2n+1)^m}$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$ adım sayısı) olmak üzere $[a,b]\times[a,b]$ aralığı için genelleştirilmiş Kantor kümesinin boyut hesabı;

$$
d_{(2n+1)} = \lim_{m\to 0} \frac{\log(n+1)^{2m}}{log\left(\frac{1}{\frac{1}{(2n+1)^m}}\right)} = \frac{2\log(n+1)}{log(2n+1)} \tag{4.86}
$$

şeklinde bulunur.

Sonuç 4.7. *İşlemler başlangıçta $[a,b]\times[c,d]$ aralığının oluşturduğu bölge ile başlayıp daha sonradan özel hali olan $[a,b]\times[a,b]$ aralığının oluşturduğu bölge ile devam etmiştir. Boyut hesaplamasında her ne kadar $[a,b]\times[a,b]$ aralığının oluşturduğu bölge kullanılsa da boyut hesabı aralık ile ilgili değil tekrar sayısı ve küçülme oranı ile ilgili olduğu için $[a,b]\times[c,d]$ bölgesinin oluşturduğu bölge içinde aynı sonuç çıkacaktır.*

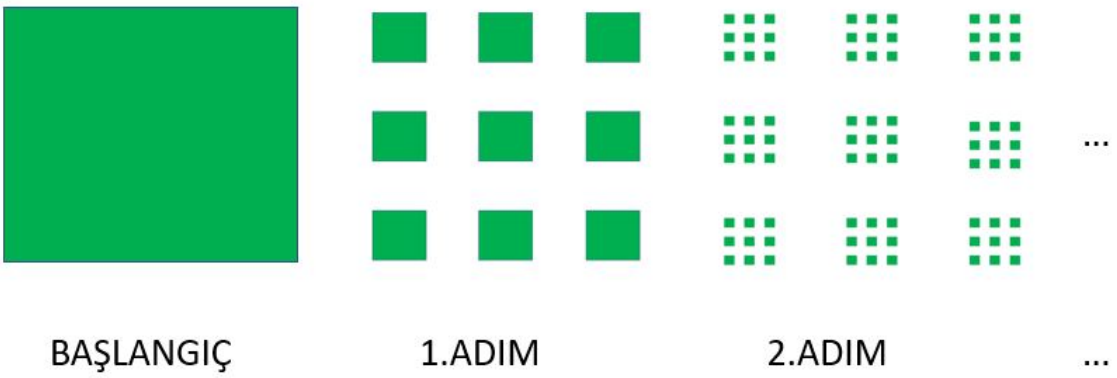
Sonuç 4.8. *$[a,b]\times[c,d]$ ve $[a,b]\times[a,b]$ için oluşturulan yapılarda öncelikle alan hesabı yapıldı. Çünkü alan fraktallar için karakteristik bir özellik belirtmemekteydi. Yapılan işlemler sonucunda elde edilen yapı için de karakteristik bir özellik belirtmediği görüldü. Daha sonra fraktallar için önemli bir özellik olan kendine benzerlikten yararlanarak tekrarlı fonksiyon sistemleri oluşturuldu. Son olarak da boyutuna bakıldığında; topolojik boyutu 1 dir, fakat fraktal boyutuna bakıldığında birden büyük ikiden küçük bir değer olduğu görülür. Yani fraktal boyutu bir tam sayı değildir ve topolojik boyuttan büyüktür. Dolayısıyla tanımlanmış olan bu yapı Mandelbrot'un tanımlamış olduğu fraktal küme özelliklerinin hepsini sağlamaktadır. Bu yüzden bu yapı $\mathbb{R}^2$ kümesinde genelleştirilmiş Kantor kümesi olarak düşünülebilir.*

Örnek 4.4. $[0,5]\times[0,5]$ bölgesini 5 parçaya ayırarak oluşturulan fraktal yapı için;

a.) Alanı hesaplayınız.

b.) Tekrarlı fonksiyon sistemlerini oluşturunuz.

c.) Boyutunu bulunuz.



Şekil 4.7 $[0,5]\times[0,5]$ bölgesini 5 parçaya ayırarak oluşan fraktal yapı

a.) **Başlangıç:** Reel sayıların $[0,5]\times[0,5]$ aralıklarını oluşturduğu bölge C_0^2 ile gösterilir.

1. Adım: C_0^2 bölgenin eksenleri 5 parçaya ayrılır. Şekilde de görüldüğü gibi 16 tane

alanı atılır. Geriye alanları $1br^2$ olan 9 tane kare kalır;

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= [0,1]\times[0,1], \\ I_{1,2} &= [0,1]\times[2,3], \\ I_{1,3} &= [0,1]\times[4,5], \\ I_{1,4} &= [2,3]\times[0,1], \\ I_{1,5} &= [2,3]\times[2,3], \\ I_{1,6} &= [2,3]\times[4,5], \\ I_{1,7} &= [4,5]\times[0,1], \\ I_{1,8} &= [4,5]\times[2,3], \\ I_{1,9} &= [4,5]\times[4,5], \end{aligned} \tag{4.87}$$

olmak üzere;

$$C_1^2 = I_{1,1}\cup I_{1,2}\cup\cdots\cup I_{1,9} \tag{4.88}$$

şeklinde yazılır.

2. Adım: C_1^2 bölgesindeki her bir alanın eksenleri tekrar 5 parçaya ayrılarak 1. Adımda uygulanan yöntem uygulanırsa; her bir alandan 16 tane parça atılmak üzere toplam 144 parça atılır ve geriye her birinin alanı $\frac{1}{25}$ olmak üzere 81 tane parça kalır.

$$\begin{aligned} I_{2,1} &= \left[0,\frac{1}{5}\right]\times\left[0,\frac{1}{5}\right], \\ I_{2,2} &= \left[0,\frac{1}{5}\right]\times\left[\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right], \\ &\vdots \\ I_{2,81} &= \left[\frac{24}{25},5\right]\times\left[\frac{24}{25},5\right] \end{aligned} \tag{4.89}$$

elde edilir. Benzer şekilde diğer adımlarda yapılarak sonsuza kadar devam eden bir fraktal yapı oluşturulur.

Elde edilen parçaların alanları hesaplanırsa:
Parçaların alanları hesaplanabilmesi için öncelikle atılan bölgelerin alanları hesaplanır.

$$\begin{aligned} A(V_1^2) &= \frac{5^2.16}{5^2}, \\ A(V_2^2) &= \frac{5^2.16.3^2}{5^4}, \\ A(V_3^2) &= \frac{5^2.16.3^4}{5^6}, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4.90}$$

V_m^2 kümeleri birbirinden ayrık olduğundan,

$$\begin{aligned} A(V^2) &= A(V_1^2)+A(V_2^2)+A(V_3^2)+\dots \\ A(V^2) &= \frac{5^2.16}{5^2}+\frac{5^2.16.3^2}{5^4}+\frac{5^2.163^4}{5^6}+\dots \\ A(V^2) &= \frac{5^2.16}{5^2}\left[1+\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^4}{5^4}+\dots\right] \end{aligned} \tag{4.91}$$

yazılır. Elde edilen bu toplamda parantez içindeki toplam sonsuz geometrik seridir. İlk terimi $a=1$ ve ortak çarpanı $r=\frac{3^2}{5^2}$ dir. $\left|\frac{3^2}{5^2}\right|<1$ olduğundan bu toplam;

$$\begin{aligned} \frac{a}{1-r} &= \frac{1}{1-\frac{3^2}{5^2}}=\frac{5^2}{16} \\ A(V^2) &= \frac{5^2.16}{5^2}.\frac{5^2}{16}=5^2 \end{aligned} \tag{4.92}$$

bulunur. $A([0,5]\times[0,5])=5^2$ olarak bulunur. Dolayısıyla elde kalan fraktal yapının alanları toplamı 0 olarak elde edilir.

b.)

$$F_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \tag{4.93}$$

olmak üzere birinci adımda; $1 \le i \le 3^2$, $\theta = 0$ için $F = \{F_1, F_2, \dots, F_9\}$ olmak üzere

birinci adım için TFS;

$$
\begin{aligned}
F_1\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \\
F_2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
F_3\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
F_4\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \\
F_5\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \\
F_6\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \\
F_7\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \\
F_8\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \\
F_9\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.94}
$$

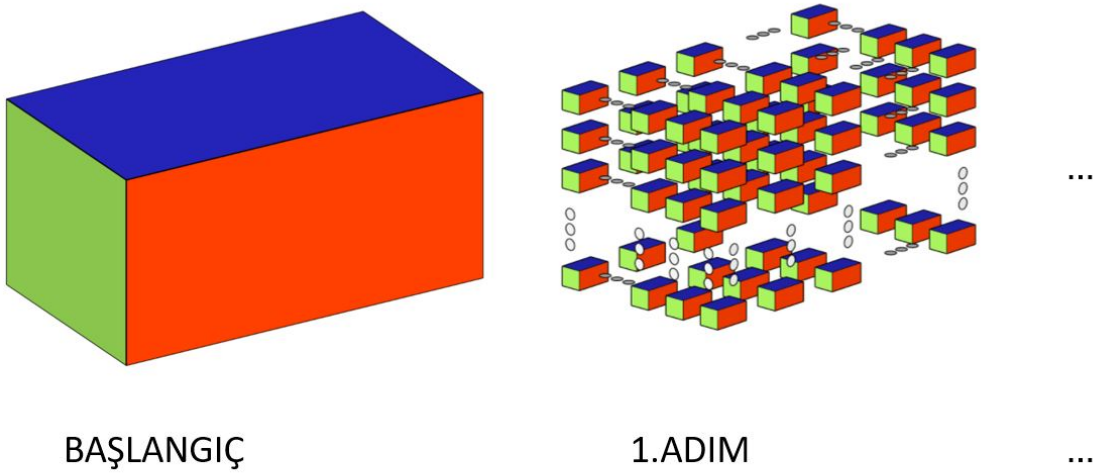
şeklinde bulunur benzer şekilde birinci adımda elde edilenler ikinci ve diğer adımlarda kullanılarak diğer adımlar elde edilir.

c.) Her bir adımdaki 3^{2m} tane bölgenin küçülme oranı $\frac{1}{5^m}$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$ adım sayısı) olmak üzere $[0,5]\times[0,5]$ aralığı için genelleştirilmiş Kantor kümesinin boyut hesabı;

$$
d_5 = \lim_{m\to 0} \frac{\log 3^{2m}}{log\left(\frac{1}{\frac{1}{5^m}}\right)} = \frac{2\log 3}{log 5} = 1,365 \tag{4.95}
$$

olarak bulunur.

4.3 $\mathbb{R}^3$ Kümesinin Alt Kümesi



Şekil 4.8 $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ için $(2n+1)$ parçaya ayrılan fraktal yapı

Tanım 4.9. $\mathbb{R}^3$ kümesinin alt kümesi için genelleştirilmiş Kantor fraktal yapısı Şekil 4.8 de görülmektedir.

Başlangıç: Reel sayıların $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ aralıklarının oluşturduğu bölge $\mathfrak{C}_0^3$ ile gösterilir.

1. Adım: $\mathfrak{C}_0^3$ bölgenin eksenleri $(2n+1)$ parçaya ayrılır. Şekilde de görüldüğü gibi $(2n+1)^3-(n+1)^3 = 7n^3+9n^2+3n$ tane bölge atılır. Geriye hacimleri $\dfrac{(b-a)(d-c)(f-e)}{2n+1^3}$ olan $(n+1)^3$ tane dikdörtgen prizma kalır;

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= \left[a,\frac{2na+b}{2n+1}\right]\times\left[c,\frac{2nc+d}{2n+1}\right]\times\left[e,\frac{2ne+f}{2n+1}\right], \\ &\vdots \\ I_{1,(n+1)^3} &= \left[\frac{2nb+a}{2n+1},b\right]\times\left[\frac{2nd+c}{2n+1},d\right]\times\left[\frac{2nf+e}{2n+1},f\right] \end{aligned} \tag{4.96}$$

olmak üzere;

$$\mathfrak{C}_1^3 = I_{1,1}\cup I_{1,2}\cup\cdots\cup I_{1,(n+1)^3}$$

şeklinde yazılır.

2. Adım: $\mathfrak{C}_1^3$ bölgesindeki her bir bölgenin eksenleri tekrar (2n+1) parçaya ayrılarak 1. Adımda uygulanan yöntem uygulanırsa;
her bir bölgeden $(2n+1)^3-(n+1)^3 = 7n^3+9n^2+3n$ tane bölge atılmak üzere toplam

$(7n^3+9n^2+3n)(n+1)^3$ bölge atılır ve geriye her birinin hacmi $\dfrac{(b-a)(d-c)(f-e)}{(2n+1)^6}$ olmak üzere $(n+1)^6$ tane dikdörtgen prizma kalır.

$$\begin{aligned} I_{2,1} &= \left[a, \frac{4na(n+1)+b}{(2n+1)^2}\right] \times \left[c, \frac{4nc(n+1)+d}{(2n+1)^2}\right] \times \left[e, \frac{4ne(n+1)+f}{(2n+1)^2}\right], \\ &\vdots \\ I_{2,(n+1)^6} &= \left[\frac{4nb(n+1)-a}{(2n+1)^2}, b\right] \times \left[\frac{4nd(n+1)-c}{(2n+1)^2}, d\right] \times \left[\frac{4nf(n+1)-e}{(2n+1)^2}, f\right] \end{aligned} \tag{4.97}$$

elde edilir. Buradan

$$\mathfrak{C}_2^3 = I_{2,1} \cup I_{2,2} \cup \cdots \cup I_{2,(n+1)^6} \tag{4.98}$$

elde edilir.

Bu şekilde devam edilirse genel olarak m. adımda atılan bölgeler

$(7n^3+9n^2+3n).(n+1)^{3(m-1)}$ tanedir ve

$$\mathbb{V}_m^3 = J_{m,1} \cup \cdots \cup J_{m,(7n^3+9n^2+3n).(n+1)^{3(m-1)}} = \cup_{k=1}^{(7n^3+9n^2+3n).(n+1)^{3(m-1)}} J_{m,k} \tag{4.99}$$

ile gösterilir. Kalan bölgeler ise $(n+1)^{(3m)}$ tanedir.

$$\mathfrak{C}_m^3 = I_{m,1} \cup \cdots \cup I_{m,(n+1)^{3m}} = \cup_{k=1}^{(n+1)^{3m}} J_{m,k} \tag{4.100}$$

şeklinde gösterilir. Buradan;

$$\mathbb{V}^3 = \cup_{k=1}^{\infty} \mathbb{V}_m^3 = \mathbb{V}_1^3 \cup \mathbb{V}_2^3 \cup \ldots \tag{4.101}$$

ve

$$\mathfrak{C}^3 = \cap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{C}_m^3 = \mathfrak{C}_1^3 \cap \mathfrak{C}_2^3 \cap \ldots \tag{4.102}$$

şeklindedir. $\mathbb{V}^3$ atılan bölgelerin hepsidir; $\mathfrak{C}^3$ geriye kalan genelleştirilmiş Kantor yapıdır. Tanım gereğince,

$$\mathbb{V}^3 \cup \mathfrak{C}^3 = [a,b] \times [c,d] \times [e,f] \tag{4.103}$$

ve

$$\mathbb{V}^3 \cap \mathfrak{C}^3 = \emptyset \tag{4.104}$$

yazılır.

Elde edilen bölgelerin hacimleri hesaplanırsa:
Bölgelerin hacimleri hesaplanmak için öncelikle atılan bölgelerin hacimleri hesaplanır. Birinci adımdaki şekil için,

$$V(\mathbb{V}_1^3) = \frac{(b-a)(d-c)(f-e)(7n^3+9n^2+3n)}{(2n+1)^3} \tag{4.105}$$

İkinci adımdaki şekil için,

$$V(\mathbb{V}_2^3) = \frac{(b-a)(d-c)(f-e)(7n^3+9n^2+3n)(n+1)^3}{(2n+1)^6} \tag{4.106}$$

Ve üçüncü adımdaki parça için,

$$V(\mathbb{V}_3^3) = \frac{(b-a)(d-c)(f-e)(7n^3+9n^2+3n)(n+1)^6}{(2n+1)^9} \tag{4.107}$$

olmak üzere genel olarak m. adımdaki parçanın hacmi,

$$V(\mathbb{V}_m^3) = \frac{(b-a)(d-c)(f-e)(7n^3+9n^2+3n)(n+1)^{3(m-1)}}{(2n+1)^{3m}} \tag{4.108}$$

şeklinde bulunur. $\mathbb{V}_m^3$ kümeleri birbirinden ayrık olduğundan,

$$\begin{aligned}
V(\mathbb{V}^3) &= V(\mathbb{V}_1^3) + V(\mathbb{V}_2^3) + V(\mathbb{V}_3^3) + \dots \\
V(\mathbb{V}^3) &= \frac{(b-a)(d-c)(f-e)(7n^3+9n^2+3n)}{(2n+1)^3} \\
&+ \frac{(b-a)(d-c)(f-e)(7n^3+9n^2+3n)(n+1)^3}{(2n+1)^6} \\
&+ \frac{(b-a)(d-c)(f-e)(7n^3+9n^2+3n)(n+1)^6}{(2n+1)^9} + \dots \\
V(\mathbb{V}^3) &= \frac{(b-a)(d-c)(f-e)(7n^3+9n^2+3n)}{(2n+1)^3}\left[1 + \frac{(n+1)^3}{(2n+1)^3} + \frac{(n+1)^6}{(2n+1)^6} + \dots\right]
\end{aligned} \tag{4.109}$$

yazılır. Elde edilen bu toplamda parantez içindeki toplam sonsuz geometrik seridir. İlk terimi $a = 1$ ve ortak çarpanı $r = \frac{(n+1)^3}{(2n+1)^3}$ dir.

$\left|\frac{(n+1)^3}{(2n+1)^3}\right| < 1$ olduğundan bu toplam;

$$\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{(n+1)^3}{(2n+1)^3}} \cdot \frac{(2n+1)^3}{(7n^3+9n^2+3n)} \tag{4.110}$$

ve

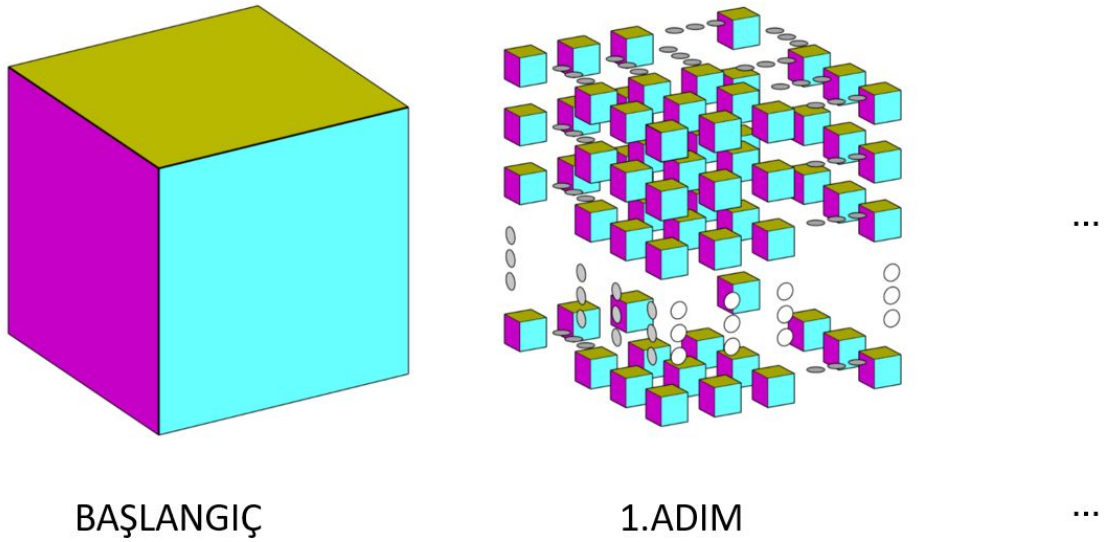
$$\begin{aligned} V(\mathbb{V}^3) &= \frac{(b-a)(d-c)(f-e)(7n^3+9n^2+3n)}{(2n+1)^3} \cdot \frac{(2n+1)^3}{(7n^3+9n^2+3n)} \\ &= (b-a)(d-c)(f-e) \end{aligned} \tag{4.111}$$

bulunur. $V([a,b]\times[c,d]\times[e,f]) = (b-a)(d-c)(f-e)$ elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathbb{V}^3 \cup \mathfrak{C}^3 &= [a,b]\times[c,d]\times[e,f], \\ V(\mathbb{V}^3 \cup \mathfrak{C}^3) &= V(\mathbb{V}^3) + V(\mathfrak{C}^3) + V(\mathbb{V}^3 \cap \mathfrak{C}^3), \\ (b-a)(d-c)(f-e) &= (b-a)(d-c)(f-e) + V(\mathfrak{C}^3) + 0 \end{aligned} \tag{4.112}$$

ve buradan $V(\mathfrak{C}^3) = 0$ bulunur.

Özel Durum: Özel olarak yukarıda yapılan işlemler Şekil 4.9 de görüldüğü gibi



Şekil 4.9 $[a,b]\times[a,b]\times[a,b]$ için $(2n+1)$ parçaya ayrılan fraktal yapı

$[a,b]\times[a,b]\times[a,b]$ için incelendiğinde de elde kalan fraktal yapıdaki küplerin hacimleri toplamı sıfır olarak bulunur. Sonuçlar hem $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ hem de $[a,b]\times[a,b]\times[a,b]$ için aynı çıktığından bundan sonraki işlemler $[a,b]\times[a,b]$ üzerinden yapılmıştır.

Sonuç 4.9. *Uzunluk ve alan hesaplamalarında olduğu gibi hacim hesaplamasında da hem* $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ *hem de* $[a,b]\times[a,b]\times[a,b]$ *için oluşturduğu bölgelerin hacimleri sıfır elde edilir. Dolayısıyla belli oranda azalarak sonsuza doğru giden yapılarda uzunluk, alan ve hacim karakteristik bir özellik belirtmemektedir.*

4.3.1 $\mathbb{R}^3$ Kümesinin Alt Kümesinde Tekrarlı Fonksiyon Sistemleri

Tanım 4.10.

$$F_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \tag{4.113}$$

olmak üzere birinci adımda; $1 \le i \le (n+1)^3$, $\theta = 0$ için toplam $(n+1)^3$ tane bölge olmak üzere $F = \{F_1, F_2, \ldots, F_{(n+1)^3}\}$ için TFS;

$$\begin{aligned}
F_1\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \frac{b-a}{2n+1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \\
F_2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \frac{b-a}{2n+1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2na+2b-a}{2n+1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
&\vdots \\
F_r\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \frac{b-a}{2n+1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2na+2b-a}{2n+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.114}$$

$$
\begin{aligned}
F_m \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \frac{b-a}{2n+1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{2na+2b-a}{2n+1} \end{bmatrix}, \\
&\vdots \\
F_{(n+1)^3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \frac{b-a}{2n+1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{2nb+a}{2n+1} \\ \dfrac{2nb+a}{2n+1} \\ \dfrac{2nb+a}{2n+1} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.115}
$$

şeklinde bulunur benzer şekilde birinci adımda elde edilenler ikinci adımda kullanılarak diğer adımlar elde edilir.

$\mathbb{R}^3$ Kümesi Üzerinde Tekrarlı Fonksiyon Sistemlerinde Dönme

Tanım 4.11.

$$R(n,\theta) = I_3 + sin\theta N + (1-cos\theta)N^2 \tag{4.116}$$

Olin-Rodrigues dönme formülü kullanılır. $R(n,\theta)$ matrisine büzülme ya da genişleme dönüşümü uygulanır; büzülme katsayısı r olmak üzere $R(n,\theta)^{'} = rR(n,\theta)$ için

$$R(n,\theta)^{'} = r[I_3 + sin\theta N + (1-cos\theta)N^2] \tag{4.117}$$

elde edilir. Daha sonra $R(n,\theta)^{'}$ dönüşümlerine

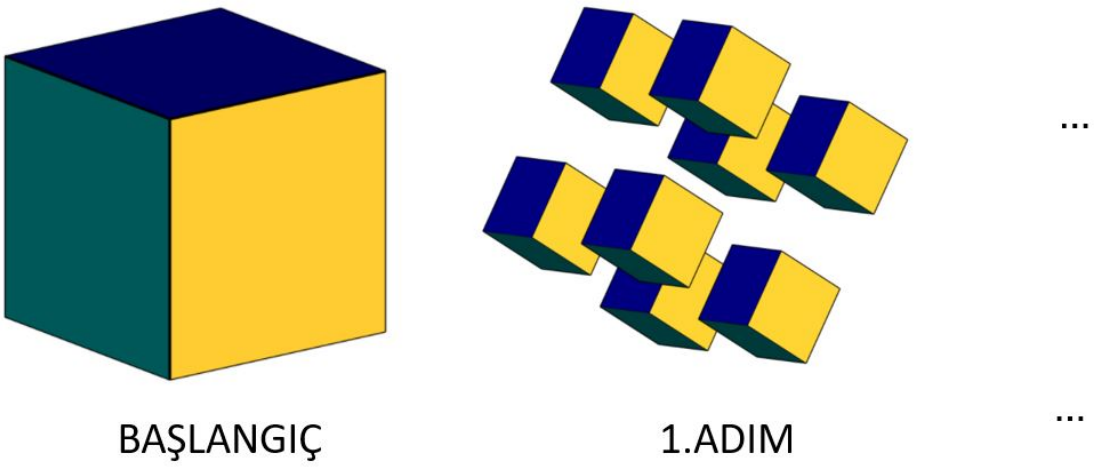
$$H = \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \end{bmatrix} \tag{4.118}$$

öteleme matrisi uygulanır;

$$R(n,\theta)^{''} = r[I_3 + sin\theta N + (1-cos\theta)N^2] + H \tag{4.119}$$

elde edilir.

Örnek 4.5. x ekseninde $\theta = \frac{\pi}{3}$ dönmeli Kantor küpünün TFS bulunuz.



Şekil 4.10 Kantor küpünde dönme

$$n = [1,0,0], N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere dönme matrisli TFS;

$$\begin{aligned} R\left(n, \frac{\pi}{3}\right) &= I_3 + \left(sin\frac{\pi}{3}\right)N + \left(1 - cos\frac{\pi}{3}\right)N^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + sin\frac{\pi}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \left(1 - cos\frac{\pi}{3}\right)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.120}$$

şeklinde elde edilir. $F_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $1 \leq i \leq 8$ olmak üzere birinci adım için $F = \{F_1, F_2, \ldots, F_8\}$;

$$
\begin{aligned}
F_1\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\
F_2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
F_3\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \\
F_4\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\
F_5\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \\
F_6\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.121}
$$

$$
\begin{aligned}
F_7\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\
F_8\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.122}
$$

şeklinde bulunur. Diğer adımlarda benzer şekilde yapılabilir.

4.3.2 $\mathbb{R}^3$ Kümesinin Alt Kümesinde Boyut

Tanım 4.12. Her bir adımdaki $(n+1)^{3m}$ tane küp vardır. Bu küplerin her birinin kenarları bütünün $\frac{1}{(2n+1)^m}$ kadardır. Dolayısıyla küçülme oranı $\frac{1}{(2n+1)^m}$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$ adım sayısı) olmak üzere $[a,b]\times[a,b]\times[a,b]$ aralığı için genelleştirilmiş Kantor kümesinin boyut hesabı;

$$
d_{(2n+1)} = \lim_{m\to 0} \frac{\log(n+1)^{3m}}{log\left(\frac{1}{\frac{1}{(2n+1)^m}}\right)} = \frac{3\log(n+1)}{log(2n+1)} \tag{4.123}
$$

şeklinde bulunur.

Sonuç 4.10. *İşlemler başlangıçta $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ aralığının oluşturduğu bölge ile başlayıp daha sonradan özel hali olan $[a,b]\times[a,b]\times[a,b]$ aralığının oluşturduğu bölge ile devam etmiştir. Boyut hesaplamasında her ne kadar $[a,b]\times[a,b]\times[a,b]$ aralığının oluşturduğu bölge kullanılsa da boyut hesabı aralık ile ilgili değil tekrar sayısı ve küçülme oranı ile ilgili olduğu için $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ bölgesinin oluşturduğu bölge içinde aynı sonuç çıkacaktır.*

Sonuç 4.11. *$[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ ve $[a,b]\times[a,b]\times[a,b]$ için oluşturulan yapılarda öncelikle hacim hesabı yapıldı. Çünkü hacim fraktallar için karakteristik bir özellik belirtmemekteydi. Yapılan işlemler sonucunda elde edilen yapı için de karakteristik bir özellik belirtmediği görüldü. Daha sonra fraktallar için önemli bir özellik olan kendine benzerlikten yararlanarak tekrarlı fonksiyon sistemleri oluşturuldu. Son olarak da boyutuna bakıldığında; topolojik boyutu 2 dir, fakat fraktal boyutuna bakıldığında ikiden*

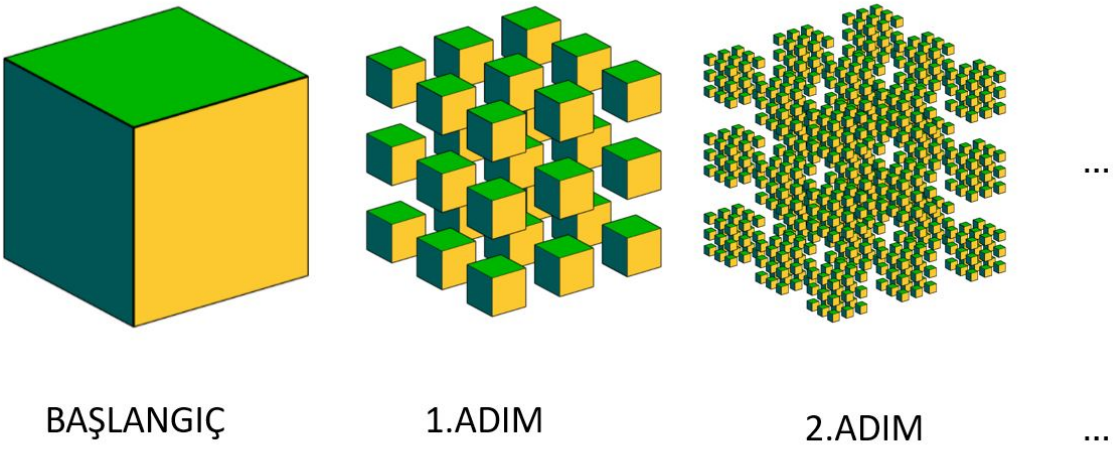
büyük üçten küçük bir değer olduğu görülür. Yani fraktal boyutu bir tam sayı değildir ve topolojik boyuttan büyüktür. Dolayısıyla tanımlanmış olan bu yapı Mandelbrot'un tanımlamış olduğu fraktal küme özelliklerinin hepsini sağlamaktadır. Bu yüzden bu yapı $\mathbb{R}^3$ kümesinde genelleştirilmiş Kantor kümesi olarak düşünülebilir.

Örnek 4.6. $[0,5]\times[0,5]\times[0,5]$ bölgesini 5 parçaya ayırarak oluşturulan fraktal yapı için;

a.) Hacmi hesaplayınız.

b.) Tekrarlı fonksiyon sistemlerini oluşturunuz.

c.) Boyutunu bulunuz.



Şekil 4.11 $[0,5]\times[0,5]\times[0,5]$ için 5 parçaya ayrılan fraktal yapı

a.) Küplerin hacimleri hesaplanmak için öncelikle atılan küplerin hacimleri hesaplanır.

$$\begin{aligned} V(\mathbb{V}_1^3) &= \frac{5^3.98}{5^3}, \\ V(\mathbb{V}_2^3) &= \frac{5^3.98(3^3)}{5^6}, \\ V(\mathbb{V}_3^3) &= \frac{5^3.98(3^6)}{5^9}, \\ &\vdots \\ V(\mathbb{V}_m^3) &= \frac{5^3.98(3^{3(m-1)})}{5^{3m}} \end{aligned} \tag{4.124}$$

$\mathbb{V}_m^3$ kümeleri birbirinden ayrık olduğundan,

$$\begin{aligned} V(\mathbb{V}^3) &= V(\mathbb{V}_1^3)+V(\mathbb{V}_2^3)+V(\mathbb{V}_3^3)+\dots \\ V(\mathbb{V}^3) &= \frac{5^3.98}{5^3}+\frac{5^3.98.3^3}{5^6} \\ &+ \frac{5^3.98.3^6}{5^9}+\dots \\ V(\mathbb{V}^3) &= \frac{5^3.98}{5^3}\left[1+\frac{3^3}{5^3}+\frac{3^6}{5^6}+\dots\right] \end{aligned} \tag{4.125}$$

yazılır. Elde edilen bu toplamda parantez içindeki toplam sonsuz geometrik seridir. İlk terimi $a=1$ ve ortak çarpanı $r=\frac{3^3}{5^3}$ dir.
$\left|\frac{3^3}{5^3}\right|<1$ olduğundan bu toplam;

$$\begin{aligned} \frac{a}{1-r} &= \frac{1}{1-\frac{3^3}{5^3}}.\frac{5^3}{98}, \\ V(\mathbb{V}^3) &= \frac{5^3.98}{5^3}.\frac{5^3}{98}=5^3 \end{aligned} \tag{4.126}$$

bulunur. $V([0,5]\times[0,5]\times[0,5])=5^3$ elde edilir. Tüm hacim 5^3 ve atılan parçaların hacimleri 5^3 olarak bulunduğu için elde kalan fraktal yapının hacmi 0 olarak bulunur.

b.) Birinci adımda oluşan 27 küp için TFS; $F_i:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $1\le i\le 27$ olmak üzere $F=F_1,F_2,\dots,F_{27}$;

$$
\begin{aligned}
F_1\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \\
F_2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
F_3\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
F_4\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
&\vdots \\
F_{27}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.127}
$$

şeklinde bulunur. Diğer adımlarda benzer şekilde yapılabilir.

c.) Her bir adımdaki 3^{3m} tane küpün küçülme oranı $\frac{1}{5^m}$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$ adım sayısı) olmak üzere

$[0,5] \times [0,5] \times [0,5]$ aralığı için boyut hesabı;

$$
d_{[0,5]\times[0,5]\times[0,5]} = \lim_{m\to 0} \frac{\log 3^{3m}}{log\left(\frac{1}{\frac{1}{5^m}}\right)} = \frac{3\log 3}{log 5} = 2,047 \tag{4.128}
$$

olarak bulunur.

5
TİYATRO VE RESİMDE FRAKTAL GEOMETRİ

Tezin bu orijinal bölümünde fraktal geometrinin sanat üzerinde incelemesi yapılmıştır. Öncelikle Stanislavski'nin oyunculukta birimlere ayırma yöntemi Kantor yapısı üzerinden incelenmiştir. Daha sonrasında resim sanatında fraktal geometri incelemesi yapılmıştır. Dijital ortamda yapılan resimler ile ressamların elle yaptığı tuval üzerinde olan resimler arasındaki fraktal yaklaşım incelenmiştir.

5.1 Stanislavski'nin Birimlere Ayırma Yöntemine Fraktal Bir Yaklaşım

5.1.1 Stanislavski'nin Birimlere Ayırma Yöntemi

Stanislavski birimlere ayırma yöntemini şu şekilde ifade eder [14];

Stanislavski bir role hazırlanırken oyun metnini bir bütün olarak çalışmaktansa oyun metnini kendi içinde parçalara ayırarak çalışmayı önerir. Bunu da bütün halde olan bir hindinin yenilmesinin zor olduğunu bu yüzden bu hindiyi önce butlara, sonra da daha küçük parçalara bölünerek yenmesinin daha kolay olacağına benzetir. Parçalara bölünen bir sahnede tıpkı bu örnekte olduğu gibi daha kolay çalışılabilecektir.

Bölünmenin bir diğer önemli yanı da tüm sahneyi bir bütün olarak oynamaya çalışan oyuncunun sona odaklanıp aradaki amaçları kaçırmasını engellemektir. Birimler oluşturup her bir birimi kendi amacına uygun olacak şekilde çalışmak oyunun her bir aşamasının amacına daha uygun bir şekilde oynanmasını sağlar. Daha sonra da bu parçalar birleştirilerek sahne bir bütün halinde oluşturulmuş olur.

Bölünme sayısı her oyuncuya göre değişiklik göstermektedir. Bir oyuncunun oynadığı rolün kendi içindeki amaçlarına göre bölünme sayısı da değişebilir.

Stanislavski'ye göre: "Bölüntüler ne kadar büyük, ne kadar az olursa, siz de o kadar az uğraşmak zorunda kalırsınız, bütün rolü işlemek sizin için daha kolay olur."

5.1.2 Stanislavski'nin Birimlere Ayırma Yöntemi Kullanılarak Bir Oyun Metni Fraktal Olarak Düşünülebilir Mi?

i. Kendine benzer midir?

Bir tiyatro metnini düşünüldüğünde ilk başta bütün bir parça olarak bakıldığında belli bir konu ve olaylar çerçevesinde karakterlerin karşılıklı konuşması ile oluşan bir yapı gibi düşünülebilir. Daha sonra bu bütün bölümlere ayırdığında yine bütünün parçaları olan ve yine belli konu ve olaylar çevresinde karakterlerin karşılıklı konuşması ile oluşan birden fazla yapı elde edilir. Bu şekilde yine bölümlere ayrılırsa yine aynı şekilde bütünün parçasına benzer olan yapılar oluşur. O zaman aslında bir tiyatro metnini birimlerine ayırmak ile kendine benzer parçalar elde edilmiş olunur.

ii. Tekrarlı oluşum?

Metnin ilk hali bölümlere ayırdığında her bir yeni parça aslında bütünün birer parçası olduğu için her bir adımda bir önceki adımın bir tekrarıdır.

iii. Kesirsel boyut?

Burada kesirli boyutu açıklayabilmek için matematiksel bir modelleme oluşturulur. Bir tiyatro metni matematiksel olarak $[a, b]$ aralığı ile ifade edilirse; birimlere ayırma yöntemini göstermek için $[a, b]$ aralığının özel hali olan Kantor kümesi ile bir modelleme oluşturalım.

Kantor Kümesi 3 parçaya bölündüğünde boyutu $0,63$ olan her bir parçanın uzunluğu ise $\frac{1}{3}$ olan 2 parça elde edilir.

Kantor Kümesi 5 parçaya bölündüğünde boyutu $0,68$ olan her bir parçanın uzunluğu ise $\frac{1}{5}$ olan 3 parça elde edilir.

Kantor Kümesi 7 parçaya bölündüğünde boyutu $0,71$ olan her bir parçanın uzunluğu ise $\frac{1}{7}$ olan 4 parça elde edilir.

5.1.3 Stanislavski'nin Metoduna Fraktal Yaklaşım

Stanislavski'nin birimlere ayırma yöntemi Kantor kümesi ile açıklanabilir.

Kantor kümesinin başlangıç adımı bir oyun metninin bütünü olarak düşünülür. Daha sonra 1. adımda bir oyuncunun kendi rolüne çalışırken metni ilk adımda amaçlar doğrultusunda parçalara ayırdığını ve kendi rolünün olduğu parça dışındaki parçaları tekrar parçalara ayırarak bölme işlemine devam ettiği düşünülür.

Bu durumda bir oyun metnini oyuncunun bölümlere ayırması Kantor kümesinin yapısına benzetilebilir.

Üçlü Kantor kümesinde başlangıç adımındaki $[0,1]$ aralığı metnin bütünü olarak düşünülürse birinci adımda çıkartılan parça oyuncunun rolünün olmadığı bölüm olarak düşünülebilir. Diğer iki parça ise oyuncunun rolünün olduğu bölümlerdir. Bir sonraki adımda ilk adımda geriye kalan yani oyuncunun rolünün olduğu bölümdeki parçaları tekrar kendi içinde parçalara ayırarak devam edilir ve her adımda bu yöntem kullanılarak devam edilirse Üçlü Kantor Kümesine benzer bir yapı oluşmuş olur. [Şekil 5.1] Bu yöntem ana karakterler ve başrol oyuncuları için uygun bir modellemedir.

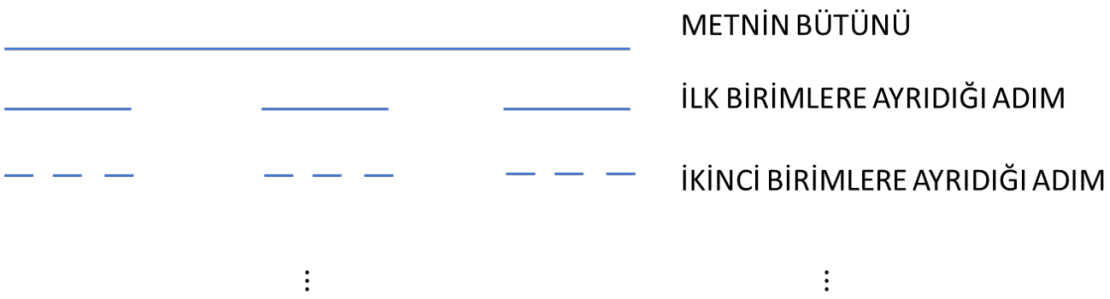


Şekil 5.1 Üçlü Kantor kümesi ile Stanislavski'nin birimlere ayırma yönteminin modellemesi

Üçlü Kantor kümesinde uygulanan yöntem Kantor kümesi 5 parçaya bölünerek oluşan yapı üzerinde de uygulanabilir. Yani başlangıç adımı metnin bütünü olmak üzere birinci adımda metni bu sefer 3 değil 5 parçaya ayırarak birimlere ayırma metodu kullanılır. [Şekil 5.2]

Yukarıda verilen modelleme örneklerinde atılan parçalar sembolik olarak verilmiştir. Üçlü Kantor kümesinin birinci adımında ortadaki parça yerine ilk veya son parçada atılabilir. Matematiksel olarak işlemlerde bir değişiklik olmayacaktır.

Matematiksel olarak baktığımızda Kantor kümelerinin atılan parçalarının uzunlukları toplamı baştaki ana parçanın uzunluğuna eşit olarak bulunmuştu. Bunun bu yöntemde anlamı tekrar bölümlere ayırıldığında atılan parçalar bütünden herhangi



Şekil 5.2 Kantor kümesi 5 parçaya bölünerek oluşan model ile Stanislavski'nin birimlere ayırma yönteminin modellemesi

bir kayıp oluşturmamaktadır. Yani bu yöntemde ara sahneler atılıyormuş gibi gözükse de aslında bütün metinden herhangi bir kayıp oluşturmamaktadır. Sadece oyuncunun kendi rolüne daha iyi odaklanabilmesi daha iyi anlayabilmesi için bir avantaj sağlamaktadır.

Kantor kümesinin üç parçaya ayrılması ile oluşan fraktal yapının boyutu $0,63$ olarak bulunur, beş parçaya ayrılması ile oluşan fraktal yapının boyutu ise $0,68$ olarak bulunur.

Buradan yola çıkarak Stanislavski'nin "Bölüntüler ne kadar büyük, ne kadar az olursa, siz de o kadar az uğraşmak zorunda kalırsınız, bütün rolü işlemek sizin için daha kolay olur." " [14] sözü "Fraktal boyut ne kadar küçük olursa, siz de o kadar az uğraşmak zorunda kalırsınız, bütün rolü işlemek sizin için daha kolay olur." şeklinde yorumlanabilir.

Bu bölümde Kantor kümesini kullanarak bir modelleme oluşturuldu. Kantor kümesi dışında $[a, b]$ aralığında $(2n + 1)$ parçaya ayrılmış herhangi bir yapı kullanılarak da gösterilebilirdi. Bu modellemede her adımda eşit parçalara ayrılarak bir sonuç elde edildi. Eğer Kantor Kümesinin yapısına uygun olmayan yani her bir parçası eşit oranda parçaya ayrılmayan bir tiyatro metninde çalışılırsa o zaman da Moran Denklemi kullanılarak boyut hesabı yapılabilir. Aynı ifade bu tür metinlerde de kullanılabilir.

Bu uygulanan matematiksel modelleme tek kişilik oyunlar için uygun değildir.

5.2 Resim Sanatı Üzerinde Fraktal Geometri Etkisi

Fraktallar sanatın pek çok alanında kullanıldığı gibi resim sanatında da kullanılmaktadır. Hazır bilgisayar programları veya fraktal formüller kullanılarak yapılan dijital görüntü sanatına fraktal sanat[1] denir. Bilgisayar ortamında

[1]Fraktal sanat kavramı ilk kez [15] numaralı kaynakta belirtilmiştir.

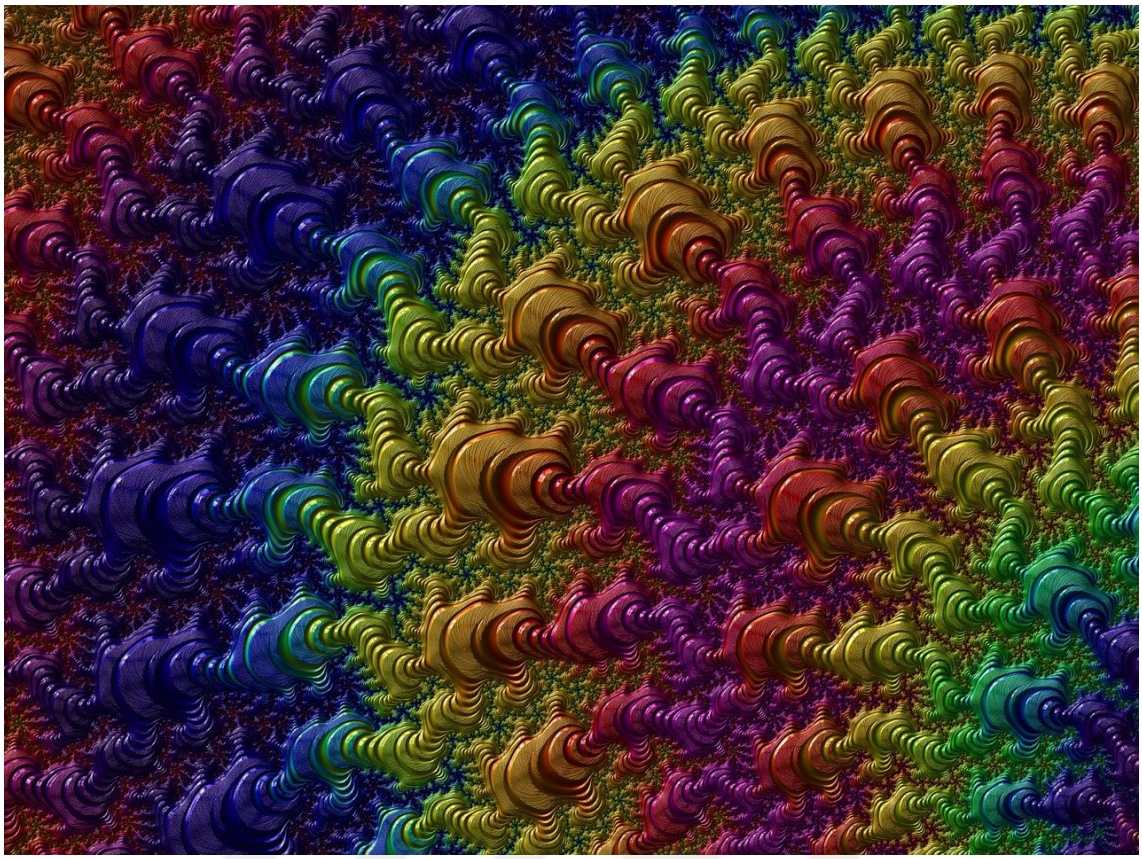
oluşturulmuş olan fraktal sanat eserlerinin el ile yapılması neredeyse imkansızdır. Şekil 5.3 ve Şekil 5.4 de görüldüğü gibi bilgisayar programları kullanılarak kusursuz fraktal eserler oluşturulmuştur. Son yıllarda Dünya da ve Türkiye'de fraktal sanat konulu pek çok sergi açılmıştır.



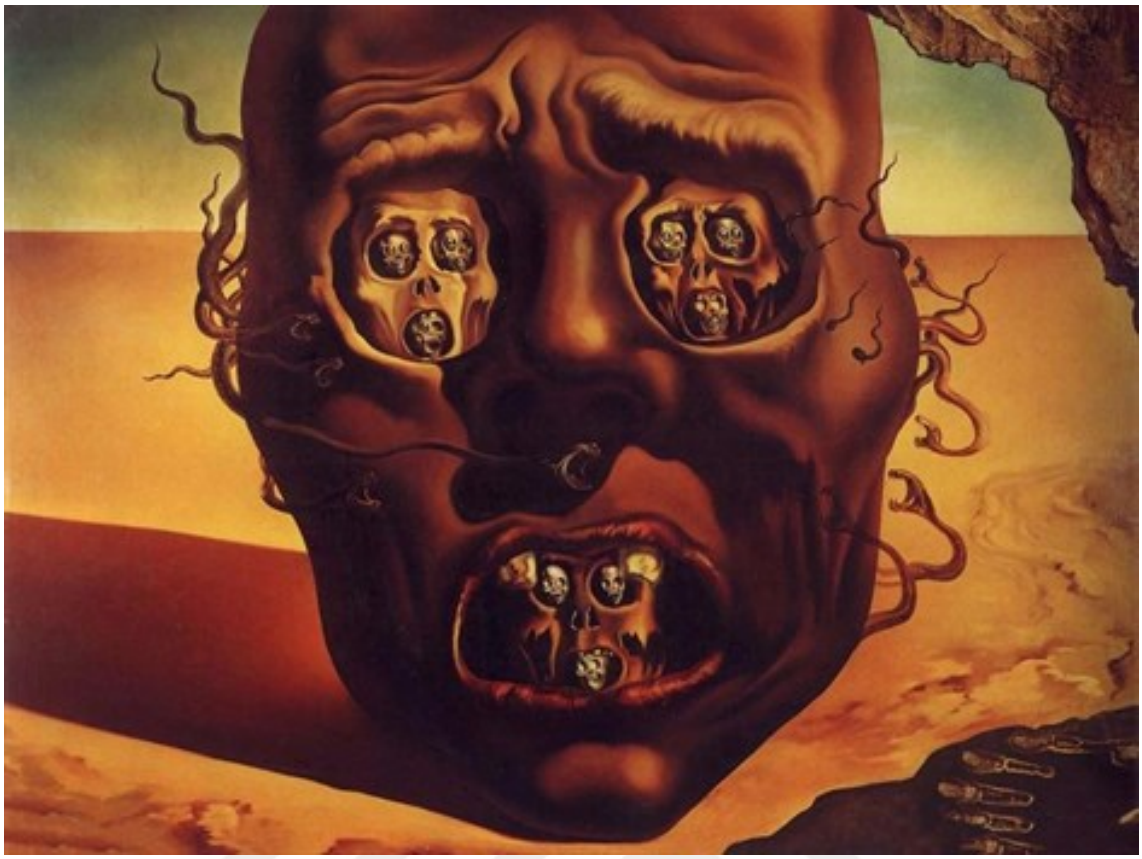
Şekil 5.3 Fraktal sanat örneği [16]

Dijital ortamda yapılan resimler dışında pek çok ressamın yaptığı resimde de fraktal benzeri yapılara rastlanmaktadır. Şekil 5.5 de görülen tablo ünlü ressam Salvador Dali'nin "Savaşın Yüzü" isimli tablosudur. Tablo yakından incelendiğinde Şekil 5.6 de görüldüğü gibi parçalar ilk baştaki bütüne çok benzemektedir. Fakat yakından incelendiğinde bire bir bir benzerlik olmadığı görülmektedir. Salvador Dali'nin tablosunda dijital ortamlarda oluşturulmuş olan tablolar gibi birebir bir benzerlik olmadığı için direk fraktal bir tablo yorumunu yapılamasa bile fraktal benzeri bir tablo olarak gösterilebilir.

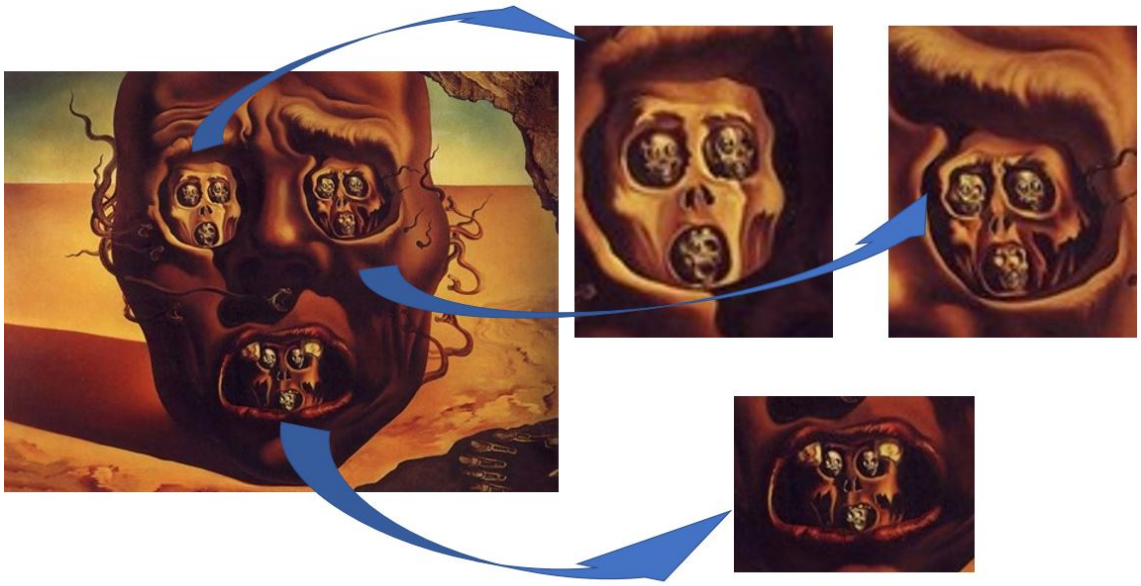
Ressamların elle yaptıkları tuvallerde tam kendine benzer yapılar olmadığı için tam olarak bir fraktal olarak değil de fraktal benzeri yapılar olarak adlandırılabilir. Fakat dijital ortamlarda yapılan fraktal sanat örnekleri incelendiğinde kusursuz şekilde tam kendine benzer yapılar oluştuğu için fraktal örneği olarak gösterilebilir.



Şekil 5.4 Fraktal sanat örneği [17]



Şekil 5.5 Salvador Dali'nin Savaşın Yüzü tablosu, 1940, Boijmans Van Beuningen müzesi, Rotterdam [18]



Şekil 5.6 Salvador Dali'nin Savaşın Yüzü tablosu incelemesi [18]

6
SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde genelleştirilmiş Kantor kümesi daha genel bir hale getirilerek $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ üzerinde geometrik olarak incelenmiştir. Ayrıca elde edilen sonuçlardan yararlanarak tiyatro üzerinde bir modellemesi oluşturulmuştur.

KAYNAKÇA

[1] B. Mandelbrot, "The fractal geometry of nature. hb fenn and company," *Contents. Jan*, vol. 1, 1977.

[2] G. Cantor, "Ueber unendliche, lineare punktmannichfaltigkeiten," *Mathematische Annalen*, vol. 21, no. 4, pp. 545–591, 1883.

[3] M. J. Islam, M. S. Islam, "Lebesgue measure of generalized cantor set," *Annals of Pure and Applied Mathematics*, vol. 10, no. 1, pp. 75–87, 2015.

[4] M. Islam, M. Islam, "Generalized cantor set and its fractal dimension," *Bangladesh Journal of Scientific and Industrial Research*, vol. 46, no. 4, pp. 499–506, 2011.

[5] M. Islam, "Invariant measures for ıterated function systems of generalized cantor sets,"

[6] M. F. Barnsley, R. L. Devaney, B. B. Mandelbrot, H.-O. Peitgen, D. Saupe, R. F. Voss, Y. Fisher, M. McGuire, *The science of fractal images*. Springer, 1988.

[7] M. F. Barnsley, *Fractals everywhere*. Academic press, 2014.

[8] M. F. Barnsley, S. Demko, "Iterated function systems and the global construction of fractals," *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 399, no. 1817, pp. 243–275, 1985.

[9] G. Edgar, *Measure, topology, and fractal geometry*. Springer Science & Business Media, 2007.

[10] H. H. Hacısalihoğlu, N. Yaz, *Fraktal geometri*. AÜ Fen Fakültesi Matematik Bölümü, 2005.

[11] J. Feder, *Fractals*. Springer Science & Business Media, 2013.

[12] M. Dindoš, "Generalized cantor sets and sets of sums of convergent alternating series," *Journal of Applied Analysis*, vol. 7, no. 1, pp. 131–150, 2001.

[13] İ. E. Karaçay, S. Yüce, *A new approach to generalized cantor set ın fractal geometry*, 2020.

[14] K. S. Stanislavski, "Bir aktör hazırlanıyor, çev," *Suat Taşer, İstanbul: Papirüs Yayınları*, 1996.

[15] G. L. F.-A. et Complexité, *Manifeste fractaliste*, 1997.

[16] (). "Fraktal sanat," [Online]. Available: `https://pixabay.com/images/id-136113/`.

[17] (). "Fraktal sanat2," [Online]. Available: `https://pixabay.com/images/id-403463/`.

[18] (). “Salvadordali,” [Online]. Available: https://arthive.com/artists/12619~Salvador_Dali/works/315820~Face_of_war#show.

[19] S. Yüce, “Analitik geometri,” *Pegem Atıf İndeksi*, pp. 1–596, 2017.

A
TANIMLAR

Tanım A.1. Düzlemde $ad - bc \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + e \\ y' &= cx + dy + f \end{aligned} \tag{A.1}$$

denklemine sahip dönüşüme afin dönüşüm denir. Matris formunda

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

şeklinde ifade edilir [19].

Tanım A.2. $F_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ olmak üzere her $x, y \in \mathbb{R}^2$ için

$$| F(x) - F(y) | < r | x - y |$$

olacak şekilde bir $0 < r < 1$ var ise r büzülme sabiti olmak üzere f fonksiyonuna büzülme dönüşümü denir.

Tanım A.3. Bir $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü 1-1 ve her $R, S \in \mathbb{R}^2$ ve her $R', S' \in \mathbb{R}^2$ karşılıklı nokta çiftleri için

$$d(R', S') = kd(R, S) \tag{A.3}$$

(k benzerlik boyutu) ise F dönüşümüne benzerlik dönüşümü denir [19].

Afin dönüşümlerin özel bir formu olan benzerlik dönüşümleri dönme, büzülme, genişleme ve öteleme dönüşümlerinin birleşiminden oluşan katı hareketlerdir.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

İletişim Bilgileri:

Konferans Bildirisi

1. İ. E. Karaçay, S.Yüce, "A New Approach To Generalized Cantor Set In Fractal Geometry," International Conference On Mathematics And Its Applications In Science And Engineering, Ankara, Türkiye, 9-10 Temmuz, 2020 p.84-85.