

SİMPLEKS ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Simpleks çözüm yöntemi, çok sayıda karar değişkenleri ve kısıtlayıcılardan oluşan doğrusal programlama modellerinin çözümünde sıkça kullanılan bir çözüm yöntemidir.

Doğrusal programlama problemlerinde gerek analitik gerekse grafik çözüm yöntemleriyle çözülemeyen problemlerin çözümüne simpleks yöntemle ulaşmak mümkündür. Analitik yöntemin en iyi çözüm olup olmadığı bilinmeden uygulanamaması, grafik yöntemin de üçten fazla değişken için uygun çözümün bulunamaması, bu yöntemlerin çok bilinmeyenli denklem sistemlerinin analizinde yetersiz kalacağını göstermektedir.

Bu yöntemin genel amacı en iyi çözüme ardışık tekrarlama yoluyla ulaşmaktır. Problemin kısıtlarına ve pozitiflik koşuluna bağlı olarak başlangıç simpleks tablosu oluşturulur. Oluşturulan tablo yardımıyla, çözüm bölgesinin bir uç noktasından başlayarak tekrarlayıcı işlemlerle, belirli bir düzen içerisinde amaç fonksiyonunu maksimum (veya minimum) yapan değişken değerlerine ulaşıncaya kadar işlemler sürdürülmektedir.

SİMPLİKS YÖNTEMİNİN AŞAMALARI

1.Eşitsizliklerin Eşitlik Haline Dönüştürülmesi

a) Problemdeki eşitsizlikler \leq şeklinde ise;

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

Denklemleri eşitlik haline dönüştürmek için sol tarafına S aylak (atık) değişkeni eklenir. Bu değişken kullanılmayan kapasiteyi göstermektedir. Aylak değişkeninin amaç fonksiyonundaki katsayı değeri sıfırdır. Buna göre kısıtlayıcı denklem şu şekilde yazılır;

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + 1S = b_1$$

b) Problemdeki eşitsizlikler \geq şeklinde ise;

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

Denklemleri eşitlik haline getirmek için bu kez eşitliğin sol tarafından S atık değişkeni çıkarılmaktadır. Burada S atık değişkeni, b_1 kaynak değerinden fazla kullanılan miktarı göstermektedir. Ancak burada x_1 ve x_2 'nin sıfır veya b_1 den küçük bir değer alması durumunda S değişkeni negatif olacaktır. Bu durum pozitiflik koşuluna aykırıdır. Bu nedenle pozitiflik koşulunu sağlamak amacıyla katsayısı +1 olan A yapay değişkeni denkleme eklenir. Yapay değişkenin ise ekonomik bir anlamı yoktur. Atık değişkenin (S) amaç fonksiyonundaki katsayı değeri sıfırken, yapay değişkenin (A) katsayı değeri yüksek bir değer olarak tanımlayabileceğimiz M 'dir. Optimal çözümde yapay değişkenin değer almaması gerekmektedir. Bunun için yapay değişkenin amaç fonksiyonundaki katsayısı maksimizasyonda $-M$, minimizasyonda ise $+M$ dir.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - S + A = b_1$$

«A» yapay değişkeninin amaç fonksiyonundaki katsayısı;

- Minimizasyon (enküçükleme) problemde **+M**,
- Maksimizasyon (enbüyükleme) probleminde ise **-M** ' dir.

c) Problemdeki kısıtlayıcı denklem eşitlik halinde ise;

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

Denklemin sol tarafına sadece ekonomik bir anlamı olmayan A yapay değişkeni eklenmesiyle kısıt eşitlik halinde tekrar yazılır.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + A = b_1$$

A yapay değişkeninin amaç fonksiyonundaki katsayısı;

- Minimizasyon (enküçükleme) problemide **+M**,
- Maksimizasyon (enbüyükleme) probleminde ise **-M**' dir.

Sonuç olarak Eşitsizliklerdeki işaretler;

- “ \leq ” şeklinde ise: S aylak=atık (=slack or surplus) değişken eklenir, amaç fonksiyonundaki katsayısı “0” dir.
- “ \geq ” şeklinde ise: S atık değişken çıkarılır, A yapay (artificial) değişkeni eklenir. Yapay değişkenin amaç fonksiyonundaki katsayısı maksimizasyonda $-M$, minimizasyonda ise $+M$ dir.
- “ $=$ ” şeklinde ise: A yapay değişkeni eklenir. Yapay değişkenin amaç fonksiyonundaki katsayısı maksimizasyonda $-M$, minimizasyonda ise $+M$ dir.

Eşitsizliklerin Eşitlik Haline Dönüştürülmesi

Eşitsizlik İşareti	Değişken	Katsayı (1)	Katsayı (2)	Modelde
\leq	Atık (S)	+1	0	Var
\geq	Atık (S)	-1	0	Yok
	Yapay (A)	+1	Max: -M	Var
			Min: +M	Var
=	Yapay (A)	+1	Max: -M	Var
			Min: +M	Var

Katsayı (1): ilgili değişkenin kısıtlayıcı koşuldaki katsayısı

Katsayı (2): ilgili değişkenin amaç fonksiyonundaki katsayısı

ÖRNEK 1:

$$Z_{\max} = 11 x_1 + 4 x_2$$

$$7 x_1 + 6 x_2 \leq 84$$

$$4 x_1 + 2 x_2 \leq 32$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Şeklindeki doğrusal programlama modelini standart hale dönüştürünüz.

Çözüm:

“ \leq ” şeklinde ise: **S** aylak (=slack) değişken eklenir, amaç fonksiyonundaki katsayısı “0” dır.

$$7 x_1 + 6 x_2 + s_1 = 84$$

$$4 x_1 + 2 x_2 + s_2 = 32$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

$$Z_{\max} = 11 x_1 + 4 x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

ÖRNEK 2:

$$\begin{array}{lcl} Z_{\max} = 2x_1 + 3x_2 & \Longrightarrow & Z = 2x_1 + 3x_2 + 0s_1 - MA_1 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 & \Longrightarrow & x_1 + 2x_2 + s_1 = 4 \\ x_1 + x_2 = 3 & \Longrightarrow & x_1 + x_2 + 1A_1 = 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 & \Longrightarrow & x_1, x_2, s_1, A_1 \geq 0 \end{array}$$

“ \leq ” şeklinde ise: S aylak (= slack) değişken eklenir, amaç fonksiyonundaki katsayısı “0” dır.

“=” şeklinde ise: A yapay değişkeni eklenir. Yapay değişkenin amaç fonksiyonundaki katsayısı maksimizasyonda $-M$ dir (maksimizasyon).

ÖRNEK 3:

$$Z_{\min} = 180x + 160y$$

Kısıtlayıcı Koşullar;

$$6x + y \geq 12$$

$$3x + y \geq 8$$

$$4x + 6y = 24$$

$$x \leq 5$$

$$y \leq 5$$

$$x, y \geq 0$$

$$6x + y - 1S_1 - 0S_2 - 0S_3 - 0S_4 + A_1 = 12$$

$$3x + y - 0S_1 - 1S_2 - 0S_3 - 0S_4 + A_2 = 8$$

$$4x + 6y - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 - 0S_4 + A_3 = 24$$

$$x + 0y + 0S_1 + 0S_2 + 1S_3 + 0S_4 = 5$$

$$0x + y + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 1S_4 = 5$$

$$Z_{\min} = 180x + 160y \quad \longrightarrow \quad Z_{\min} = 180x + 160y + MA_1 + MA_2 + MA_3 + 0S_3 + 0S_4$$

“ \leq ” şeklinde ise: S aylak (=slack) değişken eklenir, amaç fonksiyonundaki katsayısı “0” dir.

“=” şeklinde ise: A yapay değişkeni eklenir. Yapay değişkenin amaç fonksiyonundaki katsayısı minimizasyonda +M dir.

“ \geq ” şeklinde ise: S aylak değişken çıkarılır, A yapay (artificial) değişkeni eklenir. Yapay değişkenin amaç fonksiyonundaki katsayısı minimizasyonda ise +M dir.

2. Başlangıç Simpleks Tablosunun Oluşturulması

Problemdeki eşitsizlikler eşitlik haline dönüştürüldükten sonra başlangıç simpleks tablosuna aktarılır. Amaç fonksiyonu ve kısıtlara bağlı olarak oluşturulan bu tablo yardımıyla belirli aşamalardan sonra problemin optimal çözümüne ulaşılır. Genel olarak bir simpleks tablosu aşağıdaki gibidir.

$$Z_{\max} = 11x_1 + 4x_2$$

$$7x_1 + 6x_2 \leq 84$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 32$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



$$Z_{\max} = 11x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

$$7x_1 + 6x_2 + s_1 = 84$$

$$4x_1 + 2x_2 + s_2 = 32$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

Başlangıç Simpleks Tablosu							
Temel	Temel Değişkenler	x_1	x_2	s_1	s_2	Sabitler (STD)	
↓	Amaç Satırı (C_j)	→ 11	4	0	0		
s_1	0	7	6	1	0	84	
s_2	0	4	2	0	1	32	
Birim katkı kaybı	→ Z_j						
İndeks Satırı	→ $C_j - Z_j$						

Karar Değişkenleri

Amaç Satırı : Tüm Karar değişkenlerinin amaç fonksiyonundaki katsayılarını gösterir (C_j).

Karar Değişkenleri: Amaç fonksiyonunda yer alan karar değişkenlerinin sembollerini gösterir.

Amaç Sütunu : Temel değişkenlerin (çözümüne giren karar değişkenleri) amaç fonksiyonundaki katsayılarını gösterir.

Birim Katkı Kaybı (Z_j): Temel olmayan (çözümüne girmeyen) bir değişkenden bir birim üretilmesi için bir temel değişkenin vazgeçilmesi gereken miktarını gösterir. Hesaplanarak bulunur.

$$Z_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot e_i$$

Örneğin X_1 değişkeninin Z_1 değeri =

$$Z_1 = a_{11} \cdot e_1 + a_{12} \cdot e_2$$
$$Z_1 = 7 \cdot 0 + 4 \cdot 0$$
$$Z_1 = 0$$

İndeks Satırı : Her bir değişkenin amaç fonksiyonuna olan net katkısını gösterir ($C_j - Z_j$).

$$C_1 - Z_1 = 11 - 0 = 11$$

Başlangıç Simpleks Tablosu						
Temel	Temel Değişkenler	X_1	X_2	S_1	S_2	Sabitler (STD)
	Amaç Satırı (C_j)	11	4	0	0	
s_1	0	7	6	1	0	84
s_2	0	4	2	0	1	32
	Z_j	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$	11	4	0	0	

Çözümün Araştırılması

Simpleks yöntem ile en iyi çözümü bulmak için, başlangıç simpleks tablosu oluşturulduktan sonra, iterasyon (ardışık çözüm) işlemlerine geçilir. 1.simpleks tablosunu oluşturmak için sırasıyla aşağıdaki işlemler yapılır:

1. Anahtar sütunun belirlenmesi
2. Anahtar satırın belirlenmesi
3. Anahtar sayının belirlenmesi

1. Anahtar sütunun belirlenmesi

En büyükleme problemlerinde (Z_{max}), indeks satırında ($C_j - Z_j$) en büyük pozitif sayının bulunduğu sütun anahtar sütun olarak belirlenir. Burada en büyük pozitif değerinin seçilmesinin nedeni Z_{max} şeklindeki amaç fonksiyonuna en büyük katkı yapan değişkenin belirlenmesidir. İndeks satırında herhangi bir pozitif değer olmaması Optimal çözüme ulaşıldığının bir göstergesidir.

En küçükleme problemlerinde (Z_{min}) ise indeks satırında negatif değerler arasında **mutlak değeri en büyük olan** sütun anahtar sütun olarak belirlenir. Giderlerde en fazla azalmaya sebep olan değişken çözüme alınacaktır.

Başlangıç Simpleks Tablosu						
Temel	Temel Değişkenler	X_1	X_2	S_1	S_2	Sabitler (STD)
	Amaç Satırı (C_j)	11	4	0	0	
S_1	0	7	6	1	0	84
S_2	0	4	2	0	1	32
Birim katkı kaybı	Z_j	0	0	0	0	0
İndeks satırı	$C_j - Z_j$	11	4	0	0	

2. Anahtar satırın belirlenmesi

Sabitler sütununda yer alan STD değerleri anahtar sütununda yer alan gövde elemanlarına bölünür ve elde edilen en küçük pozitif değerin bulunduğu satır da anahtar satır olarak belirlenir.

Başlangıç Simpleks Tablosu						
Temel	Temel Değişkenler	X_1	X_2	S_1	S_2	Sabitler (STD)
	Amaç Satırı (C_j)	11	4	0	0	
S_1	0	7	6	1	0	84
S_2	0	4	2	0	1	32
Birim katkı kaybı	Z_j	0	0	0	0	0
İndeks satırı	$C_j - Z_j$	11	4	0	0	

$84/7 = 12$ Kara en çok katkıda bulunan karar değişkeni olan X_1 'e en az katkıyı veren S_2 değişkeni çözümden çıkacaktır.

3. Anahtar sayının belirlenmesi

Anahtar satır ile anahtar sütunun kesişim noktasında yer alan sayı anahtar sayıdır. Bu aşamadan sonra 1. simpleks tablosunun oluşturulmasına geçilir.

Başlangıç Simpleks Tablosu

Temel	Temel Değişkenler	X_1	X_2	S_1	S_2	Sabitler (STD)
	Amaç Satırı (C_j)	11	4	0	0	
S_1	0	7	6	1	0	84
S_2	0	4	2	0	1	32
Birim katkı kaybı	Z_j	0	0	0	0	0
İndeks satırı	$C_j - Z_j$	11	4	0	0	

İndeks satırındaki en büyük pozitif sayı

Anahtar sütun

Anahtar satır

Anahtar Sayı

Birinci simpleks tablonun oluşturulmasında:

1.) Anahtar satırda yer alan tüm değerler anahtar sayıya bölünür.

2.) Diğer satırlardaki yeni değerlerin hesaplanması

Başlangıç Simpleks Tablo						
Temel	Temel Değişkenler	X_1	X_2	S_1	S_2	Sabitler (STD)
	Amaç Satırı (C_j)	11	4	0	0	
S_1	0	7	6	1	0	84
S_2	0	4	2	0	1	32
Birim katkı kaybı	Z_j	0	0	0	0	0
İndeks satırı	$C_j - Z_j$	11	4	0	0	

Başlangıç Simpleks Tablo						
Temel	Temel Değişkenler	X_1	X_2	S_1	S_2	Sabitler (STD)
	Amaç Satırı (C_j)	11	4	0	0	
Birim katkı kaybı	Z_j					
İndeks satırı	$C_j - Z_j$					

1. Simpleks Tablosu

Temel	Temel Değişkenler	X1	X2	S1	S2	Sabitler (STD)
	Amaç Satırı	11	4	0	0	
S ₁	s ₁	0	5/2	1	-7/4	28
X ₁	X ₁	1	2/4	0	1/4	8
Birim katkı kaybı	Z _j	11	11/2	0	11/4	88
İndeks Satırı	C _j - Z _j	0	-3/2	0	-11/4	

Başlangıç Simpleks Tablo

Temel	Temel Değişkenler	X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	Sabitler (STD)
	Amaç Satırı (C _j)	11	4	0	0	
0	S1	0	5/2	1	-7/4	28
11	X1	1	2/4	0	1/4	8
Birim katkı kaybı	Z _j	11	11/2	0	11/4	88
İndeks satırı	C _j - Z _j	0	-3/2	0	-11/4	

ÖRNEK 2 DEVAM

$$Z_{\max} = 2x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$Z_{\max} = 2x_1 + 3x_2 + 0s_1 - MA_1$$

$$x_1 + 2x_2 + s_1 = 4$$

$$x_1 + x_2 + 1A_1 = 3$$

$$x_1, x_2, s_1, Y_1 \geq 0$$

Başlangıç Simpleks Tablo							
Temel Değişkenler	Temel Değişkenler	X ₁	X ₂	S ₁	A ₁	Sabitler (STD)	
	Amaç Satısı	2	3	0	-M		
0	S ₁	1	2	1	0	4	4/2=2
-M	A ₁	1	1	0	1	3	3/1=3
	Z _j	-M	-M	0	-M	-3M	
	C _j - Z _j	2+M	3+M	0	0		

İndeks satırındaki en büyük pozitif sayı

ÖRNEK 4

Bir meyvecilik firması Almanya'ya elma, muz ve armut ihraç etmektedir. Kasalarda stoklanan bu ürünlerin birim stoklama maliyetleri sırasıyla 7TL, 6TL ve 9TL'dir. Bir kasa elma $5m^2$, bir kasa muz $8m^2$ ve bir kasa armut da $10m^2$ alan kaplamaktadır. Firmanın depolama kapasitesi ise $1000m^2$ 'dir. Muz çabuk bozulduğu için firma bu meyveden en fazla 150 kasa stoklayabilmektedir. Elma ve armuda olan talep değişkenliğinden dolayı firma bu iki meyvenin her birinden en az 50'şer kasa güven stoku bulundurmak zorundadır. **Firmanın toplam stoklama maliyetini minimize eden doğrusal programlama modelini kurunuz ve simpleks yöntemi ile çözünüz.**

Çözüm:

Karar değişkenleri:

x_1 = elma stoğu

x_2 = muz stoğu

x_3 = armutstoğu

Amaç fonksiyonu:

Z_{\min} = Toplam stoklama maliyeti

$$Z_{\min} = 7x_1 + 6x_2 + 9x_3$$

Kısıtlar:

1. Kısıt depolama alanı

$$5x_1 + 8x_2 + 10x_3 \leq 1000$$

2. Kısıt muz stoğuna ilişkin kısıt

$$x_2 \leq 150$$

3. Kısıt elma stoğuna ilişkin kısıt

$$x_1 \geq 50$$

4. Kısıt armut stoğuna ilişkin kısıt

$$x_3 \geq 50$$

Pozitiflik kısıtı

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Çözüm:

Amaç fonksiyonu: $Z_{\min} = 7x_1 + 6x_2 + 9x_3$

Kısıtlar:

$$5x_1 + 8x_2 + 10x_3 \leq 1000 \longrightarrow 5x_1 + 8x_2 + 10x_3 + S_1 = 1000$$

$$x_2 \leq 150 \longrightarrow x_2 + S_2 = 150$$

$$x_1 \geq 50 \longrightarrow x_1 - S_3 + A_1 = 50$$

$$x_3 \geq 50 \longrightarrow x_3 - S_4 + A_2 = 50$$

$$Z_{\min} = 7x_1 + 6x_2 + 9x_3 \longrightarrow Z_{\min} = 7x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 0.S_1 + 0.S_2 + MA_1 + MA_2$$

“ \leq ” şeklinde ise: S aylak (=slack) değişken eklenir, amaç fonksiyonundaki katsayısı “0” dir.

“=” şeklinde ise: A yapay değişkeni eklenir. Yapay değişkenin amaç fonksiyonundaki katsayısı minimizasyonda +M dir.

“ \geq ” şeklinde ise: S atık değişken çıkarılır, A yapay (artificial) değişkeni eklenir. Yapay değişkenin amaç fonksiyonundaki katsayısı minimizasyonda ise +M dir.

Çözüm:

Amaç fonksiyonu: $Z_{\min} = 7x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 0 \cdot S_1 + 0 \cdot S_2 + MA_1 + MA_2$

$$5x_1 + 8x_2 + 10x_3 + S_1 = 1000$$

$$x_2 + S_2 = 150$$

$$x_1 - S_3 + A_1 = 50$$

$$x_3 - S_4 + A_2 = 50$$

Başlangıç Simpleks Tablo									
Temel	Temel Değişkenler	7	6	9	0	0	M	M	STD
	Amaç Satırı	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	A_1	A_2	
S_1	0	5	8	10	1	0	0	0	1000
S_2	0	0	1	0	0	1	0	0	150
A_1	M	1	0	0	0	0	1	0	50
A_2	M	0	0	1	0	0	0	1	50
Birim katkı kaybı	Z_j	M	0	M	0	0	M	M	100M
İndeks Satırı	$C_j - Z_j$	7-M	6	9-M	0	0	0	0	

