T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN HİBRİTLEŞTİRİLEBİLİR SÜREKLİ OLMAYAN GALERKİN METODU

MEHMET FATİH KARAASLAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. MUHAMMET KURULAY

İSTANBUL, 2016

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN HİBRİTLEŞTİRİLEBİLİR SÜREKLİ OLMAYAN GALERKİN METODU

Mehmet Fatih KARAASLAN tarafından hazırlanan tez çalışması 05.05.2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Muhammet KURULAY

Yıldız Teknik Üniversitesi

Eş Danışman

Doç. Dr. Fatih ÇELİKER

Wayne State University

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Muhammet KURULAY

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Ahmet DURAN

İstanbul Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Aydın SEÇER

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Adem Cengiz ÇEVİKEL

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Doğan KAYA

İstanbul Ticaret Üniversitesi _____

Bu çalışma, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'nün 2013-01-03-DOP03 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Doktora çalışmalarımın her aşamasında yardımlarını esirgemeyerek beni yönlendiren, değerli görüşlerinden faydalandığım danışman hocam sayın Doç. Dr. Muhammet KURULAY'A, bilgi, tecrübe ve tez konusu seçiminde bana öncülük eden eş danışman hocam sayın Doç. Dr. Fatih ÇELİKER'e teşekkür ederim.

Hayatımın her safhasında bana olan desteğini ve güvenini esirgemeyen sevgili eşim Arife Aysun KARAASLAN'a, biricik, sevimli ve enerji dolu oğlum Yiğit Emir KARAASLAN'a sonsuz sevgilerimi sunuyorum. Eğitim hayatım boyunca her türlü maddi ve manevi desteklerini sunan anneme ve babama en içten sevgi ve saygılarımı sunarım.

Mayıs, 2016

Mehmet Fatih KARAASLAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ vii

KISALTMA LİSTESİ viii

ŞEKİL LİSTESİ ix

ÇİZELGE LİSTESİ x

ÖZET xi

ABSTRACT xii

BÖLÜM 1

GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 6
1.3 Hipotez 6

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR 7

2.1 Özel fonksiyonlar 7
2.1.1 Gamma fonksiyonu 7
2.1.2 Beta fonksiyonu 8
2.1.3 Mittag-Leffler fonksiyonu 9
2.2 Riemann-Liouville ve Caputo Kesirli Türevi 11
2.3 Riemann–Liouville Kesirli İntegrali 12
2.4 Lineerlik 13
2.5 Leibniz Kuralı 14
2.6 Laplace Dönüşümü 16

BÖLÜM 3

BAZI KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN HİBRİTLEŞTİRİLEBİLİR SÜREKLİ OLMAYAN GALERKİN METODU 18

3.1 Hibritleştirilebilir Sürekli Olmayan Galerkin Metodu 18
3.1.1 HDG Metodunun Tanımı 18
3.1.2 Yaklaşık Çözümün Karakterizasyonu 21
3.1.2.1 Yerel Çözücüler 21
3.1.2.2 Global Sistem 34
3.1.3 Kesin Çözümün Varlığı ve Tekliği 41

BÖLÜM 4

BAGLEY-TORVİK DENKLEMİ 44
4.1 Bagley-Torvik Denklemi için HDG Metodu 44

BÖLÜM 5

SAYISAL ÖRNEKLER 49

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER 57
KAYNAKLAR 59

EK-A

KESİRLİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN VARLIĞI VE TEKLİĞİ 64
ÖZGEÇMİŞ 68

SİMGE LİSTESİ

$A^n[a,b]$	$(n-1)$. mertebeye kadar $[a,b]$ aralığında sürekli türeve sahip fonksiyonlar kümesi
$B(z,w)$	Beta fonksiyonu
C^n [a,b]	n. mertebeye kadar $[a,b]$ aralığında sürekli türevlere sahip fonksiyonlar uzayı
$\frac{d^n}{dx^n}$	n. mertebeden tamsayı türev operatörü
${}^{RL}_{a}D^{\alpha}_{x}$, ${}_{a}D^{\alpha}_{x}$	$\alpha > 0$ kesirli mertebeden a'dan x 'e sağ Riemann-Liouville türevi
${}^{RL}_{x}D^{\alpha}_{b}$, ${}_{x}D^{\alpha}_{b}$	$\alpha > 0$ kesirli mertebeden x'den b'ye sol Riemann-Liouville türevi
${}^{C}_{a}D^{\alpha}_{x}$	$\alpha > 0$ kesirli mertebeden a'dan x 'e sağ Caputo türevi
${}^{C}_{x}D^{\alpha}_{b}$	$\alpha > 0$ kesirli mertebeden x'den b'ye sol Caputo türevi
erf , $erfc$	Hata fonksiyonları
$E_{\alpha,\beta}(z)$	Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_t(v,a)$	Melin-Ross fonksiyonu
$f^{(n)}$	f fonksiyonunun n. mertebeden tamsayı türevi
$G, \hat{G}$	Green fonksiyonu
$h_r(z,n)$	n. dereceden hiperbolik fonksiyon
${}_{a}I^{\alpha}_{x}$	$\alpha > 0$ kesirli mertebeden a'dan x 'e sağ Riemann-Liouville integrali
${}_{x}I^{\alpha}_{b}$	$\alpha > 0$ kesirli mertebeden x'den b'ye sol Riemann-Liouville integrali
L^1	Lebesque integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
L^2	Karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$K_r(z,n)$	n. dereceden trigonometrik fonksiyon
M_h	Lagrange çarpım uzayı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$R_{\alpha}(\beta,t)$	Robotov fonksiyonu
$W(z;\alpha,\beta)$	Wright fonksiyonu
Z^+	Pozitif tamsayılar kümesi
$\Gamma(z)$	Gamma fonksiyonu

KISALTMA LİSTESİ

CG	Sürekli Galerkin
DG	Sürekli olmayan Galerkin
DOF	Birbirinden bağımsız parametre sayısı
HDG	Hibritleştirilebilir sürekli olmayan Galerkin

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 Gamma fonksiyonu 8
Şekil 3.1 Afin dönüşümü 23
Şekil 3.2 Kararlılık parametresinin düğümlerdeki gösterimi 25
Şekil 3.3 Kararlılık parametresinin komşu iki düğümdeki gösterimi 25
Şekil 3.4 $m \in M_h$ elemanının gösterimi 27
Şekil 3.5 Qm_j'nin sol ve sağ komşuluktaki gösterimi 27
Şekil 3.6 Pm_j'nin sol ve sağ komşuluktaki gösterimi 28
Şekil 3.7 Um_j'nin sol ve sağ komşuluktaki gösterimi 28
Şekil 3.8 φ_i bazının I_{l-1} aralığındaki gösterimi 30
Şekil 3.9 φ_i bazının I_l aralığındaki gösterimi 32
Şekil 3.10 v fonksiyonunun I_{l-1} aralığındaki gösterimi 35
Şekil 3.11 Qm_j'nin x_l düğümünün sol ve sağ komşuluğundaki değeri 37
Şekil 3.12 $\hat{Q}g$'nin d matrisine olan katkısı 40
Şekil 4.1 Newton akışkanına batırılmış m kütleli levha 44

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 5.1 Örnek 5.1'in yakınsaklığı, $\tau = 0.1$ 50
Çizelge 5.2 Örnek 5.2'nin yakınsaklığı, $\tau = 1/h$ 52
Çizelge 5.3 Örnek 5.3'ün yakınsaklığı, $\tau = 0.1$ 54
Çizelge 5.4 Örnek 5.4'ün yakınsaklığı, $\tau = 1/h$ 55

ÖZET

BAZI KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN HİBRİTLEŞTİRİLEBİLİR SÜREKLİ OLMAYAN GALERKİN METODU

Mehmet Fatih KARAASLAN

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Muhammet KURULAY

Eş Danışman: Doç. Dr. Fatih ÇELİKER

Bu tezde, hibritleştirilebilir sürekli olmayan Galerkin (HDG) metodu, Caputo türevini içeren $\alpha,\ \beta > 0$ mertebeli kesirli sınır değer problemine ve Bagley-Torvik denklemi ile verilen sınır değer problemine uygulandı. HDG metodunun en önemli özelliklerinden birisi, tanım kümesinin tüm iç bölgesindeki bağımsız parametre sayısını yok eder ve sadece elemanların arakesitinde bulunan bilinmeyen değerleri içeren global bir lineer sistem elde ederiz. Lineer sistemdeki global matris, üç köşegensel, simetrik ve pozitif tanımlı olduğundan metot, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerde etkili ve yakınsak sonuçlar vermektedir. Buradan hareketle, HDG metodu belirtilen kesirli sınır değer problemleri için incelendi. Buna göre, problemlerin yaklaşık çözümleri MATLAB programı kullanılarak verildi. Ayrıca, uygun bir şekilde seçilen kararlılık parametresinin elde edilen sistemin yakınsaklığı üzerinde çok önemli bir etkiye sahip olduğu görüldü.

Anahtar Kelimeler: Hibritleştirilebilir sürekli olmayan Galerkin metodu, Bagley-Torvik denklemi, kesirli sınır değer problemi, Caputo türevi, kararlılık parametresi

ABSTRACT

HYBRIDIZABLE DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR SOME FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Mehmet Fatih KARAASLAN

Department of Mathematics

PhD. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Muhammet KURULAY

Co-Adviser: Assoc. Prof. Dr. Fatih ÇELİKER

In this thesis, the hybridizable discontinuous Galerkin (HDG) method is applied to a fractional boundary value problem involving Caputo derivative with order $\alpha,\ \beta > 0$ and a boundary value problem given with Bagley-Torvik equation. One of the main features of the HDG method is that it eliminates all internal degrees of freedom and we obtain a global linear system that only involves unknown values at the element interfaces. Since the global matrix in the linear system is tridiagonal, symmetric and positive definite, the method gives effective and convergent results in the ordinary and partial differential equations. From this point of view, the HDG method is investigated for the mentioned fractional boundary value problems. Accordingly, the approximate solutions of the problems are given using MATLAB programme. Also, it is seen that an appropriate choice of the stability parameter has a very important effect on the convergence of the obtained system.

Keywords: Hybridizable discontinuous Galerkin method, Bagley-Torvik equation, fractional boundary value problem, Caputo derivative, stability parameter

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Kesirli hesaplamalar, yeni bir konu olmayıp klasik hesaplamalar ile hemen hemen aynı tarihsel sürece sahiptir. Burada kullandığımız "hesaplama" kavramı, integral ve türev alma anlamında kullanılmaktadır. Kesirli hesaplamalar ile ilgili ilk araştırmalar, tamsayı mertebeden $\frac{d^n y}{dx^n}$ türevini, n'nin kesirli bir sayı olması durumuna genişletmenin mümkün olup olmayacağı sorusuyla başlamıştır. Daha sonra, n değerinin irrasyonel veya karmaşık bir sayı olabilme ihtimali, sorunun boyutunu artırmıştır. Dolayısıyla kesirli hesaplamayı, keyfi mertebeden türev ve integral olarak adlandırmanın daha iyi olacağı kanaatine varılmıştır.

Leibniz, $\frac{d^n y}{dx^n}$ şeklindeki türev notasyonunu bulmuştur. L'Hopital, Leibniz'e 30 Eylül 1695'teki mektubunda n değerinin ½ gibi kesirli bir değer alması durumunda $\frac{d^n y}{dx^n}$'nin ne anlama geleceğini sormuştur. Leibniz ise $d^{1/2}\overline{xy}$ veya $d^{1:2}\overline{xy}$ terimlerinin, sonsuz serilerin sadece pozitif ve negatif üslerle kullanılmasına rağmen yine de sonsuz bir seri yoluyla ifade edilebileceğini söylemiştir. Daha sonra Leibniz, aynı mektuba, $d^{1/2}x$'in $x\sqrt{dx:x}$'e eşit olacağını ve bu ifadenin gelecekte yararlı sonuçların elde edileceği açık bir paradoks olduğunu eklemiştir. Leibniz'in tahmininin ne kadar doğru olduğu, kesirli hesaplamaların günümüzde birçok alana başarılı bir şekilde uygulanmasından görülmektedir. Bu alanlar arasında fizik ve mühendisliğin sinyal işleme [1], kontrol

mühendisliği [2], [3], elektromanyetik [4], biyolojik bilimler [5], akışkanlar mekaniği [6], elektrokimya [7], difüzyon süreçleri [8], viskoelastik materyaller dinamiği [9], süreklilik ve istatistiksel mekanik [10] ile küresel alev yayılması [11] gösterilebilir. Kesirli diferansiyel denklemlerin bilim adamları arasında yoğun bir şekilde çalışılmasının nedenleri arasında fiziksel modelleri daha doğru ifade edebilmesi ve fiziksel olayın karakterinin anlaşılması, karmaşık yapıdaki sistemleri anlamaya yönelik yeni bir bakış açısı sunması gösterilebilir. Bu özellik, tamsayı mertebeli türevlerle karşılaştırıldığı zaman kesirli türevler için önemli bir avantaj olarak görülmektedir.

Kesirli diferansiyel denklemlerin genelde kesin çözümünü veren bilinen bir metot mevcut olmayıp daha çok nümerik teknikler kullanılmaktadır. Klasik diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanılan bazı metotlar, kesirli diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü bulmak için kullanılmıştır. Örnek olarak, Adomian ayrıştırma metodu [12], homotopi pertürbasyon metodu [13], homotopi analiz metodu [14], [15], varyasyonel iterasyon metodu [16], diferansiyel dönüşüm metodu [17], sinc-Galerkin metodu [18], genelleştirilmiş diferansiyel dönüşüm metodu [19], sonlu fark metodu [20], kesirli lineer çok adımlı metot [21] ve predictor-corrector metodu [22] verilebilir. Ayrıca, spline yaklaşımı [23] ve collocation metodu [24] ile kesirli başlangıç değer problemlerinin çözümünde etkili sonuçlar elde edilmektedir. Bununla birlikte kübik spline collocation metodu [25], kesirli sınır değer problemlerinin iki özel sınıfını çözmek için kullanılmıştır.

Kesirli sınır değer problemleri teorisi, son zamanlarda oldukça dikkat çekmektedir. Bu tip problemlerdeki temel sorun, problemin kesin çözümünün varlığının bulunmasındaki zorluktan kaynaklanmaktadır. Bilim adamları, [26-31]'de farklı tipteki kesirli sınır değer problemlerinin çözümlerinin varlığı ile ilgili çalışmalar yapmışlardır. Son zamanlarda, bu tip problemlerin pozitif çözümleri ile ilgili yapılan araştırmaları [32-37]'de görmek mümkündür. Kilbas ve Trujillo [38], lineer kesirli Dirichlet sınır şartına sahip problemi ele almıştır.

Ervin ve Roop [39],

$$-Da(p_0 D_x^{-\beta} + q_x D_1^{-\beta})Du + b(x)Du + c(x)u = f \ , \ 0 < x < 1$$

$$u(0) = 0, \ u(1) = 0$$

şeklindeki kesirli adveksiyon-dispersiyon denkleminde Galerkin yaklaşımını incelemiştir. Burada $0 \le \beta < 1$ olup $p+q=1$ olacak şekilde $0 \le p,q \le 1$ seçilir. Ayrıca $D,$ klasik türev operatörü, ${}_0D_x^{-\beta}$ ve ${}_xD_1^{-\beta}$ ise sırasıyla Riemann-Liouville sol ve sağ integral operatörleridir.

Nakhushev [40],

$$y''(x)+\sum_{k=1}^{m} a_k(x)({}_0D_x^{\alpha_k} w_k y)(x)+b(x)y(x)=f(x),\ 0 \le x \le 1$$

$$y(0)=0,\ y(1)=0$$

biçimindeki kesirli türeve sahip diferansiyel denklemi ele almıştır. Burada $0<\alpha_k<1$ $(k=1,2,\ldots,m)$ olup $a_k(x),\ w_k(x)$ ve $b(x)$ katsayıları üzerindeki belirli şartlar altında problemin çözülebileceğini ve kesin çözüm $y(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$'in tek olduğunu ispatlamıştır.

Agarwall vd. [32],

$$D^{\alpha}u(x)+f(x,u(x),D^{\mu}u(x))=0,$$

$$u(0)=0,\ u(1)=0,$$

olarak verilen singüler kesirli sınır değer probleminin çözümünün varlığını araştırmıştır. Burada $1<\alpha<2,\ 0<\mu \le \alpha-1$ reel sayılar olup D^{α}, Riemann-Liouville türevini belirtir. Ayrıca f, $[0,1]\ \mathrm{x}\ B,\ B=(0,\infty)\ \mathrm{x}\ \mathbb{R}$ üzerinde Caratheodory şartını sağlayan pozitif bir fonksiyon olup $x=0$'da singüler değer almaktadır.

Aleroev vd. [41], dört tip Caputo ve Riemann-Liouville türeve sahip problemi ele almıştır. Bunlardan Caputo türevini içeren

$${}_a^C D_x^{\alpha}u(x)+g(x,u(x),{}_a^C D_x^{\beta}u(x))=0,\ a<x<b,\ 1<\alpha \le 2,\ 0<\beta \le 1, \qquad (1.1)$$

$$u(a)=\gamma_1,\ u(b)=\gamma_2, \qquad (1.2)$$

sınır değer problemini inceleyelim. Burada $u:[a,b] \to \mathbb{R}$, $f:[a,b]\ \mathrm{x}\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g:[a,b]\ \mathrm{x}\ \mathbb{R}\ \mathrm{x}\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli olup g fonksiyonu, $K_g, L_g>0$ olacak şekilde

$$|g(t,x_2,y_2)-g(t,x_1,y_1)| \le K_g |x_2-x_1| + L_g |y_2-y_1| \tag{1.3}$$

Lipschitz şartını sağlar. Aleroev, (1.3) denklemindeki $K_g, L_g > 0$ Lipschitz sabitlerini kullanarak (1.1)-(1.2) probleminin kesin çözümünün tekliğini ispatlamış ve Shooting metodunu düzenleyerek problemin yaklaşık çözümünü elde etmiştir.

ur Rehman ve Khan [42], (1.1)-(1.2) tipindeki kesirli sınır değer probleminde Arzela-Ascoli ve Schauder sabit nokta teoremini kullanarak kesin çözümün varlığını ve büzülme teoremi ile bu çözümün tek olduğunu ispatlamıştır. Ayrıca [43]'te ise lineer kesirli sınır değer problemlerini çözmek için integrasyonun Haar dalga matrisine dayanan nümerik bir şema kullanmıştır.

Bu tezde ise $u:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f:[a,b]\mathrm{x}\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:[a,b]\mathrm{x}\,\mathbb{R}\,\mathrm{x}\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere kesirli sınır değer problemlerinin özel bir sınıfı olan (1.1)-(1.2) problemine HDG metodu uygulanacaktır. Ardından Newton akışkanına batırılmış katı bir levhanın hareketinin modellemesinde ortaya çıkan Bagley-Torvik denklemi [44], [45] ile verilen

$$u''(x) + {}_0^C D_x^{3/2} u(x) + u(x) = f(x), \quad \Omega = (0,1) \tag{1.4}$$

$$u = g = u_D, \qquad \partial\Omega = \{0,1\} \tag{1.5}$$

Kesirli sınır değer probleminin yaklaşık çözümü HDG metodu kullanılarak incelenecektir. (1.4)-(1.5) problemine benzer problemler ayrıca [43], [46-48]'de verilmektedir.

HDG metodu, ilk olarak 2009 yılında Cockburn, Gopalakrishnan ve Lazarov [49] tarafından kullanılmaya başlanmış ve ikinci mertebeden eliptik denklemlerin temel bir çerçevesi oluşturulmuştur. Bu metodun ana özelliği, yaklaşık çözümlerin global zayıf formülasyonu sağlayan nümerik izlere göre eleman eleman ifade edilmesini sağlayarak metodun uygulanmasının daha kolay hale gelmesini sağlamaktır. HDG metodunda elde edilen global lineer sistem, küçük yerel matrisler ve üç köşegensel matristen oluştuğundan hesaplama maliyeti oldukça düşüktür. Ayırıca, uygun bir şekilde seçilen kararlılık parametresinin elde edilen sistemin yakınsaklığı üzerinde çok önemli bir etkiye sahip olduğu görülmüştür. HDG metodu, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin

nümerik çözümünde farklı uygulama alanlarına sahiptir. Bu konuda birçok makale yapılmasına rağmen kesirli diferansiyel denklemlerin analizi ve tanıtılmasına Cockburn ve Mustapha [50] öncülük etmiştir.

Sürekli olmayan Galerkin (discontinuous Galerkin-DG) metodu, yerel olarak korunumlu olabilen bir Gauss formülasyonu aracılığıyla denklemleri alıp farklı bir tarzda uygulama yapmaktadır. Bu metot, herhangi bir tipteki şebeke, eleman şekli veya baz fonksiyonlarını ele alabilmektedir ve kesinlik mertebesini azaltmayan bir kararlılık mekanizması yapısına sahiptir. DG metodunun belirttiğimiz kullanılabilir ve avantajlı özelliklerinin yanında eleştirilen yönleri de vardır. DG metodunda, aynı şebeke ve polinom derecesi için bilinmeyenlerin sayısı, sürekli Galerkin (continuous Galerkin-CG) metoduna göre çok fazladır. Ayrıca DG metoduyla elde edilen global sistem, tanım kümesinin aralıklarındaki bağımsız parametreler cinsinden olduğu için hesaplama maliyeti yüksektir. HDG metodunda ise global sistem, sadece elemanların sınırındaki bağımsız parametreler cinsinden ifade edildiği için hesaplama maliyeti daha düşüktür.

HDG metodunun genel olarak DG metoduna göre tercih edilme sebepleri şunlardır:

1- HDG metodunda, sadece iç sınırlar üzerinde nümerik iz denilen bilinmeyenler vardır.

2- Global sistemi tanımlamak için yerel çözücüler ve geçiş şartı kullanılır.

3- Her bir eleman üzerindeki bilinmeyenlerin sayısı yerel hesaplama yoluyla bulunur.

4- Herhangi pozitif bir kararlılık parametresi için sistemin kararlılığı kesindir.

5- DG metodunun aksine türev veya diğer bilinmeyenlerin değeri için optimum hata tahminini verir.

Tezin kalan bölümleri şu şekilde düzenlenmiştir. Bölüm 2 ‘de kesirli hesaplamalar ile ilgili temel tanımlar ve kavramlar verilmiştir. Bölüm 3’te HDG metodu, $\alpha, \beta > 0$ kesirli mertebeden Caputo türevini içeren sınır değer problemi üzerinde ayrıntılı olarak açıklanmıştır. Bölüm 4’te özel bir kesirli diferansiyel denklem tipi olan Bagley-Torvik denklemi ile verilen sınır değer probleminde HDG metodunun uygulama süreci kısaca verilmiştir. Bölüm 5’te ise HDG metodunun, ele aldığımız problemlerdeki performansı sayısal örnekler üzerinde incelenmiştir. Her bir örnek, Matlab programı kullanılarak çözülmüş ve elde edilen sonuçlar çizelgelerle gösterilmiştir.

1.2 Tezin Amacı

HDG metodu, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerde etkili ve yakınsak sonuçlar vermektedir. Metodun yapısında özellikle yerel çözücülerin anlaşılması ve uygulanması son derece önemlidir. Çünkü global lineer sistem, yerel çözücülere göre ifade edilir ve yaklaşık çözümler yerel çözücüler cinsinden yazılır. Metot karmaşık gibi gözükmesine rağmen yerel çözücüleri uygun bir şekilde çözüm sürecine katmak metodun anlaşılmasını sağlar. Bu doğrultuda, HDG metodunun kesirli sınır değer problemlerinde etkili ve yakınsak sonuç vermesi, bu sayede metodun farklı tipteki kesirli sınır değer problemlerine uygulanabilmesi amaçlanmaktadır.

1.3 Hipotez

Bu tezde, HDG metodunun Caputo türevini içeren $\alpha, \beta > 0$ kesirli mertebeli sınır değer problemi ve Bagley-Torvik denklemi ile verilen kesirli sınır değer problemi için etkili ve yakınsak sonuçlar vereceği öne sürülmektedir. HDG metodunun belirtilen denklemlerdeki uygulama süreci gösterilecek ve metodun yakınsak sonuç verip vermediği incelenecektir.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Kesirli türev ve integralin birçok tanımı vardır. Bunlardan bazıları Riemann-Liouville, Caputo, Riesz, Riesz-Caputo, Weyl, Grunwald-Letnikov, Hadamard, Chen olarak sayılabilir. Bu tezde, sadece Riemann-Liouville ve Caputo operatörleri üzerinde durulacaktır. İlk olarak kesirli hesaplamalarda kullanılan bazı temel tanımları ve lemmaları verelim.

2.1 Özel fonksiyonlar

Özel fonksiyonlar, keyfi veya kesirli mertebeli diferansiyel denklemler teorisinde önemli bir rol oynamaktadır. Bu fonksiyonlardan Gamma, Beta, Mittag-Leffler ve Wright fonksiyonunu verelim [44].

2.1.1 Gamma fonksiyonu

Kesirli diferansiyel denklemlerdeki en genel fonksiyonlardan olan Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt \tag{2.1}$$

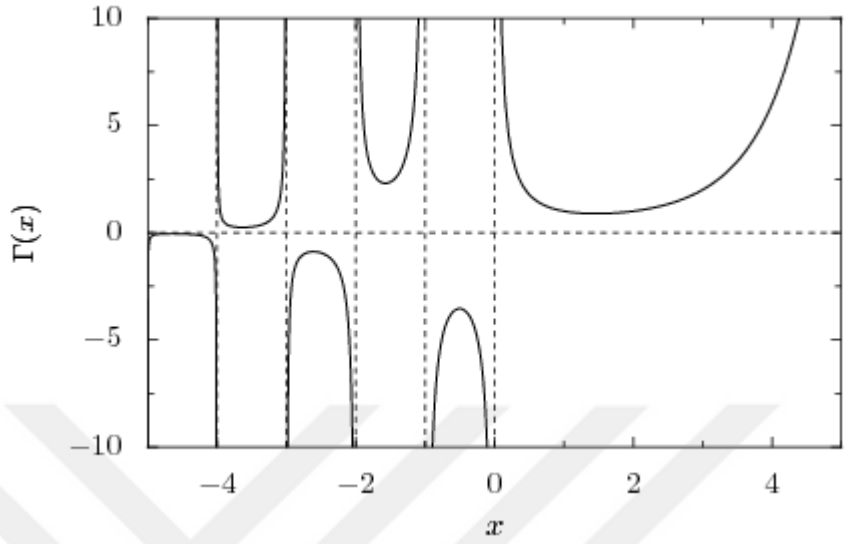
olarak tanımlanır. Burada z, herhangi bir reel veya karmaşık sayı olabilir. Ayrıca Gamma fonksiyonuna ait bazı özellikler $n=0,1,2,3,\ldots$ için

a) $\Gamma(n)=(n-1)!$

b) $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$

c) $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!}$

olur. Gamma fonksiyonunun reel eksen üzerindeki grafiği



Şekil 2.1 Gamma fonksiyonu

şeklindedir.

2.1.2 Beta fonksiyonu

Gamma fonksiyonunun belirli kombinasyonlarının yerine Beta fonksiyonunu kullanmak daha uygundur. Beta fonksiyonu genellikle

$$B(z,w)=\int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau,\ (\mathrm{Re}(z)>0,\ \ \mathrm{Re(w)}>0) \tag{2.2}$$

olarak tanımlanır. Beta ile Gamma fonksiyonu arasındaki ilişki

$$B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

şeklindedir.

2.1.3 Mittag-Leffler fonksiyonu

Mittag-Leffler fonksiyonu, kesirli diferansiyel denklemlerdeki kuvvet serisi çözümlerinde kullanıldığından kesirli hesaplamalarda önemli bir role sahiptir. Bu fonksiyon iki parametreli olup

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\ (\alpha>0,\ \beta>0) \tag{2.3}$$

biçimindeki seri açılımı formunda gösterilir ve bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

1) $E_{\alpha,1}(z)=E_{\alpha}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\ (\alpha>0)$

2) $E_{1,1}(z)=E_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=e^z$

3) $E_{1,2}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+2)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+1)!}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{e^z-1}{z}$

4) $E_{1,3}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+3)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)!}=\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+2}}{(k+2)!}=\frac{e^z-1-z}{z^2}$

5) $E_{1,m}(z)=\frac{1}{z^{m-1}}\left[e^z-\sum_{k=0}^{m-2}\frac{z^k}{k!}\right]$

Ayrıca Mittag-Leffler fonksiyonu ile ilişkili bazı özel fonksiyonlar aşağıdaki gibi tanımlanır [51].

Tanım 2.1 Wright fonksiyonu

Wright fonksiyonu, lineer kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde önemli bir rol oynamaktadır. Bu fonksiyon, iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu $E_{\alpha,\beta}(z)$ ile ilişkili olup

$$W(z;\alpha,\beta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\Gamma(\alpha k+\beta)} \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2 Hiperbolik fonksiyon

n . dereceden hiperbolik fonksiyon

$$h_r(z,n)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{nk+r-1}}{(nk+r-1)!}=z^{r-1}E_{n,r}(z^n),\ r=1,2,\ \ldots \tag{2.5}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.3 Trigonometrik Fonksiyon

n . dereceden trigonometrik fonksiyon

$$K_r(z,n)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{nk+r-1}}{(nk+r-1)!}=z^{r-1}E_{n,r}(-z^n) \tag{2.6}$$

olup

$$E_{\frac{1}{2},1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}=e^{z^2}erfc(-z) \tag{2.7}$$

ve hata fonksiyonunun tümleyeni $erfc$,

$$erfc(z)=\frac{2}{\pi^{1/2}}\int_z^{\infty}e^{-u^2}du=1-erf\,(z),\ z\in C \tag{2.8}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.4 Melin-Ross fonksiyonu

Bu fonksiyon,

$$E_t(v,a)=t^v\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(at)^k}{\Gamma(v+k+1)}=t^vE_{1,v+1}(at) \tag{2.9}$$

şeklindedir.

Tanım 2.5 Robotov fonksiyonu

Robotov fonksiyonu,

$$R_\alpha(\beta,t)=t^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\beta^k t^{k(\alpha+1)}}{\Gamma((1+\alpha)(k+1))}=t^\alpha E_{\alpha+1,1,+1}(\beta t^{\alpha+1}) \tag{2.10}$$

olarak tanımlanır.

2.2 Riemann-Liouville ve Caputo Kesirli Türevi

Tanım 2.7 [52] $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon, α pozitif reel sayı ve n tamsayı olmak üzere $n-1\le\alpha<n$ koşulunu sağlasın. Buna göre f fonksiyonunun

1) α . mertebeden sol ve sağ Riemann–Liouville türevleri sırasıyla

$${}^{RL}_{a}D^{\alpha}_{x}f(x)=\frac{d^n}{dx^n}\,{}_aI^{n-\alpha}_{x}f(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x(x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt \tag{2.11}$$

$${}^{RL}_{x}D^{\alpha}_{b}f(x)=(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\,{}_xI^{n-\alpha}_{b}f(x)=\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_x^b(t-x)^{n-\alpha-1}f(t)dt \tag{2.12}$$

olarak tanımlanır.

2) α . mertebeden sol ve sağ Caputo türevleri sırasıyla

$${}^{C}_{a}D^{\alpha}_{x}f(x)={}_aI^{n-\alpha}_{x}\frac{d^n}{dx^n}f(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x(x-t)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)dt \tag{2.13}$$

$${}^{C}_{x}D^{\alpha}_{b}f(x)=(-1)^n\,{}_xI^{n-\alpha}_{b}\frac{d^n}{dx^n}f(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_x^b(-1)^n(t-x)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)dt \tag{2.14}$$

biçiminde verilir.

Ayrıca Riemann–Liouville ve Caputo kesirli türevleri arasında

$${}^{C}_{a}D^{\alpha}_{x}f(x)={}^{RL}_{a}D^{\alpha}_{x}f(x)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)}(x-a)^{j-\alpha} \tag{2.15}$$

$${}^{C}_{x}D^{\alpha}_{b}f(x)={}^{RL}_{x}D^{\alpha}_{b}f(x)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(b)}{\Gamma(j-a+1)}(b-x)^{j-\alpha} \tag{2.16}$$

şeklinde bir ilişki vardır. Aynı zamanda aşağıda verildiği gibi bazı durumlarda Caputo türevi, Riemann-Liouville türevine eşit olur.

$$f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0\Rightarrow {}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}f(x)={}_{a}^{RL}D_{x}^{\alpha}f(x) \tag{2.17}$$

$$f(b)=f'(b)=\ldots=f^{(n-1)}(b)=0\Rightarrow {}_{x}^{C}D_{b}^{\alpha}f(x)={}_{x}^{RL}D_{b}^{\alpha}f(x) \tag{2.18}$$

Caputo kesirli türevi, tamsayı mertebeden türevler içeren başlangıç ve sınır şartlarını içerdiğinden fiziksel olarak yorumlanması, Riemann-Liouville türevine göre daha açıktır. O yüzden bu tezde Caputo [53] tarafından önerilen ${}^{C}D^{\alpha}$ Caputo kesirli türevi kullanılmıştır. Ayrıca sabit bir fonksiyonun türevi, Caputo türevine göre 0'a eşitken Riemann-Liouville türevinde ise 0'dan farklıdır.

2.3 Riemann–Liouville Kesirli İntegrali

Tanım 2.8 [52]

a) α . mertebeden sol ve sağ Riemann–Liouville kesirli integralleri sırasıyla

$${}_{a}I_{x}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, \tag{2.19}$$

$${}_{x}I_{b}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{b}(t-x)^{\alpha-1}f(t)dt \tag{2.20}$$

olur.

b) $\alpha>0$ olmak üzere kesirli mertebeli problemler için kısmi integrasyon

$$\int_{a}^{b}g(x).{}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}f(x)dx=f(x).{}_{x}I_{b}^{1-\alpha}g(x)|_{x=a}^{x=b}+\int_{a}^{b}f(x).{}_{x}D_{b}^{\alpha}g(x)dx \tag{2.21}$$

$$\int_{a}^{b}g(x).{}_{x}^{C}D_{b}^{\alpha}f(x)dx=-f(x).{}_{a}I_{x}^{1-\alpha}g(x)|_{x=a}^{x=b}+\int_{a}^{b}f(x).{}_{a}D_{x}^{\alpha}g(x)dx \tag{2.22}$$

olarak ifade edilir. Burada $f(a)=f(b)=0$ ise formül daha basit olarak

$$\int_a^b g(x).{}_a^C D_x^\alpha f(x)dx=\int_a^b f(x).{}_x D_b^\alpha g(x)dx \tag{2.23}$$

$$\int_a^b g(x).{}_x^C D_b^\alpha f(x)dx=\int_a^b f(x).{}_a D_x^\alpha g(x)dx \tag{2.24}$$

şeklindedir.

c) Eğer α , 1'e giderse kısmi integrasyon formülü

$$\int_a^b g(x).f'(x)dx=-\int_a^b f(x).g'(x)dx+\left[g(x).f(x)\right]_a^b \tag{2.25}$$

$$\int_a^b g(x).\left(-f'(x)\right)dx=\int_a^b f(x).g'(x)dx-\left[g(x).f(x)\right]_a^b \tag{2.26}$$

biçimindeki klasik integrasyona dönüşür.

Teorem 2.9 [54] $f(x)=(x-a)^v,\ (v\in\mathbb{R})$ fonksiyonunun p . mertebeden kesirli türevi ve integrali sırasıyla

$${}_0D_x^p f(x)={}_0D_x^p(x-a)^v=\frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-p+1)}(x-a)^{v-p} \tag{2.27}$$

$${}_0D_x^{-p} f(x)={}_0D_x^{-p}(x-a)^v=\frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+p+1)}(x-a)^{v+p} \tag{2.28}$$

olarak tanımlanır.

2.4 Lineerlik

Kesirli türevler, tamsayı mertebeli türevlerde olduğu gibi lineer bir operatör olup

$$D^p(\lambda f(t)+\mu g(t))=\lambda D^p f(t)+\mu D^p g(t)) \tag{2.29}$$

şeklinde tanımlanır. Burada D^p , kesirli türevin herhangi bir dönüşümünü gösterir. Mesela $k-1\le p<k$ olmak üzere p . mertebeden Riemann-Liouville türevi

$$D^p(\lambda f(t)+\mu g(t)) = \frac{1}{\Gamma(k-p)}\frac{d^k}{dt^k}\int_a^t (t-\tau)^{k-p-1}(\lambda f(t)+\mu g(t))d\tau$$
$$= \frac{\lambda}{\Gamma(k-p)}\frac{d^k}{dt^k}\int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(t)d\tau + \frac{\mu}{\Gamma(k-p)}\frac{d^k}{dt^k}\int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} g(t)d\tau$$
$$= \lambda\, {}_aD_t^p f(t) + \mu\, {}_aD_t^p g(t)$$

olarak yazılır.

2.5 Leibniz Kuralı

$f(\tau),\ [a,t]$'de sürekli bir fonksiyon ve $\varphi(\tau)$'nun bu aralıkta $n+1$ tane sürekli türevi olsun. O takdirde $\varphi(t)\cdot f(t)$ çarpımının kesirli türevi

$${}_aD_t^p(\varphi(t) f(t)) = \sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\varphi^{(k)}(t)\,{}_aD_t^{p-k} f(t) - R_n^p(t) \tag{2.30}$$

şeklindedir. Burada $n \geq p+1$ ve

$$R_n^p(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-p)}\int_a^t (t-\tau)^{-p-1} f(\tau)d\tau \int_\tau^t \varphi^{(n+1)}(\xi)(t-\xi)^n d\xi$$

olarak tanımlanır. Eğer $f(\tau)$ ve $\varphi(\tau)$'nun türevleri $[a,t]$'de sürekli ise $\lim_{n\to\infty} R_n^p(t) = 0$ elde edilir. Buna göre kesirli türevler için Leibniz formülü

$${}_aD_t^p(\varphi(t)\cdot f(t)) = \sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\varphi^{(k)}(t)\,{}_aD_t^{p-k} f(t) \tag{2.31}$$

formunda yazılır.

Lemma 2.10 [55]

a) $\alpha > 0$ olmak üzere her $f \in L^1[a,b]$ için

$${}^{RL}_aD_x^\alpha\ {}_aI_x^\alpha f = f \tag{2.32}$$

olur.

b) $\alpha > 0$, $n-1 \leq \alpha < n$ ve ${}_aI_x^{n-\alpha} f \in A^n[a,b]$ olsun. O takdirde

$$ {}_aI_x^{\alpha}\ {}_a^{RL}D_x^{\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} \lim_{z\to a^+} \frac{d^{n-k-1}}{dz^{n-k-1}}\ {}_aI_x^{n-\alpha} f(z) \tag{2.33} $$

sağlanır.

c) $\alpha > \theta > 0$ ve f sürekli bir fonksiyon olsun. O takdirde

$$ {}_a^C D_x^{\alpha}\ {}_aI_x^{\alpha} f = f\ ,\ {}_a^C D_x^{\theta}\ {}_aI_x^{\alpha} f = {}_aI_x^{\alpha+\theta} f \tag{2.34} $$

olur.

d) $\alpha \geq 0$, $n-1 \leq \alpha < n$ ve $f \in A^n[a,b]$ olsun. O zaman

$$ {}_aI_x^{\alpha}\ {}_a^C D_x^{\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(a)}{k!}(x-a)^k \tag{2.35} $$

olup burada $A^n[a,b]$, $(n-1)$. mertebeye kadar $[a,b]$ aralığında sürekli türeve sahip fonksiyonlar kümesidir.

e) D^m tamsayı mertebeli türev operatörü ile D^{α} kesirli operatörü arasında $\alpha \in (n-1,n)$, $n \in Z^+$, $m \in Z^+$ için

$$ D^m(D_t^{\alpha} h(t)) = D^{m+\alpha} h(t) = D^{\alpha}(D^m h(t)) \tag{2.36} $$

şeklinde bir bağıntı vardır.

f) $\alpha, \beta > 0$ için kesirli integral yarı grup özelliğini sağlar.

$$ I^{\alpha}(I^{\beta} h(t)) = I^{\beta}(I^{\alpha} h(t)) = I^{\alpha+\beta} h(t) \tag{2.37} $$

Lemma 2.11 [25] $\alpha > 0$, $n-1 \leq \alpha < n$ ve $f(x) \in C^n[a,b]$ olmak üzere

$$ {}_a^C D_x^{\alpha} f(x) = {}_aI_x^{n-\alpha} D^n f(x) \tag{2.38} $$

olarak yazılır. Burada $C^n[a,b]$, n. mertebeye kadar sürekli türeve sahip fonksiyonlar uzayını gösterir.

2.6 Laplace Dönüşümü

Tanım 2.12 (Riemann-Liouville ve Caputo türevinin Laplace dönüşümü) [44] α pozitif reel sayı, n tamsayısı için $n-1 \le \alpha < n$ olsun. Buna göre

1) Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümü

$$L\left[{}_0D_x^{\alpha} f(x)\right] = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_0D_x^{\alpha-k-1} f(x)\right]_{x=0} \tag{2.39}$$

olarak tanımlanır.

2) Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümü formülü

$$L\left[{}_0^C D_x^{\alpha} f(x)\right] = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \tag{2.40}$$

şeklindedir.

Lemma 2.13 $\alpha > 0$ olsun. O zaman

a) ${}_0^C D_t^{\alpha} u(t) = 0$

kesirli diferansiyel denkleminin çözümü

$$u(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ \ldots\ + c_n t^{n-1},\ c_i \in \mathbb{R},\ i = 0,1,\ \ldots, n,\ n = [\alpha]+1 \tag{2.41}$$

şeklinde ifade edilir.

b)

$${}_0I_t^{\alpha}\ {}_0^C D_t^{\alpha} u(t) = u(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ \ldots\ + c_n t^{n-1} \tag{2.42}$$

olacak şekilde $c_i \in \mathbb{R},\ i = 0,1,\ \ldots, n,\ n = [\alpha]+1$ vardır. [35]

Lemma 2.14 $\alpha > 0$ ve $u \in C(0,1) \cap L^1(0,1)$ ise o takdirde

a) $\alpha > 0$ ve $u \in C(0,1) \cap L^1(0,1)$ ise

${}_0D_x^{\alpha} u(t) = 0$

kesirli diferansiyel denkleminin çözümü

$$u(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \ \ldots \ + c_n t^{\alpha-n} \tag{2.43}$$

olup burada $c_i \in \mathbb{R},\ (i = 1, 2, \ \ldots, n)$ ve $n = [\alpha] + 1$ şeklinde bir tek çözüme sahiptir.

b)

$${}_0 I_x^{\alpha}\ {}_0 D_x^{\alpha} u(t) = u(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \ \ldots \ + c_n t^{\alpha-n} \tag{2.44}$$

olacak şekilde $c_i \in \mathbb{R}$, $(i = 1, 2, \ \ldots, n)$ ve $n = [\alpha] + 1$ vardır. [56]

BÖLÜM 3

BAZI KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN HİBRİTLEŞTİRİLEBİLİR SÜREKLİ OLMAYAN GALERKİN METODU

3.1 Hibritleştirilebilir Sürekli Olmayan Galerkin Metodu

3.1.1 HDG Metodunun Tanımı

HDG metodu, genel formu

$$ {}_a^C D_x^{\alpha} u(x) + a_1(x)u(x) + a_2(x) {}_a^C D_x^{\beta} u(x) = f(x), \ \Omega=(a,b), \ 1 < \alpha \le 2, \ 0 < \beta \le 1 \tag{3.1} $$

$$ u = u_D = g, \qquad \partial\Omega=\{a,b\} \tag{3.2} $$

olarak verilen Caputo kesirli türevine sahip sınır değer problemi üzerinde incelenecektir. Burada $u(x)$ bilinmeyen fonksiyon, f verilen bir fonksiyon, a_1 ve a_2 sabit katsayılar, $u_D = g$ ise $\partial\Omega=\{a,b\}$'de tanımlı Dirichlet sınır şartını göstermektedir.

HDG metodunu (3.1)-(3.2) problemine uygulamadan önce $a=0$ ve $b=1$ olmak üzere $N \in Z^+$ için $\Omega = (0,1)$ aralığının $N+1$ elemanlı

$$ \Omega_h := \{I_j = (x_j, x_{j+1}) : 0 = x_1 < \ldots < x_N < x_{N+1} = 1, \ j = 1, 2, \ldots, N\} \tag{3.3} $$

düzgün şebekesini oluşturalım. Bu şebekenin düğüm noktaları $\varepsilon_h := \{x_1, \ldots, x_N, x_{N+1}\}$, iç düğüm noktaları $\varepsilon_h^0 := \varepsilon_h \setminus \{0,1\}$ ve $\partial\Omega_h := \{\partial K : K \in \Omega_h\}$ olarak tanımlanır. h_K, her

bir $K \in \Omega_h$ elemanının uzunluğu ve $h := \max_{K \in \Omega_h} \{h_K\}$ olsun. $P^k(K)$ ise verilen $k \geq 0$ polinom derecesi ve $K \in \Omega_h$ elemanı üzerinde derecesi k'ya eşit veya daha küçük polinomlar kümesini göstersin. Buna göre $\Omega = (0,1)$'de k. dereceden parçalı polinomlar uzayı

$$V_h^k = \{v : \Omega_h \to \mathbb{R} : v|_K \in P^k(K), \text{ tüm } K \in \Omega_h\} \tag{3.4}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca $L^2(\varepsilon_h)$, $i = 1, 2, \ldots, N$ için $v_i < \infty$ özelliğini sağlayacak şekilde $v = (v_1, v_2, \ldots, v_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1}$ vektörlerinden oluşan küme ve

$$L_0^2(\varepsilon_h) := \{m \in L^2(\varepsilon_h) : m = 0, \ \partial\Omega\text{'da}\} \tag{3.5}$$

olsun.

Şimdi HDG metodunu (3.1)-(3.2) model problemine ayrıntılı bir şekilde uygulayalım. (3.1)'de verilen $u(x)$ fonksiyonunun α ve β mertebeden Caputo kesirli türevleri sırasıyla T_1 ve T_2 operatörleri ile birlikte

$$\begin{aligned} {}_0^C D_x^{\alpha} u(x) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^x u''(t)(x-t)^{1-\alpha} dt := T_1[u''(x)] \\ {}_0^C D_x^{\beta} u(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^x u'(t)(x-t)^{-\beta} dt := T_2[u'(x)] \end{aligned} \tag{3.6}$$

olarak yazılır. p ve q gibi iki yeni bilinmeyen yardımıyla (3.1) denklemini yeniden yazarsak, Ω'da

$$\begin{aligned} &q(x) + u'(x) = 0, \\ &p(x) + q'(x) = 0, \\ &T_1[p(x)] + a_1(x)u(x) - a_2(x)T_2[q(x)] = f(x) \end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. HDG metodu, $[V_h^k]^3$ x $L^2(\varepsilon_h)$ sonlu boyutlu uzayında (3.7)'nin $(q, p, u, u|_{\varepsilon_h})$ kesin çözümüne yaklaşık bir $(q_h, p_h, u_h, \hat{u}_h)$ çözümü bulur. Bu yaklaşık çözümü bulmamızı sağlayan lineer sistemin HDG metoduna göre zayıf formülasyonu $(v, w, z, \mu) \in [V_h^k]^3$ x $L_0^2(\varepsilon_h)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&(q_h, v)_{\Omega_h} - (u_h, v')_{\Omega_h} + <\hat{u}_h, v.n>_{\partial\Omega_h} = 0, \\
&(p_h, w)_{\Omega_h} - (w', q_h)_{\Omega_h} + <w, \hat{q}_h.n>_{\partial\Omega_h} = 0, \\
&(T_1[p_h], z)_{\Omega_h} + (a_1 u_h, z)_{\Omega_h} - (a_2 T_2[q_h], z)_{\Omega_h} = (f, z)_{\Omega_h}, \\
&<\hat{q}_h.n, \mu>_{\partial\Omega_h} = 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

biçimindedir. Bu denklemdeki

$$<\hat{q}_h.n, \mu>_{\partial\Omega_h} = 0 \tag{3.9}$$

geçiş şartı olarak isimlendirilir. Burada normal birim vektör $n(x^{\mp}) = \pm 1$ $(x \in \varepsilon_h)$ ve iç çarpımlar sırasıyla

$$(u,v)_{\Omega_h} := \sum_{j=1}^{N+1} (u,v)_{I_j}\ ,\ (u,v)_{I_j} := \int_{I_j} u(x)v(x)dx \tag{3.10}$$

ve

$$<u, vn>_{\Omega_h} := \sum_{j=1}^{N+1} <u, vn>_{\partial I_j}\ ,\ <u, v>_{\partial I_j} := u(x_j^-)v(x_j^-) + u(x_{j-1}^+)v(x_{j-1}^+) \tag{3.11}$$

olup $\varphi(x^{\pm}) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varphi(x \pm \varepsilon)$ $(x \in \varepsilon_h)$ olarak tanımlanır. (3.2) sınır şartı için $\partial\Omega$'da

$$\hat{u}_h = u_D \tag{3.12}$$

ve $\hat{q}_h$ olarak gösterilen nümerik iz

$$\hat{q}_h = q_h + \tau(u_h - \hat{u}_h).n \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlanır. Burada τ, verilen $\partial\Omega_h$ üzerinde tanımlı negatif olmayan bir fonksiyondur ve yaklaşık çözümün varlığını ve tekliğini garanti etmek için uygun bir şekilde tanımlanması gerekir.

3.1.2 Yaklaşık Çözümün Karakterizasyonu

3.1.2.1 Yerel Çözücüler

HDG metodunu (3.1)-(3.2) problemine uygularken iki tane yerel çözücü kullanılır. Bu çözücülerin "yerel" olarak adlandırılmasının sebebi, herhangi bir $K \in \Omega_h$ elemanında tanımlanmalarıdır. "Çözücü" denilmesinin sebebi ise $K \in \Omega_h$ elemanında kesirli sınır değer problemi için yaklaşık bir çözüm formunda olmalarıdır.

Şimdi bu yerel çözücüleri sırasıyla tanımlayalım. Birinci yerel çözücü $K \in \Omega_h$ elemanı üzerinde $m \in L^2(\partial K) \to (Qm, Pm, Um) \in [P^k(K)]^3$ dönüşümü ile tanımlı olup $v, w, z \in P^k(K)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (Qm, v)_K \quad & -(Um, v')_K \quad && = - < m, v.n >_{\partial K} \\ (Pm, w)_K \quad & -(w', Qm)_K \quad + < w, \hat{Q}m.n >_{\partial K} \quad && = 0 \\ (T_1[Pm], z)_K \quad & +(a_1 Um, z)_K \quad -(a_2 T_2[Qm], z)_K \quad && = 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

denklemini sağlar. Burada ∂K'da

$$\hat{Q}m = Qm + \tau(Um - m)n$$

olarak tanımlanır. $\tau(Um - m)n$ terimi küçük seçilerek Qm için yaklaşık bir $\hat{Q}m$ değeri elde edilir. $u(x)$, ∂K'da $u = m$ sınır şartını sağladığından ve Um, K üzerinde $u(x)$'in yaklaşık değeri olduğundan Um'in ∂K'da m'ye yakınsaması beklenir. Ayrıca, HDG metodu iyi tanımlı olduğundan ∂K'da τ kararlılık parametresi negatif değildir ve genellikle sabit bir sayı olarak alınır.

Dolayısıyla (Qm, Pm, Um) yerel çözücüsü, K'da

$$
\begin{aligned}
&q(x)+u'(x)=0,\\
&p(x)+q'(x)=0,\\
&T_1[p(x)]+a_1(x)u(x)-a_2(x)T_2[q(x)]=0
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

ve sınır şartı olarak ∂K'da $u=m$ ile verilen problemin (q,p,u) kesin çözümü için yaklaşık bir çözümdür.

İkinci yerel çözücü, $K\in\Omega_h$ üzerinde $f\in L^2(K)\to(Qf,Pf,Uf)\in[P^k(K)]^3$ dönüşümü ile tanımlıdır ve $v,w,z\in P^k(K)$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&(Qf,v)_K &-(Uf,v')_K &&=0\\
&(Pf,w)_K &-(w',Qf)_K &+<w,\hat{Q}f.n>_{\partial K} &=0\\
&(T_1[Pf],z)_K &+(a_1Uf,z)_K &-(a_2T_2[Qf],z)_K &=(f,z)_K
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

denklemini sağlar. Burada ∂K'da

$$\hat{Q}f=Qf+\tau(Uf)n$$

olup τ, birinci yerel çözücüdeki ile aynıdır. (Qf,Pf,Uf) yerel çözücüsü ise K'da

$$
\begin{aligned}
&q(x)+u'(x)=0,\\
&p(x)+q'(x)=0,\\
&T_1[p(x)]+a_1(x)u(x)-a_2(x)T_2[q(x)]=f(x)
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

ve sınır şartı olarak ∂K'da $u=0$ ile verilen problemin (q,p,u) çözümü için yaklaşık bir çözümdür. (3.14) ve (3.16) problemlerinin çözümleri $(k+1)$ x $(k+1)$ boyutlu bir lineer sistemin çözümünü gerektirir ve bu da oldukça kolaydır. Üstelik yapılan tanım yerel olduğundan (3.14) ve (3.16), bir $K\in\Omega_h$ elemanı üzerinde tanımlanır ve hesaplama iki yerel çözücü için aynı şekilde yapılır.

İlk olarak ikinci yerel çözücü olan (Qf,Pf,Uf)'i açıklayalım. Çünkü burada süreç (Qm,Pm,Um)'in hesabına göre daha basittir ve sadece verilen sabit bir f fonksiyonu

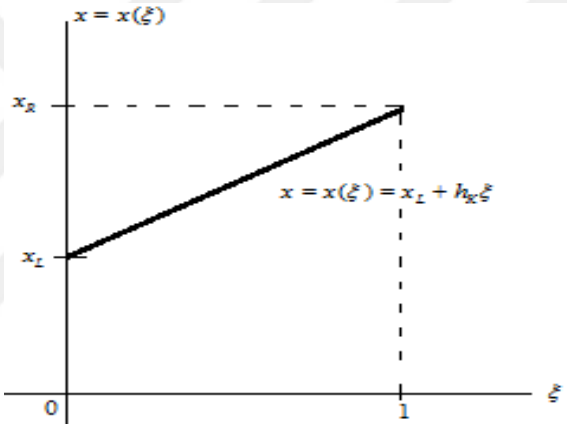
için hesaplama yapılır. Bunun için $(0,1)$ referans elemanını kullanarak $P^k(0,1)$ için bir bazı $\xi \in (0,1)$'de

$$\varpi = \{\varphi_1(\xi),\ \varphi_2(\xi),\ \ldots,\varphi_{k+1}(\xi)\} \tag{3.18}$$

olarak tanımlayalım. Burada $\varphi_j(\xi) = \xi^{j-1},\quad j = 1,\ \ldots,\ k+1$ tek terimli baz olarak isimlendirilir. Daha sonra afin dönüşümü yardımıyla $P^k(K)$'nın $x = (x_L, x_R) = K$ elemanı için

$$\varpi^K = \{\varphi_1^K(x),\ \varphi_2^K(x),\ \ldots,\varphi_{k+1}^K(x)\} \tag{3.19}$$

bazı $(0,1)$'in ϖ bazına dönüştürülür. Bunu grafiksel olarak gösterirsek



Şekil 3.1 Afin dönüşümü

şeklindeki afin dönüşümü kullanılır. Burada $h_k = x_R - x_L$, K'nın uzunluğu olup

$x = x(\xi) = x_L + h_K\xi$ denklemini $\xi = \xi(x)$ için çözersek

$$\xi = \xi(x) = \frac{x - x_L}{h_k}$$

olur. Böylece $x \in K$ için

$$\varphi_j^K(x) = \varphi_j(\xi(x)) = \varphi_j(\frac{x - x_L}{h_k}),\ j = 1,2,\ldots,k+1 \tag{3.20}$$

elde edilir. Burada Qf, Pf ve Uf'in her birinin birbirinden bağımsız parametrelerinin sayısı (degrees of freedom-DOF) $k+1$'dir. ϖ^K, $P^k(K)$ için bir baz olduğundan

K elemanı üzerinde $q_1^K, q_2^K, \ldots, q_{k+1}^K$, $p_1^K, p_2^K, \ldots, p_{k+1}^K$ ve $u_1^K, u_2^K, \ldots, u_{k+1}^K$ sabitleri için yerel çözücüler

$$
\begin{aligned}
(Qf)(x) &= \sum_{j=1}^{k+1} q_j^K \varphi_j^K(x) \\
(Pf)(x) &= \sum_{j=1}^{k+1} p_j^K \varphi_j^K(x) \\
(Uf)(x) &= \sum_{j=1}^{k+1} u_j^K \varphi_j^K(x)
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

biçiminde yazılır. Böylece (3.16) denklemini çözmek için $3(k+1)$ tane bilinmeyen katsayının bulunması gerekir. Bu katsayıları bulmak için $3(k+1)$ tane lineer denkleme ihtiyaç vardır.

Qf, Uf ve $v = \varphi_i^K(x)$ $(v = \varphi_i)$ değerleri (3.16)'da yerine yazılırsa ilk $k+1$ denklem $i, j = 1, \ldots, k+1$ için

$$
\sum_{j=1}^{k+1} (q_j \varphi_j, \varphi_i) - \sum_{j=1}^{k+1} (u_j \varphi_j, \varphi_i') = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{k+1} q_j (\varphi_j, \varphi_i) - \sum_{j=1}^{k+1} u_j (\varphi_j, \varphi_i') = 0 \tag{3.22}
$$

olur. Burada belirtilen (φ_j, φ_i) ve (φ_j, φ_i') integralleri Gauss quadrature formülüyle bulunur. İkinci $k+1$ denklem Qf, Pf, $\hat{Q}f$ ve $w = \varphi_i^K(x)$ $(\mathrm{w} = \varphi_i)$ değerlerinin (3.16)'nın ikinci denkleminde yerine konulmasıyla

$$
(\sum_{j=1}^{k+1} p_j \varphi_j, \varphi_i) - (\varphi_i', \sum_{j=1}^{k+1} q_j \varphi_j) + < \varphi_i, \underbrace{(Qf + \tau(Uf)n).n}_{\hat{Qf}} >= 0 \Rightarrow
$$

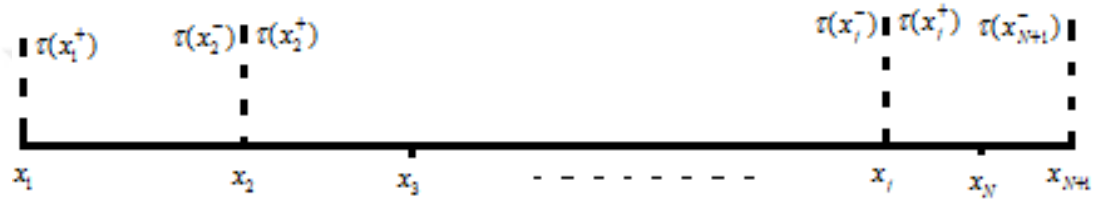
$$
\sum_{j=1}^{k+1} p_j (\varphi_j, \varphi_i) - \sum_{j=1}^{k+1} q_j (\varphi_i', \varphi_j) + < \varphi_i, Qf.n + \tau Uf >= 0 \Rightarrow
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k+1} p_j (\varphi_j, \varphi_i) - \sum_{j=1}^{k+1} q_j (\varphi_i', \varphi_j) &+ \varphi_i(x_R^-)[(Qf)(x_R^-) + \tau(x_R^-)(Uf)(x_R^-)] \\
&+ \varphi_i(x_L^+)[-(Qf)(x_L^+) + \tau(x_L^+)(Uf)(x_L^+)] = 0
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

olarak bulunur. Burada $n(x_R)=+1$ ve $n(x_L)=-1$ olarak alınır. Ayrıca polinomların sürekliliğini kullanarak $\varphi_i(x_R^-)=\varphi_i(x_R)$ ve $\varphi_i(x_L^+)=\varphi_i(x_L)$ ifadesini (3.23)'te yerine yazarsak $1\le i,\ j\le k+1$ için

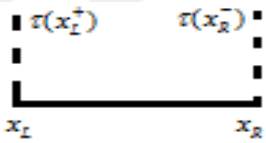
$$\sum_{j=1}^{k+1} p_j(\varphi_j,\varphi_i)-\sum_{j=1}^{k+1} q_j(\varphi_i',\varphi_j)+\varphi_i(x_R)\sum_{j=1}^{k+1} q_j\varphi_j(x_R)-\varphi_i(x_L)\sum_{j=1}^{k+1} q_j\varphi_j(x_L)$$
$$+\varphi_i(x_R)\tau(x_R^-)\sum_{j=1}^{k+1} u_j\varphi_j(x_R)+\varphi_i(x_L)\tau(x_L^+)\sum_{j=1}^{k+1} u_j\varphi_j(x_L)=0 \qquad (3.24)$$

elde edilir. Burada şebekenin herhangi bir düğümünde τ 'nun alacağı farklı iki değer



Şekil 3.2 Kararlılık parametresinin düğümlerdeki gösterimi

şeklinde verilir. Dolayısıyla τ 'nun $K=(x_L,x_R)$ elemanı üzerindeki gösterimi ise



Şekil 3.3 Kararlılık parametresinin komşu iki düğümdeki gösterimi

şeklindedir.

Bu kez üçüncü $k+1$ denklem, $T_1[Pf]$, $T_2[Qf]$ ve $z=\varphi_i^K(x)$ $(z=\varphi_i)$ değerlerinin (3.16)'nın son denkleminde yerine yazılmasıyla

$$(T_1[\sum_{j=1}^{k+1} p_j\varphi_j],\varphi_i)+a_1\sum_{j=1}^{k+1}(u_j\varphi_j,\varphi_i)-a_2(T_2[\sum_{j=1}^{k+1} q_j\varphi_j],\varphi_i)=(f,\varphi_i)\Rightarrow$$
$$\sum_{j=1}^{k+1} p_j(T_1[\varphi_j],\varphi_i)+a_1\sum_{j=1}^{k+1} u_j(\varphi_j,\varphi_i)-a_2\sum_{j=1}^{k+1} q_j(T_2[\varphi_j],\varphi_i)=(f,\varphi_i) \qquad (3.25)$$

bulunur. Dolayısıyla (3.22), (3.24) ve (3.25) için lineer sistem

$$\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ C & A & D \\ G & F & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q \\ p \\ u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Burada A,B,C,D,E,F ve G, $(k+1)$ x $(k+1)$ mertebeden matrisler ve q, p, u ise $k+1$ boyutlu bilinmeyen vektörlerdir. Sağ taraftaki 0 vektörü, $k+1$ boyutlu sıfır vektör, f ise $k+1$ boyutlu bir vektördür. Bu vektörlerin gösterimi

$$q=\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{k+1} \end{bmatrix}, p=\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{k+1} \end{bmatrix}, u=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{k+1} \end{bmatrix}, f=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{k+1} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Lineer sistemden elde edilen matris ve vektörlerin elemanları $i,j=1,\ \ldots,k+1$ için

$$A_{ij}=(\varphi_j,\varphi_i),\ B_{ij}=-(\varphi_j,\varphi_i'),\ C_{ij}=-(\varphi_i',\varphi_j)+\varphi_i(x_R)\varphi_j(x_R)-\varphi_i(x_L)\varphi_j(x_L),$$

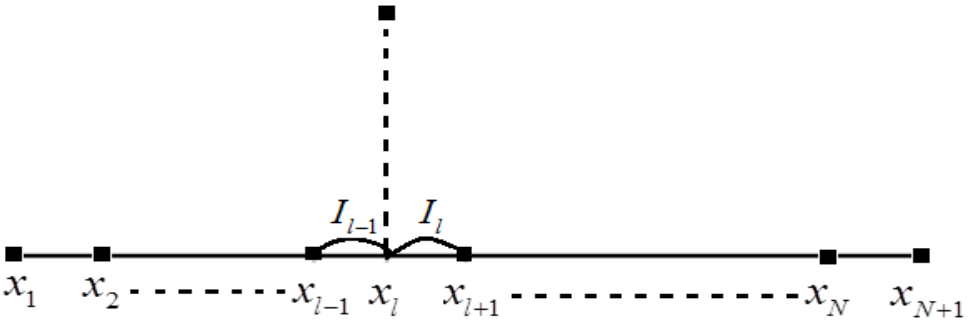
$$D_{ij}=\varphi_i(x_R)\tau(x_R^-)\varphi_j(x_R)+\varphi_i(x_L)\tau(x_L^+)\varphi_j(x_L),\ E_{ij}=a_1(\varphi_j,\varphi_i),\ f_i=(f,\varphi_i)$$

$$F_{ij}=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\int_0^s\frac{\varphi_j(t)}{(s-t)^{\alpha-1}}dt,\varphi_i(s)\right),\ G_{ij}=-\frac{a_2}{\Gamma(1-\beta)}\left(\int_0^s\frac{\varphi_j(t)}{(s-t)^{\beta}}dt,\varphi_i(s)\right)$$

olarak bulunur. Bu lineer sistemi çözersek $K\in\Omega_h$ keyfi eleman olduğundan tüm Ω_h şebekesi üzerinde (Qf,Pf,Uf) yerel çözücüsü hesaplanır.

Şimdi ise diğer yerel çözücü olan (Qm,Pm,Um)'in nasıl hesaplanacağını gösterelim. Bu hesaplamada durum biraz farklıdır. İlk olarak aşağıdaki tanımı yapalım. m_j, $\mathbb{R}^{N+1}$'in aşağıda verilen elemanı olsun.

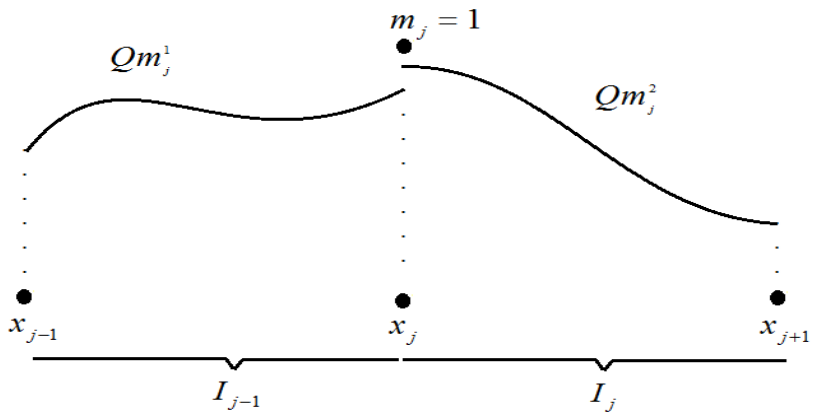
$$m_l=\begin{cases} 1,\ x_l \text{ düğümlerinde} \\ 0,\ \text{diğer düğümlerde} \end{cases}$$



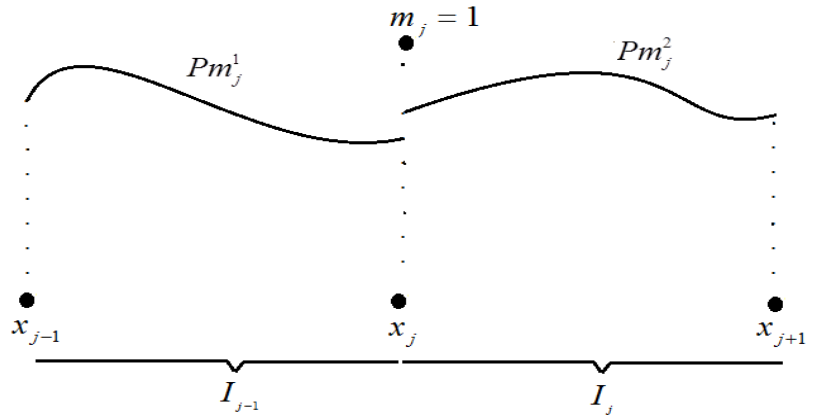
Şekil 3.1 $m \in M_h$ elemanının gösterimi

m_j ile ilişkilendirilmiş (Qm_l, Pm_l, Um_l) yerel çözücüsü, x_l düğüm noktalarının iki komşuluğunda bulunmaktadır. Tüm m_j'lerin kümesi yani $\{m_1, m_2, \ldots, m_{N+1}\} \in \mathbb{R}^{N+1}$, M_h Lagrange çarpım uzayı için (yani Q, P ve U operatörlerinin tanım kümesi) bir baz formunda olduğundan (Qm, Pm, Um) yerel çözücüsünü hesaplamak, bunların baz üzerindeki etkisini hesaplamak demektir. O yüzden (Qm, Pm, Um)'in hesaplanması (Qm_j, Pm_j, Um_j) $(j = 1, 2, \ldots, N+1)$'nin hesabına indirgenir.

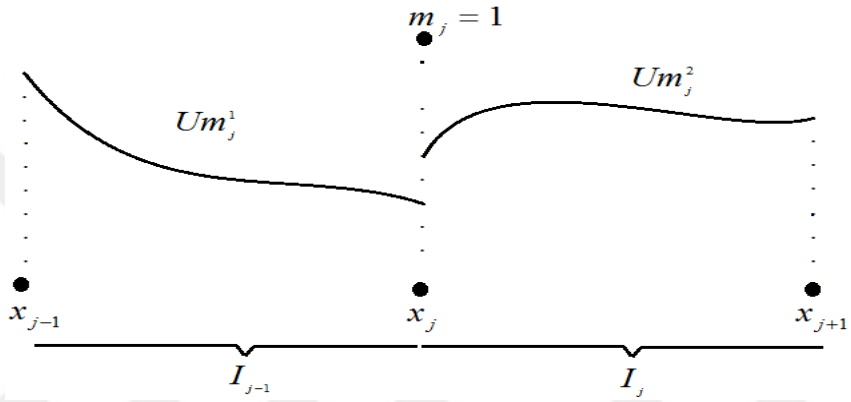
Biz (Qm_j^1, Pm_j^1, Um_j^1)'yi (Qm_j, Pm_j, Um_j) 'nin birinci komşuluğundaki değeri ve (Qm_j^2, Pm_j^2, Um_j^2)'yi ise (Qm_j, Pm_j, Um_j) 'in ikinci komşuluğundaki değeri olarak tanımlayalım ve aşağıdaki şekilde gösterelim.



Şekil 3.2 Qm_j'nin sol ve sağ komşuluktaki gösterimi



Şekil 3.3 Pm_j'nin sol ve sağ komşuluktaki gösterimi



Şekil 3.4 Um_j'nin sol ve sağ komşuluktaki gösterimi

Qm_l^1, Pm_l^1, Um_l^1 , $P^k(I_{l-1})$ 'de ve Qm_l^2, Pm_l^2, Um_l^2 ise $P^k(I_l)$'de üç polinom olup amacımız bu polinomları hesaplamaktır. (3.14)'ten oluşan lineer denklem sistemini daha açık bir şekilde görmek için Qm_l^1, Pm_l^1, Um_l^1 ile Qm_l^2, Pm_l^2, Um_l^2'yi sırasıyla $P^k(I_{l-1})$ ve $P^k(I_l)$ için aşağıdaki gibi bir baza genişletelim.

$$
\begin{aligned}
Qm_l^1(x) &= \sum_{j=1}^{k+1} q_j^1 \varphi_j^1(x), \qquad Qm_l^2(x) = \sum_{j=1}^{k+1} q_j^2 \varphi_j^2(x) \\
Pm_l^1(x) &= \sum_{j=1}^{k+1} p_j^1 \varphi_j^1(x), \qquad Pm_l^2(x) = \sum_{j=1}^{k+1} p_j^2 \varphi_j^2(x) \\
Um_l^1(x) &= \sum_{j=1}^{j+1} u_j^1 \varphi_j^1(x), \qquad Um_l^2(x) = \sum_{j=1}^{k+1} u_j^2 \varphi_j^2(x)
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

Burada φ_j^1, $P^k(I_{l-1})$'deki baz fonksiyonu, φ_j^2 ise $P^k(I_l)$'deki j. baz fonksiyonudur. Bu ifadeleri (3.14)'te yerine yazarsak lineer sistemi bulmak için (Qm, Pm, Um) yerel

çözücüleri tanımlanır. Bu işlemi, sol komşuluk I_{l-1} ve sağ komşuluk I_l için olmak üzere iki kez yapmak gerekir. İlk işlemi Qm_l^1, Pm_l^1 ve Um_l^1'i hesaplamak için I_{l-1} üzerinde yapalım.

Bunun için (3.14)'teki ilk denklemde $Qm_l^1 = Qm$, $\mathrm{P}m_l^1 = Pm$, $Um_l^1 = Um$, $K = I_{l-1}$ ve $q_j^1 = q_j$, $p_j^1 = p_j$, $u_j^1 = u_j$ ve $v = \varphi_i(\varphi_i^1)$ alırsak

$$(\sum_j q_j\varphi_j, \varphi_i)_K - (\sum_j u_j\varphi_j, \varphi_i')_K = -<m, \varphi_i.n>_{\partial K} \Rightarrow$$

$$\sum_j q_j(\varphi_j, \varphi_i) - \sum_j u_j(\varphi_j, \varphi_i') = -(m(x_l)\varphi_i(x_l)n(x_l) + m(x_{l-1})\varphi_i(x_{l-1})n(x_{l-1}))$$

elde edilir. Burada $m = m_l$ olduğundan $m(x_l) = 1$ ve $m(x_{l-1}) = 0$ olur. Dolayısıyla bu ifadeleri yukarıdaki denklemde yerine yazarsak

$$\sum_j q_j(\varphi_j, \varphi_i) - \sum_j u_j(\varphi_j, \varphi_i') = -\varphi_i(x_l),\ i = 1, 2, \ldots, k+1 \qquad (3.27)$$

olur. (3.27), Qm, Pm ve Um'in bulunmasını sağlayan birinci denklemdir.

İkinci denklem için (3.14)'ün ikinci denkleminde $w = \varphi_i(\varphi_i^1)$ alırsak

$$(\sum_j p_j\varphi_j, \varphi_i) - (\varphi_i', \sum_j q_j\varphi_j) + <\varphi_i, \underbrace{(Qm + \tau(Um - m)n).n}_{\hat{Q}m}>= 0 \Rightarrow$$

$$\sum_j p_j(\varphi_j, \varphi_i) - \sum_j q_j(\varphi_i', \varphi_j) + <\varphi_i, Qm.n + \tau Um> = <\varphi_i, \tau m>$$

olur. Burada $m = m_l$, $m_l(x_l) = 1, m_l(x_{l-1}) = 0$ ve $K = I_{l-1}$ olduğundan

$$\sum_{j=1}^{k+1} p_j(\varphi_j, \varphi_i) - \sum_{j=1}^{k+1} q_j(\varphi_i', \varphi_j) + \varphi_i(x_l^-)[(Qm)(x_l^-) + \tau(x_l^-)(Um)(x_l^-)] +$$

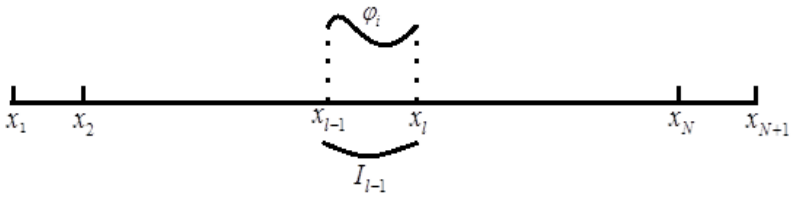
$$\varphi_i(x_{l-1}^+)[-(Qm)(x_{l-1}^+) + \tau(x_{l-1}^+)(Um)(x_{l-1}^+)] = \varphi_i(x_l^-)\tau(x_l^-)$$

olur. Ayrıca

$$<\varphi_i, \varphi_j n> = \varphi_i(x_l)\varphi_j(x_l) - \varphi_i(x_{l-1})\varphi_j(x_{l-1}),$$

$$<\varphi_i, \tau\varphi_j> = \tau(x_l^-)\varphi_i(x_l)\varphi_j(x_l) + \tau(x_{l-1}^+)\varphi_i(x_{l-1})\varphi_j(x_{l-1})$$

olup herhangi bir φ_i bazının gösterimi



Şekil 3.5 φ_i bazının I_{l-1} aralığındaki gösterimi

şeklindedir. Buradan

$$\sum_{j=1}^{k+1} p_j(\varphi_j,\varphi_i)-\sum_{j=1}^{k+1} q_j(\varphi_i',\varphi_j)+\varphi_i(x_l)\sum_{j=1}^{k+1} q_j\varphi_j(x_l)-\varphi_i(x_{l-1})\sum_{j=1}^{k+1} q_j\varphi_j(x_{l-1})+$$
$$\varphi_i(x_l)\tau(x_l^-)\sum_{j=1}^{k+1} u_j\varphi_j(x_l)+\varphi_i(x_{l-1})\tau(x_{l-1}^+)\sum_{j=1}^{k+1} u_j\varphi_j(x_{l-1})=\varphi_i(x_l)\tau(x_l^-) \quad (3.28)$$

bulunur. Üçüncü denklem için ise (3.14)'ün son denkleminde $z=\varphi_i(\varphi_i^1)$ alırsak

$$(T_1[\sum_j p_j\varphi_j],\varphi_i)+a_1(\sum_j u_j\varphi_j,\varphi_i)-a_2(T_2[\sum_j q_j\varphi_j],\varphi_i)=0\Rightarrow$$
$$\sum_j p_j(T_1[\varphi_j],\varphi_i)+a_1\sum_j u_j(\varphi_j,\varphi_i)-a_2\sum_j q_j(T_2[\varphi_j],\varphi_i)=0 \quad (3.29)$$

elde edilir. (Qm,Pm,Um)'i bulmamızı sağlayan (3.27), (3.28) ve (3.29) için lineer denklem sistemi yazılırsa sol taraftaki matrisler Qf,Pf ve Uf için bulunan matrisle aynı iken sadece sağ taraftaki matris farklıdır. Ayrıca $x_L=x_{l-1}$ ve $x_R=x_l$ olarak alınmıştır.

$$\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ C & A & D \\ G & F & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q \\ p \\ u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \delta \\ \vartheta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q=\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{k+1} \end{bmatrix}, p=\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{k+1} \end{bmatrix}, u=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{k+1} \end{bmatrix}, \delta=\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{k+1} \end{bmatrix}, \vartheta=\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vdots \\ \vartheta_{k+1} \end{bmatrix}$$

$$A_{ij}=(\varphi_j,\varphi_i),\ B_{ij}=-(\varphi_j,\varphi_i'),\ C_{ij}=-(\varphi_i',\varphi_j)+\varphi_i(x_l)\varphi_j(x_l)-\varphi_i(x_{l-1})\varphi_j(x_{l-1})$$

$$D_{ij}=\varphi_i(x_l)\tau(x_l^-)\varphi_j(x_l)+\varphi_i(x_{l-1})\tau(x_{l-1}^+)\varphi_j(x_{l-1})$$

$E_{ij} = a_1(\varphi_j, \varphi_i)$,

$$F_{ij} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\int_0^s \frac{\varphi_j(t)}{(s-t)^{\alpha-1}}dt, \varphi_i(s)\right),\ G_{ij} = -\frac{a_2}{\Gamma(1-\beta)}\left(\int_0^s \frac{\varphi_j(t)}{(s-t)^{\beta}}dt, \varphi_i(s)\right)$$

$\delta_i = -\varphi_i(x_l)$, $i = 1, 2, \ldots, k+1$

$\vartheta_i = \varphi_i(x_l)\tau(x_l^-)$, $i = 1, 2, \ldots, k+1$

bulunur. Bu lineer sistemi çözersek (Qm, Pm, Um)'in I_{l-1} elemanı için bağımsız değişkenlerin sayısı bulunur.

Şimdi de (Qm, Pm, Um)'in I_l elemanı için yani m_l'nin sağındaki (veya ikinci komşuluğundaki) bağımsız değişken sayısını bulalım. Yapılan işlemler (Qm^1, Pm^1, Um^1) ile son derece benzer olup tek fark sağ taraftaki δ ve ϑ vektörlerinden kaynaklanmaktadır.

Bunun için ilk olarak (3.14)'teki denklemde $K = I_l$ aralığında $Qm = Qm_l^2$, $Pm = Pm_l^2$, $Um = Um_l^2$ ve $q_j = q_j^2$, $p_j = p_j^2$, $u_j = u_j^2$ olmak üzere $v = \varphi_i(\varphi_i^2)$ için

$$(\sum_j q_j\varphi_j, \varphi_i)_K - (\sum_j u_j\varphi_j, \varphi_i')_K = - < m, \varphi_i.n >_{\partial K} \Rightarrow$$

$$\sum_j q_j(\varphi_j, \varphi_i) - \sum_j u_j(\varphi_j, \varphi_i')_K = -(m(x_{l+1})\varphi_i(x_{l+1})n(x_{l+1}) + m(x_l)\varphi_i(x_l)n(x_l))$$

elde edilir. Burada $m = m_l$ olduğundan $m(x_{l+1}) = 0$ ve $m(x_l) = 1$ olur. Dolayısıyla bu ifadeleri yukarıdaki denklemde yerine yazarsak

$$\sum_j q_j(\varphi_j, \varphi_i) - \sum_j u_j(\varphi_j, \varphi_i') = \varphi_i(x_l),\ i = 1, 2, \ldots, k+1 \qquad (3.30)$$

olur. (3.27) ve (3.30) denk olarak görülmesine rağmen farklılık (3.27)'deki integralin I_{l-1} 'de ve (3.30)'daki integralin ise I_l'de alınmasıdır. Benzer şekilde sağ taraftaki vektörler için de söylenebilir. Yani (3.27)'deki $\varphi_i(x_l)$, φ_i baz fonksiyonunun aralığın sağ uç noktasındaki değeri iken (3.30)'daki $\varphi_i(x_l)$ ise φ_i baz fonksiyonunun aralığın sol uç noktasındaki değeridir. Diğer bir ifadeyle (3.27)'de $\varphi_i(x_l) = \varphi_i(\xi = 0)$ ve (3.30)'da

$\varphi_i(x_l)=\varphi_i(\xi=1)$ alınır. Burada $\varphi_i(\xi=.)$, $\xi=(0,1)$ referans elemanı üzerindeki baz fonksiyonunu gösterir.

İkinci denklemi tanımlamak için (3.14)'ün ikinci denkleminde $w=\varphi_i(\varphi_i^2)$ yazarsak

$$(\sum_j p_j\varphi_j,\varphi_i)-(\varphi_i',\sum_j q_j\varphi_j)+<\varphi_i,\underbrace{(Qm+\tau(Um-m)n).n}_{\hat{Q}m}>=0\Rightarrow$$

$$\sum_j p_j(\varphi_j,\varphi_i)-\sum_j q_j(\varphi_i',\varphi_j)+<\varphi_i,Qm.n+\tau Um>=<\varphi_i,\tau m>$$

olur. Burada $m=m_l$, $m_l(x_l)=1, m_l(x_{l+1})=0$ ve $K=I_l$ olduğundan

$$\sum_j p_j(\varphi_j,\varphi_i)-\sum_j q_j(\varphi_i',\varphi_j)+\varphi_i(x_{l+1}^-)[(Qm)(x_{l+1}^-)+\tau(x_{l+1}^-)(Um)(x_{l+1}^-)]+$$

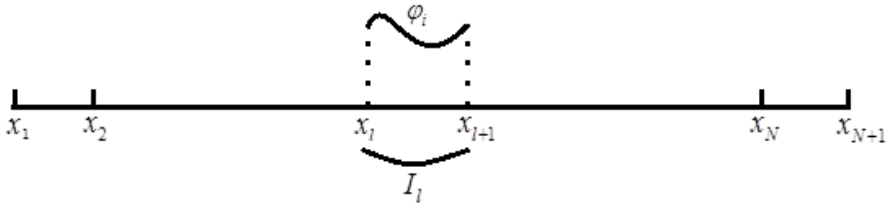
$$\varphi_i(x_l^+)[-(Qm)(x_l^+)+\tau(x_l^+)(Um)(x_l^+)]=\varphi_i(x_l^+)\tau(x_l^+)$$

elde edilir. Aynı şekilde

$$<\varphi_i,\varphi_j n>=\varphi_i(x_{l+1})\varphi_j(x_{l+1})-\varphi_i(x_l)\varphi_j(x_l),$$

$$<\varphi_i,\tau\varphi_j>=\tau(x_{l+1}^-)\varphi_i(x_{l+1})\varphi_j(x_{l+1})+\tau(x_l^+)\varphi_i(x_l)\varphi_j(x_l)$$

olup herhangi bir φ_i bazının gösterimi



Şekil 3.6 φ_i bazının I_l aralığındaki gösterimi

şeklindedir. Buradan

$$\sum_{j=1}^{k+1} p_j(\varphi_j,\varphi_i)-\sum_{j=1}^{k+1} q_j(\varphi_i',\varphi_j)+\varphi_i(x_{l+1})\sum_{j=1}^{k+1} q_j\varphi_j(x_{l+1})-\varphi_i(x_l)\sum_{j=1}^{k+1} q_j\varphi_j(x_l)+$$

$$\varphi_i(x_{l+1})\tau(x_{l+1}^-)\sum_{j=1}^{k+1} u_j\varphi_j(x_{l+1})+\varphi_i(x_l)\tau(x_l^+)\sum_{j=1}^{k+1} u_j\varphi_j(x_l)=\varphi_i(x_l)\tau(x_l^+) \quad (3.31)$$

elde edilir. Son olarak üçüncü denklemde $z=\varphi_i(\varphi_i^2)$ alırsak

$$
\begin{aligned}
&(T_1[\sum_j p_j\varphi_j],\varphi_i)+a_1\sum_j(u_j\varphi_j,\varphi_i)-a_2(T_2[\sum_j q_j\varphi_j],\varphi_i)=0\Rightarrow\\
&\sum_j p_j(T_1[\varphi_j],\varphi_i)+a_1\sum_j u_j(\varphi_j,\varphi_i)-a_2\sum_j q_j(T_2[\varphi_j],\varphi_i)=0
\end{aligned}
\qquad (3.32)
$$

alınır. Dolayısıyla (3.30), (3.31) ve (3.32)'den lineer sistem

$$
\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ C & A & D \\ G & F & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q \\ p \\ u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \delta \\ \vartheta \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
q=\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{k+1} \end{bmatrix},\ p=\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{k+1} \end{bmatrix},\ u=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{k+1} \end{bmatrix},\ \delta=\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{k+1} \end{bmatrix},\ \vartheta=\begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vdots \\ \vartheta_{k+1} \end{bmatrix}
$$

$$
A_{ij}=(\varphi_j,\varphi_i),\ B_{ij}=-(\varphi_j,\varphi_i'),\ C_{ij}=-(\varphi_i',\varphi_j)+\varphi_i(x_{l+1})\varphi_j(x_{l+1})-\varphi_i(x_l)\varphi_j(x_l)
$$

$$
D_{ij}=\varphi_i(x_{l+1})\tau(x_{l+1}^-)\varphi_j(x_{l+1})+\varphi_i(x_l)\tau(x_l^+)\varphi_j(x_l),\ E_{ij}=a_1(\varphi_j,\varphi_i),
$$

$$
F_{ij}=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\int_0^s\frac{\varphi_j(t)}{(s-t)^{\alpha-1}}dt,\varphi_i(s)\right),\ G_{ij}=-\frac{a_2}{\Gamma(1-\beta)}\left(\int_0^s\frac{\varphi_j(t)}{(s-t)^{\beta}}dt,\varphi_i(s)\right)
$$

olarak elde edilir. Burada integraller I_l aralığında hesaplanmalıdır. Sağ taraftaki vektör $i=1,2,\ \ldots,\ k+1$ olmak üzere

$$
\delta_i=\varphi_i(x_i),
$$

$$
\vartheta_i=\varphi_i(x_i)\tau(x_i^+)
$$

olup baz fonksiyonları $P^k(I_l)$ 'de tanımlıdır.

Böylece HDG kodunun temel parçasını oluşturan yerel çözücülerin nasıl hesaplanması gerektiğini gösterdik. Bundan sonraki adım ise geçiş şartını kullanarak global lineer denklem sistemi oluşturularak kesin çözüm için yaklaşık bir çözümün bulunması işlemidir.

3.1.2.2 Global Sistem

Bu kısımda, şebekenin düğümlerindeki $u(x)$ kesin çözümünün yaklaşık değeri olan λ_h'ın bulunmasını sağlayan global sistem verilecektir.

Teorem 3.1 HDG metoduna göre yaklaşık çözüm olan $(q_h, p_h, u_h, \lambda_h) \in [V_h^k]^3 \times L_0^2(\varepsilon_h)$, yerel çözücüler cinsinden

$$\begin{aligned} q_h &= Q\lambda_h + Qg + Qf \\ p_h &= P\lambda_h + Pg + Pf \\ u_h &= U\lambda_h + Ug + Uf \end{aligned} \tag{3.33}$$

olarak tanımlanır ve $\lambda_h(x_i) \approx u(x_i)$,

$$a_h(\lambda_h, \mu) = b_h(\mu) \quad (\mu \in L_0^2(\varepsilon_h)) \tag{3.34}$$

denklemini sağlar. Burada

$$\begin{aligned} a_h(\lambda_h, \mu) &= -<\hat{Q}\lambda_h, \mu n>_{\partial\Omega_h}, \\ b_h(\mu) &= <\hat{Q}g + \hat{Q}f, \mu n>_{\partial\Omega_h} \end{aligned} \tag{3.35}$$

elde edilir. Bu teoremin ispatı, (3.34)'ün (3.9)'daki geçiş şartının yeniden yazılıp düzenlenmesiyle elde edilir. Detaylı ispat için [49], [57], [58]'ye bakınız.

Eğer λ_h'ı hesaplarsak o takdirde sırasıyla q, p ve u'nun yaklaşık çözümleri olan q_h, p_h ve u_h'ı da bulmuş oluruz. g sınır şartı olup (Qg, Pg, Ug) değerleri, (Qm, Pm, Um) yerel çözücüsüne göre hesaplanır. Yani Qg, q_h'a birinci elemanda $g(0)Qm_1$ ve son elemanda $g(1)Qm_{N+1}$ olacak şekilde eklenir. Aynı şekilde Pg, p_h'a birinci elemanda $g(0)Pm_1$ ve son elemanda $g(1)Pm_{N+1}$ şeklinde eklenirken Ug de u_h'a birinci elemanda $g(0)Um_1$ ve son elemanda $g(1)Um_{N+1}$ şeklinde eklenir.

Burada $\hat{u}_h = \lambda_h + g \quad (\lambda_h \in L_0^2(\varepsilon_h))$ ve geçiş şartı daha önce (3.9)'da verdiğimiz gibi

$$\langle \hat{q}_h.n, \mu \rangle_{\partial\Omega_h} = 0, \ \forall \mu \in L^2(\partial K)$$

denklemiyle tanımlanır ve $\hat{q}_h = Q\lambda_h + Qg + Qf$, yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$\left\langle (\hat{Q}\lambda_h + \hat{Q}g + \hat{Q}f).n, \mu \right\rangle_{\partial\Omega_h} = 0, \ \forall \mu \in L^2(\partial K)$$

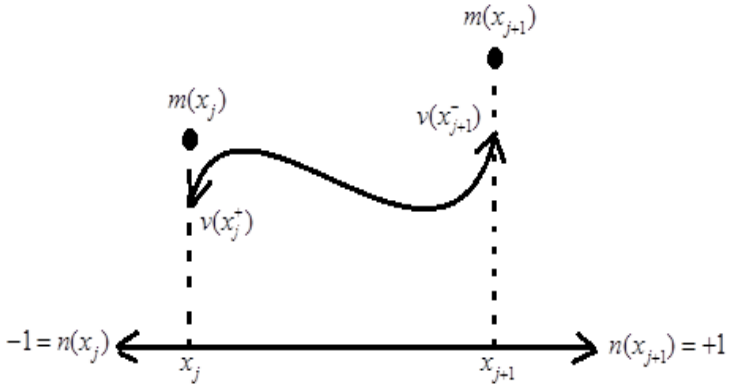
ve buradan da

$$\left\langle \mu, \hat{Q}\lambda_h.n \right\rangle_{\partial\Omega_h} = -\left\langle \mu, (\hat{Q}g + \hat{Q}f).n \right\rangle_{\partial\Omega_h}, \ \forall \mu \in L^2(\partial K) \tag{3.36}$$

elde edilir. (3.36) denkleminin sol tarafı Ω_h'da olduğundan genel olarak denklemin sol tarafı

$$< \mu, vn >_{\partial\Omega_h} = \sum_{j=1}^{N} < \mu, vn >_{\partial I_j}$$
$$= \sum_{j=1}^{N} (\mu(x_{j+1})v(x_{j+1}^-) - \mu(x_j)v(x_j^+))$$

olarak yazılır. Burada μ, düğüm noktalarında tanımlı bir fonksiyon, v ise aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi farklı iki değer alabilmektedir.



Şekil 3.7 v fonksiyonunun I_{l-1} aralığındaki gösterimi

(3.36) denkleminin sağ tarafı $\hat{Q}g$, $\hat{Q}f$ ise bilinen değerlerdir. (3.36), her bir ε_h şebeke düğüm noktasına bir denklem düşecek şekilde $N+1$ tane denklemden meydana gelmektedir. Burada her bir denklemi elde etmek için $l = 1, 2, ..., N+1$ olmak üzere

$\mu = m_l$ yazılır. Bu denklemlerden sadece $N-1$ tanesi yani λ_h'ın $x_2, x_3, \ldots, x_N$ düğümlerindeki $\lambda_h(x_2)$,..., $\lambda_h(x_N)$ değerleri bilinmemektedir. Burada

$\lambda_h(x_1) = g(0)$ ve $\lambda_h(x_{N+1}) = g(1)$

olarak tanımlıdır. (3.36)'dan elde edilen lineer sistem

$$A_{global}.\lambda_h = d \tag{3.37}$$

olarak ifade edilir. Burada A_{global}, $(N+1)\,\mathrm{x}\,(N+1)$ boyutlu bir matris, λ_h $(N+1)$ boyutlu bilinmeyen bir vektör ve d ise $(N+1)$ boyutlu bilinen bir vektördür.

$$\lambda_h = \begin{bmatrix} \lambda_h(x_1) \\ \lambda_h(x_2) \\ \vdots \\ \lambda_h(x_N) \\ \lambda_h(x_{N+1}) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. A_{global} matrisinin l. satırını bulmak için (3.36) denkleminde $\mu = m_l$ alınıp $\left\langle m_l, \hat{Q}\lambda_h.n \right\rangle_{\partial\Omega_h}$ teriminin değeri hesaplanır. Böylece

$$\left\langle m_l, \hat{Q}\lambda_h.n \right\rangle_{\partial\Omega_h} = \left\langle m_l, \hat{Q}\lambda_h.n \right\rangle_{\partial I_{l-1}} + \left\langle m_l, \hat{Q}\lambda_h.n \right\rangle_{\partial I_l} \tag{3.38}$$

toplamını hesaplamış oluyoruz. Burada

$\hat{Q}\lambda_h = Q\lambda_h + \tau(U\lambda_h - \lambda_h)n$

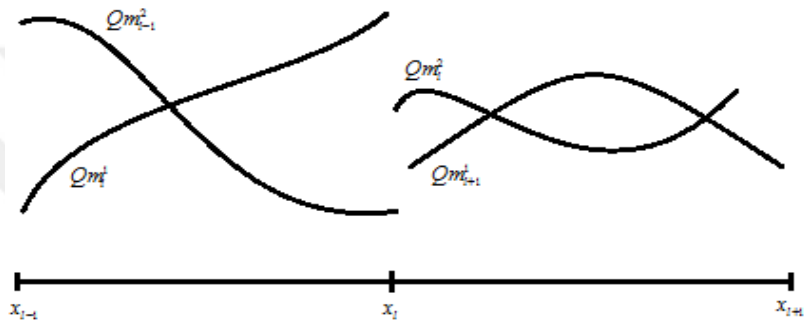
ve ayrıca

$$\lambda_h = \sum_{j=1}^{N+1} \lambda_j m_j$$

olup $\lambda_j = \lambda_h(x_j)$ $\left(\lambda_1 = g(0),\ \lambda_{N+1} = g(1)\right)$ olarak tanımlanır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\left\langle m_l, \hat{Q}\lambda_h.n\right\rangle_{\partial I_{l-1}} &= (\hat{Q}\lambda_h)(x_l^-)m_l(x_l) - (\hat{Q}\lambda_h)(x_{l-1}^+)m_l(x_{l-1}) \\ &= (\hat{Q}\lambda_h)(x_l^-) \quad (m_l(x_l)=1 \text{ ve } m_l(x_{l-1})=0) \\ &= (Q\lambda_h)(x_l^-) + \tau(x_l^-)\left((U\lambda_h)(x_l^-) - \lambda_h(x_l)\right)n(x_l) \\ &= \sum_j \lambda_j (Qm_j)(x_l^-) + \tau(x_l^-)\left[\sum_j \lambda_j (Um_j)(x_l^-) - \sum_j \lambda_j m_j(x_l)\right]\end{aligned} \tag{3.39}$$

elde edilir. Burada toplamdaki $\sum_j \lambda_j (Qm_j)(x_l^-)$'in sadece iki terimi yani $j = l-1$ ve $j = l$ durumları (3.39) denklemine eklenir.



Şekil 3.8 Qm_j'nin x_l düğümünün sol ve sağ komşuluğundaki değeri

Yani

$$\sum_j \lambda_j (Qm_j)(x_l^-) = \lambda_{l-1}(Qm_{l-1}^2)(x_l^-) + \lambda_l (Qm_l^1)(x_l^-) \tag{3.40}$$

olur. Burada, I_{l-1}'in düğümü olan x_l, x_{l-1}'in ikinci komşuluğunda ve x_l'nin birinci komşuluğundadır. $\left\langle m_l, \hat{Q}\lambda_h.n\right\rangle_{\partial I_{l-1}}$'in diğer kalan terimi benzer şekilde

$$\tau(x_l^-)\left[\lambda_{l-1}(Um_{l-1}^2)(x_l^-) + \lambda_l (Um_l^1)(x_l^-) - \lambda_l\right] \tag{3.41}$$

olarak bulunur. Burada $j \neq l$ için $m_l(x_l)=1$ ve $m_l(x_{l-1})=0$ olduğundan $\sum_j \lambda_j m_j(x_l) = \lambda_l$ elde edilir. Son olarak (3.40) ve (3.41)'i (3.39)'da yerine yazarsak

$$\begin{aligned}\left\langle m_l, \hat{Q}\lambda_h n\right\rangle_{\partial I_{l-1}} &= \lambda_{l-1}\left[(Qm_{l-1}^2)(x_l^-)+\tau(x_l^-)(Um_{l-1}^2)(x_l^-)\right] \\ &+\lambda_l\left[(Qm_l^1)(x_l^-)+\tau(x_l^-)\left[(Um_l^1)(x_l^-)-1\right]\right]\end{aligned} \tag{3.42}$$

bulunur. Şimdi de $\left\langle m_l, \hat{Q}\lambda_h n\right\rangle_{\partial I_l}$'yi hesaplayalım. Burada yapılan işlemler yukarıda I_{l-1} aralığı için yaptığımız hesaplamalara çok benzerdir. Genel bir bütünlük sağlanması için $\left\langle m_l, \hat{Q}\lambda_h n\right\rangle_{\partial I_l}$ için yapılan işlemleri gösterelim.

$$\begin{aligned}\left\langle m_l, \hat{Q}\lambda_h . n\right\rangle_{\partial I_l} &= (\hat{Q}\lambda_h)(x_{l+1}^-)m_l(x_{l+1})-(\hat{Q}\lambda_h)(x_l^+)m_l(x_l) \\ &= -(\hat{Q}\lambda_h)(x_l^+) \ \ (m_l(x_{l+1})=0 \text{ ve } m_l(x_l)=1) \\ &= -(Q\lambda_h)(x_l^+)-\tau(x_l^+)\left((U\lambda_h)(x_l^+)-\lambda_h(x_l)\right)n(x_l) \\ &= -\sum_j \lambda_j (Qm_j)(x_l^+)+\tau(x_l^+)\left[\sum_j \lambda_j (Um_j)(x_l^+)-\sum_j \lambda_j m_j(x_l)\right]\end{aligned} \tag{3.43}$$

olur. Aynı şekilde Şekil 3.8'e göre görüyoruz ki

$$\sum_j \lambda_j (Qm_j)(x_l^+) = \lambda_l (Qm_l^2)(x_l^+)+\lambda_{l+1}(Qm_{l+1}^1)(x_l^+) \tag{3.44}$$

olarak bulunur. Burada bu kez de I_l'nin x_l düğümü, x_{l+1}'in ikinci komşuluğunda ve x_l'nin birinci komşuluğundadır. $\left\langle m_l, \hat{Q}\lambda_h . n\right\rangle_{\partial I_l}$'in diğer kalan terimi benzer şekilde

$$\tau(x_l^+)\left[\lambda_l (Um_l^2)(x_l^+)+\lambda_{l+1}(Um_{l+1}^1)(x_l^+)-\lambda_l\right] \tag{3.45}$$

elde edilir. (3.44) ve (3.45)'i (3.43)'te yerine yazarsak

$$\begin{aligned}\left\langle m_l, \hat{Q}\lambda_h n\right\rangle_{\partial I_l} &= -\lambda_l (Qm_l^2)(x_l^+)-\lambda_{l+1}(Qm_{l+1}^1)(x_l^+)+ \\ &+\tau(x_l^+)\left[\lambda_l (Um_l^2)(x_l^+)+\lambda_{l+1}(Um_{l+1}^1)(x_l^+)-\lambda_l\right] \\ &= \lambda_l\left[-(Qm_l^2)(x_l^+)+\tau(x_l^+)\left[(Um_l^2)(x_l^+)-1\right]\right]+ \\ &+\lambda_{l+1}\left[-(Qm_{l+1}^1)(x_l^+)+\tau(x_l^+)(Um_{l+1}^1)(x_l^+)\right]\end{aligned} \tag{3.46}$$

bulunur. Dolayısıyla (3.42) ve (3.46)'dan görüyoruz ki A_{global} matrisi

$$A_{global}\lambda_h = d \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{N-1,N} & a_{NN} & a_{N,N+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{N+1,N} & a_{N+1,N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_N \\ \lambda_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_N \\ d_{N+1} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

şeklinde üç köşegensel bir matristir ve bu matrisin elemanları $l = 2,3, \ldots . N$ için

$$a_{l,l-1} = (Qm_{l-1}^2)(x_l^-) + \tau(x_l^-)(Um_{l-1}^2)(x_l^-)$$
$$a_{l,l} = (Qm_l^1)(x_l^-) + \tau(x_l^-)\left[(Um_l^1)(x_l^-) - 1\right] - (Qm_l^2)(x_l^+) + \tau(x_l^+)\left[(Um_l^2)(x_l^+) - 1\right]$$
$$a_{l,l+1} = -(Qm_{l+1}^1)(x_l^+) + \tau(x_l^+)(Um_{l+1}^1)(x_l^+)$$

olarak bulunur.

Şimdi de sağ taraftaki d vektörünü hesaplayalım. Bu vektörün birinci $(i = 1)$ ve sonuncu $(i = N+1)$ elemanları $\lambda_1 = g(0)$ ve $\lambda_{N+1} = g(1)$ olduğundan $d_1 = g(0)$ ve $d_{N+1} = g(1)$'dir. Geriye kalan elemanları bulmak için $i = 2,3, \ldots , N$ olmak üzere (3.36)'da $\mu = m_i$ alırsak

$$d_i = -\langle m_i, (\widehat{Q}g + \widehat{Q}f)n \rangle_{\partial\Omega_h}$$

elde edilir. Bu ifadeyi daha açık bir şekilde yapmak için iki parçaya bölüp

$$dg_i = \langle m_i, \widehat{Q}g.n \rangle_{\partial\Omega_h}, \; df_i = \langle m_i, \widehat{Q}f.n \rangle_{\partial\Omega_h}$$

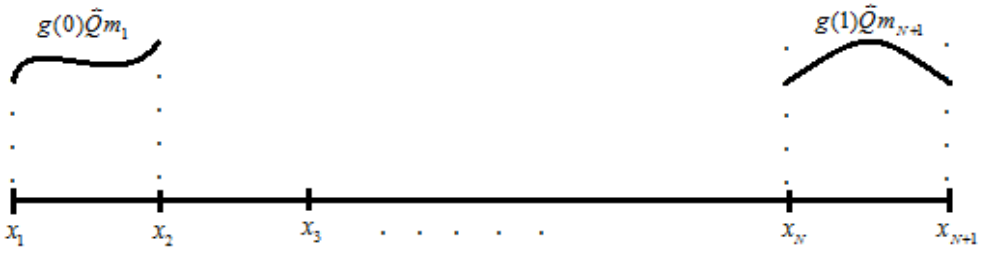
diyelim. Burada $d = -dg - df$ olarak alınır. x_i'de $m_i = 1$ ve diğer noktalarda $m_i = 0$ olduğundan

$$\langle m_i, - \rangle_{\partial\Omega_h} = \langle m_i, - \rangle_{\partial I_{i-1} \cup \partial I_i}$$

eşitliği sağlanır. Buradan

$$
\begin{aligned}
dg_i &= \langle m_i, \hat{Q}g.n\rangle_{\partial I_{i-1}\cup\partial I_i} \\
&= \langle m_i, \hat{Q}g.n\rangle_{\partial I_{i-1}} + \langle m_i, \hat{Q}g.n\rangle_{\partial I_i} \\
&= (\hat{Q}g)(x_i^-)n(x_i^-) + (\hat{Q}g)(x_i^+)n(x_i^+) \\
&= (\hat{Q}g)(x_i^-) - (\hat{Q}g)(x_i^+)
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

elde edilir. $x_2, x_3, \ldots, x_N$ düğümlerinde $g = 0$ olduğundan sadece $i = 2$ ve $i = N$ için $\hat{Q}g$, d 'ye eklenir. Dolayısıyla $I_2, \ldots, I_{N-1}$ elemanları üzerinde $\hat{Q}g = 0$'dır.



Şekil 3.9 $\hat{Q}g$ 'nin d matrisine olan katkısı

Şimdi de $\hat{Q}g$ 'nin dg_2 'ye nasıl eklendiğini gösterelim.

$$
\begin{aligned}
&\hat{Q}g = Qg + \tau(Qg - g)n \Rightarrow \\
&(\hat{Q}g)(x_2^-) = (Qg)(x_2^-) + \tau(x_2^-)[(Ug)(x_2^-) - g(x_2^-)]n(x_2^-) \\
&\qquad = (Qg)(x_2^-) + \tau(x_2^-)(Ug)(x_2^-) \\
&\qquad = g(0)(Qm_1^2)(x_2^-) + g(0)\tau(x_2^-)(Um_1^2)(x_2^-) \\
&\qquad = g(0)\left[\sum_{j=1}^{k+1} q_j^2\varphi_j(x_2) + \tau(x_2^-)\sum_{j=1}^{k+1} u_j^2\varphi_j(x_2)\right]
\end{aligned}
$$

Burada $(Qg)(x_2^+) = 0,\ (Ug)(x_2^+) = 0$ ve I_2'de $Qg = Ug = 0$ olduğundan $(\hat{Q}g)(x_2^+) = 0$'dır. Benzer şekilde I_{N-1}'de $Qg = Ug = 0$ olduğundan $(\hat{Q}g)(x_N^-) = 0$ olur. Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
-(\hat{Q}g)(x_N^+) &= -\left[Qg + \tau(Ug - g)n\right](x_N^+) \\
&= -(Qg)(x_N^+) - \tau(x_N^+)\Big[\underbrace{(Ug)(x_N^+) - g(x_N^+)}_{=0}\Big]\underbrace{n(x_N^+)}_{=-1} \\
&= -(Qg)(x_N^+) + \tau(x_N^+)(Ug)(x_N^+) \\
&= g(1)\left[-\sum_{j=1}^{k+1} q_j{}'\varphi_j(x_N) + \tau(x_N^+)\sum_{j=1}^{k+1} u_j{}'\varphi_j(x_N)\right]
\end{aligned}
$$

olarak yazılır. Özetle

$$
dg = \begin{bmatrix} - \\ (\hat{Q}g)(x_2^-) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -(\hat{Q}g)(x_N^+) \\ - \end{bmatrix}
$$

şeklinde tanımlıdır. Şimdi de df'yi bulalım. Qf ve Uf, her bir eleman üzerinde sıfırdan farklı olduğundan df, $i = 2,3,\ldots,N$ için sıfırdan farklı olup

$$
\begin{aligned}
&\hat{Q}f = Qf + \tau(Uf)n \Rightarrow \\
&df_i = (\hat{Q}f)(x_i^-) - (\hat{Q}f)(x_i^+) = \left[Qf + \tau Uf.n\right](x_i^-) - \left[Qf + \tau Uf.n\right](x_i^+) \\
&\quad = (Qf)(x_i^-) + \tau(x_i^-)(Uf)(x_i^-)n(x_i^-) - (Qf)(x_i^+) - \tau(x_i^+)(Uf)(x_i^+)n(x_i^+) \\
&\quad = (Qf)(x_i^-) + \tau(x_i^-)(Uf)(x_i^-) - (Qf)(x_i^+) + \tau(x_i^+)(Uf)(x_i^+)
\end{aligned}
$$

şeklinde ifade edilir ve Qf ve Uf'in bilinmeyen değişkenlerinin uygun bir şekilde kullanılmasıyla hesaplanır. Böylece $d = -dg - df$ vektörü bulunur. Bu da global lineer sistemin son aşamasıdır.

3.1.3 Kesin Çözümün Varlığı ve Tekliği

Lemma 3.1

a) (1.1)-(1.2) kesirli sınır değer problemine denk gelen (2.1)-(2.2) problemi,

$$
u(x) = \int_a^b G(x,s)g(s,u(s),{}_a^C D_s^\beta)ds \tag{3.49}
$$

denktir. Burada Green fonksiyonu

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{(x-a)(b-s)^{\alpha-1}}{(b-a)\Gamma(\alpha)}-\dfrac{(x-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & a\le s\le x\le b\\ \dfrac{(x-a)\left(b-s\right)^{\alpha-1}}{(b-a)\Gamma(\alpha)}, & a\le x\le s\le b\end{cases} \tag{3.50}$$

olarak tanımlanır [41].

İspat Lemma 2.10 (d)'de verilen ${}_aI_x^{\alpha}$ operatörünü (1.1) denkleminin her iki tarafına uygularsak

$$u(x)-u(a)-u'(a)(x-a)+{}_aI_x^{\alpha}g(x,u(x),{}_a^C D_x^{\beta}u(x))=0 \tag{3.51}$$

elde edilir. $u(a)=u(b)=0$ olduğundan (4.17)'de $x=b$ yazılırsa açık bir şekilde

$$u'(a)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\frac{(b-s)^{\alpha-1}}{(b-a)}g(s,u(s),{}_a^C D_x^{\beta}u(s))ds$$

bulunur ve

$$\begin{aligned}u(x)&=u'(a)(x-a)+{}_aI_x^{\alpha}g(x,u(x),{}_a^C D_x^{\beta}u(x))\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\frac{(x-a)(b-s)^{\alpha-1}}{(b-a)}g(s,u(s),{}_a^C D_x^{\beta}u(s))-\\&\quad\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-s)^{\alpha-1}g(s,u(s),{}_a^C D_s^{\beta}u(s))\\&=\int_a^b G(x,s)g(s,u(s),{}_a^C D_s^{\beta}u(s))ds\end{aligned} \tag{3.52}$$

elde edilir. Bu kez ${}_a^C D_x^{\alpha}$ operatörünü (3.52)'nin her iki tarafına uygularsak

$$
\begin{aligned}
{}_a^C D_x^{\alpha} u(x) &= {}_a^C D_x^{\alpha} \int_a^b G(x,s) g(s,u(s)\, {}_a^C D_s^{\beta} u(s)) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \frac{(b-s)^{\alpha-1}}{(b-a)} g(s,u(s), {}_a^C D_s^{\beta} u(s)) ds\, {}_a^C D_x^{\alpha} (x-a) - \\
&\quad {}_a^C D_s^{\alpha}\, {}_a I_x^{\alpha} g(x,u(x), {}_a^C D_x^{\beta} u(s)) \\
&= -g(x,u(x), {}_a^C D_x^{\beta} u(x))
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

bulunur ve homojen sınır şartları sağlanır.

Teorem 3.2

a) $g : [a,b] \text{ x } \mathbb{R} \text{ x } \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli ve (1.3) Lipschitz şartı sağlansın. Eğer

$$
K_g \frac{2(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + L_g \left[\frac{(b-a)^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2-\beta)} + \frac{(b-a)^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha+1-\beta)} \right] < 1 \tag{3.54}
$$

ise o takdirde $C^1[a,b]$'de (1.1)-(1.2) kesirli sınır değer probleminin bir tek çözümü vardır [41].

BÖLÜM 4

BAGLEY-TORVİK DENKLEMİ

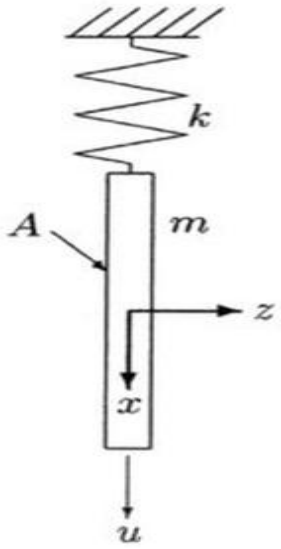
4.1 Bagley-Torvik Denklemi için HDG Metodu

Bagley-Torvik denklemi [30], [45] Newton akışkanına batırılmış katı bir levhanın hareketinin modellemesinde karşımıza çıkmaktadır ve

$$A_0 u''(x) + A_1 {}_0^C D_x^{3/2} u(x) + A_2 u(x) = f(x),\ 0 < x < 1,\ A_0 \neq 0, A_0, A_1, A_2 \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1 \tag{4.2}$$

denklemiyle tanımlanır.



Şekil 4.1 Newton akışkanına batırılmış m kütleli levha

Burada ${}_0^C D_x^{3/2}$, Caputo türevi, $u(x)$, m kütleli ve A yüzey alanına sahip tabakanın yer değiştirmesini gösterir. A_0 ve A_1,

$$A_0 = m,\ A_1 = 2A\sqrt{\mu\sigma} \tag{4.3}$$

olarak tanımlanır. Burada μ ve σ, sırasıyla levhanın batırıldığı akışkanın viskozite ve yoğunluğudur. Katı levha, sabit noktaya k yayın gerginliği vasıtasıyla bağlıdır. Yayın hareketinin akışkanın hareketini etkilemediği varsayılır ve $A_2 = k$ olarak alınır. (4.1) denkleminde $A_0 = A_1 = A_2 = 1$ alırsak (4.1) denklemi ile verilen kesirli sınır değer problemi

$$u''(x) + {}_0^C D_x^{3/2} u(x) + u(x) = f(x),\ \ \Omega = (0,1) \tag{4.4}$$

$$u = g = u_D, \qquad \partial\Omega = \{0,1\} \tag{4.5}$$

olarak tanımlanır. ${}_0^C D_x^{\alpha}$ Caputo türevi, T_3 operatörü ile birlikte

$${}_0^C D_x^{\alpha} u(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^x u''(t)(x-t)^{1-\alpha} =: T_3\left[u''(x)\right] \tag{4.6}$$

şeklindedir. $(q_h, p_h, u_h, \hat{u}_h) \in [V_h^k]^3$ x $L^2(\varepsilon_h)$ yaklaşık çözümü için denklem sistemi

$$\begin{aligned}
&(q_h, v)_{\Omega_h} - (u_h, v')_{\Omega_h} + <\hat{u}_h, v.n>_{\partial\Omega_h} = 0,\\
&(p_h, w)_{\Omega_h} - (q_h, w')_{\Omega_h} + <\hat{q}_h, .n, w>_{\partial\Omega_h} = 0,\\
&(p_h, z)_{\Omega_h} + (T_3[p_h], z)_{\Omega_h} + (u_h, z)_{\Omega_h} = (f, z)_{\Omega_h},\\
&<\hat{q}_h.n, \mu>_{\partial\Omega_h} = 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

olup burada $(v, w, z, \mu) \in [V_h^k]^3$ x $L_0^2(\varepsilon_h)$ ve

$$\lambda_h := \begin{cases} \hat{u}_h, & \partial\Omega_h \setminus \partial\Omega \\ 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

olmak üzere $\hat{u}_h = \lambda_h + u_D$ $(\lambda_h \in L_0^2(\varepsilon_h))$ biçiminde tanımlanır. Ayrıca $\hat{q}_h$ nümerik izi

$$\hat{q}_h = q_h + \tau(u_h - \hat{u}_h).n \tag{4.8}$$

şeklindedir. Birinci yerel çözücü tüm $v, w, z \in P^k(K)$ için

$$\begin{aligned} (Qm, v)_K \quad & -(Um, v')_K \quad && = - < m, v.n >_{\partial K} \\ (Pm, w)_K \quad & -(Qm, w')_K \quad + < \hat{Q}m.n, w >_{\partial K} \quad && = 0 \\ (Pm, z)_K \quad & +(T_3[Pm], z)_K \quad + (Um, z)_K \quad && = 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

olup ∂K'da

$$\hat{Q}m = Qm + \tau(Um - m)n$$

olarak tanımlanır. İkinci yerel çözücü $K \in \Omega_h$ elemanı üzerinde tüm $(v, w, z) \in P^k(K)$ için

$$\begin{aligned} (Qf, v)_K \quad & -(Uf, v')_K \quad && = 0 \\ (Pf, w)_K \quad & -(Qf, w')_K \quad + < \hat{Q}f, w.n >_{\partial K} \quad && = 0 \\ (Pf, z)_K \quad & +(T_3[Pf], z)_K \quad + (Uf, z)_K \quad && = (f, z)_K \end{aligned} \tag{4.10}$$

olup ∂K'da

$$\hat{Q}f = Qf + \tau(Uf)n$$

şeklindedir. Yerel çözücüleri hesaplarken (3.1)-(3.2) problemi için yapılan işlemlerin aynısı uygulanır. Dolayısıyla (Qf, Pf, Uf) için elde edilen lineer sistem

$$\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ C & A & D \\ 0 & F & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = (\varphi_j, \varphi_i),\ B_{ij} = -(\varphi_j, \varphi_i'),\ C_{ij} = -(\varphi_i', \varphi_j) + \varphi_i(x_{l+1})\varphi_j(x_{l+1}) - \varphi_i(x_l)\varphi_j(x_l)$$

$$D_{ij} = \tau(x_{l+1}^-)\varphi_i(x_{l+1})\varphi_j(x_{l+1}) + \tau(x_l^+)\varphi_i(x_l)\varphi_j(x_l)$$

$$F_{ij} = (\varphi_j, \varphi_i) + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\int_0^x \frac{\varphi_j(t)}{(x-t)^{\alpha-1}} dt, \varphi_i \right), \; f_i = (f, \varphi_i)$$

olarak verilir. Diğer yerel çözücü (Qm, Pm, Um) için daha önceki yaptığımız işlemler uygulanarak aynı sonuçlar bulunur. Yani

$$\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ C & A & D \\ 0 & F & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ \vartheta \\ 0 \end{bmatrix}$$

olup (3.1)-(3.2) kesirli sınır değer problemindeki sağ taraftaki matrisler eşittir ve yerel çözücülere denk gelen lineer sistem I_{l-1} aralığı için

$$\delta_i = -\varphi_i(x_l), \; i = 1, 2, \ldots, k+1$$

$$\vartheta_i = \varphi_i(x_l)\tau(x_l^-), \; i = 1, 2, \ldots, k+1$$

iken I_l aralığında

$$\delta_i = \varphi_i(x_l), \; i = 1, 2, \ldots, k+1$$

$$\vartheta_i = \varphi_i(x_l)\tau(x_l^+), \; i = 1, 2, \ldots, k+1$$

şeklindedir. Aynı şekilde (5.7)'nin son denklemindeki geçiş şartı ile (3.9)'a denk olduğundan global matrislerin ifade ediliş tarzı da aynıdır. Dolayısıyla $(q_h, p_h, u_h, \lambda_h) \in [V_h^k]^3 \text{x } L_0^2(\varepsilon_h)$ için

$$\begin{aligned} q_h &= Q\lambda_h + Qg + Qf \\ p_h &= P\lambda_h + Pg + Pf \\ u_h &= U\lambda_h + Ug + Uf \end{aligned} \qquad (4.11)$$

yaklaşık çözümü elde edilir ve

$$a_h(\lambda_h, \mu) = b_h(\mu) \;\; (\mu \in L_0^2(\varepsilon_h)) \qquad (4.12)$$

olup

$$a_h(\lambda_h, \mu) = - < \hat{Q}\lambda_h, \mu n >_{\partial\Omega_h} ,$$
$$b_h(\mu) = < \hat{Q}g + \hat{Q}f, \mu n >_{\partial\Omega_h}$$

şeklindedir. Bu lineer sistemin çözümünde izlenecek yol (3.1)-(3.2) için yaptığımız süreç ile aynıdır. Dolayısıyla HDG metodunun ele aldığımız denklem tipleri için çözümü MATLAB programı ile yapılacak ve sayısal örneklerle metodun yakınsaklığı incelenecektir.

BÖLÜM 5

SAYISAL ÖRNEKLER

Bu bölümde HDG metodunun model problemlerimizdeki performansını değerlendirmek için bazı sayısal örnekler üzerinde durulacaktır. Tüm örneklerde HDG metodunu uygularken polinom derecesi $k=1$'den başlamak suretiyle alınır. Çizelgelerde $\phi = u, q, p$ olmak üzere $\|\phi - \phi_h\|_{0,h}$, L^2 -hatayı gösterirken hata

$$\|\phi - \phi_h\|_{0,\Omega} = \left(\sum_{K \in \Omega_h} \int_K (\phi - \phi_h)^2 \right)^{1/2}$$

formülü ile hesaplanır. Çizelgelerde hesapladığımız bu değerler "hata" sütununda gösterilmiştir. Hatanın yakınsaklık mertebesi "hata" sütunundan sonraki "mertebe" sütununda belirtilmiştir. Bu değer, iki ardışık şebekeye göre iki HDG çözümüne karşılık gelen iki ardışık hatanın oranının logaritmasını içerir. Böylece, mesela hata sütunundaki sayılar κ'ya yaklaşırsa hata,

$$\|\phi - \phi_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{\kappa}$$

formunda verilen bir formülü sağlar. Burada C, sabit bir sayı olup h şebeke adımından bağımsızdır. Yani HDG metodu h 'a göre κ. mertebeden yakınsar. Ayrıca $\hat{u}_h$ nümerik izindeki hata için benzer sonuçlar tabloların son iki sütununda verilmiştir ve hata sütununda alınan l^{∞} - hatası

$$\|u - \hat{u}_h\|_{\infty,\varepsilon_h} = \max_{e \in \varepsilon_h} |(u - \hat{u}_h)(e)|$$

olarak tanımlanır.

Örnek 5.1 [41]

$$ {}_0^C D_x^{1.5} u(x) + \frac{1}{3} u(x) + \frac{1}{4} {}_0^C D_x^{0.5} u(x) = -\frac{7}{2\sqrt{\pi}} x^{0.5} + \frac{x}{3} - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} x^{1.5} - \frac{x^2}{3}, \quad 0 < x < 1 $$
$$ u(0) = 0,\ u(1) = 0 $$

problemini ele alalım. Teorem (3.2)'ye göre $K_g = \frac{1}{3}$, $L_g = \frac{1}{4}$, $a = 0$, $b = 1, \alpha = 1.5$, $\beta = 0.5$ olarak bulunur. Buna göre

$$ K_g \frac{2(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + L_g \left[\frac{(b-a)^{\alpha-\beta}}{\Gamma(2-\beta)\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(b-a)^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} \right] \approx 0.96 < 1 $$

olduğundan problemin tek bir çözümü vardır ve $u(x) = x(1-x)$'dir. Hata ve yakınsaklık sonuçları $\tau = 0.1$ için Çizelge 5.1'de verilmiştir.

Çizelge 5.1 Örnek 5.1'in yakınsaklığı, $\tau = 0.1$

k	N	$\|u-u_h\|_{0,\Omega}$		$\|q-q_h\|_{0,\Omega}$		$\|p-p_h\|_{0,\Omega}$		$\|u-\lambda_h\|_{\infty,\varepsilon_h}$	
		Hata	Mertebe	Hata	Mertebe	Hata	Mertebe	Hata	Mertebe
1	4	4.66e-03	–	5.92e-04	–	3.37e-04	–	1.73e-05	–
	8	1.16e-03	2.00	1.49e-04	1.99	5.50e-05	2.61	3.14e-06	2.46
	16	2.91e-04	2.00	3.75e-05	1.99	1.20e-05	2.20	7.38e-07	2.09
	32	7.28e-05	2.00	9.39e-06	2.00	2.85e-06	2.07	1.82e-07	2.02
	64	1.82e-05	2.00	2.35e-06	2.00	6.98e-07	2.03	4.51e-08	2.01
	128	4.55e-06	2.00	5.88e-07	2.00	1.73e-07	2.01	1.12e-08	2.00
	256	1.14e-06	2.00	1.47e-07	2.00	4.30e-08	2.01	2.81e-09	2.00
	512	2.84e-07	2.00	3.67e-08	2.00	1.07e-08	2.00	7.01e-10	2.00
2	4	6.18e-15	–	1.70e-15	–	2.24e-14	–	3.05e-16	–
	8	6.34e-15	–	2.00e-14	–	9.70e-14	–	8.77e-15	–
	16	1.19e-14	–	4.15e-14	–	5.48e-13	–	1.66e-14	–
	32	7.00e-14	–	2.77e-13	–	2.45e-12	–	9.98e-14	–

Çizelge 5.1'den görülüyor ki $k=1$ için u_h, q_h, p_h ve $\hat{u}_h$, $k+1=2$ gibi optimal mertebeden yakınsaklık davranışı gösterir. $k=2$ için HDG metodunun kesin sonucu yakaladığını (makine kesinliği kadar) görmekteyiz.

Örnek 5.2

$$ {}_0^C D_x^{1.3} u(x) + \frac{1}{5} u(x) = \frac{6}{\Gamma(1.7)} x^{0.7} \left(\frac{5}{3} + \frac{x}{1.7}\right),\ 0 < x < 1,\ n-1 < \alpha < n,\ n = 2 $$

$$ u(0) = -1,\ u(1) = 5 $$

sınır değer problemini ele alalım. İlk olarak çözümün tekliğini göstermemiz gerekiyor. Teorem A-3 (A.18)'den

$$ K_f = \frac{1}{5},\ a = 0,\ b = 1, \alpha = 1.3,\ \frac{2K_f (b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \approx 0.34 < 1 $$

olduğundan problemin tek bir çözümü vardır ve $u(x) = x^3 + 5x^2 - 1$'tir. HDG metodunda $(q_h, p_h, u_h, \lambda_h)$ yaklaşık çözümü için hata ve yakınsaklık sonuçları $\tau = 1/h$ için Çizelge 5.2'de verilmiştir.

Çizelge 5.2'den anlaşılıyor ki $k=1$ olduğunda metodun yakınsaklığı u_h, p_h ve $\hat{u}_h$ için optimal mertebe $k+1=2$ iken q_h için standart altı mertebe $k=1$ şeklindedir. $k=2$ için yakınsaklık sadece u_h için optimal mertebe $k+1=3$ iken q_h, p_h ve $\hat{u}_h$ için ise standart altı mertebe $k=2$ elde edilir. Kesin çözüm üçüncü dereceden bir polinom olduğundan HDG metodu, $k=3$ için kesin çözümü yakalar.

Çizelge 5.2 Örnek 5.2'nin yakınsaklığı, $\tau = 1/h$

k	N	$\|u-u_h\|_{0,\Omega}$		$\|q-q_h\|_{0,\Omega}$		$\|p-p_h\|_{0,\Omega}$		$\|u-\lambda_h\|_{\infty,\varepsilon_h}$	
		Hata	Mertebe	Hata	Mertebe	Hata	Mertebe	Hata	Mertebe
1	4	3.22e-02	–	1.36e-01	–	8.55e-03	–	6.22e-04	–
	8	8.01e-03	2.00	6.77e-02	1.00	1.86e-03	2.20	1.37e-04	2.18
	16	2.00e-03	2.00	3.38e-02	1.00	4.45e-04	2.06	3.31e-05	2.05
	32	5.00e-04	2.00	1.69e-02	1.00	1.14e-04	1.97	8.15e-06	2.02
	64	1.25e-04	2.00	8.45e-03	1.00	3.03e-05	1.91	2.03e-06	2.00
	128	3.12e-05	2.00	4.23e-03	1.00	8.30e-06	1.87	5.06e-07	2.00
2	4	2.98e-04	–	1.27e-03	–	7.05e-05	–	7.77e-06	–
	8	3.73e-05	3.00	3.18e-04	2.00	1.65e-05	2.10	2.00e-06	1.96
	16	4.67e-06	3.00	7.94e-05	2.00	4.02e-06	2.03	5.04e-07	1.99
	32	5.89e-07	2.99	1.99e-05	2.00	9.96e-07	2.01	1.26e-07	2.00
	64	7.63e-08	2.95	4.96e-06	2.00	2.48e-07	2.00	3.16e-08	2.00
3	4	1.19e-13	–	3.90e-13	–	1.86e-12	–	1.77e-13	–
	8	8.69e-13	–	3.89e-12	–	3.48e-11	–	1.34e-13	–
	16	1.96e-12	–	1.09e-11	–	2.98e-10	–	1.96e-12	–

Örnek 5.3

$$ {}_0^C D_x^{1.7} u(x) = \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(4.3)} x^{3.3},\ 0 < x < 1,\ n-1 < \alpha < n,\ n = 2 $$

$$ u(0) = 0,\ u(1) = 1 $$

şeklindeki kesirli mertebeli sınır değer problemini ele alalım. Bu tip problemleri, adi diferansiyel denklemlere çevirerek çözelim. Problemin kesin çözümü $u = x^5$ olup problemi ikinci mertebeden adi sınır değer problemine dönüştürelim. Bunun için Lemma 2.11'den

$${}_0^C D_x^{1.7} u(x) = {}_0 I_x^{0.3}\, {}_0 D_x^2 u(x) = \frac{1}{\Gamma(0.3)} \int_0^x (x-t)^{-0.7} \left(\frac{d}{dt}\right)^2 u(t)dt = \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(4.3)} x^{3.3}$$

olarak yazılır. Daha sonra Lemma 2.10'nun (a) şıkkından ${}_0^{RL} D_x^{0.3}$ operatörünü üstteki eşitliğin her iki tarafına uygularsak;

$${}_0^{RL} D_x^{0.3}\, {}_0 I_x^{0.3} D^2 u(x) = u''(x) = g(x)$$

olup

$$g(x) = {}_0^{RL} D_x^{0.3} f(x) = {}_0^{RL} D_x^{0.3} \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(4.3)} x^{3.3} = 20x^3$$

elde edilir. Dolayısıyla denklem

$$u''(x) = 20x^3, \ 0 < x < 1$$

$$u(0) = 0, \ u(1) = 1$$

şeklindeki ikinci mertebeden adi diferansiyel denkleme dönüştürülür. HDG metodunda (q_h, u_h, λ_h) yaklaşık çözümü hesaplanırsa farklı $k \geq 1$ polinom derecesi ile N eleman sayısına göre $\|u - u_h\|_{0,\Omega}$, $\|q - q_h\|_{0,\Omega}$ ve $\|u - \lambda_h\|_{\infty,\varepsilon_h}$ için kesin çözüm ile yaklaşım çözüm arasındaki hata ile yakınsaklık mertebesi Çizelge 5.3'te verilmiştir. Yakınsaklığı incelerken kararlılık parametresi $\tau = 0.1$ olarak alınır.

Çizelge 5.3'ten görüyoruz ki polinom derecesini k alırsak u_h ve q_h için yakınsaklık optimal mertebeli $k+1$ iken $\hat{u}_h$ için ise hata miktarı sıfır olur. Ayrıca k'yı kesin çözümün derecesine eşit olarak alırsak ($k = 5$) problemin yaklaşık çözümünün kesin çözüm ile çakıştığını görürüz.

Çizelge 5.3 Örnek 5.3'ün yakınsaklığı, $\tau = 0.1$.

k	N	$\|u-u_h\|_{0,\Omega}$		$\|q-q_h\|_{0,\Omega}$		$\|u-\lambda_h\|_{\infty,\varepsilon_h}$	
		Hata	Mertebe	Hata	Mertebe	Hata	Mertebe
1	4	7.92e-01	–	6.15e-02	–	8.33e-17	–
	8	2.01e-01	1.98	1.56e-02	1.98	3.05e-16	–
	16	5.04e-02	2.00	3.91e-03	2.00	8.05e-16	–
	32	1.26e-02	2.00	9.78e-04	2.00	3.33e-15	–
	64	3.15e-03	2.00	2.44e-04	2.00	1.35e-14	–
	128	7.88e-04	2.00	6.11e-05	2.00	4.74e-14	–
	256	1.97e-04	2.00	1.53e-05	2.00	2.15e-13	–
2	4	4.01e-02	–	3.39e-03	–	1.94e-16	–
	8	5.04e-03	2.99	4.26e-04	2.99	3.47e-17	–
	16	6.31e-04	3.00	5.33e-05	3.00	3.12e-17	–
	32	7.88e-05	3.00	6.67e-06	3.00	4.58e-16	–
	64	9.86e-06	3.00	8.33e-07	3.00	1.28e-15	–
3	4	1.06e-03	–	9.32e-05	–	1.11e-16	–
	8	6.60e-05	4.00	5.83e-06	4.00	2.78e-17	–
	16	4.13e-06	4.00	3.64e-07	4.00	1.39e-15	–
	32	2.58e-07	4.00	2.28e-08	4.00	4.39e-15	–
4	4	1.17e-06	–	1.29e-07	–	3.05e-16	–
	8	3.65e-08	5.00	4.04e-09	5.00	2.78e-15	–
	16	1.14e-09	5.00	1.26e-10	5.00	1.78e-15	–
	32	3.57e-11	5.00	3.94e-12	5.00	2.91e-16	–
5	4	4.57e-13	–	5.17e-14	–	2.78e-16	–
	8	5.43e-13	–	6.11e-14	–	1.11e-16	–
	16	5.21e-13	–	5.86e-14	–	5.00e-16	–
	32	5.12e-13	–	5.76e-14	–	2.22e-16	–

Örnek 5.4 [48]

$$u''(x)+D_x^{\alpha}u(x)+u(x)=\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\alpha)}x^{3-\alpha}+x^3+7x+1,\quad \Omega=(0,1)$$

$$u(0)=1,\ u(1)=3,\qquad \partial\Omega=\{0,1\}$$

biçimindeki Bagley-Torvik denklemini ele alalım. Bu problemin kesin çözümü $u(x)=x^3+x+1$'dir. Burada $1<\alpha<2$ olup Çizelge 5.4'te $\alpha=1.5$ için yakınsaklık sonuçları $\tau=1/h$ için ele alınmıştır.

Çizelge 5.4 Örnek 5.4'ün yakınsaklığı, $\tau=1/h$.

k	N	$\|u-u_h\|_{0,\Omega}$		$\|q-q_h\|_{0,\Omega}$		$\|p-p_h\|_{0,\Omega}$		$\|u-\lambda_h\|_{\infty,\varepsilon_h}$	
		Hata	Mertebe	Hata	Mertebe	Hata	Mertebe	Hata	Mertebe
1	4	9.31e-03	–	3.80e-02	–	3.68e-03	–	2.28e-04	–
	8	2.16e-03	2.11	1.81e-02	1.07	6.56e-04	2.49	5.81e-05	1.97
	16	5.30e-04	2.03	8.96e-03	1.02	1.43e-04	2.19	1.45e-05	2.00
	32	1.32e-04	2.01	4.47e-03	1.00	3.44e-05	2.06	3.63e-06	2.00
	64	3.30e-05	2.00	2.23e-03	1.00	8.52e-06	2.01	9.08e-07	2.00
	128	8.23e-06	2.00	1.12e-03	1.00	2.13e-06	2.00	2.27e-07	2.00
	256	2.06e-06	2.00	5.58e-04	1.00	5.31e-07	2.00	5.68e-08	2.00
2	4	2.98e-04	–	1.27e-03	–	4.81e-05	–	4.26e-06	–
	8	3.73e-05	3.00	3.18e-04	2.00	1.04e-05	2.21	1.08e-06	1.97
	16	4.67e-06	3.00	7.94e-05	2.00	2.49e-06	2.06	2.73e-07	1.99
	32	5.84e-07	3.00	1.99e-05	2.00	6.16e-07	2.02	6.83e-08	2.00
	64	7.38e-08	2.99	4.96e-06	2.00	1.54e-07	2.00	1.71e-08	2.00
3	4	1.43e-13	–	5.08e-13	–	2.55e-12	–	1.98e-13	–
	8	6.06e-13	–	2.28e-12	–	2.04e-11	–	8.99e-13	–
	16	4.67e-12	–	1.61e-11	–	8.96e-11	–	6.81e-12	–

Dolayısıyla Çizelge 5.4'ten görüyoruz ki $k=1$ ise HDG metodu için yakınsaklık u_h, p_h ve $\hat{u}_h$ için optimal mertebeli $k+1=2$ iken q_h için ise standart altı mertebeli $k=1$ şeklinde bir davranış gösterir. $k=2$ için yakınsaklık sadece u_h için optimal mertebeli $k+1=3$ olup q_h, p_h ve $\hat{u}_h$ için ise standart altı mertebeden $k=2$ olur. Tabii ki $k=3$ için metot, kesin çözümle çakışır. Elde edilen sonuçlar Örnek 5.2 ile denktir.

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

HDG metodu, $\alpha, \beta > 0$ kesirli mertebeden Caputo türevini içeren kesirli sınır değer problemi ve Bagley-Torvik denklemi ile verilen sınır değer problemi için ayrıntılı olarak incelendi. Hibritleştirme yoluyla ele aldığımız problemleri çözmemizi sağlayan global lineer denklem sistemi, sadece elemanların sınırında bulunan bilinmeyenler cinsinden ifade edildi. Ayrıca kararlılık parametresinin yaklaşık çözüm elde etmedeki etkisi sayısal örneklerle Matlab programı kullanılarak analiz edildi. Metodun yakınsaklık davranışını belirlemek için her bir örnekte baz fonksiyonlarının $k \geq 1$ polinom derecesi alındı. Elde edilen yakınsaklık, $\alpha, \beta > 0$ mertebeden Caputo türevini içeren problemde baz fonksiyonunun derecesi k iken L^2-normuna göre q, p ve u'nun yakınsaklık mertebesi $k+1$ olmuştur. Bu problemin özel durumlarında ise polinom derecesi k iken yakınsaklık mertebesi q, p ve u için k veya $k+1$ olarak elde edilmiştir. Bagley-Torvik denklemi ile verilen kesirli sınır değer probleminde ise polinom derecesini k aldığımızda q, p ve u için yakınsaklık mertebesi aynı şekilde $k+1$ veya k mertebedendir. Ayrıca k 'yı kesin çözümün derecesine eşit olacak şekilde alırsak HDG metodunun her iki tipteki problemde kesin çözüm ile çakıştığını görmekteyiz. Sonuçta HDG metodunun $\alpha, \beta > 0$ mertebeden Caputo türevi içeren kesirli sınır değer problemi ile özel hallerinde ve ayrıca Bagley-Torvik denklemi ile verilen sınır değer probleminde etkili ve yakınsak sonuçlar verdiği görüldü. Dolayısıyla elde edilen sonuçlar, HDG

metodunun farklı tipteki kesirli sınır değer problemlerine uygulamasının incelenmesi gerektiği kanaatini doğurmuştur.

KAYNAKLAR

[1] Ozaktas, H.M., Arikan, O., Kutay, A.M. ve Bozdagi, G., (1996). "Digital computation of the fractional fourier transform", IEEE Transactions on Signal Processing, 44(9):2141-2150.

[2] Duarte, F.B. ve Machado, J.T., (2002). "Chaotic phenomena and fractional-order dynamics in the trajectory control of redundant manipulators", Nonlinear Dynamics, 29(1-4):315-342.

[3] Agrawal, O.P., (2004). "A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems", Nonlinear Dynamics, 38(1-4):323-337.

[4] Engheta, N., (1996). "On fractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 44(4):554-566.

[5] Magin, R.L., (2010). "Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues", Computers & Mathematics with Applications, 59(5):1586-1593.

[6] Kulish, V.V. ve Lage, J.L., (2002). "Application of fractional calculus to fluid mechanics", Journal of Fluids Engineering, 124(3):803-806.

[7] Oldham, K.B., (2010). "Fractional differential equations in electrochemistry", Advances in Engineering Software, 41(1):9-12.

[8] Gafiychuk, V., Datsko, B. ve Meleshko, V., (2008). "Mathematical modeling of time fractional reaction–diffusion systems", Journal of Computational and Applied Mathematics, 220(1):215-225.

[9] Lederman, C., Roquejoffre, J.M. ve Wolanski, N., (2004). "Mathematical justification of a nonlinear integro-differential equation for the propagation of spherical flames", Annali di Matematica Pura ed Applicata, 183(2):173-239.

[10] Mainardi, F., (2012). "Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics", arXiv preprint arXiv:1201.0863.

[11] Meral, F.C., Royston, T.J. ve Magin, R., (2010). "Fractional calculus in viscoelasticity: an experimental study", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 15(4):939-945.

[12] Daftardar-Gejji, V. ve Jafari, H., (2007). “Solving a multi-order fractional differential equation using Adomian decomposition”, Applied Mathematics and Computation, 189(1):541-548.

[13] Abdulaziz, O., Hashim, I. ve Momani, S., (2008). “Solving systems of fractional differential equations by homotopy-perturbation method”, Physics Letters A,372(4):451-459.

[14] Hashim, I., Abdulaziz, O. ve Momani, S., (2009). “Homotopy analysis method for fractional IVPs”, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 14(3):674-684.

[15] Kurulay, M., (2012). “Solving the fractional nonlinear Klein-Gordon equation by means of the homotopy analysis method”, Advances in Difference Equations, 2012(1):1-8.

[16] Wu, G.C. ve Lee, E.W.M., (2010). “Fractional variational iteration method and its application”, Physics Letters A, 374(25):2506-2509.

[17] Kurulay, M. ve Bayram, M., (2010). “Approximate analytical solution for the fractional modified KdV by differential transform method”, Communications in nonlinear science and numerical Simulation, 15(7):1777-1782.

[18] Secer, A. ve Kurulay, M., (2012). “The Sinc-Galerkin method and its applications on singular Dirichlet-type boundary value problems”, Boundary Value Problems, 2012(1):1-14.

[19] Odibat, Z., Momani, S. ve Erturk, V.S., (2008). “Generalized differential transform method: application to differential equations of fractional order”, Applied Mathematics and Computation, 197(2):467-477.

[20] Zhang, Y., (2009). “A finite difference method for fractional partial differential equation”, Applied Mathematics and Computation, 215(2):524-529.

[21] Lubich, C., (1985). “Fractional linear multistep methods for Abel-Volterra integral equations of the second kind”, Mathematics of computation, 45(172):463-469.

[22] Diethelm, K., Ford, N.J. ve Freed, A.D., (2002). “A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations”, Nonlinear Dynamics, 29(1-4), 3-22.

[23] Blank, L., (1996). “Numerical treatment of differential equations of fractional order”, Numerical Analysis Report 287, Manchester Center for Numerical Computational Mathematics.

[24] Rawashdeh, E.A., (2006). “Numerical solution of semidifferential equations by collocation method”, Applied Mathematics and Computation, 174(2):869-876.

[25] Nie, N., Zhao, Y., Li, M., Liu, X., Jimenez, S., Tang, Y. ve Vazquez, L., (2010). “Solving Two-Point Boundary Value Problems Of Fractional Differential Equations Via Spline Collocation Methods”, International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing, 1(01):117-132.

[26] Zhang, S., (2006). “Existence of solution for a boundary value problem of fractional order”, Acta Mathematica Scientia, 26(2):220-228.

[27] Ahmad, B. ve Nieto, J. J., (2009). “Existence of solutions for nonlocal boundary value problems of higher-order nonlinear fractional differential equations”, Abstract and Applied Analysis (2009), Hindawi Publishing Corporation.

[28] El-Shahed, M. ve Nieto, J.J., (2010). “Nontrivial solutions for a nonlinear multi-point boundary value problem of fractional order”, Computers & Mathematics with Applications, 59(11):3438-3443.

[29] ur Rehman, M. ve Khan, R.A., (2010). “Existence and uniqueness of solutions for multi-point boundary value problems for fractional differential equations”, Applied Mathematics Letters, 23(9):1038-1044.

[30] Sun, S., Zhao, Y., Han, Z. ve Li, Y., (2012). “The existence of solutions for boundary value problem of fractional hybrid differential equations”, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 17(12):4961-4967.

[31] Sun, S., Zhao, Y., Han, Z. ve Xu, M., (2012). “Uniqueness of positive solutions for boundary value problems of singular fractional differential equations”, Inverse Problems in Science and Engineering, 20(3):299-309.

[32] Agarwal, R.P., O'Regan, D. ve Staněk, S., (2010). “Positive solutions for Dirichlet problems of singular nonlinear fractional differential equations”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 371(1):57-68.

[33] Cabada, A. Ve Wang, G., (2012). “Positive solutions of nonlinear fractional differential equations with integral boundary value conditions”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 389(1):403-411.

[34] Wei, Z., Pang, C. ve Ding, Y., (2012). “Positive solutions of singular Caputo fractional differential equations with integral boundary conditions”, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 17(8):3148-3160.

[35] Zhang, S., (2006). “Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional differential equations”, Electronic Journal of Differential Equations, (36):1-12.

[36] Zhao, Y., Sun, S., Han, Z. ve Zhang, M., (2011). “Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations”, Applied Mathematics and Computation, 217(16):6950-6958.

[37] Zhao, J., Wang, P. ve Ge, W., (2011). “Existence and nonexistence of positive solutions for a class of third order BVP with integral boundary conditions in Banach spaces”, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 16(1):402-413.

[38] Kilbas, A. A. ve Trujillo, J.J., (2002). “Differential equations of fractional order: methods, results and problems. II”, Applicable Analysis, 81(2):435-493.

[39] Ervin, V.J. ve Roop, J.P., (2006). ”Variational formulation for the stationary fractional advection dispersion equation”, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 22(3):558-576.

[40] Nakhushev, A.M., (1977). “Sturm-Liouville problem for an ordinary differential equation of second order with fractional derivatives in the lower-order terms”, In Akademiia Nauk SSSR, Doklady, 234:308-311.

[41] Aleroev, T.S., Aleroeva, H.T., Nie, N.M. ve Tang, Y.F., (2010). “For Differential Equations of Fractional Order”, Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, (49):21-82.

[42] ur Rehman, M. ve Khan, R.A., (2011). “The Legendre wavelet method for solving fractional differential equations”, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 16(11):4163-4173.

[43] ur Rehman, M. ve Khan, R.A., (2012). “A numerical method for solving boundary value problems for fractional differential equations”, Applied Mathematical Modelling, 36(3):894-907.

[44] Podlubny, I., (1999). “Fractional Differential Equations”, in Mathematics in Science and Engineering, 198, Academic Press, San Diego.

[45] Bagley, R.L. ve Torvik, P.J., (1984). “On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials”, ASME Trans. J. Appl. Mech., (51):294-298.

[46] Al-Mdallal, Q.M., Syam, M.I. ve Anwar, M.N., (2010). “A collocation-shooting method for solving fractional boundary value problems”, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 15(12):3814-3822.

[47] Stanek, S., (2013). ”Two-point boundary value problems for the generalized Bagley–Torvik fractional differential equation”, Cent. Eur. J. Math., (11):574-593.

[48] Mekkaoui, T. ve Hammouch, Z., (2012). “Approximate analytical solutions to the Bagley-Torvik equation by the Fractional Iteration Method”, Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series, 39(2):251-256.

[49] Cockburn, B., Gopalakrishnan, J. ve Lazarov, R., (2009). “Unified hybridization of discontinuous galerkin, Mixed, and continuous galerkin methods for second Order elliptic problems”, SIAM J.Numer. Anal., 47(2):1319–1365.

[50] Cockburn, B. ve Mustapha, K. (2015). “A hybridizable discontinuous Galerkin method for fractional diffusion problems”, Numerische Mathematik, 130(2):293-314.

[51] Mathai, A. M. ve Haubold, H. J., (2008). “Special functions for applied scientists”, (4). New York: Springer.

[52] Almeida, R. ve Torres, D.F., (2011). “Necessary and sufficient conditions for the fractional calculus of variations with Caputo derivatives”, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 16(3):1490-1500.

[53] Caputo, M., (1967). “Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II”, Geophysical Journal International, 13(5):529-539.

[54] Diethelm, K. ve Walz, G., (1997). “Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation”, Numerical algorithms, 16(3-4):231-253.

[55] Weilbeer, M., (2005). Efficient numerical methods for fractional differential equations and their analytical background, Papierflieger.

[56] Caballero, J., Harjani, J. ve Sadarangani, K., (2011). “Positive solutions for a class of singular fractional boundary value problems”, Computers & Mathematics with Applications, 62(3):1325-1332.

[57] Celiker, F., Cockburn, B. ve Shi, K., (2010). “Hybridizable Discontinuous Galerkin Methods for Timoshenko Beams”, J.Sci. Comput., (44):1-37.

[58] Celiker, F. ve Fan, L., (2014). “HDG Methods for Naghdi Arches”, Journal of Scientific Computing, 59(1):217-246.

EK-A

KESİRLİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN VARLIĞI VE TEKLİĞİ

Lemma A-1 $u:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f:[a,b]\text{x}\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:[a,b]\text{x}\,\mathbb{R}\,\text{x}\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olup Caputo ve Riemann-Liouville türevini içeren dört tip

$$ {}_a^C D_x^{\alpha} u(x) + g(x,u(x), {}_a^C D_x^{\beta} u(x)) = 0,\ a < x < b,\ 1 < \alpha \le 2,\ 0 < \beta \le 1, \tag{A.1} $$

$$ u(a) = \gamma_1,\ u(b) = \gamma_2, \tag{A.2} $$

$$ {}_a^C D_x^{\alpha} u(x) + f(x,u(x)) = 0,\ a < x < b, 1 < \alpha \le 2, \tag{A.3} $$

$$ u(a) = \gamma_1,\ u(b) = \gamma_2 \tag{A.4} $$

$$ {}_a^{RL} D_x^{\alpha} u(x) + g(x,u(x), {}_a^{RL} D_x^{\beta} u(x)) = 0,\ a < x < b,\ 1 < \alpha \le 2,\ 0 < \beta \le 1, \tag{A.5} $$

$$ u(a) = 0,\ u(b) = \gamma_2, \tag{A.6} $$

$$ {}_a^{RL} D_x^{\alpha} u(x) + f(x,u(x)) = 0,\ a < x < b, 1 < \alpha \le 2, \tag{A.7} $$

$$ u(a) = 0,\ u(b) = \gamma_2, \tag{A.8} $$

kesirli sınır değer problemini ele alalım. Buna göre

a) (A.1)-(A.2) kesirli sınır değer problemi

$$ u(x) = \int_a^b G(x,s) g(s,u(s), {}_a^C D_s^{\beta}) ds \tag{A.9} $$

denktir. Burada Green fonksiyonu

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{(x-a)(b-s)^{\alpha-1}}{(b-a)\Gamma(\alpha)}-\dfrac{(x-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & a\le s\le x\le b\\ \dfrac{(x-a)\left(b-s\right)^{\alpha-1}}{(b-a)\Gamma(\alpha)}, & a\le x\le s\le b\end{cases} \tag{A.10}$$

olarak tanımlanır.

b) (A.3)-(A.4) kesirli sınır değer problemi

$$u(x)=\int_a^b G(x,s)f(s,u(s))ds \tag{A.11}$$

denk olup $G(x,s)$, a)'daki Green fonksiyonuna eşittir.

c) (A.5)-(A.6 kesirli sınır değer problemi

$$u(x)=\int_a^b \hat{G}(x,s)g(s,u(s),{}_a^{RL}D_s^{\beta})ds \tag{A.12}$$

denk olup Green fonksiyonu

$$\hat{G}(x,s)=\begin{cases}\dfrac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\dfrac{b-s}{b-a}\right)^{\alpha-1}-\dfrac{(x-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & a\le s\le x\le b\\ \dfrac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\dfrac{b-s}{b-a}\right)^{\alpha-1}, & a\le x\le s\le b\end{cases} \tag{A.13}$$

olarak tanımlanır.

d) (A.7)-(A.8) kesirli sınır değer problemi

$$u(x)=\int_a^b \hat{G}(x,s)f(s,u(s))ds \tag{A.14}$$

denk olup Green fonksiyonu c)'deki gibi tanımlıdır.

Tanım A-2 Lipschitz şartı Yukarıda tanımlanan f,g fonksiyonları, $K_f,K_g,L_g>0$ olacak şekilde

$$\left| f(t,x) - f(t,y) \right| \le K_f \left| x - y \right|, \tag{A.15}$$

$$\left| g(t,x_2,y_2) - g(t,x_1,y_1) \right| \le K_g \left| x_2 - x_1 \right| + L_g \left| y_2 - y_1 \right| \tag{A.16}$$

Lipschitz şartını sağlar.

Teorem A-3

a) $g:[a,b]\,x\,\mathbb{R}\,x\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli ve (A.16) Lipschitz şartı sağlansın. Eğer

$$K_g \frac{2(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + L_g \left[\frac{(b-a)^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2-\beta)} + \frac{(b-a)^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha+1-\beta)} \right] < 1 \tag{A.17}$$

ise o takdirde $C^1[a,b]$'de (A.1)-(A.2) kesirli sınır değer probleminin bir tek çözümü vardır.

b) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyon ve (A.15) Lipschitz şartını sağlasın. Eğer

$$\frac{2K_f (b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1, \tag{A.18}$$

ise o takdirde (A.3)-(A.4) kesirli sınır değer probleminin $C^0[a,b]$'de bir tek çözümü vardır.

c) $g:[a,b]\,x\,\mathbb{R}\,x\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli ve (A.16) Lipschitz şartı sağlansın. Eğer

$$K_g \frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}(b-a)^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)} + L_g \frac{(2\alpha-\beta)(b-a)^{\alpha-\beta}}{\alpha\,\Gamma(\alpha+1-\beta)} < 1 \tag{A.19}$$

ise (A.5)-(A.6) probleminin $C^{\beta}[a,b] = \left\{ u(x) \,|\, u(x) \in C^0[a,b],\ {}^{RL}_{a}D^{\beta}_{x} u(x) \in C^0[a,b] \right\}$ uzayında bir tek çözümü vardır.

d) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyon ve (A.15) Lipschitz şartını sağlasın. Eğer

$$K_f \frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}(b-a)^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)} < 1 \tag{A.20}$$

ise o zaman (A.7)-(A.8) probleminin $C^0[a,b]$'de bir tek çözümü vardır

Lemma A-4 $f:[0,1]\text{x}\,\mathbb{R}\,\text{x}\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman $y\in C[0,1]$'in

$$D^{\alpha}y(t)=f(t,y(t),D^{\beta}y(t)),1<\alpha\le 2,0<\beta\le 1 \tag{A.21}$$

$$y(0)=y_0,y(1)=y_1 \tag{A.22}$$

kesirli sınır değer probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart $y(t)$ fonksiyonunun

$$\begin{aligned} y(t) &= I^{\alpha}f(t,y(t),D^{\beta}y(t))-tI^{\alpha}f(1,y(1),D^{\beta}y(1))+(y_1-y_0)t+y_0 \\ &= \int_0^1 G(t,s)f(s,y(s),D^{\beta}y(\text{s}))ds+(y_1-y_0)t+y_0 \end{aligned} \tag{A.23}$$

integral denkleminin bir çözümü olmasıdır. Burada $G(t,s)$ Green fonksiyonu

$$G(\text{t},s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases}(t-s)^{\alpha-1}-t(1-s)^{\alpha-1}, & 0\le s\le t,\\ -t(1-s)^{\alpha-1}, & t\le s\le 1\end{cases} \tag{A.24}$$

olarak belirlenir.

Teorem A-5 $f:[0,1]\text{x}\,\mathbb{R}\,\text{x}\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli ve $\mu:[0,1]\to[0,\infty]$ fonksiyonu için

$$|f(t,y,z)|\le\mu(t)+a_1|y|+a_2|\text{z}|,\quad a_1,a_2\ge 0,\ a_1+a_2\le m \tag{A.25}$$

olacak şekilde $m=\min\left\{\frac{\Gamma(\alpha+1)}{8},\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\beta)+\Gamma(\alpha-\beta+1)}{4\Gamma(\alpha-\beta+1)\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\beta)}\right\}$ olur. O zaman

(A.21)-(A.22) kesirli sınır değer probleminin bir çözümü vardır.

Teorem A-6 $f:[0,1]\text{x}\,\mathbb{R}\,\text{x}\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. O halde her bir $t\in[0,1]$ ve tüm $y,\tilde{y},z,\tilde{z}\in\mathbb{R}$ için $|f(t,y,z)-f(t,\tilde{y},\tilde{z})|\le r|y-\tilde{y}|+|\text{z}-\tilde{\text{z}}|$

olacak şekilde $r<\left(\frac{\Gamma(2-\beta)(2+\Gamma(\alpha+1)+1)r}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2-\beta)\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right)^{-1}$ varsa o takdirde (A.21)-(A.22) kesirli sınır değer probleminin bir tek çözümü vardır.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Mehmet Fatih KARAASLAN

Doğum Tarihi ve Yeri : 01.01.1982/ VAN

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : mfatih@yildiz.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Doktora	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2016
Y. Lisans	Matematik	Yüzüncü Yıl Üniversitesi	2010
Lisans	Matematik	Yüzüncü Yıl Üniversitesi	2005
Lise	Fen	Van Atatürk Lisesi (Yabancı Dil Ağırlıklı)	1999

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2009-	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. Karaaslan, M.F., Celiker, F. ve Kurulay, M., (2016). “Approximate solution of the Bagley-Torvik equation by hybridizable discontinuous Galerkin methods”, Applied Mathematics and Computation, 285(2016):51-58.

2. Cavdar, S.C., Aydin, A.D. ve Karaaslan, M.F., (2015). “A Geometric Interpretation and Comparison of the Methods of Ordinary Least Square (OLS) and Bivariate Lagrange Interpolation”, Mathematical Theory and Modeling, 5(9):1-16.

Bildiri

1. Kurulay, M. ve Karaaslan, M.F., (2015), “On Using of the Advection-Diffusion Problem as Environmental Modelling”, 1 st International Conference on Environmental Science and Technology, 9-13 September 2015, Sarajevo.

2. Karaaslan, M.F., Çeliker, F. ve Kurulay, M., (2014). “Hybridizable Discontinuous Galerkin Method for Solving Caputo Fractional Boundary Value Problems”, 2nd International Conference on Analysis and Applied Mathematics, 11-13 September 2014, Shymkent.

3. Karaaslan, M.F., Çeliker, F. ve Kurulay, M., (2014). “Approximate Solution of the Bagley-Torvik Equation by Using Hybridizable Discontinuous Galerkin Method”, V Congress of the Mathematicians of Makedonia, 24-27 September 2014, Ohrid.

4. Karaaslan, M.F., Çeliker, F. ve Kurulay, M., (2014).” Hybridizable Discontinuous Galerkin Method for Convection-Diffusion-Reaction

Problems", Karatekin Mathematics Days, 11-13 June 2014, Çankırı.

5. Karaaslan, M.F. ve Kurulay, M., (2013). "Hybridizable Discontinuous Galerkin Method for One Dimensional Problems", International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling, 2-6 June 2013, İstanbul.

6. Karaaslan, M.F., Çeliker, F. ve Kurulay, M., (2013). "A Comparative Analysis of Galerkin and Hybridizable Discontinuous Galerkin Method On Second Order Differential Equation", 2nd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, 26-29 August 2013, Sarajevo.

7. Çavdar, Ş.Ç. ve Karaaslan, M.F., (2012). "Multidimensional Comparison of Turkey and Eu Member States in terms of Basic Economic Indicators Post-Global Financial Crisis", 8. Uluslararası İstatistik Günleri Sempozyumu, 11-13 Ekim 2012, Eskişehir.

8. Karaaslan, M.F. ve Kurulay, M., (2012)."On Solving A Type of Fractional Volterra-Integro Differential Equations Using Homotopy Analysis Method", 1st International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, 3-7 September 2012, Prishtine.

9. Karaaslan, M.F. ve Kurulay, M., (2012). "Discontinuous Galerkin Methods with An Application for Elliptic Problems", International Conference on Applied Analysis and Algebra, 19-24 June 2012, İstanbul.

10. Karaaslan, M.F. ve Çavdar, Ş.Ç., (2012). "Geometric Perspective On The Methods of Bivariate Lagrange Interpolation and OLS", International Conference on Applied Analysis and Algebra, 19-24 June 2012, İstanbul.

11. Karaaslan, M.F. ve Karaman, F., (2010). “Parametrik Olmayan Basit Doğrusal Regresyon Modelinde Katsayıların Tahminlemesi”, VII. İstatistik Günleri Sempozyumu, 28-30 Haziran 2010, Ankara.

Proje

1. Proje Adı: Bazı Kesirli Diferansiyel Denklemler için Hibritleştirilebilir Sürekli Olmayan Galerkin Metodu

   Proje Yürütücüsü: Doç. Dr. Muhammet KURULAY

   Araştırmacı: Mehmet Fatih KARAASLAN

   Destekleyen Kurum/Birim: Yıldız Teknik Üniversitesi/Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü

   Proje No: 2013-01-03-DOP03

ÖDÜLLERİ

1. 2004-2005 Fen-Edebiyat Fakültesi Birincisi

2. Tübitak BİDEB Yüksek Lisans Bursiyerliği, 2010