KONU 1. LİNEER OPERATÖRLER

Tanım 1.1. X ve Y normlu uzaylar, $A : X \to Y$ ise tanım kümesi $D(A) \subset X$ olan bir dönüşüm olmak üzere, her α, β skalerleri ve her $x, y \in D(A)$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

ise A' ya lineer operatör denir.

Soru 1.1. $X = C[a,b]$, $Y = \mathbb{R}$, $D(A) = C[a,b]$ ve her $f \in C[a,b]$ için

$$Af = \int_a^b f(x)\,dx$$

bir lineer operatördür.

Soru 1.2. $X = Y = C[a,b]$, $D(A) = C[a,b]$ ve her $g \in C[a,b]$ için

$$Tg(x) = xg(x)$$

bir lineer operatör müdür? Neden?

Çözüm. Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve her $f, g \in C[a,b]$ için

$$T[\alpha f(x) + \beta g(x)] = x[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha x f(x) + \beta x g(x) = \alpha T f(x) + \beta g(x)$$

elde edilir.

Soru 1.3. $X = C'[a,b]$, $Y = C[a,b]$, $D(A) = C'[a,b]$ ve $\forall f \in C'[a,b]$ için

$$Af(x) = f'(x)$$

bir lineer operatör olduğunu gösteriniz.

Çözüm. α, β reel sayılar, f ve g ise $C'[a,b]$' nin keyfi elemanları olmak üzere

$$A[\alpha f(x) + \beta g(x)] = [\alpha f(x) + \beta g(x)]' = \alpha f'(x) + \beta g'(x) = \alpha Af(x) + \beta Ag(x)$$

gerçeklenir.

Alıştırmalar

1. $T : l_2 \to l_2$ olmak üzere $(x_1, x_2 ...,) \in l_2$ için

$$T(x_1, x_2, x_3, ...,) = (x_2, x_3, ...,)$$

lineer operatör olduğunu ispatlayınız.

2. $A : L_2(0,\pi) \to L_2(0,\pi)$, $K(x,t)$ ise $L_2(0,\pi) \times L_2(0,\pi)$ uzayının elemanı olsun. Her $f \in L_2(0,\pi)$ için

$$Af(x) = \int_0^\pi K(x,t) f(t)\,dt$$

bir lineer operatör olduğunu gösteriniz.

3. $A : L_2(0,\pi) \to L_2(0,\pi)$, $D(A) = C^2[0,\pi]$ ve

$Af(x) = -f''(x)$, $\forall f \in D(A)$ ile tanımlanan A' nın bir lineer operatör olduğunu ispatlayınız.

4. $A, B : X \to Y$ birer lineer operatör ise $A + B$' de lineer operatör müdür? Neden?

KONU 5. POZİTİF OPERATÖRLER

Tanım 5.1. H Hilbert uzayı, her $f, g \in H$ için (f, g) bu uzayda skaler çarpım, A ise tanım kümesi $D(A) \subset H$ olan ve H uzayında tanımlı bir operatör olmak üzere, her $f \in D(A)$ için

$$(Af, f) \geq 0$$

ise A operatörüne pozitif operatör denir.

Teorem 5.2. Bir Hilbert uzayında tanımlı bir pozitif operatörünün tüm özdeğerleri pozitiftir.

İspat. $A : H \to H$ olmak üzere A pozitif olsun. λ_0 ile A operatörünün keyfi bir özdeğerini, y_0 ile bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonunu gösterelim.

$$(Ay_0, y_0) \geq 0$$

olduğundan

$$\lambda_0 (y_0, y_0) \geq 0$$

buradan ise $\lambda_0 \geq 0$ elde edilir.

Örnek 5.3. $L_2(0, \pi)$ uzayında

$$l_0(y) = -y'', \quad 0 \leq x \leq \pi$$

diferansiyel ifadesinin ve

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

sınır koşullarının yardımı ile tanımlanan operatör L_0 olmak üzere, L_0' ın pozitif olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

$$D(L_0) = \left\{ y, \quad y \in L_2(0,\pi) \quad \begin{array}{c} 1.\ y'' \text{ mevcut} \\ 2.\ y'' \in L_2(0,\pi) \\ 3.\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{array} \right\}$$

Her $f \in D(L_0)$ için

$$\begin{aligned}
(L_0 f, f) &= \int_0^\pi \left[-f''(x)\right] \overline{f(x)} dx = -\int_0^\pi \overline{f(x)} df'(x) \\
&= -f'(x)\overline{f(x)}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi f'(x)\, d\overline{f(x)} \\
&= -f'(\pi)\overline{f(\pi)} + f'(0)\overline{f(0)} + \int_0^\pi f'(x)\overline{f'(x)} dx
\end{aligned}$$

sınır koşullarını kullanarak

$$(L_0 f, f) = \int_0^\pi \left| f'(x) \right|^2 dx \geq 0$$

elde edilir, yani L_0operatörü pozitiftir.

Teorem 5.4. Eğer $q \geq 0, h \geq 0, H \geq 0$ ise bu durumda L Sturm-Liouville operatörü pozitiftir.

İspat.

$$D(L) = \left\{ y, \quad y \in L_2(0,\pi) \quad \begin{array}{l} 1.\ y'' \text{ mevcut} \\ 2.\ -y'' + q(x) y \in L_2(0,\pi) \\ 3.\ y'(0) - hy(0) = 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{array} \right\}$$

$\forall f \in D(L)$ için

$$\begin{aligned}
(Lf, f) &= \int_0^\pi \left[-f'' + q(x) f \right] \overline{f} dx = -\int_0^\pi f'' \overline{f} dx + \int_0^\pi q(x) |f|^2 dx \\
&= -\int_0^\pi \overline{f(x)} df'(x) + \int_0^\pi q(x) |f(x)|^2 dx \\
&= -f'(x) \overline{f(x)} |_0^\pi + \int_0^\pi \left| f'(x) \right|^2 dx + \int_0^\pi q(x) |f(x)|^2 dx \\
&= -f'(\pi) \overline{f(\pi)} + f'(0) \overline{f(0)} + \int_0^\pi \left[\left| f'(x) \right|^2 + q(x) |f(x)|^2 \right] dx \\
&= H |f(\pi)|^2 + h |f(0)|^2 + \int_0^\pi \left[\left| f'(x) \right|^2 + q(x) |f(x)|^2 \right] dx \geq 0
\end{aligned}$$

Yani L operatörü pozitiftir. Genel olarak pozitif operatörler $A \geq 0$ olarak gösterilir.

Alıştırmalar

1) $L_2(0,1)$ uzayında

$$l_0(y) = -y'', \quad 0 \leq x \leq 1$$

diferansiyel ifadesinin ve

$$y'(0) = y(1) = 0$$

sınır koşullarının yardımı ile tanımlanan operatör T olsun.

a) $D(T)$ tanım kümesini yazınız.

b) $T \geq 0$ olduğunu ispatlayınız.