T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALARI

Yasemin SARICAOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. YUSUF ZEREN

İSTANBUL, 2017

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİZİSEL VE FONKSİYONEL HİLBERT EŞİTSİZLİKLERİ

Yasemin SARICAOĞLU tarafından hazırlanan tez çalışması 31.03.2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK

İstanbul Ticaret Üniversitesi _____

Yrd. Doç. Dr. Özgür YILDIRIM

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında; sayısal, geometrik ve fonksiyonel eşitsizlikler incelenmiş ve bu eşitsizliklerin bazılarının ispatları ve uygulamaları ele alınmıştır.

Tez çalışma sürecim boyunca bilgi ve tecrübeleriyle yol gösteren, kendisiyle çalışma imkanı yakaladığım için kendimi ayrıcalıklı bulduğum, sabrıyla kısa zamanda çok yol almamı sağlayan sayın Doç. Dr. Yusuf ZEREN'e teşekkürü borç bilirim. İçtenlikle gösterdiği her türlü yardım için sayın Prof. Dr. Farman MAMEDOV'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Her zaman desteğiyle yanımda olan eşim, biricik oğlum Ali İmran ve aileme müteşekkirim.

Mart, 2017

Yasemin SARICAOĞLU

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ iii

İÇİNDEKİLER iv

SİMGE LİSTESİ v

ŞEKİL LİSTESİ vi

ÖZET vii

ABSTRACT viii

BÖLÜM 1 1

GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1

1.2 Tezin Amacı 2

BÖLÜM 2 4

2.1 Temel Kavramlar 4

BÖLÜM 3 11

Sayısal Eşitsizlikler 11

BÖLÜM 4 25

GEOMETRİK EŞİTSİZLİKLER 25

BÖLÜM 5 42

FONKSİYON EŞİTSİZLİKLERİ 42

KAYNAKLAR 46

ÖZGEÇMİŞ ..... **Hata! Yer işareti tanımlanmamış.**

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{R}$	Reel öklid uzayı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	n boyutlu Öklid uzay
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar
$[a,b]$	$\mathbb{R}$ de kapalı bir aralık
$\|\|f\|\|$	f nin normu
L^p	Lebesgue uzayı
$C^1[a,b]$	$[a,b]$ aralığındaki tüm sürekli olarak diferansiyellenebilir fonksiyonlar uzayı
μ	Lebesgue ölçüsü
$\mu(A)$	A kümesinin Lebesgue ölçüsü
χ_A	A kümesinin karakteristik fonksiyonu
AO	Aritmetik Ortalama
KO	Kuadratik Ortalama
HO	Harmonik Ortalama
GO	Geometrik Ortalama

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 4.1 Konveks olmayan alanların gösterimi 28
Şekil 4.2 Alanı en üst düzeye çıkarmak için açıyı değiştirme 29
Şekil 4.3. $c(t)$, k(t) ve $\tilde{k}(t)$ ile I, $\tilde{I}$ nın yapısı..... 32

ÖZET

DİZİSEL VE FONKSİYONEL HİLBERT EŞİTSİZLİKLERİ

Yasemin SARICAOĞLU

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde literatür özeti ve tezin amacı ifade edilmiştir. İkinci bölümde temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde sayısal eşitsizlikler(Bernoulli eşitsizliği, Chebyshev eşitsizliği, Young eşitsizliği, Hölder eşitsizliği, Minkowski eşitsizliği, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Jensen eşitsizliği, Schur eşitsizliği, Muirhead eşitsizliği) incelenmiş, dördüncü bölümde geometrik eşitsizliklere(ortalama eşitsizlikleri, izoperimetrik eşitsizlikler, Brunn- Minkowski eşitsizliği)yer verilmiş, beşinci bölümde fonksiyon eşitsizlikleri(Hilbert eşitsizliği, Hardy eşitsizliği, Hardy-Littlewood eşitsizliği, Riesz eşitsizliği, Wirtinger eşitsizliği, Bessel eşitsizliği) anlatılmış, altıncı bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hilbert eşitsizliği, Hardy eşitsizliği, Riesz eşitsizliği, Wirtinger eşitsizliği, Brunn- Minkowski eşitsizliği, Bernoulli eşitsizliği, İzoperimetrik eşitsizlikler, Chebyshev eşitsizliği, Schur eşitsizliği, Muirhead eşitsizliği, Karamata eşitsizliği

ABSTRACT

Yasemin SARICAOĞLU

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Yusuf ZEREN

This thesis involves six chapters.

The first chapter is summary of the literatüre and aim of the thesis. The second chapter consists of main definitions and theorems. In the third chapter numerical inequalities (Bernoulli inequality, Chebyshev inequality, Young inequality, Hölder inequality, Minkowski inequality, Hermite-Hadamard inequality, Jensen inequality, Schur inequality, Muirhead inequality) are examined. In the fourth chapter geometrical inequalities(mean inequality, isoperimetric inequalities, Brunn- Minkowski inequality)are included. In the fifth chapter function inequalities (Hilbert inequality, Hardy inequality, Hardy-Littlewood inequality, Riesz inequality, Wirtinger inequality, Bessel inequality) are explained. The sixth chapter includes conclusions and recommendations.

Keywords: Hilbert inequality, Hardy inequality, Riesz inequality, Wirtinger inequality, Brunn-Minkowski inequality, Bernoulli inequality, İzoperimetrik inequalities, Chebyshev inequality, Schur inequality, Muirhead inequality, Karamata inequality

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Eşitsizlik teorisi, 19. yüzyıldan beri matematiğin neredeyse tüm alanlarında önemli bir yere sahiptir. Bu alanda ilk temel kitap 1934 yılında Hardy, Littlewood ve Polya[1] tarafından hazırlanan "Inequalities"dir. Bu kitapta yeni eşitsizlikler ve bunların uygulamalarına yer verilmiştir. Ayrıca, Beckenbach ve Bellman[2]'ın yazmış olduğu "Inequalities"adlı eseri ve Mitrinoviç[3]'in 1970'de yazmış olduğu "Analytic Inequalities" adlı eserleri de mevcuttur. Bu kaynaklar eşitsizlikler teorisini araştırmak isteyen veya iyi bir matematikçinin el altında bulunması gereken kaynaklardır. Ayrıca bu konuda yayımlanmış birçok bilimsel kitap ve makale bulunmaktadır. Eşitsizlik teorisinin; fizik, kimya, mühendislik gibi çeşitli bilim dallarında uygulamaları olduğu için özellikle son yıllarda birçok araştırmacı tarafından ilgi görmüştür. Eşitsizlik teorisi sürekli gelişmektedir ve matematiğin çeşitli dallarına ait pek çok problemin etkili ve güçlü birer araçtır. Tezde yer alan eşitsizliklerden biri olan İzoperimetrik Teorem(aynı çevreye sahip düzlemsel şekiller arasında çember maksimum alana sahip olması) , eski Yunan'dan gelmektedir. Virgil's Aeneid kitabında Dido'nun "bir boğanın derisi" ile sınırladığı en büyük alan hikayesinde bakacak olursak, Dido İzoperimetrik Teoremi (bilmeden) akıllıca kullarak topraklarını en geniş hale getirmiş ve Carthage şehrini kurmuştur.

Eşitsizlikler matematik bilimini çok kullanışlı konularından biridir. Bize herhangi bir niceliğin büyüklüğü hakkında fikir verir ve hassas tahmin imkanı sağlar. Uygulamalı matematiğin birçok alanında niceliklerin yerleri hakkında bilgi sahibi olmamızı sağlar.

Eşitsizliklerin en önemli kullanışlılıklarından biri eşitsizlik içeren şartlarını sağlamanın eşitlik içeren şartlarını sağlamaktan çok daha kolay ve kullanışlı olmasıdır.

Matematiksel eşitsizliklerin amacı, değeri tam olarak bilinmeyen bazı matematiksel ifadelerin ya da fonksiyonların daha iyi bildiğimiz fonksiyonlarla alttan ve üstten sınırlamak veya doğrudan doğruya bu ifadelere ya da fonksiyonlara sayısal olarak sınırlar belirlemektir. Böylece bu fonksiyonların istenilen noktalardaki yaklaşık değerlerinin bulunması sağlanır.

Neden eşitsizlikler?

1978 yılında Richard Bellman, Almanya'da 2. Uluslarası Matematik Eşitsizlikler Konferansında bu soruyu şu şekilde yanıtlamıştır:

Eşitsizlik çalışmak için üç neden vardır. Bunlar:

1)Pratik Nedenler

2)Teorik Nedenler

3)Estetik Nedenler

dir. Pratik açıdan bakıldığında, birçok araştırmada bir niceliği diğer bir nicelikle sınırlandırmak karşımıza çıkmaktadır. Klasik Eşitsizlikler de bu şekilde ortaya çıkmıştır. Teorik açıdan bakıldığında çok basit sorular sorularak tüm temel teoremler oluşturulabilir. Son olarak estetik açıdan bakıldığında genel olarak resim, müzik ve matematiğin bazı parçalarının uyumlu olduğu görülür. Elde edilen eşitsizliklerin göze hitap etmesi de eşitsizlikleri çekici hale getirir.

"Her teoremin ardında bir eşitsizlik yatar." sözüyle A.N Kolmogorov ve "Eşitsizlikler matematik dallarının çoğunda rol oynar ve çok farklı uygulamaları vardır." sözüyle George Polya eşitsizliğin önemine yer verir.

1.2 Tezin Amacı

Eşitsizlik teorisinde, çok bilinen ve literatürde sıkça kullanılan sayısal, geometrik ve fonksiyon eşitsizliklerini tanıtmak ve uygulamalarına yer vermek esas amaçtır.

1.3 Hipotez

Eşitsizlik teorisi, son yıllarda sistematik olarak çalışılmakta ve hızlı bir gelişim göstermektedir. Çok bilinen ve literatürde sıkça kullanılan eşitsizliklerin yanında detaylı olarak çalışılmayan eşitsizliklerle ilgili katolog oluşturulmuştur.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde yüksek lisans tez çalışması için gerek duyulan teoremlere, tanım ve temel kavramlara yer verilmiştir.

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1 (Normlu Uzay) X bir K cismi üzerinde vektör uzayı olsun. $\|.\|: X \to \mathbb{R}^+, x \to \|x\|$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall\, \alpha \in K$ için

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$;

2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa $\|.\|$ dönüşümüne X üzerinde norm denir. $(X, \|.\|)$ ikilisine ise normlu uzay adı verilir. Eğer ilk koşulda yalnız $x = 0_X \Rightarrow \|x\| = 0$ sağlanırsa, $\|.\|$ yarı norm olur.

Tanım 2.2 (Yakınsak Dizi) $(X, \|.\|)$ herhangi bir normlu uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $a \in X$ olsun. Eğer $n \to \infty$ iken $\|x_n - a\| \to 0$ oluyorsa (x_n) dizisine X normlu uzayında yakınsak dizi denir ve $x_n \to a$, $n \to \infty$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3 (Cauchy Dizisi) $(X, \|.\|)$ normlu uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. $\forall\, \varepsilon > 0$ için

$\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall\, n, m \geq n_0 \;\; için \;\; \|x_n - x_m\| < \varepsilon$

sağlanıyorsa (x_n) dizisine X normlu uzayında bir Cauchy dizisi denir[4].

Tanım 2.4 (Banach Uzayı) Eğer herhangi bir $(X, \|.\|)$ normlu uzayında aldığımız $\forall (x_n)$ Cauchy dizisi, yine X e ait olan bir noktaya yakınsak ise, $\|.\|$ normuna tam norm denir. Tam normlu bir uzaya ise Banach uzayı denir[4].

Tanım 2.5 (Karakteristik Fonksiyon) $\mathbb{R}^n$ in herhangibir K alt kümesi için

$$\chi_K = \begin{cases} 1 \ , & x \in K \\ 0 \ , & x \notin K \end{cases}$$

şeklindeki χ_K fonksiyonuna K kümesinin karakteristik fonksiyonu denir[4].

Tanım 2.6 (İç Çarpım Uzayı) *E* vektör uzayı, p ve q'nun bir iç çarpım uzayı olarak adlandırılan gerçel sayısı $\langle p,q\rangle$; her $p,q \in E$ 'ye atanırsa bir iç çarpım uzayı olarak adlandırılır ve aşağıdaki aksiyomlar geçerlidir:

(i) $\forall p \in E, \langle p,p\rangle \geq 0;$

(ii) $\langle p,p\rangle = 0 \Leftrightarrow p = 0;$

(iii) $\forall p,q \in E, \langle p,q\rangle = \langle q,p\rangle;$

(iv) $\forall p,q,r \in E, \langle p+q,r\rangle = \langle p,r\rangle + \langle q,r\rangle;$

(v) $\forall p,q \in E \ ve \ \forall a \in \square \ , \langle ap,q\rangle = a\langle p,q\rangle.$

Her *E* iç çarpım uzayı aşağıdaki norm ile normlu uzaya dönüştürülebilir:

$$\|p\| = \sqrt{\langle p,p\rangle}.$$

Bu norma göre yakınsaklık, E'de yakınsama olarak adlandırılır. Normun aksiyomları iç çarpım uzayı aksiyomları kullanılarak sağlanabilir[4].

Teorem 2.7 (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği) *E*, bir iç çarpım uzayı olsun. Böylece her bir $p,q \in E$ için

$$|\langle p,q\rangle| \leq \|p\|\|q\| \qquad (2.1)$$

[4].

Teorem 2.8 (Üçgen Eşitsizliği) *E*, bir iç çarpım uzayı olsun. Buradan her bir $p,q \in E$ için

$$\|p+q\| \leq \|p\| + \|q\| \qquad (2.2)$$ [4].

Tanım 2.9 (Hilbert Uzayı) Yukarıda belirtilen şekilde bir Banach uzayına dönüştürülebilen bir iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir[4].

Teorem 2.10 (Ortogonal İzdüşüm) $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ bir E iç çarpım uzayında sonlu bir birim ortogonal sistem olsun. Sabit $x \in E$ için fonksiyon;

$$f(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\left\|x-\sum_{i=1}^{n}a_i e_i\right\|^2, a_1,\ldots,a_n \in \square \tag{2.3}$$

şeklinde olur ve en düşük değerini

$a_1=\langle x,a_1\rangle,\ldots,\langle x,a_n\rangle$ noktasında alır ve

$$min\, f=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_1\rangle^2 \tag{2.4}$$ [5].

Tanım 2.11 (Parseval Tanımı): Eğer f 2π periyodunun sürekli parçalı fonksiyonu ise, buradan;

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(x)\right)^2 dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$ [5].

Teorem 2.12 $\{e_i\}$ *E* iç çarpım uzayında sayılabilir sonsuz, birim ortogonal sistemi olsun. Buradan $x \in E$ onun Fourier serisi ile ifade edilebilir:

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle e_i \tag{2.5}$$

ancak ve ancak Parseval tanımlaması *x* için geçerli ise bu ifade geçerli olur[5].

Tanım 2.13 (Ölçülebilir Küme) Boş olmayan herhangi bir A kümesinin altkümelerinin bir ailesi $\mathcal{A}$, aşağıdaki özellikleri sağlarsa $\mathcal{A}$ ya σ-cebir denir.

1) $\emptyset, A \in \mathcal{A}$;

2) $S \in \mathcal{A} \Longrightarrow S^c \in \mathcal{A}$;

3) $S_i \in \mathcal{A}, i = 1,2,\ldots, \Longrightarrow \cup_{i=1}^{\infty} S_i \in \mathcal{A}$.

Burada $(A,\mathcal{A})$ ikilisine ölçülebilir uzay, herhangi $A \in \mathcal{A}$ kümesine ise ölçülebilir küme adı verilir[6].

Tanım 2.14 (Ölçülebilir Fonksiyon) Bir $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ için

$\{x \in A : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$

sağlıyorsa, f e ölçülebilir fonksiyon denir[6].

Tanım 2.15 (Ölçüm Uzayı) A boştan farklı bir küme ve $\mathcal{A}$, A nın altkümelerinin bir σ-cebiri olsun. Eğer $\mu: \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ fonksiyonu

1) $\mu(\emptyset) = 0$, $\forall B \in \mathcal{A}$ için $\mu(B) \geq 0$;

2) $\forall\, A_n \in \mathcal{A}$ ve $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, $\left(A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j\right)$ için

$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$,

koşullarını sağlarsa, μ ye ölçü, $(A, \mathcal{A}, \mu)$ ifadesine ölçüm uzayı denir[6].

Tanım 2.16 (Dış Ölçüm) $A \subset \mathbb{R}$ alt kümesini alalım.

$$\mu^*(A) \coloneqq \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) : I_k, \mathbb{R} \text{ de aralık}, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\}$$

sayısına A kümesinin dış ölçüsü adı verilir. Burada $\ell(I_k)$, I_k aralığının uzunluğudur (Örneğin $\ell\big((a,b)\big) = b - a$, $(a,b) \subset \mathbb{R}$)[6].

Tanım 2.17 (Lebesgue ölçü) Eğer bir $B \in \mathcal{P}(A)$ kümesi $\forall S \in \mathcal{P}(A)$ için

$\mu^*(S) = \mu^*(S \cap B) + \mu^*(S \backslash B)$

eşitliği sağlanıyorsa, B kümesine Lebesgue ölçülebilir küme denir[7].

Tanım 2.18 (Lebesgue İntegrali) $\mathbb{R}^n$ n boyutlu Öklid uzayında bir nokta (vektör) $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ olmak üzere, $|x|^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$ ifadesine x in normu denir.

$\mathbb{R}^n$ de, $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ ile Lebesgue ölçüsü ifade edilir ve $\mathbb{R}^n$ de f fonksiyonunun Lebesgue integrali

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int \dots \int f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

ile gösterilir[7].

Tanım 2.19 (Lebesgue Uzayı) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de bir bölge ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$L_p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \middle| \; f \text{ ölçülebilir ve } \int_\Omega |f(y)|^p dy < \infty \right\}$$

sınıfına mutlak değerin p-inci kuvveti integrallenebilen fonksiyonların sınıfı denir. f fonksiyonunun L_p normu

$$\|f\|_{L_p} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(y)|^p dy \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanır ve bu norm ile birlikte L_p ye Lebesgue uzayı adı verilir[7].

Tanım 2.20 Eğer $B \subset A \subset \mathbb{R}^n$ ve $\mu(B) = 0$ olmak üzere herhangi bir koşul B^c de sağlanıyorsa A üzerinde hemen hemen her yerde doğrudur denir[7].

Tanım 2.21 (Eşlenik İndis) $1 < p < \infty$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliğini gerçekleyen p ve q reel sayılarına eşlenik indis adı verilir.

Tanım 2.22 (Modüler Fonksiyon) X kümesi K ($\mathrm{K} = \square$ veya $\square$) cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bir $\rho : \mathrm{X} \to [0, \infty]$ fonksiyonu her $\mathrm{f}, \mathrm{g} \in \mathrm{X}$ için;

(a) $\rho(\mathrm{f}) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{f} = 0$

(b) $\rho(\mathrm{f}) = \rho(-\mathrm{f})$

(c) $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ için $\rho(\alpha \mathrm{f} + \beta \mathrm{g}) \leq \rho(\mathrm{f}) + \rho(\mathrm{g})$

koşullarını sağlasın. Bu takdirde, ρ fonksiyonuna X üzerinde bir modüler fonksiyon denir. Eğer $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ için

$$\rho(\mathrm{ax} + \beta \mathrm{y}) \leq \alpha \rho(\mathrm{x}) + \beta \rho(\mathrm{y})$$

oluyorsa, ρ fonksiyonuna X üzerinde bir konveks fonksiyon adı verilir [8].

Örneğin X vektör uzayı, $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ aralığı üzerinde L^{p} uzayı olarak alınsın. Bu durumda

$$\rho(x)=\int_a^b |x(t)|^p\,dt$$

fonksiyonu $p\geq 1$ için X üzerinde konveks modülerdir[8].

Tanım 2.23 (Luxemburg Normu) ρ fonksiyonu üzerinde bir modüler ise, bu durumda

$$X_p=\{f\in X:\rho(\lambda_0 f)<\infty,\exists\lambda_0>0\}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $f\in X_p$ olmak üzere

$$\|f\|_p=\inf\left\{\lambda>0:\rho\left(\frac{f}{\lambda}\right)\leq 1\right\}$$

ile tanımlı $\|.\|_p$ fonksiyonu X_p üzerinde bir normdur. Bu norma Luxemburg normu denir[8].

Tanım 2.24 (Musielak-Orlicz Fonksiyonu) $\Omega,\mathbb{R}^n$'de ölçülebilir bir bölge olsun. $\varphi:\Omega x[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu,

(a) Herhangi $t\in\Omega$ için $\varphi(t,u)$ azalmayan, sürekli bir fonksiyon,

(b) $\varphi(t,0)=0, u>0$ için $\varphi(t,u)>0$ ve $\lim_{u\to\infty}\varphi(t,u)=\infty$,

(c) Her $u\geq 0$ için $\varphi(t,u)$ ölçülebilir bir fonksiyon,

özeliklerine sahip ise, φ fonksiyonuna Musielak-Orlicz fonksiyonu veya ϕ sınıfına aittir denir[7;8].

Tanım 2.25 (Değişken Üslü Lebesgue Uzayı) $p:\mathbb{R}^n\to[1,\infty]$ ölçülebilir fonksiyonuna değişken üs denir. Değişken üs fonksiyonlarının ailesi $P(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilsin. Yine $p\in P(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\Omega_\infty=\{x\in\mathbb{R}^n:p(x)=\infty\}$$

$$p^-=\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}^n} p(x)$$

$$p^+=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} p(x)$$

ifadeleri tanımlansın. Buradan $1 \le p^- \le p(.) \le p^+ \le \infty$ yazılır.

Herhangi bir $p \in P(\mathbb{R}^n)$ ve $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonları verilsin. Bu takdirde

$$\rho_{p(.)}(f) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx + \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega_\infty} |f(x)|$$

fonksiyonu tanımlansın. Buradan $\varphi(x,u) = u^{p(x)}$ konveks fonksiyonu bir Musielac- Orlicz fonksiyonudur. Ayrıca

$$\rho_{p(.)}(f) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega_\infty} \varphi(x, |f(x)|) dx + \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega_\infty} |f(x)|$$

konveks modülerdir. Böylece $L^{\varphi}(\mathbb{R}^n) = L^{p(.)}(\mathbb{R}^n)$ olur. Yani $L^{p(.)}(\mathbb{R}^n)$ değişken üslü Lebesgue uzayı, $\|.\|_{p(.)}$ normuna göre bir Musielac- Orlicz uzayıdır.

Özel olarak $p(.) \equiv p$ sabit ise $L^{p(.)}(\mathbb{R}^n)$ uzayı ile $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayı çakışır. Gerçekten $1 \le p(.) < \infty$ için $\Omega = \varnothing$ olup, $\rho_{p(.)}$ modülerinin tanımındaki esssup lu terim gelmeyecektir. Bu takdirde

$$\rho_{p(.)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p}$$

$$= \frac{1}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \le 1$$

olup, $f \in L^{p(.)}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ bulunur. O halde $\|f\|_{p(.)} < \|f\|_p < \infty$ elde edilir. Bu ise $L^{p(.)}(\mathbb{R}^n)$ uzayının, $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayı ile çakıştığını gösterir. Benzer şekilde $p(.) = \infty$ için $L^{p(.)}(\Omega) = L^{\infty}(\Omega)$ bulunur. Yine $L^{p(.)}(\mathbb{R}^n)$ uzayının $\|.\|_{p(.)}$ normuna göre bir Banach uzayı olduğu biliniyor[9].

BÖLÜM 3

Sayısal Eşitsizlikler

Teorem 3.1 (Genelleştirilmiş Bernoulli Eşitsizliği) $x > -1$ olsun.

Eğer $r > 1$ veya $r < 0$ ise

$$(1+x)^r \geq 1+rx \tag{3.1}$$

Eğer $0 < r < 1$ ise

$$(1+x)^r \leq 1+rx \tag{3.2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Ancak ve ancak $x = 0$ için eşitlik geçerlidir[10].

Teorem 3.2 (Bernoulli Eşitsizliği) $x > -1$ gerçel sayı ve r pozitif tamsayı olsun. O zaman

$$(1+x)^r \geq 1+rx \tag{3.3}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Analizden $x > -1$ ve $r \in R\backslash\{0,1\}$ olduğu durumda $f(x) = (1+x)^r - 1 - rx$ olsun.

Buradan $f(x)$ diferansiyeli alınabilir ve türevi şöyledir:

$f'(x) = r(1+x)^{r-1} - r = r\left[(1+x)^{r-1} - 1\right]$ bu eşitlikten de şunu elde edebiliriz:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Eğer $0<r<1$ ise, bu durumda $\forall x\in(-1,0)$ için $f'(x)>0$ ve $\forall x\in(0,+\infty)$ için $f'(x)<0$ olur.

$\therefore x=0$ noktası *f* fonksiyonunun yerel maksimum noktasıdır.

$\therefore f(x)<f(0)=0$

$\therefore 0<r<1 \text{ için } (1+x)^r\le 1+rx$

Eğer $r<0$ veya $r>1$ ise, bu durumda $\forall x\in(-1,0)$ için $f'(x)<0$ ve $\forall x\in(0,+\infty)$ için $f'(x)>0$ olur.

$\therefore x=0$ *f* fonksiyonunun yerel minimum noktasıdır.

$\therefore f(x)>f(0)=0$

$\therefore r<0 \text{ veya } r>1 \text{ için } (1+x)^r\le 1+rx.$

Sonuç olarak bu eşitlik $x=0$ veya $r\in\{0,1\}$ için geçerlidir. Bu da ispatı tamamlar[10].

Örnek 3.3 Her $x>0$ gerçel sayısı için $(x+1)^x\ge 2x^x$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: İspatlanması istenen eşitsizlik $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\ge 1+x.\frac{1}{x}=2$ eşitsizliğine denktir. Bu da Bernoulli eşitsizliğinden çıkar: $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\ge 1+x.\frac{1}{x}=2$ [11].

Teorem 3.4 (Chebyshev Eşitsizliği) Eğer $a_1\ge\cdots\ge a_n$ ve $b_1\ge\cdots\ge b_n$ (ya da $a_1\le\cdots\le a_n$ ve $b_1\le\cdots\le b_n$) reel diziler olmak üzere,

$$\frac{a_1b_1+\ldots+a_nx_n}{n}\ge\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1+\cdots+b_n}{n}\right) \tag{3.4}$$

dir.

Benzer şekilde $a_1\ge\cdots\ge a_n$ ve $b_1\le\cdots\le b_n$(ya da $a_1\le\cdots\le a_n$ ve $b_1\ge\cdots\ge b_n$) o zaman

$$\frac{a_1b_1+\ldots+a_nx_n}{n}\le\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1+\cdots+b_n}{n}\right) \tag{3.5}$$

gerçekleşir[1].

Örnek 3.5 $a,b,c,d \in \mathbb{R}^+$ olsun. Eşitsizliği ispatlayalım:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}+\frac{a^3+b^3+d^3}{a+b+d}+\frac{a^3+c^3+d^3}{a+c+d}+\frac{b^3+c^3+d^3}{b+c+d}$$
$$\geq a^2+b^2+c^2+d^2$$

Çözüm: genelliği kaybetmeden $a \geq b \geq c \geq d$ olduğunu kabul edebiliriz. Buradan açıkça $a^2 \geq b^2 \geq c^2 \geq d^2$ olur.

Chebsyhev eşitsizliğini kullanacağız, örneğin şunu biliyoruz:

$$(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right) \leq 3\left(a^3+b^3+c^3\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

Benzer şekilde şunu elde ederiz:

$$\frac{a^3+b^3+d^3}{a+b+d} \geq \frac{a^2+b^2+d^2}{3}, \quad \frac{a^3+c^3+d^3}{a+c+d} \geq \frac{a^2+c^2+d^2}{3},$$
$$\frac{b^3+c^3+d^3}{b+c+d} \geq \frac{b^2+c^2+d^2}{3}$$

Bu eşitsizlikleri ekledikten sonra gerekli eşitsizliği elde ediyoruz.

Teorem 3.6 (Young Eşitsizliği) $u \geq 0, v \geq 0$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olacak şekilde $1< p,q<\infty$ olsun.

O halde,

$$uv \leq \frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q} \tag{3.6}$$

eşitsizliğine Young Eşitsizliği denir.

İspat: $\alpha=\frac{1}{p}$ (o halde $0<\alpha<1$) olmak üzere

$$\varphi(t)=t^\alpha-\alpha t, \quad t \in (0,\infty)$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. $\forall t \in (0,\infty)$ için $\varphi'(t)=\alpha(t^{\alpha-1}-1)$ olduğundan $\varphi(t)$ fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde maksimum değerine $t=1$ noktasında ulaşır. O halde $\forall t \in (0,\infty)$ için $\varphi(t) \leq \varphi(1)$ olduğundan

$$t^{\alpha}-\alpha t\le 1-\alpha \Rightarrow t^{\alpha}-1\le \alpha(t-1)$$

dir. Son eşitsizlikte $t=\frac{u^{p}}{v^{q}}$ olarak alınırsa

$$uv^{-q/p}-1\le \frac{1}{p}(u^{p}v^{-q}-1)$$

bulunur. Bu eşitsizliğin her iki yanı v^{q} ile çarpılır ve $q-\frac{q}{p}=1$ olduğu dikkate alınırsa

$uv\le \frac{u^{p}}{p}+\frac{v^{q}}{q}$ eşitsizliğinin doğru olduğu elde edilir[13].

Teorem 3.7 (Hölder Eşitsizliği) $x_1,x_2,...,x_n$ ve $y_1,y_2,...,y_n$ pozitif reel sayılar ve $1/p+1/q=1$ olacak şekilde $p,q>1$ olsun. Buradan;

$$\sum_{i=1}^{n}x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.7}$$

Eşitlik ancak ve ancak $\frac{x_1^{p}}{y_1^{q}}=\frac{x_2^{p}}{y_2^{q}}=...=\frac{x_n^{p}}{y_n^{q}}$. Eğer $p,q<1$ ise bu durumda eşitsizlik yön değiştirir:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i y_i \ge \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.8}$$

İspat: Young eşitsizliği için:

$$x=\frac{x_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}}},\ y=\frac{y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^{q}\right)^{\frac{1}{q}}},\ i=1,2,...n,$$

$$\frac{x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{q}\right)^{\frac{1}{q}}}\le \frac{1}{p}\frac{x_i^{p}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{p}}+\frac{1}{q}\frac{y_i^{q}}{\sum_{i=1}^{n}y_i^{q}}$$

$i=1,2,...n,$ için yukarıdaki eşitsizliğe eklersek unu elde ederiz:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{x_i^p}{\sum_{i=1}^{n} x_i^p} + \frac{1}{q} \frac{y_i^q}{\sum_{i=1}^{n} y_i^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \text{ örneğin;}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Açıkça bu eşitlik ancak ve ancak $\frac{x_1^p}{y_1^q} = \frac{x_2^p}{y_2^q} = \ldots = \frac{x_n^p}{y_n^q}$ durumunda meydana gelir[5].

Teorem 3.8 (Minkowski Eşitsizliği) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ve $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pozitif reel sayılar ve $p > 1$ olsun. Buradan;

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\left(x_i + y_i\right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.9}$$

Bu eşitlik ancak ve ancak $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \ldots = \frac{x_n}{y_n}$ durumunda gerçekleşir. $p < 1$ olması durumunda eşitsizlik yön değiştirerek

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\left(x_i + y_i\right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.10}$$

halini alır.

İspat: $p > 1$ için, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olacak şekilde $q > 1$ seçelim, örneğin $q = \frac{p}{p-1}$. Hölder eşitsizliği ile şunu elde ederiz:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i + y_i\right)^p = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i + y_i\right)\left(x_i + y_i\right)^{p-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(x_i + y_i\right)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} y_i \left(x_i + y_i\right)^{p-1}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\left(x_i + y_i\right)^{p-1} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\left(x_i + y_i\right)^{p-1} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\left(x_i + y_i \right)^{p-1} \right)^{q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\left(x_i + y_i \right)^{p-1} \right)^{\frac{p-1}{p}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i + y_i \right)^{p} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i + y_i \right)^{p} \le \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i + y_i \right)^{p} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i + y_i \right)^{p} \right)^{1-\frac{p-1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i + y_i \right)^{p} \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$ elde edilir.

Bu eşitlik ancak ve ancak $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \ldots = \frac{x_n}{y_n}$ durumunda gerçekleşir[5].

Örnek 3.9 $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ olsun.

$$\frac{abc}{(1+a)(a+b)(b+c)(c+16)} \le \frac{1}{81}$$

eşitsizliğini ispatlayalım:

Hölder eşitsizliğini kullanırsak şunu elde ederiz:

$$(1+a)(a+b)(b+c)(c+16) \ge \left(\sqrt[4]{1 \cdot a \cdot b \cdot c} + \sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot 16} \right)^4$$

$$= \left(3\sqrt[4]{abc} \right)^4 = 81abc.$$

Eşitlik ancak ve ancak $\frac{1}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{16}$ durumunda, örneğin $a=2,\ b=4,\ c=8,$ gerçekleşir.

Tanım 3.10 (Konveks Küme) $K \subseteq R^n$ boştan farklı bir küme olsun. K kümesinin herhangi iki elemanını birleştiren doğru parçası K kümesine ait ise veya başka bir ifadeyle $\forall\, u, v \in K$ ve $t \in [0,1]$ için $tu + (1-t)v \in K$ oluyorsa K kümesine konveks küme denir[14].

Tanım 3.11 (Konveks Fonksiyon) $\forall\, u, v \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(tu + (1-t)v) \leq tf(u) + (1-t)f(v) \tag{3.11}$$

eşitsizliğini sağlayan $f: I \subset R \to R$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. (eşdeğer olarak t (0,1) aralığında da seçilebilir). Geometrik olarak bu eşitsizlik, f fonksiyonunun grafiği kirişlerinin altından geçmesi anlamına gelmektedir[15].

Örneğin; $f: I \subset R \to R$, $f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.

Teorem 3.12 (Hermite – Hadamard Eşitsizliği) $f: I \subset R \to R$ fonksiyonu konveks ise $a, b \in I$ ve $a < b$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.12}$$

dir.

İspat: f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilirdir. Sağ taraftaki eşitsizliğin ispatı konveksliğin geometrik yorumundan açıktır. Yani

$x = \alpha(1-t) + bt, t \in [0,1]$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f(\alpha(1-t) + bt)dt$$

$$\leq f(\alpha)\int_0^1 (1-t)dt + f(b)\int_0^1 tdt$$

$$= \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

olur ve bu eşitsizliğin sağ tarafıdır. Şimdi sol tarafının ispatını verelim:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

integralini

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\right] \qquad (*)$$

biçiminde yazıp, $x = a + t(b-a)/2$ değişken değiştirmesi yapılırsa son parantez içindeki ilk terim

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

biçiminde ve (*) denkleminde son parantez içindeki ikinci terim için

$x = b + t(b-a)/2$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx = -\frac{b-a}{2}\int_1^0 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

$$= \frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

biçiminde yazılır. (*) de bu sonuçlar yazılır ve konveksliğin tanımı uygulanırsa;

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right)dt + \int_0^1 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

$$\geq \int_0^1 f\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)dt = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır[16].

Teorem 3.13 $f: I^\circ \subset R \to R$ fonksiyonu I°(I nın içi) de diferansiyellenebilir, $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu, $[a,b]$ üzerinde konveks ise eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{b-a}{8}(|f'(a)| + |f'(b)|) \qquad (3.13)\ [16].$$

Teorem 3.14 (Jensen Eşitsizliği) f fonksiyonu (a,b) aralığında konveks ve $x_i \in (a,b)$ olsun. Bu durumda $\alpha_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ ise,

$$f(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) \qquad (3.14)$$

eşitsizliği geçerlidir. Eğer fonksiyon o aralıkta konkav ise eşitsizlik yön değiştirir:

$$f(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) \qquad (3.15)$$

İspat: Tümevarım yöntemiyle ispatı yapalım.

$i = 2$ için f konveks olduğundan

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

olduğu açıktır. Şimdi $i = n$ için

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n)$$

doğru olduğunu kabul edelim. Şimdi $i = n + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. $\alpha_i > 0$ için f konveksliğinden

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i\right) \leq f\left(\alpha_1 x_1 + (1-\alpha_1)\sum_{i=2}^{n+1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_1} x_i\right)$$

$$\leq \alpha_1 f(x_1) + (1-\alpha_1) f\left(\sum_{i=2}^{n+1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_1} x_i\right)$$

yazabiliriz. $\sum_{i=2}^{n+1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_1} = 1$ olduğundan eşitsizlik $i = n + 1$ için doğrudur ve

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

eşitsizliği gerçeklenir. Böylece ispat tamamlanmış olur[17].

Teorem 3.15 (Schur Eşitsizliği) $x, y, z > 0$ reel sayılar ve $t \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman

$$x^t(x-y)(x-z) + y^t(y-x)(y-z) + z^t(z-t)(z-y) \geq 0 \qquad (3.16)$$

ancak ve ancak $x = y = z$ veya $x = y, z = 0$ (ve permütasyonları) olduğunda eşitlik sağlanır.

Özel olarak $t = 1$ alındığında

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + xz(x+z) + yz(y+z) \qquad (3.17)$$

ortaya çıkar.

İspat: Genelliği kaybetmeden $x \geq y \geq z$ olduğunu varsayalım. $t > 0$ olsun. Bu durumda

$(z-x)(z-y) \geq 0$, yani $z^t(z-x)(z-y) \geq 0$

ve

$$x^t(x-z)-y^t(y-z)=(x^{t+1}-y^{t+1})+z(x^t-y^t)\geq 0$$

$$x^t(x-y)(x-z)+y^t(y-x)(y-z)\geq 0$$

$$x^t(x-y)(x-z)+y^t(y-x)(y-z)+z^t(z-t)(z-y)\geq 0.$$

$t\leq 0$ olsun. O zaman

$(x-y)(x-z)\geq 0$, yani $x^t(x-y)(x-z)\geq 0$

ve

$$z^t(x-z)-y^t(x-y)\geq z^t(x-y)-y^t(x-y)=(z^t-y^t)(x-y)\geq 0$$

$$x^t(x-y)(x-z)+y^t(y-x)(y-z)+z^t(z-t)(z-y)\geq 0$$

elde edilir[18].

Örnek 3.16 a,b,c negatif olmayan $a+b+c=1$ koşulunu sağlayan reel sayılar olsun.

$$a^3+b^3+c^3+6abc\geq\frac{1}{4}$$

eşitsizliğini ispatlayalım:

Çözüm: Çarpımı yaparsak ve verileni kullanırsak;

$$4a^3+4b^3+4c^3+24abc\geq(a+b+c)^3$$

$$=a^3+b^3+c^3+3(a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b))+6abc$$

$$a^3+b^3+c^3+6abc\geq a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$$

Schur eşitsizliğinde $t=1$ alındığında

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geq ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)$$

sağlanır. Elde edilen eşitsizliğin sol tarafında fazladan $3abc$ vardır. İkinci bir koşulla $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ (ve bunun permütasyonlarıyla) sadece eşitlik sağlanır.

Tanım 3.17 (Kıyaslama) $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ ve $\alpha'=(\alpha_1',\ldots,\alpha_n')$ iki reel dizi olsun.

(i) $\alpha_i \geq 0 \quad \forall i, \quad \alpha_j^{'} \geq 0 \quad \forall j$

(ii) $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \alpha_1^{'} + \ldots + \alpha_n^{'}$

(iii) Eğer (α) ve $(\alpha^{'})$ nün elemanları azalan sırada düzenlenmişse, o zaman

$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \geq \alpha_1^{'} + \ldots + \alpha_n^{'} \qquad 1 \leq i \leq n$

α_i ve $\alpha_i^{'}$ nün tamsayılar olması gerekmez.

Bu koşullar sağlanırsa (α) kıyaslanır $(\alpha^{'})$ denir ve $(\alpha) \succ (\alpha^{'})$ olarak yazılır.

Örneğin:

- $(0,3,0) \succ (1,0,2)$
- $(4,0,0,0) \not\succ (2,0,2)$ eleman sayıları farklı olduğundan
- $(5,0,-1) \not\succ (2,2,0)$ negatif terim olamayacağından
- $(2,1,1,1) \not\succ (1,1,1,1)$ $2+1+1+1 \neq 1+1+1+1$ olduğundan
- $(4,1,1,1) \not\succ (3,3,1,0)$ $4+1 \not\geq 3+3$ olduğundan

Sağlamaz[1].

Tanım 3.18 (Simetrik Ortalama) n tane pozitif reel sayı x_i ve (α) dizisi olsun. O halde

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$

fonksiyonunu oluşturabiliriz.

Elbette x_i lerin sırasını değiştirebiliriz, örneğin,

$F(x_2, x_1, \ldots, x_n) = x_2^{\alpha_1} x_1^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$

x_i lerin tüm $n!$ permütasyonlarının toplamını ifade edeceğiz:

$\sum !F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Son olarak, simetrik ortalama aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$[\alpha] = \frac{1}{n!} \sum ! F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Açıkça görülüyor ki, $\left[\alpha\right]$ $x_1,x_2,\ldots,x_n$ lerden oluşan bir fonksiyondur. x_i lerden herhangi birinin yerini değiştirsek de $\left[\alpha\right]$ değişmez. Bu sebepten simetrik ortalama adını alır.

Örneğin:

- Eğer $(\alpha)=(0,3,1)$ alınırsa $F(x_1,x_2,x_3)=x_2^3x_3$
- Eğer $(\alpha)=(2,1)$ alınırsa $\sum! F(x,y)=x^2y+y^2x$
- Eğer $(\alpha)=(1,3,2)$ alınırsa o zaman simetrik ortalama

$$\left[\alpha\right]=\frac{1}{3!}(x_1x_2^3x_3^2+x_1x_3^3x_2^2+x_2x_1^3x_3^2+x_2x_3^3x_1^2+x_3x_1^3x_2^2+x_3x_2^3x_1^2)$$ [1].

Teorem 3.19 (Muirhead Eşitsizliği) $(\alpha)\succ(\alpha')$ varsa o zaman

$$\left[\alpha\right]\geq\left[\alpha'\right] \tag{3.18}$$

sağlanır. Burada eşitlik ancak ve ancak (α) ve (α') birim olduklarında ya da tüm x_i lerin eşit olmasında sağlanır[19].

Örnek: Pozitif x,y için $2(x^5+y^5)\geq(x^2+y^2)(x^3+y^3)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $(5,0)\succ(3,2)$ sağlanır. Bundan dolayı Muirhead eşitsizliğinden:

$$\frac{1}{2!}(x^5+y^5)\geq\frac{1}{2!}(x^3y^2+x^2y^3)$$

yani

$$x^5+y^5\geq x^3y^2+x^2y^3$$

buradan

$$2(x^5+y^5)\geq x^5+x^3y^2+x^2y^3+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)$$

elde edilir.

Teorem 3.20 (Karamata Eşitsizliği) $I\subseteq\mathbb{R}$ olmak üzere $f:I\to\mathbb{R}$ tanımlı konveks fonksiyon olsun ve $a_i,b_i\in I, i=1,2,\ldots,n$ için $(a_i)_{i=1}^n,(b_i)_{i=1}^n$ iki dizisi $(a_i)\succ(b_i)$ koşulunu sağlasın. Bu durumda

$$f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)\geq f(b_1)+f(b_2)+\ldots+f(b_n) \tag{3.19}$$

eşitsizliği elde edilir.

Ayrıca $f: I\to$ fonksiyonu konkavsa Karamata eşitsizliği yön değiştirir:

$$f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)\leq f(b_1)+f(b_2)+\ldots+f(b_n) \tag{3.20}$$

[19].

Örnek 3.21 Şu eşitsizliği ispatlayalım:

$cos(2x_1-x_2)+cos(2x_2-x_3)+\ldots+cos(2x_n-x_1)\leq cos\,x_1+cos\,x_2+\ldots+cos\,x_n$ eşitsizliği $[-\pi/6,\pi/6]$ kapalı aralığında $x_1,x_2,\ldots,x_n$ rastgele sayıları için geçerlidir.

Çözüm: $2x_i-x_{i+1}, i=1,2,\ldots,n\ (x_{n+1}=x_1)$ sayıları verilen bir x_i sayısının yanı sıra $[-\pi/2,\pi/2]$ aralığına aittir. $f(x)=cos\,x$ fonksiyonu bu aralıkta konkavdır ve böylece Karamata eşitsizliği zıt işaretle karşımıza çıkar. Bu nedenle, şunu kanıtlamak yeterlidir $a=(2x_1-x_2,2x_2-x_3,\ldots,2x_n-x_1)$ ve $b=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ serileri azalan olmak üzere düzenlendiğinde $(a_i)\succ(b_i)$ doğrulanması:

$m_1,\ldots,m_n$ ve $k_1,\ldots,k_n$ indisleri seçilmiş olsun, böylece

$\{m_1,\ldots,m_n\}=\{k_1,\ldots,k_n\}=\{1,\ldots,n\}$,

$2x_{m_1}-x_{m_1+1}\geq 2x_{m_2}-x_{m_2+1}\geq\ldots\geq 2x_{m_n}-x_{m_n+1}$,

$x_{k_1}\geq x_{k_2}\geq\ldots\geq x_{k_n}$,

Buradan

$2x_{m_1}-x_{m_1+1}\geq 2x_{k_1}-x_{k_1+1}\geq x_{k_1}$ elde edilir.

(ilk eşitsizlik m_i sayılarının seçilmesiyle $2x_{m_1}-x_{m_1+1}$ ifadesinden dolayı gerçekleşir, ikincisi de k_i sayılarının seçilmesiyle gerçekleşir). Benzer neden tarafından,

$(2x_{m_1}-x_{m_1+1})+(2x_{m_2}-x_{m_2+1})\geq(2x_{k_1}-x_{k_1+1})+(2x_{k_2}-x_{k_2+1})\geq x_{k_1}+x_{k_2}$, ve genellikle, dizinin ilk dört teriminin toplamı $l=1,\ldots,n-1$ için dizinin ilk beş teriminin toplamından

az değildir. $l=1$ için, açıkça, eşitlik elde edilir ve böylece Karamata eşitsizliğinin uygulanması için tüm koşullar sağlanmış olur.

BÖLÜM 4

GEOMETRİK EŞİTSİZLİKLER

Teorem 4.1 (Ortalama Eşitsizlikleri) $x_1,\ x_2, \dots ,\ x_n$ pozitif gerçel sayıları için

AO = $\frac{x_1 +\cdots+\ x_n}{n}$ (Aritmetik Ortalama)

KO = $\sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}}$ (Kuadratik Ortalama)

GO = $\sqrt[n]{x_1\ \dots\ x_n}$ (Geometrik Ortalama)

HO = $\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$ (Harmonik Ortalama)

EB = En Büyük { $x_1,\ x_2, \dots ,\ x_n$}

EK = En Küçük { $x_1,\ x_2, \dots ,\ x_n$}

olarak tanımlanan aritmetik, karesel, geometrik, harmonik ortalamalar ve kümenin en büyük ve en küçük elemanı için

$$EB \geq KO \geq AO \geq GO \geq HO \geq EK \tag{4.1}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Herbiri için eşitlik ancak ve ancak $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ durumunda sağlanır[11].

Tanım 4.2 $a=\left(a_1,a_2,\dots,a_n\right)$ pozitif reel sayıların bir serisi ve $r\neq 0$ olmak üzere reel bir sayı olsun. Buradan *r*'nin bir basamağı olan güç ortalaması $M_r\left(a\right)$, şu şekilde belirlenir:

$$M_r\left(a\right)=\left(\frac{a_1^r+a_2^r+\dots+a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$r=1$, *r=2, r=-1* için $a_1,a_2,\ldots,a_n$ sayılarının sırasıyla aritmetik, kuadratik ve harmonik ortalamalarını gösteren $M_1(a)$, $M_2(a)$, $M_{-1}(a)$ elde ederiz.

Eğer *r* 0 eğiliminde ise $M_r(a)$, $a_1,a_2,\ldots,a_n$ sayılarının geometrik ortalamasını verir, şöyle ki; $M_0(a)=\sqrt[a]{a_1a_2\ldots a_n}$.

Aynı zamanda, eğer $r\to\infty$ ise buradan $M_r(a)\to min\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ ve eğer $r\to\infty$ ise buradan $M_r(a)\to max\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ olur[11].

Teorem 4.3 (Power Ortalama Eşitsizliği) $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ pozitif reel sayıların bir serisi ve $r\neq 0$ olmak üzere reel bir sayı olsun. Buradan her hangi bir $r\le s$ reel sayısı için

$$M_r(a)\le M_s(a) \tag{4.2}$$

olur[11].

Örnek 4.4 $a^2+b^2+c^2=3$ olacak şekilde a,b,c pozitif reel sayılar olsun. Eşitsizliğini ispatlayalım:

$$\sqrt[3]{a^2+bc}+\sqrt[3]{b^2+ca}+\sqrt[3]{c^2+ab}\le 3\sqrt[3]{2}.$$

Power ortalama eşitsizliği ve iyi bilinen $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2$ eşitsizliği ile çözümü yapalım:

$$\sqrt[3]{a^2+bc}+\sqrt[3]{b^2+ca}+\sqrt[3]{c^2+ab}\le\sqrt[3]{9\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right)}$$

$$\le\sqrt[3]{18\left(a^2+b^2+c^2\right)}=\sqrt[3]{18\cdot 3}=3\sqrt[3]{2}.$$

Eşitlik sadece ve sadece $a=b=c=1$ durumunda gerçekleşir.

Örnek 4.5 a, b, c, pozitif reel sayı olsun, böylece $a+b+c=1$ olur. Aşağıdaki ifadenin minimum değerini bulalım:

$$abc+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Çözüm: $AM\ge GM$ eşitsizliği ile şunu elde ederiz:

$$abc+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 4\sqrt[4]{abc\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}=4,$$

Eşitlik varsa ve sadece eğer $abc=\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$, buradan kolayca anlayabiliriz ki, $a=b=c=1$ dir ve $a+b+c=3$ olur, bu durum $a+b+c=1$ olduğundan dolayı bir çelişkidir.

$abc+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ifadesi *a, b* ve *c* ye göre simetrik olduğundan, $a=b=c$ olduğunda minimum değerin oluşacağını tahmin ederiz, örneğin $a+b+c=1$ olduğundan $a=b=c=\frac{1}{3}$ tür.

$abc=\frac{1}{aa}=\frac{1}{ab}=\frac{1}{ac}$ olsun, buradan $a=\frac{1}{a^2bc}=81$ olur.

Bu nedenle verilen ifadeyi yeniden yazacak olursak:

$$abc+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=abc+\frac{1}{81a}+\frac{1}{81b}+\frac{1}{81c}+\frac{80}{81}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

$AM\geq GM$ ve $AM\geq HM$ ile şunu elde edebiliriz:

$abc+\frac{1}{81a}+\frac{1}{81b}+\frac{1}{81c}\geq 4\sqrt[4]{abc\cdot\frac{1}{81a}+\frac{1}{81b}+\frac{1}{81c}}=\frac{4}{27}$ ve

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}=9$ olur.

Yukarıdaki eşitsizliklerin yardımıyla eşitlik varsa ve sadece $a=b=c=\frac{1}{3}$ ise;

$abc+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{4}{27}+\frac{80}{9}=\frac{244}{27}$ olduğu görülür.(Zdravko sayfa55)

[5] Schneider, Rolf. Convex Bodes: The Brunn-Minkowski Theory. Cambridge University Press, 1993. Print.

Teorem 4.6 (İzoperimetrik Eşitsizlik) $c(t)=(x(t),y(t))$, basit, kapalı, pozitif yönlendirilmiş ve düzenli parametreleştirilmiş $t\in[a,b]$ için C^1 eğrisi olsun. Tanımlanan

c(t) eğrisinin kapladığı alan A ile belirtilsin. $c(t)=(x(t),y(t))$ nin verilen bir l uzunluğu için;

$$l^2-4\pi A\geq 0 \qquad (4.3)$$

elde edilir veya buna denk olarak

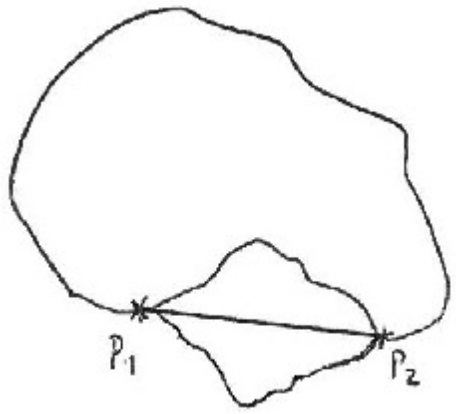
$$A\leq \frac{l^2}{4\pi},$$

ancak ve ancak c(t) eğer bir daire ise eşitlik vardır.

Steiner İspatı:

c(t), yukarıda tanımlandığı gibi olsun. İlk olarak, verilen bir l uzunluğunda c(t) tarafından kaplanan en büyük alanın geometrik olarak bir dairenin alanı olduğunu göstereceğiz. Bu fikir Jakob Steiner'e aittir ve (Froehlich) ve (Hopf)'dan alınmıştır.

1. A alanı konveks olmalıdır.



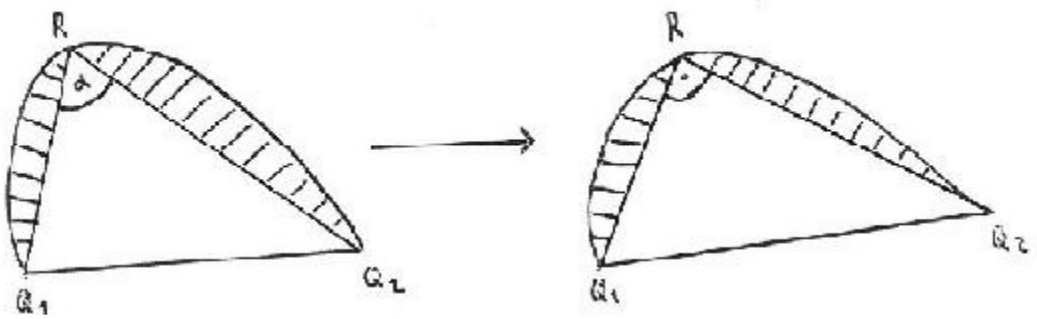
Şekil 1. Konveks olmayan alanların gösterimi

Eğer alan konveks değilse, c(t) üzerinde her zaman A alanının dışında bağlantı çizgileri olan P_1 ve P_2 gibi iki nokta bulabiliriz. Bu çizgiyi, iki nokta arasındaki c(t) 'yi bağlantı hattının diğer tarafına yansıtacak şekilde ayna ekseni olarak kullanalım. A daha büyük olmasına rağmen, l uzunluğunun değişmediğini görürüz. Böylece, A konveks olmak zorundadır.

2. A aynı boyuttaki iki parçadan oluşur.

Şimdi, c(t) üzerinde Q_1 ve Q_2 adıyla iki nokta seçelim. Q_1 rastgele seçilebilirken, Q_2, c(t)'yi $c_1(t)$ ve $c_2(t)$ noktalarında ikiye bölen bir nokta olmalıdır ve $c_1(t)$ ile $c_2(t)$ tam olarak aynı uzunluktadır. Bu şu anlama gelmektedir, Q_1 noktasından başlayıp c(t) boyunca ilerlediğimizde tam olarak $\frac{l}{2}$ uzunluğundan sonra Q_2 görülecektir. Q_1 den Q_2 'ye bir doğru çizdiğimizde A_1 ve A_2 alanlarını elde ederiz ve $A_1 + A_2 = A$ olur (not: A_1 ve A_2 eşit olmak zorundadır). Eğer eşit değillerse genelliği kaybetmeden $A_1 > A_2$ olduğunu görebiliriz. Bu durumda Q_1 ve Q_2 arasındaki bağlantı çizgisini, A_1'i, bağlantı hattımızın diğer tarafına yansıtmak için tekrar kullanabiliriz ve c (t) uzunluğunu değiştirmeden daha büyük bir A alanı elde edebiliriz.

3. $c_1(t)$ ve $c_2(t)$ eğrileri yarım daireleri gösterir.



Şekil 2. Alanı en üst düzeye çıkarmak için açıyı değiştirme

Tekrar Q_1 ve Q_2'ye bakalım. Yukarıda $A_1 = A_2$ olduğunu gösterdik, bu nedenle genelliği kaybetmeden $c_1(t)$'nin yarım daire olduğunu göstermek yeterlidir. $c_1(t)$'nin yarım daire olmadığını varsayalım. Bu durumda $c_1(t)$ üzerinde R adında bir nokta var olacak ve bu noktadaki açı $(\alpha$ diye adlandıracağız$)$ 90°'ye eşit olmayacaktır (not: bu Thales teoremidir). Şimdi Q_1R ve RQ_2 uzunluklarını sabit tutalım, ancak Q_1RQ_2 üçgeninin maksimum alana sahip olabilmesi için α açısının değişmesine izin verelim (ve böylece Q_1 ve Q_2 iki nokta arasındaki bağlantı çizgisini de değiştirerek hareket eder). Bu işlem değişmemiş $c_1(t)$ uzunluğunun yanı sıra taralı alanları da ayırır, $\alpha = 90^o$ olmasaydı

Q_1RQ_2 üçgeni için öncekinden daha büyük bir alan elde edebilirdik. Ancak bu, varsayımımıza aykırıdır. Bu nedenle $c_1(t)$ yarım daire olmak zorundadır.

Not: Bu yapıya öngörü ile ulaşılabilir iken, Izoperimetrik Eşitsizliğin tam bir kanıtı olarak görülemez. l sabit uzunluğundaki bir eğrinin kaplamış olduğu en büyük alanı oluşturmak için, ki buna daire denir, yalnızca bir yol sağlar. Henüz çözümün varlığının tek olduğunu göstermedik, böylece bu "ispat" ı eksik olarak görmek zorundayız.

E. Schmidt İspatının Elde Edilişi

Aşağıdaki lemmaları kullanarak Erhard Schmidt tarafından yapılan ispatı elde edeceğiz.

Lemma (i) A alanının hesaplanması

A alanını aşağıdaki formül ile belirleyebiliriz:

$$A = -\int_a^b y(t)x'(t)dt$$

$$= \int_a^b y'(t)x(t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b (y(t)'x(t) - y(t)x'(t))dt$$

İspat:

İlk eşitsizlik düzlemde Stokes teoreminin özel bir durumu olan Green teoremidir.

İkinci eşitlik İntegrasyon ve Diferansiyel Teoremlerinin Temellerinden elde edilir. $t \in [a,b]$ yay uzunluğu parametreleri ile ifade edilmiş c(t) kapalı bir eğri olduğundan, $c(a) = c(b)$ elde ederiz:

$$\int_a^b y'xdt = \int_a^b (xy)' dt - \int_a^b x'ydt$$

$$= \left[x(b)y(b) - x(a)y(a) \right] - \int_a^b x'ydt$$

$$= -\int_a^b x'ydt$$

Son olarak, son eşitlik hemen ikinci bir eşitlikten gelmektedir:

$$\int_a^b y'xdt = \frac{1}{2}\int_a^b y'xdt + \frac{1}{2}\int_a^b y'xdt$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b y'xdt - \frac{1}{2}\int_a^b yx'dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b \left(y'x - yx'\right)dt$$

eşitliği bu lemmayı tamamlar.

Lemma (ii)

Aşağıdaki eşitsizliği / eşitliği daha sonra kanıtımızda kullanacağız. Daha iyi okunabilirlik ve yapı için şimdi ve sonra gösterilir, yalnızca sonucu alıntı yapacağız.

x, y ve z, t'nin bir fonksiyonu olsun ve $x, y, z \in C^1$, yani x', y', z' var olur ve süreklidir. Bu durumda:

$$\left(xy' - zx'\right)^2 \leq \left(x^2 + z^2\right) * \left(\left(x\right)^2 + \left(y\right)^2\right)$$

Eşitlikle $\Leftrightarrow \left(xx' + zy'\right)^2 = 0 \Leftrightarrow zy' = -xx'$

İspat:

$$\left(x^2 + z^2\right) * \left(\left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2\right) - \left(xy' - zx'\right)^2$$

$$= x^2\left(x'\right)^2 + x^2\left(y'\right)^2 + z^2\left(x'\right)^2 + z^2\left(y'\right)^2 - \left(x^2\left(y'\right)^2 - 2xy'zx' + z^2\left(x'\right)^2\right)$$

$$= x^2\left(x'\right)^2 + 2xy'zx' + z^2\left(y'\right)^2$$

$$= \left(xx' + zy'\right)^2 \geq 0$$

Eşitliğin sağlanması gerekiyor:

$$\left(xx' + zy'\right)^2 = 0 \Leftrightarrow xx' + zy' = 0$$

$$\Leftrightarrow zy' = -xx'$$

Hatırlatma (i) (Geometrik/Aritmetik Ortalamanın Eşitsizliği)

$a, b \in \mathbb{R}^+$ olsun, aşağıdaki eşitsizlik devam eder:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow a = b$$

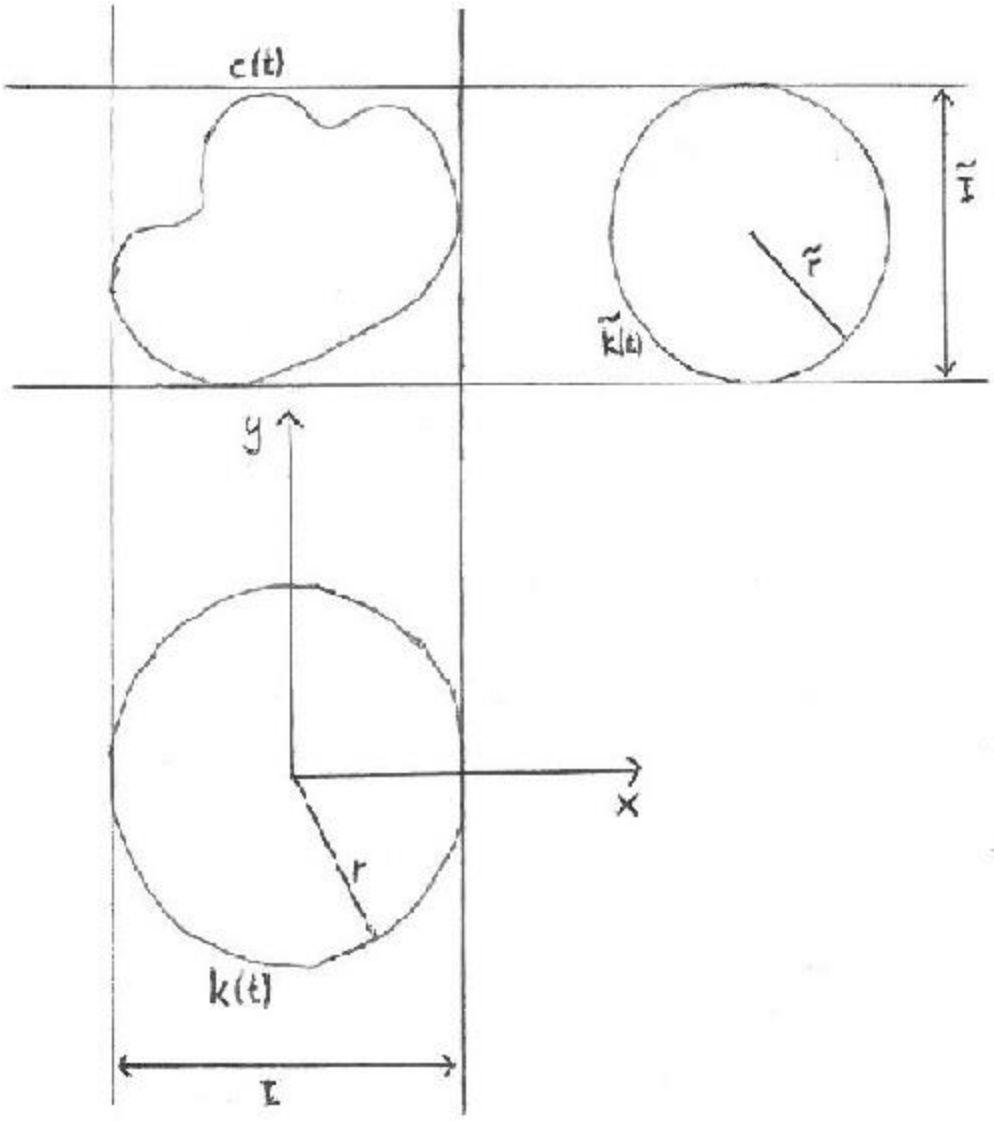
Hatırlatma (ii) (Özel parametrelerle ifade edilen eğrilerin özellikleri)

$c(t) = \left(x(t), y(t)\right)$ yay uzunluğu ile parametrelendirilir $\Leftrightarrow \left|c'(t)\right| = 1 \forall t$

$$\Leftrightarrow \left|\left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2\right| = 1$$

$c(t) = \left(x(t), y(t)\right)$, yarıçapı 0'dan büyük bir daire olsun, $r > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2$

E. Schmidt İspatı:



Şekil 3. $c(t)$, k(t) ve $\tilde{k}(t)$ ile I, $\tilde{I}$ nın yapısı

İspat (E. Schmidt le İzoperimetrik Eşitsizliğin İspatı):

$c(t)=(x(t),y(t))$ parametrelendirilmiş bir yay olsun ve yukarıda tanımlandığı gibi pozitif yönlendirilmiş eğri olsun. Böylece bir aralık bulabiliriz $I=\left[-r,+r\right]$ öyle ki $x(t)\in I$ (C (t) 'ye dokunan ve Şekil 3'te görüldüğü gibi sınırlayıcı olan iki paralel çizgi ayarlayarak). $x(t)$ 'yi I sınırında başlayacak şekilde ayarlayın, genelliği kaybetmeden

$x(0)=+r$ ve $\mathrm{x}(\mathrm{p}_1)=-r$. Şimdi, r yarıçaplı bir $k(t)=\big(x(t),z(t)\big)$ dairesi belirleyin ve yukarıda c(t) ile aynı x(t), yani k(t) nin x(t) 'si aynı parametrelere sahiptir, c(t)'de olduğu gibi (z(t)'yi $0<t<p_1$ için $z(t)=+\sqrt{r^2-x(t)^2}$ ve $p_1<t<1$ için $z(t)=-\sqrt{r^2-x(t)^2}$ olarak k(t) dairesinin parametrelerle ifade edilebilmesi için ayarlayabiliriz). O halde k(t) de tamamen I olur. c(t) ile çevrili alan olarak A, k(t) ile çevrili alan olarak B'yi belirtelim. Buradan (Lemma (i)):

$$A=\int_0^1 y'(t)x(t)dt; \qquad \mathrm{B}=-\int_0^1 z(t)x'(t)dt=\pi r^2$$

A ve B ekleyerek şunu elde edebiliriz:

$$A+B=A+\pi r^2=\int_0^1\big(y'x-zx'\big)dt$$

$$\leq\int_0^1\sqrt{\big(y'x-zx'\big)^2dt}$$

$$\leq\int_0^1\sqrt{\left(\underbrace{x^2+z^2}_{=r^2\text{ by H(i)}}\right)*\left(\underbrace{\big(x'\big)^2+\big(y'\big)2}_{=1\text{ by H(ii)}}\right)}dt$$

$$=\int_0^1 rdt=lr$$

Hatırlatma (i)'yi kullanalım (a=A ve b=πr^2)ve yukarıdaki hesaplama aşağıdaki eşitsizliği elde etmek içindir:

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2}\leq\frac{A+\pi r^2}{2}\leq\frac{lr}{2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2}\leq\frac{lr}{2}$$

$$\Rightarrow 4\pi Ar^2\leq l^2r^2$$

$$\Rightarrow 0\leq l^2-4\pi A$$

Izoperimetrik Eşitsizlikte eşitlik elde etmek için, yukarıdaki hesaplamaların hepsinde eşitsizlikler yerine eşitliklere sahip olmalıyız. Son eşitsizliği eşitlik haline getirmek için Hatırlatma (i) biliyoruz, $a=b$ olduğundan $A=\pi r^2$ olmalı ve böylece r yönelimi üzerinde herhangi bir kısıtlama olmaksızın. $l=2\pi r$ olur.

$$\left(xy'-zx'\right)^2=\left(x^2+z^2\right)*\left(\left(x'\right)^2+\left(y'\right)^2\right)$$

Bu eşitsizlik $-xx'=zy'$ olduğunu gösterir. Bunu tekrar yukarıdaki denklemin sol tarafına koyarsak, şunu elde ederiz:

$$\Rightarrow\left(xy'-zx'\right)^2=\underbrace{\left(x^2+z^2\right)}_{=r^2 \text{ by H(ii)}}*\underbrace{\left(\left(x'\right)^2+\left(y'\right)^2\right)}_{=1 \text{ by H(ii)}}$$

$$\Rightarrow x^2\left(y'\right)^2-2zx'xy'+z^2\left(x'\right)^2=r^2$$

$$\Rightarrow x^2\left(y'\right)^2+2\left(x'\right)^2x^2+z^2\left(x'\right)^2=r^2$$

$$\Rightarrow x^2\underbrace{\left(\left(x'\right)^2+\left(y'\right)^2\right)}_{=1 \text{ by H(ii)}}+\left(x'\right)^2*\left(x^2+\underbrace{z^2}_{=r^2-x^2 \text{ by H(ii)}}\right)=r^2$$

$$\Rightarrow x^2+\left(x'\right)^2r^2=r^2$$

$$\Rightarrow x^2=r^2\underbrace{\left(1-\left(x'\right)^2\right)}_{=\left(y'\right)^2 \text{ by H(ii)}}$$

$$\Rightarrow x=\pm ry'$$

Bu ispatı bitirmek için, $y=\pm rx'$ göstermemiz gerekir. Bunu yapmak için ispatın başına dönmeliyiz. Şimdi bir başka aralık olan $\tilde{I}=\left[-\tilde{r},\tilde{r}\right]$ buluruz (paralel çizgileri I aralığını sınırlayan çizgilere dik olarak ayarlayarak). Yine, $\tilde{I}$ aralığına bir $\tilde{c}(t)$ dairesi koyabiliriz, ancak bu kez $\tilde{c}(t)$, $\tilde{c}(t)=\left(w(t),y(t)\right)$ olarak parametrelendirilir. Yukarıda aynı A için şimdi ispatı yeniden yapmak zorundayız ancak $\tilde{B}=\pi\tilde{r}^2$ olmalıdır. Daha önce yaptığımız gibi her yerde eşitlik istemek, bize $A=\pi\tilde{r}^2$ yi verir, ancak aynısını yukarıda kullandığımız

için, $-x\omega' = yy'$ ifadesinin yanı sıra $\tilde{r} = r$ elde ederiz, ki bu ifadeler sonunda $y = \pm rx'$ sonucunu verir.

Sonucunda, denkleme x^2 ve y^2 ekleyerek;

$$x^2 + y^2 = r^2 \left(\underbrace{\left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2}_{=1 \text{ by H(ii)}} \right) = r^2$$

Hatırlatma (ii) ile c(t) bir dairedir[20].

Teorem 4.7 (Küresel İzoperimetrik Eşitsizlik) C basit, kapalı eğrisi yarıçapı 1 olan bir kürede olsun. C nin uzunluğu L ve C kapalı bölgesinin alanı A olsun. Küresel izoperimetrik eşitsizlik

$$L^2 \geq A(4\pi - A) \tag{4.4}$$

olarak ifade edilir ve eşitlik ancak ve ancak eğri daire olduğunda sağlanır. Ayrıca R keyfi yarıçap için

$$L^2 \geq 4\pi A - \frac{A^2}{R^2} \tag{4.5}$$

olarak bilinir[21].

Teorem 4.8 (Üçgenler İçin İzoperimetrik Eşitsizlik) p üçgenin çevresi ve T alanını belirtmek üzere üçgenler için izoperimetrik eşitsizlik şöyle ifade edilir:

$$p^2 \geq 12\sqrt{3}T \tag{4.6}$$

Eşkenar üçgen olması durumunda eşitlik sağlanır. Bundan daha güçlü olan başka bir üçgenler için izoperimetrik eşitsizlik olarak adlandır. a, b, c üçgenin kenarları olmak üzere

$$T \leq \frac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{2/3} \tag{4.7}$$

şeklindedir[21].

Tanım 4.9 (Minkowski Toplamı) A ve B $\mathbb{R}^n$ de keyfi iki altküme olsun. A ve B nin Minkowski toplamı şöyle tanımlanır:

$$A \oplus B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$$

Koordinat eksenlerine paralelkenarları olan bir paralelyüzün tanımlanmasına da ihtiyacımız olacak[22]:

Tanım 4.10 $I_1, I_{2,}..., I_n$ reel eksenin açık aralıkları ile sınırlandırılmış olsun. A $\subset \mathbb{R}^n$ nin koordinat eksenlerine paralelkenarları olan bir paralelyüz şeklinde tanımlanan bir alt küme formudur:

$$A = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$$

Koordinat eksenlerine paralel kenarları olan paralelyüzler, daha karmaşık kümeler için yapıtaşları olarak hareket edeceklerinden bu bölümde önemli olacaktır ve bir sonraki lemma Minkowski toplamı operatörüyle kapalı olduğunu gösterir[22].

Lemma 4.11 $A = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$ ve $B = J_1 \times J_2 \times ... \times J_n \subset \mathbb{R}^n$ de tanımlı, kenarları koordinat eksenlerine paralel olan iki paralelyüz olsun. Buradan,

$$A \oplus B = (I_1 + J_1) \times (I_2 + J_2) \times ... \times (I_n + J_n)$$

elde edilir.

A ve B ayrıksa, A ve B'yi ayıran koordinat hiperdüzlemlerinden birine paralel olan bir hiperdüzlem vardır.

İspat: $a \in A$ ve $b \in B$ bileşenlerini göz önüne alarak birinci iddiayı ispatlamak kolaydır. $A \cap B = \varnothing$ olduğunu varsayalım. Buradan bazı $k \in \{1, 2, ..., n\}$ için $I_k \cap J_k$ boştur. Dolayısıyla, I_k ve J_k aralıklarının a'nın farklı taraflarında olacağı $a \in \mathbb{R}$ olacaktır. Bu şunu takip edecektir, $x_k = a$ hiper düzlemi A ve B'yi ayırır[22].

Teorem 4.12 (Brunn-Minkowski Eşitsizliği) A ve B, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayının iki sınırlı açık alt kümesi olsun. Buradan,

$$|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}} \leq |A \oplus B|^{\frac{1}{n}} \qquad (4.8)$$

İspat: Bu ispat üç aşamalı olarak ilerlemektedir. Birinci aşama, koordinat düzlemlerine paralel kenarları olan A ve B paralelyüzleri için eşitsizliği ispatlamaktır. Daha sonra, sınırları koordinat eksenlerine paralel olan sınırlı açık paralelyüzlerin A ve B ayrık sonlu

birleşimleri için eşitsizliği ispatlıyoruz. Sonuç olarak, genel durumu ispatlamak için, önceki sonuçlarımızı ve bazı ilk bulgularımızı integrasyonun Lebesgue uzay teoremine uyguluyoruz.

İlk olarak şu kabulleri yapalım: I_k ve J_k, $k=1,2,...,n$ a_i ve b_i uzunlukları ile $\square$ nin açık aralıkları ile sınırlandırıldığı noktada, $A=I_1\times I_2\times...\times I_n$ ve $B=J_1\times J_2\times...\times J_n$ olur. Buradan,

$$\frac{|A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}}{|A\oplus B|^{\frac{1}{n}}}=\frac{\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{k=1}^{n}b_k\right)^{\frac{1}{n}}}{\left(\prod_{k=1}^{n}(a_i+b_i)\right)^{\frac{1}{n}}}=\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_k+b_k}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_k+b_k}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Aritmetik ve geometrik ortalamaların eşitsizliği ile

$$\frac{|A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}}{|A\oplus B|^{\frac{1}{n}}}\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_k+b_k}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_k+b_k}=1 \text{ bulunur.}$$

Şimdi, A ve B'nin kenarları koordinat eksenlerine paralel olan sınırlı açık paralelyüzeylerin ayrık sonlu birleşimleri olduğunu varsayalım:

$A=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$ ve $B=\bigcup_{k=1}^{m}B_k$,

Burada A_k ve B_k yukarıda verilen ilk durumda olduğu gibidir. Paralelyüzlerin $n+m$ toplam sayısı üzerine tümevarım ile devam ediyoruz. Yukarıda, $n+m=2$ taban durumu oluşturulmuştur. $n+m\ge3$ olduğunu düşünelim ve koordinat eksenlerine paralel kenarlar ve toplam sayı n + m'den daha küçük olan sınırlandırılmış açık paralelyüzlerin birbirinden ayrık sonlu birleşimleri için eşitsizliğin geçerli olduğunu varsayalım. $n+m\ge3$ olduğundan, $n>1$ veya $m>1$ olur. Genelliği kaybetmeden, $n>1$ olduğunu varsayalım. A_1 ve A_2'yi ayıran koordinat eksenlerine paralel bir P hiper düzlemi oluşur. P^+ ve P^- P'nin $\square^n$ yi bölen iki açık yarı uzayı ve $A^+=A\cap P^+$, $A^-=A\cap P^-$ olsun. Buradan, A^+ ve A^- aynı zamanda yüzeyleri koordinat hiper düzlemlerine paralel olan paralelyüzlerin sonlu birleşimleridir ve şöyle tanımlanır:

$A^+=\bigcup_{k=1}^{n^+}A_k^+$ ve $A^+=\bigcup_{k=1}^{n^-}A_k^-$

burada, P en küçük A_1 ve A_2 ye ayrıldığından $n^+ < n$ ve $n^- < n$ dir. P'ye paralel olan bir hiper düzlem Q'yu şu şekilde bulabiliriz:

$$\frac{|A^+|}{|A|} = \frac{|B^+|}{|B|}$$

Burada, daha önce olduğu gibi aynı gösterimi kullandık. Aslında, soldaki kesir 0 ile 1 arasındadır ve eğer biri B'nin tüm paralelyüzlerinin solundaki Q'yu alır ve hepsini aşana kadar sağa doğru yer değiştirirse, sağ taraftaki kesir 0'dan 1'e değerler alan Q konumunun sürekli bir fonksiyonudur. Ara değer teoremine göre, eşitlik tuttuğu bir Q pozisyonu garanti edilir.

$|A^+| + |A^-| = |A|$ ve $|B^+| + |B^-| = |B|$ olduğundan,

$1 - \frac{|A^-|}{|A|} = 1 - \frac{|B^-|}{|B|} \Rightarrow \frac{|A^-|}{|A|} = \frac{|B^-|}{|B|}$ olur.

Dahası B^+ ve B^- aynı zamanda koordinat hiper düzlemlerine paralel yüzeylere sahip olan açık paralelyüzlerin ayrık sonlu birleşimleridir:

$$B^+ = \bigcup_{k=1}^{m^+} B_k^+ \text{ ve } B^- = \bigcup_{k=1}^{m-} B_k^-$$

Burada Q, B'nin iki paralelyüzünü ayırmadığı için $m^+ \le m$ ve $m^- \le m$ dir. $n^+ + m^+ < n + m$ ve $n^- + m^- < n + m$ olduğundan, aşağıdaki eşitsizlikleri elde etmek için $A^+, B^+, A^- \text{ve } B^-$ ye tümevarım teoremini uygulayabiliriz:

$$|A^+ \oplus B^+| \ge \left[|A^+|^{\frac{1}{n}} + |B^+|^{\frac{1}{n}} \right]^n,$$

$$|A^- \oplus B^-| \ge \left[|A^-|^{\frac{1}{n}} + |B^-|^{\frac{1}{n}} \right]^n.$$

Bu durumda $A^+ \subset P^+$ ve $B^+ \subset Q^+$ olduğundan $A^+ \oplus B^+ \subset P^+ \oplus Q^+ = (P \oplus Q)^+$ ve $A^- \oplus B^- \subset (P \oplus Q)^-$ elde edilir. Şunu hatırlamak gerekirse, P ve Q paraleldir ve bu yüzden eğer $P \square \{x \in \square^n : \upsilon \cdot x = \alpha_1\}$ ve $Q \square \{x \in \square^n : \upsilon \cdot x = \alpha_2\}$ olursa,

$P^+ \oplus Q^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \upsilon \cdot x = \alpha_1 + \alpha_2\}$ olur. P^+ nın herhangi bir p öğesi, $\upsilon \cdot p > \alpha_1$ eşitsizliğini, $q \in Q^+$ olması durumunda $\upsilon \cdot q > \alpha_2$ eşitsizliğini sağlar ve şunu gösterir $\upsilon \cdot (p+q) > \alpha_1 + \alpha_2$ ve $P^+ \oplus Q^+ \subset (P \oplus Q)^+$. Bu durumların tersi de benzerdir.

$P \oplus Q$'nun bir hiper düzlem olduğunu akılda tutarak $A^+ \oplus B^+$ ve $A^- \oplus B^-$'nin ayrık olduğunu ifade edebiliriz. Böylece, (5) numaralı denklem dikkate alındığında,

$$|A \oplus B| \geq |A^+ \oplus B^+| + |A^- + B^-| \geq \left[|A^+|^{\frac{1}{n}} + |B^+|^{\frac{1}{n}} \right]^n + \left[|A^-|^{\frac{1}{n}} + |B^-|^{\frac{1}{n}} \right]^n \text{ elde edilir.}$$

(2) ve (3) numaralı denklemlerden,

$$|A \oplus B| \geq \left[|A^+|^{\frac{1}{n}} + |A^+|^{\frac{1}{n}} \left(\frac{|B|}{|A|}\right)^{\frac{1}{n}} \right]^n + \left[|A^-|^{\frac{1}{n}} + |A^-|^{\frac{1}{n}} \left(\frac{|B|}{|A|}\right)^{\frac{1}{n}} \right]^n$$

$$\geq |A^+| \left[1 + \left(\frac{|B|}{|A|} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^n + |A^-| \left[1 + \left(\frac{|B|}{|A|} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^n \geq |A| \left[1 + \left(\frac{|B|}{|A|} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^n = \left[|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}} \right]^n,$$

tümevarım tamamlanır.

Genel durumu dikkate alalım. A ve B, $\mathbb{R}^n$ 'de herhangi iki sınırlı açık küme olsun. Lebesgue integrasyonunun teorisi bize şunu ifade eder; $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere ikinci durumda dikkate aldığımız A_n ve B_n gibi $\mathbb{R}^n$ açık kümelerinin iki ardışık durumu vardır, öyle ki $A_n \subset A$ ve $B_n \subset B$,

$$\lim_{n \to \infty} |A_n| = |A| \text{ ve } \lim_{n \to \infty} |B_n| = |B|.$$

Sonuç olarak $A_n \oplus B_n \subset A \oplus B \forall n \in \mathbb{N}$ elde edilir ve böylece

$$|A \oplus B|^{\frac{1}{n}} \geq |A_n \oplus B_n|^{\frac{1}{n}} \geq |A_n|^{\frac{1}{n}} + |B_n|^{\frac{1}{n}} \forall n \in \mathbb{N} \text{ bulunur.}$$

n sonsuzluk eğiliminde olduğundan limit alırsak ispat tamamlanır[22].

Örnek 4.13 $(0,1) \oplus (0,2) = ?$

Brunn-Minkowski eşitsizliğinden $|A \oplus B|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}$

$$\left|(0,1)\oplus(0,2)\right|^{1}\geq\left|(0,1)\right|^{1}+\left|(0,2)\right|^{1}$$

$$\left|(0,3)\right|^{1}\geq 1+2$$

$$3=3$$

elde edilir.

Örnek 4.14 $([0,1]\times[0,1])\oplus([1,2]\times[0,4])=?$

$([0,1]\times[0,1])\oplus([1,2]\times[0,4])=[1,3]\times[0,5]$

$\left|A\oplus B\right|^{\frac{1}{n}}\geq\left|A\right|^{\frac{1}{n}}+\left|B\right|^{\frac{1}{n}}$ eşitsizliğinden

$$\left|[1,3]\times[0,5]\right|^{\frac{1}{2}}\geq\left|([0,1]\times[0,1])\right|^{\frac{1}{2}}+\left|([1,2]\times[0,4])\right|^{\frac{1}{2}}$$

$$3{,}162\geq 1+2$$

$$3{,}162>3$$

olduğu görülür.

BÖLÜM 5

FONKSİYON EŞİTSİZLİKLERİ

Teorem 5.1 (Hilbert Eşitsizliği) $a_m, b_n \geq 0$ olmak üzere eğer $\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty$ ise bu durumda $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n}$ serisi yakınsaktır. Daha açık olarak

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \pi \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right)^{1/2} \tag{5.1}$$

eşitsizliği vardır ve π mükemmel sabitiyle gerçekleşir[3].

Teorem 5.2 (Hardy Eşitsizliği) Hardy tarafından (ispatı verilmeksizin) $a > 0$, $f(x) \geq 0, p > 1$ ve $\int_a^b f^p(x)dx < \infty$ iken;

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^{\infty} f^p(x)dx \tag{5.2}$$

şeklinde eşitsizliğin sağlandığını ispatlamıştır. Bu eşitsizlik Hardy eşitsizliği olarak bilinir.

G.H. Hardy eşitsizliğinden sonraki ağırlık fonksiyonları ile ilgili ilk ünlü eşitsizliğini, $p > 1,\ x < p-1$ ve f ölçülebilir negatif fonksiyonlar için, $\left(\frac{p}{p-1-\varepsilon} \right)^p$ mümkün olan en iyi sabit olmak üzere,

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^{x} f(t)dt\right)^{p} x^{2}dx \le \left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^{p}\int_0^{\infty} f^{p}(x)x^{\varepsilon}dx \tag{5.3}$$

şeklinde ifade etmiştir[3].

Teorem 5.3 $p,q\in\Lambda_0\cap\Lambda_\infty\cap P$ olsun. $f(x)\ge 0$ bir ölçülebilir fonksiyon olsun ve $p^{-}>1, q(0)\ge p(0), q(\infty)\ge p(\infty)$ olduğunu varsayalım. O zaman, aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) Sadece $n,m,M,p^{+},p^{-},q^{+},q^{-},C_1,C_2,\tilde{V}(m),\tilde{V}(M),\tilde{W}(m),\tilde{W}(M)$ ifadelerine bağlı pozitif sabit bir C vardır öyle ki her f için ağırlıklı norm eşitsizliği sağlanır:

$$\left\| v^{\frac{1}{q(x)}} Hf(x)\right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \le C\left\| w^{\frac{1}{p(x)}} f(x)\right\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \tag{5.4}$$

(2) C_3 ve C_4 pozitif sabitleri vardır öyle ki her f için her iki ağırlık eşitsizliği sağlanır:

$$\left(\int_{B(0,m)}\left(\int_{|y|<|x|} f(y)dy\right)^{q(0)} v(x)dx\right)^{\frac{1}{q(0)}} \le C_3\left(\int_{B(0,m)} f(x)^{p(0)}\sigma^{1-p(0)}dx\right)^{\frac{1}{p(0)}} \tag{5.5}$$

ve

$$\left(\int_{|x|>M}\left(\int_{M<|y|<|x|} f(y)dy\right)^{q(0)} v(x)dx\right)^{\frac{1}{q(0)}} \le C_4\left(\int_{|x|>M} f(x)^{p(0)}\sigma^{1-p(0)}dx\right)^{\frac{1}{p(0)}} \tag{5.6}$$

(3) Her iki ifade

$$\sup_{0<t<m}\tilde{V}(t)^{\frac{1}{q(0)}}.\tilde{W}(t)^{\frac{1}{p'(0)}} \le C_5<\infty \tag{5.7}$$

ve

$$\sup_{t>M}\tilde{V}(t)^{\frac{1}{q(\infty)}}.\tilde{W}(t)^{\frac{1}{p'(\infty)}} \le C_6<\infty \tag{5.8}$$

C_5 ve C_6 pozitif sabitleri t ye bağlı olmaksızın eşitsizlikler sağlanır.

(4) C_7 pozitif sabiti t ye bağlı olmaksızın ifade sağlanır:

$$V(x)^{\frac{1}{q(x)}}.W(x)^{\frac{1}{p'(x)}} \le C_7 < \infty; \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{5.9}$$ [23]

Teorem 5.4 (Hardy-Littlewood Eşitsizliği) Eğer f ve g $\mathbb{R}^n$ de tanımlı negatif olmayan, sonsuzda sıfıra giden ölçülebilir reel fonksiyonlarsa, bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx \le \int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)g^*(x)dx \tag{5.10}$$

burada f^* ve g^* sırasıyla f ve g nin simetrik azalan düzenlemeleridir[24].

Teorem 5.5 (Riesz-Sobolev Eşitsizliği) f,g,h herhangi negatif olmayan üç fonksiyon olmak üzere

$$\iint_{\mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n} f(x)g(x-y)h(y)dxdy \le \iint_{\mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n} f^*(x)g^*(x-y)h^*(y)dxdy \tag{5.11}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada f^*,g^*,h^* sırasıyla f,g,h ın simetrik azalan düzenlemeleridir[25].

Teorem 5.6 (Wirtinger Eşitsizliği) $f(0)=f(\pi)=0$ olacak şekilde $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ parçalı C^1 fonksiyonu olsun. Buradan şunu elde ederiz:

$$\int_0^\pi f'(t)^2\,dt \ge \int_0^\pi f(t)^2\,dt \tag{5.12}$$

eşitlik ancak ve ancak $f(t)$ nin $\sin(t)$ çarpımı ile elde edilir.

İspat: $g(t)=\dfrac{f(t)}{\sin(t)}$ fonksiyonunu düşünelim. l'Hopital kuralı ile sınır noktalarda ve $f(0)=f(\pi)=0$ koşullarında diferansiyeli alınabilir. Buradan;

$f'(t)=g(t)\cos(t)+g'(t)\sin(t)$ olur, böylece

$$\int_0^\pi f'(t)^2\,dt = \int_0^\pi \left(g(t)^2\cos(t)^2 + 2g(t)g'(t)\cos(t)\sin(t) + g'(t)^2\sin(t)^2\right)$$

Orta terimin sınır koşulları kullanılarak kısmi integrali bize şunu verir:

$$2\int_0^\pi g(t)g'(t)\cos(t)\sin(t) = -\int_0^\pi g(t)^2 - \sin(t)^2\,dt.$$

Bunun sonucunda,

$$\int_0^\pi f'(t)^2\,dt = \int_0^\pi \left(g(t)^2 + g'(t)^2\right)\sin(t)^2\,dt = \int_0^\pi f(t)^2\,dt + \int_0^\pi g'(t)^2\sin(t)^2\,dt \geq \int_0^\pi f(t)^2\,dt.$$

eşitlik, ancak ve ancak $g'(t)=0$ olması durumunda gerçekleşir ve bu da $g(t)$ 'nin sabit olduğunu ve $f(t)$ nin $\sin(t)$ çarpımı olduğunu ifade eder[26].

Tanım 5.7 H bir Hilbert uzayı olsun. H' nin boştan farklı $\{e_i\}$ kümeleri aşağıdaki koşulları sağlarsa ortonormal küme olarak adlandırılır:

(i) $e_i \perp e_j$, eğer $i \neq j$

(ii) $\|e_i\| = 1$,$\forall i$[5].

Teorem 5.8 (Bessel Eşitsizliği) X iç çarpım uzayında $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ sonlu ortonormal kümeyse, $x \in X$ keyfi elemanı için,

(i) $\sum_{i=1}^{n} |< x, e_i >|^2 \leq \|x\|^2$ (Bessel Eşitsizliği) (5.13)

ve

(ii) $x - \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > \; e_i \perp e_j$,$\forall j$ (5.14)

dir[5].

Teorem 5.9 (Genel Bessel Eşitsizliği) I bir indis kümesi olsun. $\{e_i, i \in I\}$ bir H Hilbert uzayının ortonormal bir kümesiyse, o zaman

$$\sum_{i\in I} |< x, e_i >|^2 \leq \|x\|^2 \qquad \forall x \in H \tag{5.15}$$

[5].

KAYNAKLAR

[1] Hardy G.H., J.E. Littlewood and G. Polya (1934). Inequalities. Cambridge University, *Press*, New York.

[2] Beckenbach, E.F. and Bellman, R., (1961). Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.

[3] Mitrinovi´c, D.S., (1970). Analytic Inequalities, Springer Verlag, Berlin/New York.

[4] Soykan, Y., (2016). Fonksiyonel Analiz, 3. Baskı, Nobel Yayıncılık, Ankara.

[5] Rao, C.K., (2002). Functional Analysis, Second Edition, Alpha Science International, Oxford, United Kingdom.

[6] Mısırlıoğlu T., Reel Analiz, http://udes.ikü.edu.tr , 16 Mart 2017.

[7] Diening, L., (2004). "Maximal function on generalized Lebesgue spaces p(x) L ." Mathematical inequalities and applications, Vol. 7(2): 245–253.

[8] Musielak J. (1983). Orlicz Spaces and Modular Spaces, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Paper 1034, Berlin.

[9] Kovacik, O., Rakosnik, J., (1991). On spaces $L^{p(x)}$ L and $W^{k,p(x)}$. "Czech Math. J.," vol 41(4): 592-618.

[10] Queens college, Bernoulli Inequality, http://www.qc.edu.hk/math/Resource/AL/Bernoulli%20inequality.pdf, 16 Mart 2017.

[11] http://www.oyakcimento.com/i/assets/documents/Analiz-Cebir.pdf, 16 Mart 2017.

[12] Cvetkovski, Z., (2010). Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems, 1st edition, Springer, New York.

[13] Young, W. H. (1912), "On classes of summable functions and their Fourier series", Proceedings of the Royal Society A, 87 (594): 225–229.

[14] Niculescu, C.P., ve Pecaric, J., (2006). "The equivalence of Chebyshev's inequality to the Hermite-Hadamard inequality", Math. Reports 12(62): 145-156.

[15] Dragomir S.S. and Pearce C.E.M. (2000). Selected Topic in Hermite–Hadamard Inequalities, Monographs: http://rgmia.vu.edu.au/monographs/hermitehadamard.html, Victoria University.

[16] Pecaric, J., Proschan, F., ve Tong, Y.L., (1991). Convex functions, partial ordering and statistical applications. *Academic Press*, New York.

[17] Jensen, J. L. W. V. (1906). "Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes". Acta Mathematica. 30 (1): 175–193.

[18] Steele, J.M., (2004). The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities, 1st edition, Cambridge University Press, New York.

[19] Kadelburg, Z., Dukic, D., Lukic, M.,ve Matic, I., (2005). "Inequalities of Karamata,

Schur and Muirhead, and some applications", The teaching of mathematics 2005, 8(1): 31–45.

[20] Blaschke, W., (1950). Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer Verlag, Berlin.

[21] Isoperimetric Inequality, https://en.wikipedia.org/wiki/Isoperimetric_inequality, 16 Mart 2017.

[22] Schneider, R., (1993). Convex Bodes: The Brunn-Minkowski Theory. Cambridge

University Press, New York.

[23] Mamedov, F.I., ve Zeren, Y., (2012) "On Equivalent Conditions for the General Weighted Hardy Type Inequality in Space $L^{p(.)}$", Journal for Analysis and its Applications, 31: 55-74.

[24] Hardy ve Littlewood İnequality, https://en.wikipedia.org/wiki/Hardy%E2%80%93Littlewood_inequality, 16 Mart 2017.

[25] Riesz inequality, https://en.wikipedia.org/wiki/Riesz_rearrangement_inequality, 16 Mart 2017.

[26] Treibergs, A., (2002). Inequalities that Imply the Isoperimetric Inequality, University of Utah.