T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TAŞIT TİTREŞİMLERİNİN DURUM VE ÇIKIŞ TÜREVİ GERİ BESLEMESİ İLE DOĞRUSAL PARAMETRE DEĞİŞİMLİ DAYANIKLI KONTROLÜ

MERT SEVER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MAKİNE TEORİSİ VE KONTROL PROGRAMI

DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. HAKAN YAZICI

İSTANBUL, 2017

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TAŞIT TİTREŞİMLERİNİN DURUM VE ÇIKIŞ TÜREVİ GERİ BESLEMESİ İLE DOĞRUSAL PARAMETRE DEĞİŞİMLİ DAYANIKLI KONTROLÜ

Mert SEVER tarafından hazırlanan tez çalışması 07.06.2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Hakan YAZICI

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Yrd. Doç. Dr. Hakan YAZICI

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Rahmi GÜÇLÜ

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Yrd. Doç. Dr. Halil İbrahim BAŞTÜRK

Boğaziçi Üniversitesi _____

ÖNSÖZ

Daha lisans seviyesindeyken beni dayanıklı ve optimal kontrol ile tanıştıran, bilgi birkimini açık yüreklilikle paylaşarak daima önümü açan ve hep en ileriye gitmemi isteyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Hakan Yazıcı' ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Doğrusal matris eşitsizlikleri ile kontrolü çok daha iyi anlamamı sağlayan lisansüstü seviyesinde mükemmel dersler verdiği için, Sayın Prof. Dr. İbrahim Beklan Küçükdemiral' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca yanımda olan, bana hep inanarak sonsuz bir özgüven aşılayan sevgilim ve eşim Gülay Göktaş' a sahip olduğum için kendimi çok şanslı hissediyorum ve ona sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Tüm yüksek lisans hayatım boyunca yanımda olan çalışma arkadaşım, dert ortağım Arş. Gör. Mehmet İşcan' a, lisans döneminden beri yanımda olan ve yüksek lisans eğitimi boyunca benzer yollarda yürüdüğüm arkadaşlarım Ayhan Aktaş ve Ezgi Özülkü' ye, yaratıcı tasarımları ve emeğiyle çalışmalarımıza katkı sunan Enes Adanır' a sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Haziran, 2017

Mert SEVER

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ viii

KISALTMA LİSTESİ x

ŞEKİL LİSTESİ xi

ÇİZELGE LİSTESİ xii

ÖZET xiii

ABSTRACT xv

BÖLÜM 1

GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 5
1.2 Tezin Amacı 11
1.3 Orijinal Katkı 11

BÖLÜM 2

DOĞRUSAL MATRİS EŞİTSİZLİKLERİ YAKLAŞIMI İLE LQ OPTİMAL DURUM VE ÇIKIŞ TÜREVİ GERİ BESLEMELİ KONTROL PROBLEMİ 12

2.1 Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli LQ Optimal Kontrolörlerin Tasarımı…… 13
2.2 Doğrusal Matris Eşitsizlikleri ve Cebirsel Riccati Eşitliği Tabanlı Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli LQ Optimal Kontrolör Tasarımlarının Sayısal Benzetim Çalışmaları ile Karşılaştırılması 18
2.3 Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli Dayanıklı LQ Optimal Kontrolörlerin Tasarımı 21
2.4 Doğrusal Matris Eşitsizlikleri Tabanlı Daynaıklı Kontrolörlerin ve Cebirsel Riccati Eşitliği Tabanlı Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli Kontrolörlerin Sayısal Benzetim Çalışmaları ile Karşılaştırılması 26
2.5 Parametre Bağımlı Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli LQ Optimal Kontrolörlerin Tasarımı 29

2.6 Doğrusal Matris Eşitsizlikleri Tabanlı Parametre Bağımlı Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli LQ Optimal Kontrolör Tasarımlarının Cebirsel Riccati Eşitliği Tabanlı Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli Kontrolörler ile Karşılaştırılması 35

BÖLÜM 3

DOĞRUSAL MATRİS EŞİTSİZLİKLERİ YAKLAŞIMI İLE L_2 KAZANÇLI DURUM VE ÇIKIŞ TÜREVİ GERİ BESLEMELİ KONTROL PROBLEMİ 40

3.1 Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli L_2 Kazançlı Kontrolörlerin Tasarımı 40
3.2 Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli L_2 Kazançlı Dayanıklı Kontrolörlerin Tasarımı 47
3.3 Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli L_2 Kazançlı Parametre Bağımlı Kontrolörlerin Tasarımı 55

BÖLÜM 4

TAŞIT SÜSPANSİYON SİSTEMLERİNİN MODELLENMESİ 65

4.1 Çeyrek Taşıt Süspansiyon Modeli 66
4.2 Elektro Hidrolik Eyleyicili Çeyrek Taşıt Süspansiyon Modeli 68
4.3 Sürücü Modeli Entegre Çeyrek Taşıt Süspansiyon Modeli 69
4.4 Belirsiz Parametreler İçeren Süspansiyonların Politopik Belirsiz Doğrusal Zamanla Değişen Sistem Formunda Modellenmesi 73
4.5 Değişken Taşıt Yükü İçin Süspansyionların Doğrusal Parametre Değişimi ile Modellenmesi 76
4.6 Yol Bozucularının Modellenmesi 77
4.6.1 Tümsek Tipi Yol Bozucuları 77
4.6.2 ISO2631 Rastlantısal Yol Pürüzlülüğü 77

BÖLÜM 5

SAYISAL BENZETİM ÇALIŞMALARI 79

5.1 Taşıt Titreşimlerinin LQ Optimal Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemesi ile Aktif Kontrolü 80
5.2 Taşıt Titreşimlerinin L_2 Kazançlı Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemesi ile Aktif Kontrolü 82
5.2.1 Elektro Hidrolik Eyleyicili Çeyret Taşıt Süspansiyon Modeli için Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli L_2 Kazançlı Kontrolör Yanıtlarının İncelenmesi 82
5.2.2 Sürücü Modeli Entegre Elektro Hidrolik Eyleyicili Çeyret Taşıt Süspansiyon Modeli için Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli L_2 Kazançlı Kontrolör Yanıtlarının İncelenmesi 83
5.3 Taşıt Titreşimlerinin Aktif Kontrolünde Durum Türevi Geri Beslemeli ve Gözleyici Tabanlı Durum Geri Beslemeli Yaklaşımların Karşılaştırılması 86
5.4 Taşıt Titreşimlerinin Durum Türevi Geri Beslemeli L_2 Kazançlı Dayanıklı Kontrolör ile Aktif Kontrolü 89

5.5 Taşıt Titreşimlerinin Durum Türevi Geri Beslemeli LQ Optimal Parametre Bağımlı Kontrolör ile Aktif Kontrolü 91
5.6 Taşıt Titreşimlerinin Durum Türevi Geri Beslemeli L_2 Kazançlı Parametre Bağımlı Kontrolör ile Aktif Kontrolü 93

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER 95

KAYNAKLAR 97

ÖZGEÇMİŞ 103

SİMGE LİSTESİ

$\mathbf{A}$	Sistem matrisi
A_p	Piston alanı
$\mathbf{B_1}$	Bozucu girişi matrisi
$\mathbf{B_2}$	Kontrol girişi matrisi
$\mathbf{C}$	Kontrol edilmek istenen çıkışlar matrisi
C_{tp}	Toplam piston sızma katsayısı
$\mathbf{C_y}$	Ölçülebilen çıkışlar matrisi
$\mathbf{C_z}$	Minimize edilmek istenen değişkenler matrisi
c_c	Koltuk minderinin sönüm katsayısı
c_s	Süspansiyon elemanının sönüm katsayısı
c_{ss}	Koltuk ile taşıt gövdesi arasındaki süspansiyon elemanının sönüm katsayısı
$\mathbf{D_{1,2}}$	Kontrol edilmek istenen çıkışlar vektörü matrisleri
F_a	Aktif kontrol kuvveti
$\mathbf{I}$	Birim matris
$\mathbf{K}$	Kontrolör kazanç matrisi
k_c	Koltuk minderinin yay katsayısı
k_s	Süspansiyon elemanın yay katsayısı
k_{ss}	Koltuk ile taşıt gövdesi arasındaki süspansiyon elemanının yay katsayısı
k_t	Lastiğin esnekliğini gösteren rijitlik katsayısı
ℓ	Tümsek veya yol segmenti uzunluğu
m_b	Sürücü gövdesinin kütlesi
m_f	Koltuk düzlemi kütlesi
m_s	Taşıt gövdesinin kütlesi/asılı kütle
m_u	teker/aks kütlesi
P	Matrisler politopu
$P_L(t)$	Silindir içerisindeki yük basıncı
$\mathbf{Q}$	Performans ağırlıklandırma matrisi
$Q_L(t)$	Silindir içine giren akışkan debisi

$\mathbf{R}$	Performans ağırlıklandırma matrisi
$\Re^n$	Elemanları reel sayı olan n boyutlu vektörler uzayı
$\Re^{n\times m}$	Elemanları reel sayı olan $n\times m$ boyutlu matrisler kümesi
$\boldsymbol{u}(t)$	Kontrol girişi vektörü
V	Taşıt seyir hızı
$V(t)$	Lyapunov fonksiyonu
V_t	Toplam silindir içi hacim
$\boldsymbol{x}(t)$	Durum vektörü
$\boldsymbol{y}(t)$	Ölçülebilen çıkışlar vektörü
$\boldsymbol{w}(t)$	Bozucu giriş vektörü
$\boldsymbol{z}(t)$	Minimize edilmek istenen ve kontrol edilmek istenen çıkışlar vektörü
$\boldsymbol{z_b}(t)$	Sürücü gövdesi yer değiştirmesi
$\boldsymbol{z_f}(t)$	Koltuk düzlemi yer değiştirmesi
$\boldsymbol{z_s}(t)$	Taşıt gövdesi/asılı kütle yer değiştirmesi
$\boldsymbol{z_u}(t)$	Teker/aks yer değiştirmesi
$\boldsymbol{z_r}(t)$	Yol profiline ait yer değiştirme değişkeni
$\boldsymbol{\alpha}(t)$	Politopik koordinatlar
β_e	Hidrolik yağa ait etkin esneklik modülü
γ	L_2 kazancı
$\boldsymbol{\theta}(t)$	Anlık değeri veya alt/üst sınırları bilinen parametreler vektörü

KISALTMA LİSTESİ

CRE	Cebirsel Riccati Eşitliği
ÇT	Çeyrek Taşıt Süspansiyon
ÇTGB	Çıkış Türevi Geri Beslemeli
DME	Doğrusal Matris Eşitsizlikleri
DRGB	Durum Türevi Geri Beslemeli
DPD	Doğrusal Parametre Değişimli
DTGB	Durum Türevi Geri Beslemeli
DZD	Doğrusal Zamanla Değişmeyen
EHÇT	Elektro Hidrolik Çeyrek Taşıt Süspansiyon
LQ	Doğrusal Karesel (Linear Quadratic)
PBDZD	Politopik Belirsiz Doğrusal Zamanla Değişen
SEÇT	Sürücü Modeli Entegre Çeyrek Taşıt Süspansiyon
SEHÇT	Sürücü Modeli Entegre Elektro Hidrolik Çeyrek Taşıt Süspansiyon

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2. 1 Titreşim soğurucu sistem fiziksel modeli [45] 19
Şekil 2. 2 DME ve CRE tabanlı DTGB kontrolörler için titreşim soğurucu sistem yanıtları 20
Şekil 2. 3 DME ve CRE tabanlı ÇTGB kontrolörler için titreşim soğurucu sistem yanıtları 21
Şekil 2. 4 DME tabanlı dayanıklı DTGB ve CRE tabanlı DTGB kontrolörler için titreşim soğurucu sistem yanıtları 27
Şekil 2. 5 DME tabanlı dayanıklı ÇTGB ve CRE tabanlı ÇTGB kontrolörler için titreşim soğurucu sistem yanıtları 28
Şekil 2. 6 DME tabanlı dayanıklı DTGB ve CRE tabanlı DTGB kontrolörler için titreşim soğurucu sistem yanıtları 38
Şekil 2. 7 DME tabanlı dayanıklı ÇTGB ve CRE tabanlı ÇTGB kontrolörler için titreşim soğurucu sistem yanıtları 38
Şekil 4. 1 Fiziksel ÇT Modeli 67
Şekil 4. 2 Fiziksel SEÇT modeli 70
Şekil 5. 1 DTGB ve ÇTGB LQ optimal kontrolörler yanıtlarının tepe değerlernin seyir hızına bağlı değişimi. 81
Şekil 5. 2 Pasif, DTGB ve ÇTGB LQ optimal kontrol durumları için frekans yanıtları. 81
Şekil 5. 3 DTGB L_2 kazançlı kontrolör yanıtlarının tepe değerlernin seyir hızına bağlı değişimi. 83
Şekil 5. 4 DTGB ve ÇTGB L_2 kazançlı kontrolörler yanıtlarının tepe değerlernin seyir hızına bağlı değişimi. 85
Şekil 5. 5 Pasif, DTGB ve ÇTGB L_2 kazançlı kontrolörler çin frekans yanıtları. 86
Şekil 5. 6 DTGB ve GTDGB L_2 kazançlı kontrolörler yanıtlarının taşıt parametrelerine bağlı değişimi. 88
Şekil 5. 7 DTGB ve DDTGB L_2 kazançlı kontrolörler yanıtlarının tepe değerlernin taşıt parametrelerine bağlı değişimi. 90
Şekil 5. 8 Pasif, DTGB ve DDTGB L_2 kazançlı kontrol durumları için frekans yanıtları. 91
Şekil 5. 9 DTGB ve ÇTGB LQ optimal kontrolör yanıtlarının tepe değerlerinin asılı kütleye bağlı değişimi. 92
Şekil 5. 10 DTGB ve ÇTGB L_2 kazançlı kontrolörler yanıtlarının tepe değerlerinin asılı kütleye bağlı değişimi. 94

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 4. 1 Çeyrek taşıt süspansiyon modeli parametreleri 68
Çizelge 4. 2 Elektro hidrolik eyleyici modeli parametreleri 69
Çizelge 4. 3 Sürücü modeli entegre çeyrek taşıt süspansiyon modeli parametreleri 73
Çizelge 4. 4 Parametre belirsizliği durumunda kullanılan ÇT modeli parametreleri 76

ÖZET

TAŞIT TİTREŞİMLERİNİN DURUM VE ÇIKIŞ TÜREVİ GERİ BESLEMESİ İLE DOĞRUSAL PARAMETRE DEĞİŞİMLİ DAYANIKLI KONTROLÜ

Mert SEVER

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Hakan YAZICI

Taşıt süspansiyon sistemlerinin tasarımı sürüş konforu ve güvenliği arasında kaçınılmaz bir ödünleşme içermektedir. Sürüş konforunun iyileştirilmesi için taşıt gövdesi ve sürücü yol kaynaklı titreşimlerden izole edilmelidir. Yol ile lastik arasındaki temasın kaybı ve mekanik hasardan korunmak için lastik ve süspansiyon sıkışması izin verilebilir limitlerde tutulmalıdır. Sonuç olarak, süspansiyon tasarım problemi, sürüş güvenliği limitlerine ulaşmadan yol kaynaklı titreşimlerin konfor üzerindeki etkisini minimize etmek olarak tanımlanmaktadır. Söz konusu problemin çözümünde optimal ve dayanıklı kontrol teknikleri son derece etkin bir şekilde kullanılabilmektedir. Son 25 yılda, Doğrusal Matris Eşitsizlikleri (DME) tabanlı yaklaşım optimal ve dayanıklı kontrolör tasarımında önemli bir rol oynamaktadır. Literatürdeki çalışmalar, DME tabanlı yaklaşımlar ile aktif süspansiyon tasarımına son derece umut vaat eden çözümler getirebildiğini göstermiştir.

DME tabanlı aktif süspasnyion uygulamalarında yoğunlukla durum geri beslemeli ve tam mertebeli dinamik çıkış geri beslemeli kontrol kanunları kulaılmaktadır. Durum geri beslemeli kontrol kanunları konum ve hız sinyallerinin ölçüme elverişli olduğu kabulü ile tasarlanmaktadır. Pratikte ise ivmeölçerler en yoğun kullanılan sensörlerdir ve konum sinyallerinin hassas bir şekilde elde edilmesi pek mümkün olmamaktadır. Tam mertebeli dinamik çıkış geri beslemeli kontrolörler kullanıldığında ise kapalı çevrim sistem mertebesi iki kat artmaktadır. Dahası, tam mertebeli kontrolörler gömülü

sistemlerde karmaşık bir gerçeklenme sürecine sahip oldukları için uygulamada tercih edilmezler.

Durum Türevi Geri Beslemeli (DTGB) ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli (ÇTGB) kontrol kanunları ise özellikle son onbeş yıldır araştırmacıların yoğun ilgisini çekmektedir. Yukarıda bahsi geçen unsurlar düşünüldüğünde DTGB ve ÇTGB kontrolörlerin umut vaat eden özelliklerini sıralayabiliriz. İlk olarak, konum ve hız sinyallerine kıyasla ölçüme daha elverişli olan hız ve ivme sinyallerinin geri beslenmesi gerekmektedir. İkinci olarak, söz konusu kontrol kanunları sıfırıncı mertebeden statik yapıda oldukları için kapalı çevrim mertebesinde artış görülmemektedir.

Bugüne kadar durum ve çıkış türevi geri beslemeli kontrol kanunları ile geleneksel kutup yerleştirme, Cebirsel Riccati Eşitlikleri (CRE) tabanlı LQ optimal kontrol, DME tabanlı dayanıklı kutup yerleştirme gibi problemler ele alınmıştır.

Bu yüksek lisans tezinde ise DME tabanlı LQ optimal kontrol ve L_2 kazançlı bozucu bastırma problemlerini DME tabanlı dış bükey optimizasyon yaklaşımı ile DTBG ve ÇTGB kontrol kanunlarının tasarımı için dayanıklı ve parametre bağımlı tasarımlar sunulmuştur. Önerilen yöntemler ile aktif süspansiyon sistemlerine son derece etkin ve uygulanabilirliği yüksek çözümler getirildiği yapılan sayısal benzetim çalışmalar ile ortaya konmuştur.

Anahtar Kelimeler: Durum türevi geri beslemeli kontrol, çıkış türevi geri beslemeli kontrol, doğrusal matris eşitsizlikleri, aktif süspansiyon sistemleri, LQ optimal kontrol, L_2 kazançlı kontrol

ABSTRACT

ROBUST LINEAR PARAMETER VARYING CONTROL OF VEHICLE VIBRATIONS WITH STATE AND OUTPUT DERIVATIVE FEEDBACK

Mert SEVER

Department of Mechanical Engineering

MSc. Thesis

Adviser: Asst. Prof. Dr. Hakan YAZICI

Design of vehicle suspension systems impose a great trade-off between ride comfort and safety. In order to improve ride comfort, vehicle chassis and driver must be isolated from road induced vibrations. Tire deflection and suspension deflection are required to be kept within maximum allowable limits to prevent interrupted contact of wheels and road damage. The active suspension problem can then be considered as minimizing the effect of road induced vibrations on the ride comfort without reaching the safety limits. Optimal and robust control approaches can be efficiently used to solve the active suspension problem. In the last 25 years, Linear Matrix Inequalities (LMIs) based approach plays a major role on the design of optimal and robust controllers. In the literature, it has been shown that LMI based controller designs provide quite promising solutions for active suspension design.

State feedback and full order dynamic output feedback are mostly used control laws in LMI based active suspension applications. State feedback control laws are designed under the assumption of displacement and velocity signals are availeable for measurement. In practice, accelerometers are most common sensors and the displacement signals are not possible to obtain accurately. The closed loop system order is increased twofold when the full order dynamic output feedback controllers are employed. Moreover, full order controllers are not adequate for practical implementation due to the complex realization in the embedded systems.

In the last 15 years, State Derivative Feedback (SDF) and Output Derivative Feedback (ODF) controllers have been considered by many researchers. In the light of aforementioned consdierations, the SDF and ODF controllers appear as quite promising approach in the following aspects. Firstly, velocity and acceleration signals which are more available than dispalcment and velocity signals, need to be measured. Secondly, closed loop system order has not been increased, since they are static memoryless controllers with no additional dynamics.

Conventional pole assignment, Algebraic Riccati Equations (ARE) based LQ optimal control and LMI based robust pole placement problems have been studied by researchers with SDF and ODF control framework.

In this stuy, LMI based design of LQ optimal and L_2 gain robust, parameter dependent controllers are presneted as a convex optimiazation problem. Effectivenss of the proposed methods on the active suspension problems has been demonstrated with numerical simulation studies.

Keywords: State derivative feedback, output derivative feedback, lienar matrix inequalities, active suspension systems, LQ optimal control, L_2 gain control

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Süspansiyon sistemleri sürüş konforu ve güvenliği gibi kritik performans gereksinimlerini karşılamak için tasarlanmaktadır [1]. Taşıt gövdesi ve sürücüye iletilen yol bozucusu kaynaklı dikey titreşimlerin azaltılması sürüş konforu ihtiyacını tanımlamaktadır. Sürüş konforu özellikle taşıt gövdesi ve sürücüye iletilen dikey ivme değerleri ile değerlendirilmektedir. Söz konusu dikey ivme değerlerinin azaltılması iyileştirilmiş sürüş konforu anlamına gelmektedir [2].

Sürüş esnasında lastik ile yol arasındaki temas kaybının önlenmesi ve süspansiyon çarpmasından kaçınarak konforsuzluk veya mekanik hasar riskinin azaltılması ise sürüş güvenliği ihtiyaçlarını tanımlamaktadır. Sürüş güvenliği özellikle lastikteki dinamik yük ile statik yük arasındaki ilişki ve mekanik süspansiyon sıkışma limitleri ile değerlendirilmektedir. Lastik statik yük değeri lastik üzerine gelen taşıt ağırlığından oluşmaktadır. Lastikteki dinamik yük ise lastik rijitlik katsayısı ve lastik sıkışmasının bir fonksiyonudur. Eğer yüksek lastik sıkışması durumu sonucunda lastik dinamik yük değerleri lastik üzerindeki statik yük değerlerinin üzerine çıkarsa lastik zıplaması olur. Lastik zıplaması sonucu yol ile lastik arasındaki temasın kaybolması yol tutuş kaybına sebebiyet vermektedir [3]. Süspansiyon sisteminin taşıt gövdesi ve teker/aks kütlesi arasına yerleştirildiğini göz önünde bulunduracak olursak geometrik olarak kısıtlı bir çalışma alanına sahiptir. Bu sebeple, süspansiyon sıkışması eğer mekanik süspasnyion sıkışma limit değerlerine ulaşırsa süspansiyon çarpması problemi ortaya çıkar. Süspansiyon çarpması hem anlık konforsuzluğa hem de mekanik hasara sebebiyet verebilmektedir. Özellikle mekanik hasar durumu tehlikeli kazalarla sonuçlanabilecek bir etkiye sahiptir.

Pasif süspansiyon sistemleri taşıt gövdesi ile teker/aks kütlesi arasına yerleştirilmiş yay ve sönüm elemanı çiftinden oluşmaktadır. Süspansiyon sistemi tasarımcısı için ilgili sönüm ve yay katsayılarının tercihi büyük bir tasarım problemi oluşturmaktadır. Yüksek sönümlü sert bir süspansiyon tasarımı ile iyi bir yol tutuşu ve düşük süspansiyon sıkışması değerleri sonucunda iyi bir sürüş güvenliği elde edilmektedir fakat taşıt gövdesi ve sürücüye iletilen titreşimlerin yalıtımı düşük bir seviyede kaldığı için sürüş konforu olumsuz etkilenmektedir. Az sönümlü yumuşak bir süspansiyon tasarımı ise gelişmiş bir süürş konforu sağlarken yol tutuş kaybı ve süspansiyon çarpması riski daha yüksek olan sürüş güvenliği adına tatmin edici olmayan bir süspansiyon sistemi elde edilmektedir. Özetle süspansiyon tasarımında, sürüş konforunun iyileştirilmesi daha az sönümlü bir lastik modu ve daha düşük sürüş güvenliği anlamına gelen büyük bir ödünleşme sunmaktadır [4]. Sonuç olarak süspansiyon sistemi tasarımı; sürüş güvenliği için lastik sıkışması ve süspansiyon sıkışması limitlerini aşmadan sürüş konforunun mümkün olan en üst seviyede iyileştirilmesi problemi olarak tanımlanabilir. Söz konusu tasarım problemindeki ödünleşmenin üzerinden gelinmesi için sadece pasif yay ve sönüm elemanlarından oluşan pasif süspansiyon sistemleri yerine yarı aktif ve aktif süspansiyon sistemleri üzerine yoğun araştırmalar yürütülmektedir.

Aktif ve yarı aktif süspansiyon sistemlerini kıyaslandığında; yarı aktif süspansiyon sistemleri aktif olanlara kıyasla daha az güç tüketimine sahip olsa da aktif olanların daha yüksek sürüş konforu ve güvenliği sağladığı açıkça ortaya konmuştur. Hatta bir optimal kontrol algoritması ile tasarlanan aktif süspansiyon sistemi ile aynı algoritmanın kullanıldığı bir yarı aktif süspansiyon sistemi performansları karşılaştırıldığında yarı aktif olan 20% daha düşük sürüş konforuna sahip olmaktadır [5]. Bu bilgiler ışığında aktif süspansiyon sistemlerinin geliştirilmesi üzerine araştırmacılar tarafından yoğun bir ilgi gösterildiği bilinmektedir [6]. Aktif süspansiyon sistemlerinin performansını belirleyen esas faktör kullanılan kontrol algoritmalarının etkinliği olarak karşımıza çıkmaktadır. Literatürde aktif süspansiyon sistemleri için kontrol algoritmalarının geliştirilmesi ve uygulanması üzerine çok sayıda çalışma yürütülmektedir. Bunlardan başlıcaları olarak LQ optimal kontrol [7], bulanık mantık kontrol [8]-[10], doğrusal olmayan uyarlamalı kontrol [11] olarak sırlanabilir.

Kontrol teorisinde son 25 yılda yaşanan gelişmeler sounucunda Doğrusal Matris Eşitsizlikleri (DME) tabanlı kontrolör tasarımı büyük ilgi çekmektedir. Sinyal genlik ve enerjileri üzerinde kısıtlar, giriş ve durum sinyallerindeki gecikmeler, doyumlu eyleyiciler ve sistem parametrelerindeki belirsizlikler/değişimler gibi çok çeşitli unsurlar DME tabanlı teknikler sayesinde dış bükey optimizasyon problemi olarak ifade edilebilmektedir. Bu gelişmeler ışığında DME tabanlı kontrol algoritmaları, aktif süspansiyon sistemleri tasarımı için güçlü bir aday olarak karşımıza çıkmaktadır.

Literatür incelendiğinde DME tabanlı aktif süspansiyon çalışmalarında ağırlıklı olarak durum geri beslemeli ve dinamik çıkış geri beslemeli yaklaşımların söz konusu olduğu görülmektedir. Durum geri beslemeli kontrol kanunları düşünüldüğünde geri besleme sinyalleri konum ve hız değişkenlerinden oluşmaktadır. Taşıt içerisinde konum ölçümü için gerekli sabit referans noktalar bulunmamaktadır ve dolaylı yoldan konum ölçen sensörler son derece pahalıdır. İvmeölçerler ise basit yapıları ve düşük fiyaları dolyasıyla aktif süspansiyon sistemleri gibi titreşim kontrolü uygulamaları özelinde son derece yaygın olarak kullanılmaktadır [12]. Dinamik çıkış geri beslemeli kontrolörler geri besleme sinyali olarak sadece ölçümü mümkün sinyalleri kullanırlar. Fakat, tasarlanan kontrolörün mertebesi sistemin mertebesi ve performans ağırlıklandırma filtreleri mertebelerinin toplamına eşit olmaktadır. Böyle yüksek mertebeli kontrolörlerin gömülü sistemlerde gerçeklenmesinin zorluğu genel olarak bilinmektedir.

Durum Türevi Geri Beslemeli (DTGB) ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli (ÇTGB) kontrolörler ise ivmeölçerler aracılığı ile kolayca elde edilebilen ivme ve hız sinyallerini geri besleyen sıfırıncı mertebeden statik kontrolörlerdir. LQ optimal ve L_2 kazançlı DTGB ve ÇTGB kontrolörlerin DME tabanlı tasarımı aktif süspansiyon sistemlerine uygulanması üzerine herhangi bir çalışmaya literatürde rastlanmamıştır. Bu durum bizi parametre belirsizliklerine karşı dayanıklı, parametre bağımlı kontrol kazançları ile parametre değişimlerine karşı uyum sağlayabilen LQ optimal ve L_2 kazançlı DTGB, ÇTGB kontrolörlerin DME tabanlı tasarımlarını gerçekleştirmek ve aktif süspansiyon sistemleri üzerinde uygulamak üzere motive etmiştir.

Yüksek lisans tezi 6 bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümü, literatür özeti, tezin amacı ve orjinal katkısı kısımlarını içermektedir. Öncelikle taşıt titreşimlerinin kontrolü için aktif süspansiyon tasarımında DME tabanlı tekniklerin önemi ve konu üzerinde bugüne kadar yapılan çalışmalar incelenmiştir. Mevcut yaklaşımlardaki kontrol kanunlarının yapısal olarak incelenmesi sonucu uygulamadaki kolaylık, geri beslenen sinyallerin ölçüme elverişliliği göz önünde bulundurularak yüksek lisans tezinde sunulan durum ve çıkış türevi geri beslemeli kontrol kanunlarının literatüre yapmış olduğu katkı gösterilmiştir. Daha sonra durum ve çıkış türevi geri beslemeli kontrolör tasarımı üzerine bir literatür araştırması verilerek bugüne kadar yürütülen çalışmalar anlatılmıştır. Ardından DME tabanlı yaklaşımların çeşitli performans ihtiyaçlarını karşılamadaki üstünlüğü ile; durum ve çıkış türevi geri beslemeli kontrol kanunlarının yapısal olarak uygulamadaki avantajları üzerinden tezin motivasyon amacı ve orijinal katkısı ortaya konmuştur.

Bölüm 2 kapsamında durum ve çıkış türevi geri beslemeli LQ optimal kontrolör tasarımı problemi öncelikle Doğrusal Zamanla Değişmeyen (DZD) sistemler için ele alınmıştır. Tasarım problemi dış bükey optimizasyon problemi olarak DME yaklaşımı ile sentezlenmiş ve literatürde mevcut olan CRE tabanlı tasarımlar ile performans kıyaslaması için sayısal benzetim çalışmaları yürütülmüştür. Bölümün devamında Politopik Belirsiz Doğrusal Zamanla Değişen (PBDZD) ve Doğrusal Parametre Değişimli (DPD) sistemler için dayanıklı ve parametre bağımlı kontrol kanunları geliştirilerek parametre belirsizliği/değişimi durumlarında görülen performans kayıplarını azaltacak kontrolörler geliştirilmiştir. Yapılan benzetim çalışmaları sonucunda önerilen DME tabanlı durum ve çıkış türevi geri beslemeli kontrolörlerin CRE tabanlı olanlara göre daha üstün bir performans sergilediği açıkça gösterilmiştir.

Bölüm 3 ile durum ve çıkış türevi geri beslemeli L_2 kazançlı kontrolör tasarımı problemileri Doğrusal Zamanla Değişmeyen (DZD), Politopik Belirsiz Doğrusal Zamanla Değişen (PBDZD), Doğrusal Parametre Değişimli (DPD) sistemler için ayrı ayrı ele alınmaktadır. Nominal, dayanıklı ve parametre bağımlı kontrol kanunlarının dış bükey optimizasyon problemi olarak formülüze edilmiştir ve DME tabanlı çözümü için sentezler sunulmuştur.

Bölüm 4 içerisinde taşıt süspansiyon sistemleri ve sayısal benzetim çalışmalarında kullanılacak olan tümsek ve rastlantısal yol pürüzlülüğü tipi yol profilleri için matematiksel modeller sunulmuştur.

Yüksek lisans tezi ile sunulmuş olan DME tabanlı durum ve çıkış türevi geri beslemeli kontrolörlerin taşıt titreşimlerinin kontroldeki başarımını incelemek amacı ile aktif süspansiyon sistemlerinin çeşitli yol kaynaklı bozucular karşısındaki yanıtları Bölüm 5 ile incelenmiştir.

1.1 Literatür Özeti

Bu bölümde, aktif süspansiyon sistemlerinin DME tabanlı kontrol algoritmaları ile tasarımı ile yüksek lisans tezinde sunulan DTGB ve ÇTGB kontrolörlerin tasarımına yönelik detaylı bir literatür incelemesi sunulmuştur. Daha sonra, yüksek lisans tezinin literatüre katkısı ortaya konularak taşıt titreşimlerinin kontrolü için aktif süspansiyon sistemi tasarımına getirdiği yenilikler vurgulanmıştır.

Sürüş konforu ve güvenliğinin sağlanması için belirlenen bir performans ölçütünü minimum kılan veya yol kaynaklı bozucu etkilerin belirlenen çıkışlar üzerindeki etkilerini minimize eden kontrolörlerin hesaplanmasına dayanan LQ optimal ve L_2/H_2 dayanıklı kontrol yaklaşımları aktif süspansiyon sistemi tasarımında başarıyla kullanılmaktadır. İlk zamanlarda, söz konusu LQ optimal [7] ve L_2 dayanıklı [13] kontrolörler Cebirsel Riccati Eşitlikleri (CRE) tabanlı teknikler ile tasarlanmışlardır [7], [13]. Fakat, eyleyici doyumu, giriş ve durum değişkenlerinin kısıtlanması/ sınırlandırılması, giriş ve durum değişkenlerindeki zaman gecikmeleri, parametre belirsizliklerine karşı dayanıklılık, parametre bağımlı kontrolör tasarımı gibi performans ihtiyaçlarını aynı anda karşılayan kontrolörlerin tasarımı düşünüldüğünde Doğrusal Matris Eşitsizlikleri (DME) tabanlı teknikler CRE tabanlı olanalara göre tasarım kolaylığı ve daha az tutucu sonuçlar sağlaması ile öne çıkmaktadır. Gahinet ve Apkarian [14], öncesinde CRE tabanlı olarak formülize edilmiş olan bazı L_2 kazançlı kontrol problemleri için DME tabanlı sentezler gerçekleştirerk daha az tutucu sonuçlar elde edilebildiğini göstermiştir. Bu gelişmelerin ardından DME tabanlı kontrolör tasarımları aktif süspansiyon uygulamalarında kendine geniş bir yer bulmuştur. Abdellahi vd. [15] DME tabanlı karma L_2/H_2 kontrolör tasarımı ile CRE tabanlı geleneksel bir L_2 kontrolör

tasarımını bir aktif süspansiyon sistemi üzerinde karşılaştırmıştır. Frekans yanıtları incelendiğinde DME tabanlı karma tasarımın tüm frekans bölgesi için çok daha iyi ivme yanıtları sağladığı gösterilmiştir. Literatürde sıkça bahsedildiği üzere süspansiyon sıkışması, lastik sıkışması ve ivme yanıtları aynı anda minimize edilememektedir. Aslında süspansiyon ve lastik sıkışması minimize edilmesi gereken değişkenler değildir. Onların belli limitlerin altında tutulması sürüş güvenliği için yeterlidir ve ivmenin minimizasyonu ile sürüş konforu gelişmektedir. Bu sebeple, yol bozucusuna ait Ortalama Karekök (RMS) değeri ile lastik ve süspansiyon sıkışması yanıtları RMS değerleri arasında ayrı ayrı kazanç limitleri tanımlayıp sadece ivme yanıtlarının minimizasyonunu amaçlayan özgün bir kontrolör Chen ve Guo tarafından önerilmiştir [16]. Fialho ve Balas ise yol bozucuları düşük genlikte olduğunda süspansiyon sıkışmasına daha çok izin verip ivmenin bastırılmasına odaklanan, yol bozucuları yüksek genliklere ulaştığında ise ivmenin daha az bastırılması sonucu süspansiyon sıkışmasına daha az izin veren bir strateji geliştirmiştir. İlgili strateji DME tabanlı Doğrusal Parametre Değişimli (DPD) L_2 kazançlı kontrolör tasarımı ve geri adımlamalı kontrol tekniklerinin bir arada kullanılması ile uygulanmıştır [17]. Erişilebilir kümeler ve durum uzayı elipsoitleri Chen ve Guo tarafından sürüş güvenliği limitlerini garanti eden L_2 kazançlı kontrolör tasarımında kullanılmıştır [18]. Günümüzde gelişen malzeme ve otomotiv teknolojisi sayesinde daha hafif taşıtların üretilmesi kaçınılmazdır. Daha hafif araçlar sonucunda, yük ve yolcu adedindeki değişimler süspansiyon yanıtları üzerindeki etkisi arttığı için söz konusu değişimler aktif süspansiyon sistemi tasarımında dikkatle ele alınmalıdır. Lastik ve süspansiyon sıkışması limitleri ile taşıt yükündeki değişimleri aynı anda ele alabilen parametre bağımlı bir kontrolör Gao vd. [19] tarafından geliştirilmiştir. Leite ve Peres [20] parametre bağımlı bir kontrolör ile kapalı çevrim kökleri önceden belirlenen bölgelere hapseden kontrolör tasarımını ele almıştır. Soliman ve Bajabaa [21] değişken taşıt yüklerine karşı dayanıklı, kapalı çevrim köklerin DME bölgelerine yerleşimini garanti eden LQ optimal kontrol yapısını aktif süspansiyon problemine uygulamışlardır. Ardından dayanıklı LQ optimal kontrolör tasarımı, eyleyici doyumu problemini de sentez aşamasında garanti edecek şekilde genişletilmiştir [22]. Değişen yükler için parametre bağımlı kontrol ve süspansiyon sıkışması değerine göre sürüş konforu ve güvenliği arasındaki önceliği güncelleyen entegre bir yaklaşım Onat

vd. tarafından geliştirilmiştir [23]. Kontrol algoritmalarının gömülü sistemler ile uygulanması esnasındaki devreye alma hataları veya yazılımlardaki sonlu kelime uzunluğu unsurları sonucunda uygulanan kontrol kazançları ile tasarlananlar arasında farklılık oluşabilir. Söz konusu farklılık performans kaybı veya kararsızlığa sebebiyet verebiliyorsa buna narin kontrolör problemi denmektedir. Narin olmayan kontrolör tasarımı için kontrol kazancında belirsizlik yaklaşımı ile L_2 kazançlı kontrolör tasarımı Du vd. [24] tarafından gerçekleştirilmiştir. Sofistike kontrol kanunları ile yürütülen çevrimiçi hesaplamalar ve hesaplanan kontrol kuvvetlerinin hidrolik/pnömatik eyleyiciler tarafından karşılanması esnasında geçen süre giriş gecikmesi problemi olarak bilinmektedir ve bazı durumlarda düşük performansa ya da kararsızlığa sebep olabilmektedir. Giriş gecikmesine bağlı olarak L_2 kazançlı kontrolör tasarımı Du ve Zhang [25] tarafından ele alınmıştır. Lastik ve süspasniyon sıkışması limitlerini garanti eden kısıtlamalı kontrol yaklaşımı ile giriş gecikmesine bağlı kontrolör tasarımını bir arada ele alan sentez Du ve Zhang [26] tarafından literatüre kazandırılmıştır. Li vd. [27] giriş gecikmesine bağlı dinamik çıkış geri beslemeli kontrolör ile aktif süspansiyon problemini ele almışlardır. Şu ana kadar değinilen çalışmalarda performans ölçütünün tüm frekans bölgesi boyunca minimize edilmesi amaçlanmıştır. Halbuki, insanların konfor algısı belirli frekans aralıklarına karşı daha yüksek duyarlılığa sahiptir ve yol tutuş performansı lastik sıkışmasının düşük frekans bileşenlerinden daha çok etkilenmektedir. Bu sebeple yol bozucusundan ivme yanıtlarına olan L_2 kazancının sonlu bir frekans aralığında minimize edilmesini sağlayan kontrolör tasarımını aktif süspansiyon problemine Sun vd. tarafından uygulanmıştır [28]. Ardından Sun ve Zhao [29] sonlu frekans bölgesindeki performans minimizasyonu ile giriş gecikmesi problemine aynı anda ele alan kontrolör tasarımını sunmuştur. Süspansiyon sistemine etki eden yol kaynaklı bozucu etkilerin sisteme girmeden önce ölçülüp kontrolör tarafından kullanılması ile daha iyi bir performans elde edilebileceği düşüncesine dayanarak ön izlemeli aktif süspansiyon sistemleri tasarımı ayrı bir aktif süspansiyon kontrol yaklaşım olarak ortaya konmuştur. Bozucu etkinin durum vektörüne katılması ile taşıt seyir hızına göre kendini ayarlayan ön izlemeli kontrolör Li vd. tarafından sentezlenmiştir [30]. Bozucu gözleyicisi tabanlı bir ön izlemeli kontrolör tasarımı ise Sever ve Yazıcı tarafından sunulmuştur [31].

Yukarıda bahsedilen tüm örneklerde, aktif süspansiyon sistemi problemlerine durum geri beslemesi ve dinamik çıkış geri beslemesi yaklaşımları uygulanmıştır. Durum geri beslemeli kontrol kanunu sistemin hız ve konum bilgilerinin geri beslendiğini kabul etmektedir. Taşıt titreşimlerinin kontrolü için aktif süspansiyon sistemi tasarımında ise ivmeölçerlerin kullanılmasıyla hız sinyallerinin hesaplanabilse de, yer değiştirme sinyallerinin aynı hassasiyette elde edilemediği bilinmektedir [32]. Bu sebeple durum değişkenleri geri besleme için yeterince elverişli değildir. Dinamik çıkış geri beslemesi yaklaşımını kullanarak, tüm durum değişkenleri yerine sadece ölçülebilir sinyalleri geri besleyen aktif süspansiyon sistemleri tasarlanabilmektedir. Fakat dinamik çıkış geri beslemeli kontrolörler en az sistemin kendisine eşit mertebeye sahip oldukları için uygulamada zorluk çıkarabilen yüksek mertebeye sahiptirler. Durum türevi geri beslemeli kontrol ise ivme ve hız gibi daha kolay ölçülebilen sinyalleri kullanması ve dinamik çıkış geri beslemesinin aksine sıfırıncı mertebeden statik bir kontrol yapısı olması sebebi ile aktif süspansiyon sistemleri uygulamaları için büyük potansiyel taşımaktadır.

Son 15 yıl içerisinde çeşitli kontrol problemlerinin DTGB ile çözümü üzerine araştırmalar yürütülmektedir. Kwak vd. [12] evrik durum uzay formülasyonu sayesinde DTGB kontrolör ve durum türevi gözleyicisi tasarımını literatüre sunmuştur. Evrik durum uzay formülasyonu durum vektörü ile durum türevi vektörünün yer değiştirmesi ile elde edilen alternatif bir durum uzay gösterimidir ve DTGB, ÇTGB kontrolör sentezinde büyük kolaylık sağlamaktadır. Bozucu kestirimi ve bastırma problemi [33]-[35], kutup atama problemi [36]-[40], LQ optimal tasarım problemi [12,32] gibi çok çeşitli problemler durum vektörü yerine durum türevi vektörünün ölçümü kabulü altında daha yüksek uygulanabilirlik ile ele alınabilmektedir.

Doğrusal Zamanla Değişmeyen (DZD) ve doğrusal zamanla değişen tek giriş tek çıkışlı sistemler için kutup yerleştirme probleminin DTGB kontrolör ile çözümü Abdelaziz ve Valasek [36] tarafından elde edilmiştir. Çalışmalarındaki çözüm DZD sistemler özelinde durum geri beslemesi tasarımındaki Ackerman formülünün genelleştirilmiş hali olarak düşünülebilir. Ardından, Abdelaziz [37]-[40] kutup yerleştirme probleminin tekil ve tekil olmayan sistemler, parametre belirsizliği olan sistemler gibi farklı durumları için genişletilmiş çözümlerini sentezlemiştir. Cardim vd. [41] çalışmalarında DTGB ve

referans ileri beslemesi ile referans takibi için kutup yerelşetirme temelinde durum geri beslemesi ile benzer bir tasarım metodu sunmuştur. DZD sistemlerin çıkış vektörü durum türevi vektörüne eşit seçildiğinde kontrol edilebilirlik, gözlemlenebilirlik özellikleri ve bozucu etki karşısındaki yanıtları Moreira vd. [42] tarafından incelenmiştir. DTGB yaklaşımı ile kontrolör tasarım problemi kutup yerleştirme ile sınırlı kalmamıştır. 2000lerin başında DTGB ile LQ optimal kontrol probleminin çözümü Kwak vd. [12], [43], [44] tarafından önerilmiş ve piezo malzemeler ile ankastre kirişin aktif titreşim kontrolü ve uçak iniş takımı komponentlerinin aktif kontrolü gibi problemelere uygulanmıştır. Ardından Abdelaziz [35] tekil olmayan sistemler için DTGB ve ÇTGB LQ optimal kontrolör tasarımlarını CRE ile formülize etmiştir. Sonrasında söz konusu yöntem Abdelaziz [45] tarafından tekil sistemler için de genişletilmiştir. Assunçao vd. [46] DTGB kontrolör tasarımına DME tabanlı yaklaşımı ilk önerenler olmuştur. Çalışmalarında Lyapunov kararlılık koşulları ile politopik formdaki parametre belirsizlikleri karşısında kapalı çevrim köklerin istenen bir negatif değerin soluna yerleştirilmesini garanti eden kontrolör tasarımını dış bükey optimzasyon problemi olarak sunmuşlardır. Ayrıca kontrol sinyali genliklerini kısabilmek için kontrol kazancının tekil değerlerini üstten sınırlandıran bir yaklaşım da literatüre kazandırılmıştır. Faria vd. [47] politopik formdaki belirsiz sistemlerin kapalı çevrim köklerini DME bölglerine hapsedebilen kontrolör sentezini gerçekleştirmişlerdir. Ayrık zamanda çalışabilen dijital DTGB kontrolörlerin DME tabanlı tasarımı Cardim vd. [48] tarafından sunulmuştur. da Silva vd. [49] çalışmalarında parametre bağımlı Lyapunov fonksiyonları kullanmıştır. Kapalı çevrim köklerin belli bir negatif değerin solunda tutulması durumu özelinde söz konusu yaklaşım daha önce [46] ile verilmiş olan dayanıklı DTGB kontrolöre kıyasla daha az tutucu sonuçlar üretmektedir. Fakat kapalı çevrim köklerin reel kısımları üzerindeki kısıt kaldırıldığında sonuçlar daha az tutucu olmamaktadır. da Silva vd. [50] ekstra bir ayar parametresini DME kısıtlarına katarak her durumda sabit Lyapunov fonskyionlu sentezden [46] daha az tutucu sonuçlar elde etmiştir.

DTGB kontrol yaklaşımı ile aktif süspansiyon sistemi tasarımı ilk defa da Silva vd. [51] tarafından geliştirilen kontrolörün deneysel bir çeyrek taşıt süspansiyon sistemine uygulanması ile gerçekleştirilmiştir. Daha önce CRE yaklaşımları ile ele alınan DTGB LQ

optimal kontrol probleminin DME tabanlı çözümü ilk olarak Sever vd. [52] tarafından sunulmuştur ve etkinliği aktif süspansiyon sistemi tasarımı üzerinden gösterilmiştir. Sever ve Yazici [53], [54], kapalı çevrim sistemin bozucu girişlerinden kontrol edilmek istenen çıkışlarına L_2 kazancını minimize eden L_2 kazançlı DTGB kontrolör tasarımını DME yaklaşımı ile dış bükey optimizasyon problemi olarak formülize etmişlerdir. Kontrol sinyali genliklerini sınırlamak için [54] çalışmasında daha önce [46] ile sunulmuş olan kontrolör kazancı tekil değerlerinin sınırlanması yaklaşımından da yararlanmışlardır. Politopik parametre belirsizlikleri içeren sistemler için L_2 kazançlı DTGB kontrolör tasarımı ise Yazıcı ve Sever [55] tarafından geliştirilip, başarımı bir aktif süspansiyon sistemi uygulaması üzerinde incelenmiştir.

Yaplılan literatür araştırmasından da görüldüğü gibi taşıt titreşimlerinin kontrolü için aktif süspansiyon sistemi tasarımında DME tabanlı yaklaşımlar ile çok çeşitli ve önemli performans ihtiyaçları karşılanabilmektedir. Söz konusu DME tabanlı tasarımlar ağırlıklı olarak durum geri beslemesi ve dinamik çıkış geri beslemesi yapısındaki kontrol kanunu çözümlerine dayanmaktadır. Söz konusu yaklaşımlarda ölçüm problemi veya yüksek mertebeden kaynaklanan gömülü sistemlerde gerçeklenme zorluğu problemleri bulunmaktadır. Söz konusu problemleri aşmak için son yıllarda DTGB ve ÇTGB kontrol kanunlarının tasarımı üzerine yoğun çalışmalar yürütüldüğü görülmektedir. Bununla birlikte DTGB ve ÇTGB kontrol kanunlarının DME tabanlı tasarımı ve aktif süspansiyon tasarımı problemine uygulanması alanında büyük bir boşluk bulunmaktadır. Taşıt parametrelerindeki belirsizlik ve değişimelere karşı dayanıklı, kendini ayarlayabilen dayanıklı ve parametre bağımlı LQ optimal ve L_2 kazançlı DTGB, ÇTGB kontrol kanunlarının tasarımını ele alan ve aktif süspansiyon sistemleri üzerinde uygulayan bir çalışma bulunmamaktadır. Bu bilgiler ışığında bu yüksek lisans tezi ile, taşıt titreşimlerinin aktif süspansiyon sistemleri ile kontrolünde kolayca gerçeklenebilecek ve etkin bir performans sergileyebilecek LQ optimal ve L_2 kazançlı DTGB, ÇTGB kontrolörlerin DME tabanlı tasarımı ile literatürdeki boşluğu doldurmaya aday kontrolör sentezleri sunulmuştur.

1.2 Tezin Amacı

Kontrol teorisindeki ilerlemeler sayesinde son derece sofisitike performans ihtiyaçlarını karşılayabilen kontrol algoritmalarının tasarımı mümkün hale gelmiştir. Taşıt titreşimlerinin kontrolü için geliştirilen aktif süspansiyon sistemleri bunlar arasındadır ve ticari uygulamaları da giderek artmaktadır [56]-[58]. Literatürdeki çalışmalarda DME yaklaşımı ile son derece yüksek performanslı aktif süspansiyon sistemleri tasarlanabilir olsa da durum geri beslemesi ve dinamik çıkış geri beslemesi gibi uygulama da zorlukları olan kontrol kanunları üzerine yoğunlaşılmıştır. Bu yüksek lisans tezinin temel amacı ise pratikte uygulanması daha kolay olan ama DME tabanlı tasarımın getirdiği üstünlüklerden de vazgeçmeyen DTGB ve ÇTGB kontrol kanunları ortaya koymaktır.

1.3 Orijinal Katkı

Literatürde DTGB ve ÇTGB LQ optimal kontrolörlerin CRE tabanlı sentezleri mevcuttur fakat parametre belirsizliklerine karşı dayanıklı ve parametre değişimlerine göre kendini ayarlayabilen tasarımlara rastlanmamıştır. Söz konusu dayanıklı ve parametre bağımlı LQ optimal kontrolörler ilk kez bu yüksek lisans tezi kapsamında DME aracılığı ile dış bükey optimizasyon problemli olarak formülize edilmiştir.

Yapılan literatür taramasında kapalı çevrim sistemin bozucu girişlerinden kontrol edilmek istenen çıkışlarına olan L_2 kazancını minimize eden kontrolör tasarımı bulunmadığı tespit edilmiştir. Aktif süspansiyon sistemi problemi özelinde ise DME tabanlı L_2 kazançlı durum geri beslemeli ve dinamik çıkış geri beslemeli kontrol kanunları ile son derece etkin çözümler geliştirildiği görülmüştür. Bu sebeple, L_2 kazançlı DTGB ve ÇTGB kontrolörlerin DME tabanlı sentezi ilk kez bu yüksek lisans çalışmasında sunulmuştur.

Devamında, LQ optimal ve L_2 kazançlı kontrol kanunları ile taşıt titreşimlerinin kontrolü için aktif süspansiyon sistemi tasarımı tez çalışmaları kapsamında yapılmıştır.

Tez ile geliştirilmiş olan kontrol algoritmaları, durum türevi sinyallerinin ölçüme elverişli olduğu her türlü aktif titreşim kontrolü, bozucu bastırma uygulamasında başarı ile kullanabilir.

BÖLÜM 2

DOĞRUSAL MATRİS EŞİTSİZLİKLERİ YAKLAŞIMI İLE LQ OPTİMAL DURUM VE ÇIKIŞ TÜREVİ GERİ BESLEMELİ KONTROL PROBLEMİ

Bu bölümde, Doğrusal Zamanla Değişmeyen (DZD) sistemler, Politopik Belirsiz Doğrusal Zamanla Değişen (PBDZD) sistemler, Doğrusal Parametre Değişimli (DPD) sistemler için Durum Türevi Geri Beslemeli (DTGB) ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli (ÇTGB) kontrolörlerin tasarımına yönelik DME tabanlı sentezler geliştirilmesi amaçlanmıştır. ilgili kontrol kanunları

$$J = \int_0^\infty \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{Q}\,\boldsymbol{z}(t) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{R}\,\boldsymbol{u}(t)dt \tag{2.1}$$

ile verilen karesel formdaki performans ölçütünü minimize edecek şekilde seçilecek olursa, LQ optimal DTGB ve ÇTGB kontrol kanunları elde edilmiş olur. Burada, $\boldsymbol{z}(t) = \mathbf{C}_z\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ minimize edilmek istenen değişkenler vektörüdür.

İlk olarak Bölüm 2.1 içerisinde Doğrusal Zamanla Değişmeyen (DZD) sistemler için DTGB ve ÇTGB LQ optimal kontrolörlerin sentezi ele alınmıştır. Devamında Bölüm 2.2 kapsamında söz konusu DME tabanlı sentezler ile Abdelaziz [45] tarafından önerilmiş olan CRE tabanlı DTGB ve ÇTGB tasarımların kıyaslanması için sayısal benzetim çalışmaları yürütülmüştür. Ardından PBDZD sistemler için DTGB ve ÇTGB kontrolörlerin DME tabanlı sentezleri Bölüm 2.3 ile verilmiştir. Bölüm 2.4' te yapılan benzetim çalışmaları ile görülmüştür ki parametre belirsizlikleri dikkate alındığında önerilen DME tabanlı tasarımlar, Abdelaziz [45] tarafından önerilmiş olan CRE tabanlı tasarımlar karşısında çok daha yüksek performans sergilemektedir. DTGB ve ÇTGB LQ optimal

kontrolörlerin DPD sistemleri için tasarımı Bölüm 2.5 içerisinde sunulmuştur. Bölüm 2.6 ile sunulan sayısal benzetim çalışmaları parametre değişimleri söz konusu olduğunda parametre bağımlı yapının Abdelaziz [45] tarafından önerilmiş olan CRE tabanlı sabit kazançlı yapılar karşısında büyük bir üstünlük sergilediği ortaya konmuştur.

2.1 Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli LQ Optimal Kontrolörlerin Tasarımı

Üniversite günümüzdeki durumuna gelinceye kadar çeşitli aşamalardan geçmiştir.

Bir Doğrusal Zamanla Değişmeyen (DZD) sistem durum uzay formunda

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{A}\,\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{B}_2\,\boldsymbol{u}(t) \tag{2.2}$$

olarak ele alınsın. Burada $\boldsymbol{x}(t) \in \Re^n$ durum vektörünü; $\boldsymbol{u}(t) \in \Re^m$ kontrol girişi vektörünü; $\mathbf{A} \in \Re^{n\times n}$ durum matrisini ve $\mathbf{B}_2 \in \Re^{n\times m}$ ise kontrol girişi matrisini göstermektedir. Burada amaç, (2.1) ile verilmiş olan performans ölçütünü minimum kılan,

$$\boldsymbol{u}(t) = \mathbf{K}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t) \tag{2.3}$$

DTGB kontrol kanunu hesaplamaktır. Kontrol kanunu (2.3) vasıtasıyla DZD kapalı çevrim sistem evrik durum uzay formunda

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K})\,\dot{\boldsymbol{x}}(t) \tag{2.4}$$

olarak yazılabilir. DTGB LQ optimal kontrolör sentezini veren Teorem 2.1 aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Teorem 2.1 Verilmiş olan $\mathbf{Q}$ ve $\mathbf{R}$ performans ağırlıklandırma matrisleri için, evrik durum uzay formundaki (2.4) kapalı çevrim sistemini kararlı kılan ve (2.1) performans ölçütünü minimize eden durum türevi geri beslemeli kontrol kanunu,

$$min \;\; iz(M)\,; \text{ koşullar:}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_2\mathbf{W} + \mathbf{Z}\mathbf{A}^{-\mathbf{T}} - \mathbf{W}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}_2^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{-\mathbf{T}} & \mathbf{Z}\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathbf{T}} & \mathbf{W}^{\mathbf{T}} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{z}}\mathbf{Z} & -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ \mathbf{W} & 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{2.5}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Z} \end{bmatrix} \succ 0 \tag{2.6}$$

ile verilen dışbükey optimizasyon probleminin çözümünden, $\boldsymbol{u}(t) = \mathbf{K}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{W}\mathbf{Z}^{-1}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ olarak elde edilebilir.

İspat: DTGB kontrol kanunu (2.3), performans ölçütü (2.1) içerisinde yazıldığında

$$J = \int_0^\infty \left[\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)(\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{C}_{\mathbf{z}} + \mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{K})\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)\right]dt \tag{2.7}$$

elde edilir. Bir pozitif tanımlı $\mathbf{P} \in \Re^{n\times n}$ matrisinin,

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)(\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{C}_{\mathbf{z}} + \mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{K})\,\dot{\boldsymbol{x}}(t) = -\frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{P}\,\boldsymbol{x}(t)) \tag{2.8}$$

eşitliğini sağlayacak şekilden tanımlandığını kabul edelim. (2.8) ifadesinin integrali alındığında,

$$\begin{aligned} J = &\int_0^\infty \left[\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)(\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{C}_{\mathbf{z}} + \mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{K})\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)\right]dt = \\ &-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{P}\,\boldsymbol{x}(t)\Big|_0^\infty = -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\infty)\,\mathbf{P}\,\boldsymbol{x}(\infty) + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\,\mathbf{P}\,\boldsymbol{x}(0) \end{aligned} \tag{2.9}$$

elde edilir. Evrik durum uzay formundaki DZD kapalı çevrim sistem (2.4) kararlı kabul edildiğinde $\boldsymbol{x}(\infty)$ ifadesi ortadan kaybolmaktadır ve performans ölçütünün değeri

$$J = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\,\mathbf{P}\,\boldsymbol{x}(0) \tag{2.10}$$

olmaktadır. Bu aşamada bir $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^{\mathrm{T}} \succ \mathbf{P}$ değişkeni tanımlayarak (2.8) ifadesinde yerine yazacak olursak

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)(\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{C}_{\mathbf{z}} + \mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{K})\,\dot{\boldsymbol{x}}(t) < -(\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{Y}\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{x}(t)\,\mathbf{Y}\,\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)) \tag{2.11}$$

elde edilir. Kapalı çevrim sistem (2.4), (2.11) ifadesinde yerine yazıldığında

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)(\mathbf{Y}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}) + (\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}\mathbf{Y} + \mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{C}_{\mathbf{z}} + \mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{K})\,\dot{\boldsymbol{x}}(t) < 0 \tag{2.12}$$

elde edilir. (2.12) ifadesinden DME koşulu elde edilmesinde kullanılan Schur tümleyen formülasyonu aşağıdaki yardımcı teoremde verilmiştir.

Yardımcı Teorem 2.1 (Boyd vd. [59]) $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}}$ simetrik matrisi

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{12}^{\mathbf{T}} & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Şeklinde verilmiş olsun. $\mathbf{S}_{11}$ matrisi kare olarak ayrıştırıldığında aşağıdaki önermeler birbirine eşdeğerdir.

$$\mathbf{S} \prec 0 \tag{2.14}$$

$$\mathbf{S}_{11} \prec 0, \mathbf{S}_{22} - \mathbf{S}_{12}^{\mathbf{T}} \mathbf{S}_{11}^{-1} \mathbf{S}_{12} \prec 0 \tag{2.15}$$

$$\mathbf{S}_{22} \prec 0, \mathbf{S}_{11} - \mathbf{S}_{12} \mathbf{S}_{11}^{-1} \mathbf{S}_{12}^{\mathbf{T}} \prec 0 \tag{2.16}$$

(2.15) üzerinde uygulandığında (2.16)' ya denktir.

Yardımcı Teorem 2.1 ile verilmiş olan Schur tümleyen kullanıldığında (2.12) ifadesi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}) + (\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K})^{\mathbf{T}} \mathbf{A}^{-\mathbf{T}}\mathbf{Y} & \mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathbf{T}} & \mathbf{K}^{\mathbf{T}} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{z}} & -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ \mathbf{K} & 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{2.17}$$

biçiminde tekrar yazılabilir. $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^{\mathbf{T}} = \mathbf{Y}^{-1}$ tanımlanıp $diag(\mathbf{Z}, \mathbf{I}, \mathbf{I})$ ile solundan ve sağından çarpıldığında

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K})\,\mathbf{Z} + \mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K})^{\mathbf{T}} \mathbf{A}^{-\mathbf{T}} & \mathbf{Z}\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathbf{T}} & \mathbf{Z}\mathbf{K}^{\mathbf{T}} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{z}}\mathbf{Z} & -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ \mathbf{K}\mathbf{Z} & 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{2.18}$$

ifadesi elde edilir. Burada, $\mathbf{W} = \mathbf{K}\mathbf{Z}$ değişken dönüşümü yapıldığında koşul (2.5) elde edilmiş olunur. Performans ölçütü ifadesinin (2.10) minimizasyonu için $\mathbf{Y} \succ \mathbf{P}$ kabulünü dikkate alarak $\mathbf{M} \succ \mathbf{Y}$ şeklinde yeni bir değişken tanımlandığında

$$\mathbf{M} \succ \mathbf{Y} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Z} \end{bmatrix} \succ 0 \tag{2.19}$$

ifadesi Schur tümleyen formülasyonu ile kolayca elde edilmekte ve bize (2.6) koşulunu vermektedir. ■

DZD sistem (2.2) için; (2.1) ile verilmiş olan performans ölçütünü minimum kılan,

$$\boldsymbol{u}(t) = \mathbf{K}\,\dot{\boldsymbol{y}}(t) \tag{2.20}$$

ÇTGB kontrol kanununu ele alalım. Burada, $\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \mathbf{C}_{\mathrm{y}}\, \dot{\boldsymbol{x}}(t)$ türevi ölçülebilen çıkışlar vektörüdür. Söz konusu ÇTGB kontrol kanunu (2.20) vasıtasıyla kapalı çevrim sistem evrik durum uzay formunda

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}})\dot{\boldsymbol{x}}(t) \tag{2.21}$$

biçiminde yazılabilir. ÇTGB LQ optimal kontrolör sentezini Teorem 2.2 ile aşağıda verilmektedir.

Teorem 2.2 Verilmiş olan $\mathbf{Q}$ ve $\mathbf{R}$ performans ağırlıklandırma matrisleri ve bir μ skaleri için, evrik durum uzay formundaki (2.21) kapalı çevrim sistemini kararlı kılan ve (2.1) performans ölçütünü minimize eden çıkış türevi geri beslemeli kontrol kanunu,

$$\min iz(\mathbf{M}), \text{ koşullar:}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_2\mathbf{W}\mathbf{C}_{\mathrm{y}} + \mathbf{Z}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}} - \mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}} & \mathbf{Z}\mathbf{C}_{\mathrm{z}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}_{\mathrm{z}}\mathbf{Z} & -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ \mathbf{W}\mathbf{C}_{\mathrm{y}} & 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{2.22}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Z} \end{bmatrix} \succ 0 \tag{2.23}$$

$$\begin{bmatrix} \mu\mathbf{I} & (\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{Z} - \mathbf{S}\mathbf{C}_{\mathrm{y}})^{\mathrm{T}} \\ (\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{Z} - \mathbf{S}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}) & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0 \tag{2.24}$$

ile verilen dışbükey optimizasyon probleminin çözümünden, $\boldsymbol{u}(t) = \mathbf{K}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{W}\mathbf{S}^{-1}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ olarak elde edilebilir.

İspat: Çıkış türevi geri beslemeli kontrol kanunu, performans ölçütü (2.1) içerisinde yazıldığında

$$J = \int_0^{\infty} \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)(\mathbf{C}_{\mathrm{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{C}_{\mathrm{z}} + \mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}})\dot{\boldsymbol{x}}(t)dt \tag{2.25}$$

elde edilir. Bir pozitif tanımlı $\mathbf{P} \in \Re^{n\times n}$ matrisinin,

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)(\mathbf{C}_{\mathrm{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{C}_{\mathrm{z}} + \mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}})\dot{\boldsymbol{x}}(t) = -\frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{P}\,\boldsymbol{x}(t)) \tag{2.26}$$

eşitliğini sağlayacak şekilden tanımlandığını kabul edelim. (2.26) ifadesinin integrali alındığında,

$$J = \int_0^\infty \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)(\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{C}_{\mathbf{z}} + \mathbf{C}_{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathbf{y}})\dot{x}(t)dt = \\ -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{P}\,\boldsymbol{x}(t)\Big|_0^\infty = -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\infty)\,\mathbf{P}\,\boldsymbol{x}(\infty) + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\,\mathbf{P}\,\boldsymbol{x}(0) \tag{2.27}$$

elde edilir. Evrik durum uzay formundaki kapalı çevrim sistem (2.21) kararlı kabul edildiğinde $\boldsymbol{x}(\infty)$ ifadesi ortadan kaybolmaktadır ve performans ölçütünün değeri

$$J = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\,\mathbf{P}\,\boldsymbol{x}(0) \tag{2.28}$$

olmaktadır. Bu aşamada bir $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^{\mathrm{T}} \succ \mathbf{P}$ değişkeni tanımlayarak (2.26) ifadesinde yerine yazacak olursak

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)(\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{C}_{\mathbf{z}} + \mathbf{C}_{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathbf{y}})\dot{x}(t) < -(\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{Y}\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{Y}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)) \tag{2.29}$$

elde edilir. Kapalı çevrim sistem (2.21), (2.29) ifadesinde yerine yazıldığında

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)(\mathbf{Y}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathbf{y}}) + (\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathbf{y}})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}\mathbf{Y} + \mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{C}_{\mathbf{z}} + \mathbf{C}_{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathbf{y}})\dot{x}(t) < 0 \tag{2.30}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 2.1 ile verilmiş olan Schur tümleyen kullanıldığında (2.30) ifadesi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathbf{y}}) + (\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathbf{y}})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}\mathbf{Y} & \mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{C}_{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{z}} & -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ \mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathbf{y}} & 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{2.31}$$

biçiminde tekrar yazılabilir. $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Y}^{-1}$ tanımlanıp $diag(\mathbf{Z}, \mathbf{I}, \mathbf{I})$ ile solundan ve sağından çarpıldığında

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathbf{y}}\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}} - \mathbf{Z}\mathbf{C}_{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}} & \mathbf{Z}\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{Z}\mathbf{C}_{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{z}}\mathbf{Z} & -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ \mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathbf{y}}\mathbf{Z} & 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{2.32}$$

ifadesi elde edilir. Burada, $\mathbf{C}_{\mathbf{y}}\mathbf{Z} = \mathbf{S}\mathbf{C}_{\mathbf{y}}$ kabulü ve $\mathbf{K}\mathbf{S} = \mathbf{W}$ değişken dönüşümü ile (2.22) elde edilmiş olunur. $\mathbf{C}_{\mathbf{y}}\mathbf{Z} = \mathbf{S}\mathbf{C}_{\mathbf{y}}$ kabulünü DME yaklaşımı ile ele almak için yararlanılan Yardımcı Teorem 2.2 aşağıda verilmektedir.

Yardımcı Teorem 2.2 (Ho ve Niu [60]) $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ şeklindeki bir eşitlik

$$iz((\mathbf{A}-\mathbf{B})^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}-\mathbf{B}))=0 \tag{2.33}$$

olarak ifade edilebilir. Bu aşamada, $(\mathbf{A}-\mathbf{B})^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}-\mathbf{B})\le\mu\mathbf{I}$ biçiminde yeni bir koşul tanımlayacak olursak, Schur tümleyen formülasyonu ile

$$\begin{bmatrix}\mu\mathbf{I} & (\mathbf{A}-\mathbf{B})^{\mathrm{T}}\\ (\mathbf{A}-\mathbf{B}) & \mu^2\mathbf{I}\end{bmatrix}\ge 0 \tag{2.34}$$

elde edilir. Burada μ skalerine çok küçük bir değer verildiğinde eşitlik kısıtı DME yaklaşımı ile dış bükey optimizasyon problemlerinde kullanılabilir.

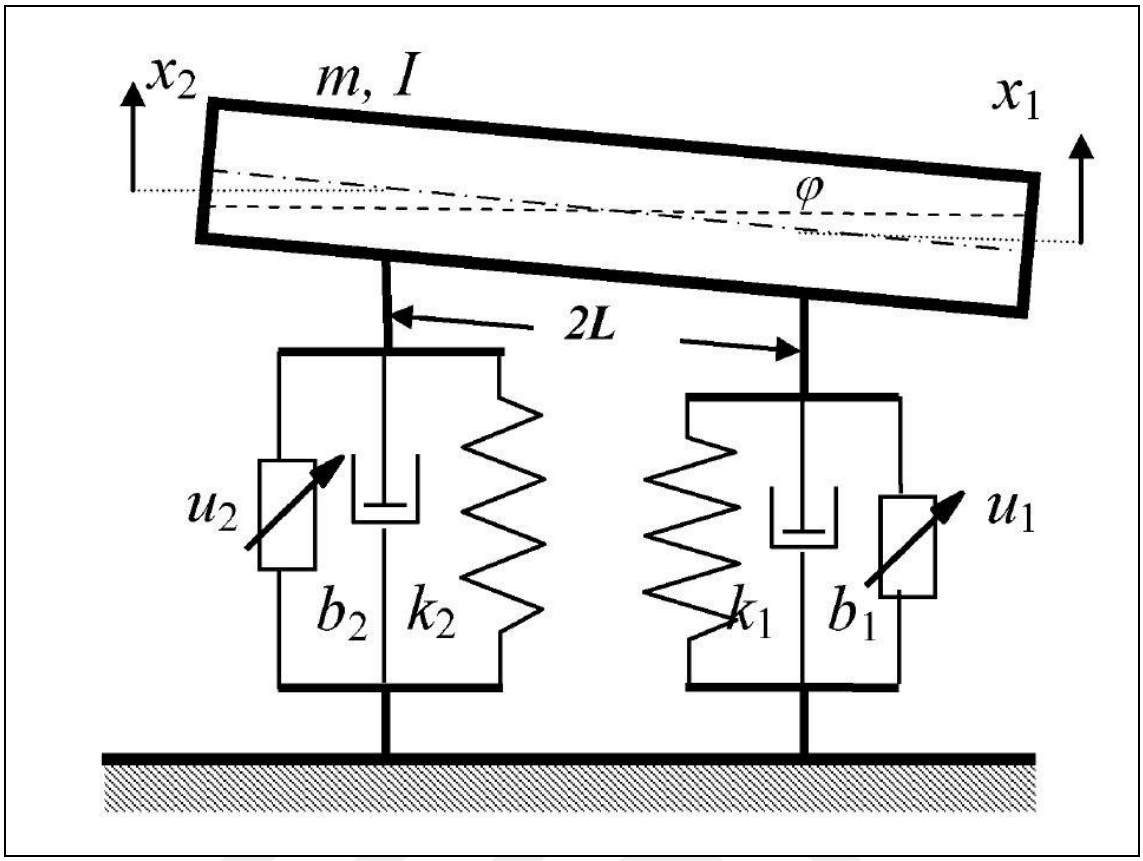
Yardımcı Teorem 2.2 sayesinde $\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{Z}=\mathbf{S}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}$ eşitliği DME (2.24) ile çıkış türevi geri beslemeli kontrolör tasarımında kullanılabilir. Performans ölçütünün minimizasyonu için (2.23) ifadesinin elde edilişi ise Teorem 2.1 içerisinde açıklanmıştır. ■

2.2 Doğrusal Matris Eşitsizlikleri ve Cebirsel Riccati Eşitliği Tabanlı Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli LQ Optimal Kontrolör Tasarımlarının Sayısal Benzetim Çalışmaları ile Karşılaştırılması

Bu bölümde bir sayısal örnek üzerinden önerilen DME tabanlı DTGB ve ÇTGB kontrolörlerin Abdelaziz [45] tarafından önerilmiş olan CRE tabanlı tasarımlar ile karşılaştırılması amaçlanmıştır. Kullanılan sayısal örnek [45] çalışmasından alınan bir titreşim soğurucu sistemdir ve Şekil 2.1 ile gösterilmektedir. Sistemin matematiksel modeli durum uzay formunda

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -k_1c_1 & -k_2c_2 & -b_1c_1 & -k_2c_2\\ -k_1c_2 & -k_2c_1 & -b_1c_2 & -b_2c_1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ c_1 & c_2\\ c_2 & c_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix} \tag{2.35}$$

olarak verilmiştir. Burada $c_1=(1/m)+(L^2/J)$ ve $c_2=(1/m)-(L^2/J)$ olarak verilmektedir. Model parametreleri $m=10$ kg; $J=1\,\mathrm{kgm}^2$; $L=1\,\mathrm{m}$; $k_1=500\,\mathrm{N/m}$; $k_1=600\,\mathrm{N/m}$; $b_1=10\,\mathrm{Ns/m}$; $b_2=15\,\mathrm{Ns/m}$ olarak alınmıştır



Şekil 2. 1 Titreşim soğurucu sistem fiziksel modeli [45]

Performans ağırlıklandırma matrisleri

$$\mathbf{Q} = diag(10000,1,1,1) \tag{2.36}$$

$$\mathbf{R} = diag(1,1) \tag{2.37}$$

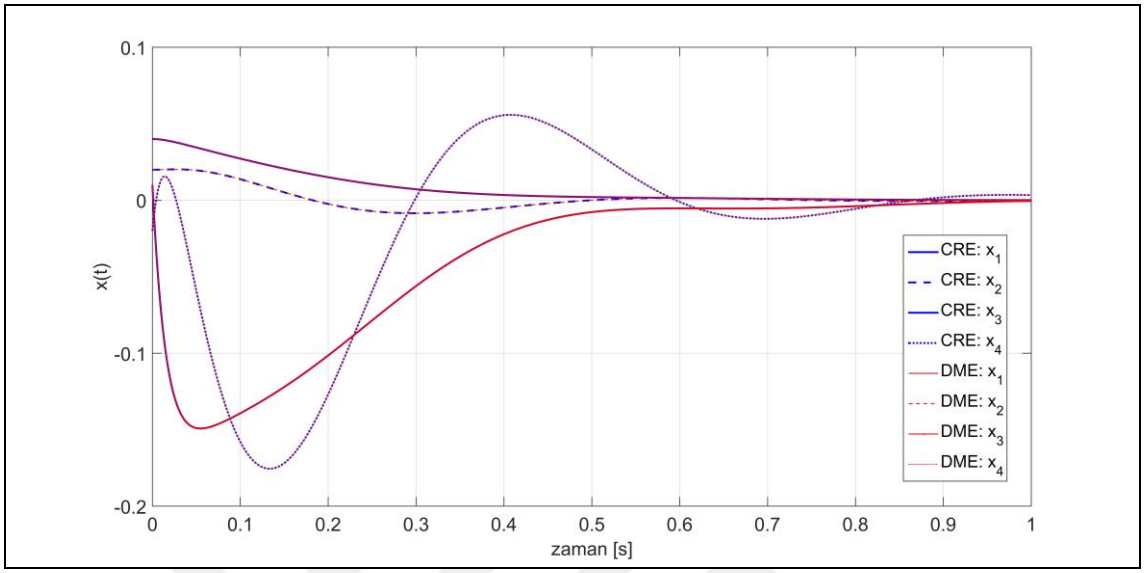
olarak alındığında, DTGB LQ optimal kontrol kazancı [44] çalışmasında

$$\mathbf{K}_{sdf\,1} = \begin{bmatrix} 88.3544 & -2.3432 & -0.4226 & -1.3349 \\ -1.9527 & 19.8090 & 0.6150 & 0.8260 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanmıştır. Bu çalışmada ise performans ağırlıklandırma matrisleri (2.36) ve (2.37) için $\mathbf{C}_z = \mathbf{I}$ seçildiğinde Teorem 2.1 aracılığı ile DTGB LQ optimal kontrol kazancı

$$\mathbf{K}_{sdf\,2} = \begin{bmatrix} 88.3650 & -2.3434 & -0.4215 & -1.3348 \\ -1.9528 & 19.8174 & 0.6149 & 0.8262 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanmıştır. Kontrol kazançlarının son derece yakın olduğu açıkça görülmektedir. Modeli (2.34) ile verilen sistemin $\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}0.04 & 0.02 & 0.01 & -0.02\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ başlangıç koşulları altındaki yanıtları her iki kontrolör için Şekil 2.2 de incelenmektedir.



Şekil 2. 2 DME ve CRE tabanlı DTGB kontrolörler için titreşim soğurucu sistem yanıtları

Kontrol kazançları arasındaki benzerlikten beklendiği üzere sistem yanıtları birbirine son derece yakındır. DZD sistemler için DTGB tasarımı özelinde düşünecek olursak önerilen DME tabanlı yaklaşım büyük bir avantaj sağlamamaktadır. Şimdi DZD sistemler için ÇTGB tasarımı üzerine yoğunlaşalım. Performans ağırlıklandırma matrisleri yine (2.35) ve (2.36) olarak alındığında ÇTGB LQ optimal kontrol kazancı [45] çalışmasında

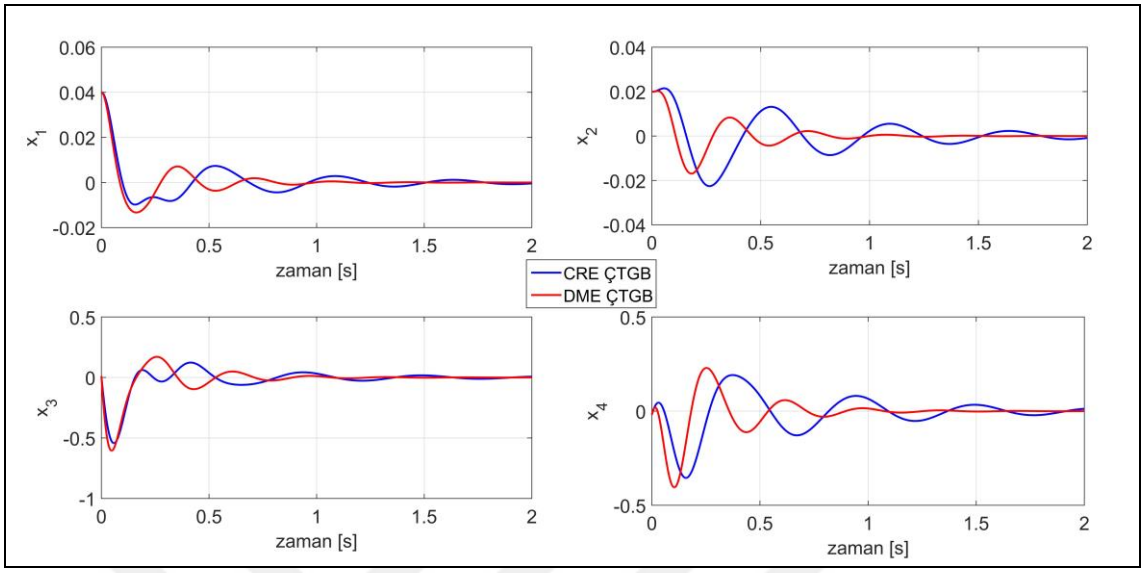
$$\mathbf{K}_{odf\,1}=\begin{bmatrix}-1.4031 & -1.0435\\ -0.8031 & -1.0021\end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanmıştır. Bu çalışmada ise performans ağırlıklandırma matrisleri (2.36) ve (2.37) için $\mathbf{C}_z=\mathbf{I}$ seçildiğinde Teorem 2.2 aracılığı ile ÇTGB LQ optimal kontrol kazancı

$$\mathbf{K}_{odf\,2}=\begin{bmatrix}-1.9001 & -1.6765\\ -1.5643 & -1.4313\end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanmıştır. DTGB tasarımındaki durumun aksine ÇTGB tasarımında DME ve CRe tabanlı yaklaşımlar gözle görülür derecede farklı kazançlar hesaplamıştır.

Modeli (2.35) ile verilen sistemin $\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}0.04 & 0.02 & 0.01 & -0.02\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ başlangıç koşulları altındaki yanıtları her iki kontrolör için Şekil 2.3 ile incelenmektedir.



Şekil 2. 3 DME ve CRE tabanlı ÇTGB kontrolörler için titreşim soğurucu sistem yanıtları

Şekil 2.3 aracılığıyla görülmektedir ki önerilen DME tabanlı yaklaşım daha iyi oturma zamanı ve sönüm özelliklerini durum vektörünün her elemanı için sağlamaktadır. Bundan sonraki kısımda sistem parametrelerinde belirsizlikler olması durumunda CRE ve DME tabanlı tasarımların performansı karşılaştırlacaktır. Bu sebep ile çalışmanın evamında, sistemdeki parametre belirsizliklerini PBDZD sistem çerçevesinde ele alan DTGB ve ÇTGB dayanıklı LQ optimal kontrolörlerin DME tabanlı sentezlerine yer verilecektir.

2.3 Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli Dayanıklı LQ Optimal Kontrolörlerin Tasarımı

Bir Politopik Belirsiz Doğrusal Zamanla Değişen (PBDZD) sistem durum uzay formunda

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{x}(t)+\mathbf{B}_2(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{u}(t) \tag{2.38}$$

olarak yazılabilir. Burada, $\mathbf{A}(\cdot)\in\Re^{n\times n}$ ve $\mathbf{B}_2(\cdot)\in\Re^{n\times m}$ sırasıyla durum ve kontrol girişi matrisleridir ve

$$P=\{(\mathbf{A},\mathbf{B}_2)(\boldsymbol{\theta}(t)):(\mathbf{A},\mathbf{B}_2)(\boldsymbol{\theta}(t))=\sum_{j=1}^{N}\theta_j(t)(\mathbf{A},\mathbf{B}_2)_j,\sum_{j=1}^{N}\theta_j(t)=1;\ j=1,\ldots,N\} \tag{2.39}$$

ile verilen P politopu tarafından kapsanmaktadırlar. Bir başka deyişle sistem matrisi zamanla değişen

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \left[\theta_1(t) \quad \dots \quad \theta_N(t)\right]^{\mathrm{T}}; \sum_{j=1}^{N} \theta_j(t) = 1; \; j = 1, \dots, N \tag{2.40}$$

parametre vektörüne bağlıdır. Bu çalışmada amaç, performans ölçütü (2.1) ifadesini minimum kılan, DTGB (2.3) kontrol kanunu hesaplamaktır. Söz konusu durum türevi geri beslemeli kontrolör vasıtasıyla kapalı çevrim sistem evrik durum uzay formunda

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{A}^{-1}(\theta(t))(\mathbf{I} - \mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K})\,\dot{\boldsymbol{x}}(t) \tag{2.41}$$

biçiminde yazılabilir. DTGB dayanıklı LQ optimal kontrolör sentezini veren Teorem 2.3 aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Teorem 2.3 Verilmiş olan $\mathbf{Q}$ ve $\mathbf{R}$ performans ağırlıklandırma matrisleri için, evrik durum uzay formundaki (2.41) PBDZD kapalı çevrim sistemini kararlı kılan ve (2.1) performans ölçütünü minimize eden DTGB kontrol kanunu,

$$\min \; iz(\mathbf{M}) \text{, koşullar:}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} - \mathbf{B}_{2j}\mathbf{W}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}_j\mathbf{Z} - \mathbf{A}_j\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{2j}^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}_j\mathbf{Z}\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}_j\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} & -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ \mathbf{W}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} & 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0, \; j = 1, \dots, N \tag{2.42}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} + \mathbf{Z}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}} - \mathbf{B}_{2k}\mathbf{W}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} - \mathbf{B}_{2j}\mathbf{W}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}_j\mathbf{Z} + \mathbf{A}_k\mathbf{Z} - \mathbf{A}_k\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{2j}^{\mathrm{T}} - \mathbf{A}_j\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{2k}^{\mathrm{T}} & & \\ \mathbf{C}_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} + \mathbf{C}_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}} & \cdots & \\ \mathbf{W}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{W}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} & & \\ \mathbf{A}_j\mathbf{Z}\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}_k\mathbf{Z}\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}_j\mathbf{W}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}_k\mathbf{W}^{\mathrm{T}} & \\ -2\mathbf{Q}^{-1} & 0 & \\ 0 & -2\mathbf{R}^{-1} & \end{bmatrix} \prec 0, \; j = 1, \dots, N-1, k = j+1, \dots, N \tag{2.43}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Z} \end{bmatrix} \succ 0 \tag{2.44}$$

ile verilen dışbükey optimizasyon probleminin çözümünden, $\boldsymbol{u}(t) = \mathbf{K}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{W}\mathbf{Z}^{-1}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ olarak elde edilebilir.

İspat: Performans ölçütü (2.1) ifadesini minimum kılan durum türevi geri beslemeli kontrol kanununun (2.11) ile verilen koşulu sağladığı Teorem 2.1 ile gösterilmiştir.

PBDZD evrik durum uzay formundaki kapalı çevrim sistem (2.44), (2.11) içerisinde yerine konulduğunda

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)(\mathbf{Y}\mathbf{A}^{-1}(\theta(t))(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K})+(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{Y}+\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{C}_{\mathbf{z}}+\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{K})\dot{\boldsymbol{x}}(t)<0 \tag{2.45}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 2.1 ile verilmiş olan Schur tümleyen kullanıldığında, (2.45) ile (2.46) denktir.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}\mathbf{A}^{-1}(\theta(t))(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K})+(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\theta(t)) & \mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{K}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{z}} & -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ \mathbf{K} & 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{2.46}$$

Yeni bir değişken olarak $\mathbf{Z}=\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}=\mathbf{Y}^{-1}$ tanımlanıp, (2.46) koşulu solundan ve sağından sırası ile $diag(\mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z},\mathbf{I},\mathbf{I})$ ve $diag(\mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\theta(t)),\mathbf{I},\mathbf{I})$ matrisleri ile çarpılırsa

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K})\mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\theta(t))+\mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K})^{\mathrm{T}} & \cdots \\ \mathbf{C}_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\theta(t)) & \\ \mathbf{K}\mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\theta(t)) & \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z}\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z}\mathbf{K}^{\mathrm{T}} \\ -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{2.47}$$

yazılabilir. $\mathbf{W}=\mathbf{K}\mathbf{Z}$ değişken dönüşümü uygulandığında

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\theta(t))-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{W}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\theta(t))+\mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z}-\mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}(\theta(t)) & \cdots \\ \mathbf{C}_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\theta(t)) & \\ \mathbf{W}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\theta(t)) & \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z}\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \\ -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{2.48}$$

ifadesi elde edilmektedir. (2.48) ifadesinden sonlu sayıda DME koşulu elde edilirken, Montagner vd. [60] tarafından önerilmiş olan Yardımcı Teorem 2.3 kullanılmıştır.

Yardımcı Teorem 2.3 [61] Politopik parametre bağımlı bir DME kısıtı

$$\mathbf{F}(\theta(t))\prec 0 \tag{2.49}$$

verilmiş olsun. Eğer, (2.49) ifadesi

$$\mathbf{F}(\theta(t)) = \sum_{j=1}^{N} \theta_j^2(t)\mathbf{F}_j + \sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=j+1}^{N} \theta_j(t)\theta_k(t)\mathbf{F}_{jk} \tag{2.50}$$

biçiminde yazılabilirse, (2.49) ifadesinin negatif tanımlı olması,

$$\mathbf{F}_j \prec 0, j = 1,\ldots,N \tag{2.51}$$

$$\mathbf{F}_{jk} \prec 0, j = 1,\ldots,N-1; k = j+1,\ldots,N \tag{2.52}$$

koşulları altında garanti edilmektedir.

Yardımcı Teorem 2.3 kullanıldığında (2.48) ifadesi bizi (2.42) ve (2.43) koşullarına götürmektedir. Performans ölçütünün (2.1) minimizasyonu için (2.44) ifadesinin elde edilişi ise Teorem 2.1 içerisinde açıklanmıştır. ■

PBDZD sistem (2.42) için performans ölçütü (2.1) ifadesini minimum kılan, ÇTGB (2.20) kontrol kanunu ele alalım. ÇTGB kontrolör (2.20) vasıtasıyla kapalı çevrim sistem evrik durum uzay formunda

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}^{-1}(\theta(t))(\mathbf{I} - \mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\mathbf{C}_y)\dot{x}(t) \tag{2.53}$$

biçiminde yazılabilir. ÇTGB dayanıklı LQ optimal kontrolör sentezini veren Teorem 2.4 aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Teorem 2.4 Verilmiş olan $\mathbf{Q}$ ve $\mathbf{R}$ performans ağırlıklandırma matrisleri ve bir μ skaleri için, evrik durum uzay formundaki (2.53) PBDZD kapalı çevrim evrik durum uzay sistemini kararlı kılan ve (2.1) performans ölçütünü minimize eden çıkış türevi geri beslemeli dayanıklı kontrol kanunu,

$$\min iz(\mathbf{M}), \text{ koşullar:}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} - \mathbf{B}_{2j}\mathbf{W}\mathbf{C}_y\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}_j\mathbf{Z} - \mathbf{A}_j\mathbf{C}_y^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{2j}^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}_j\mathbf{Z}\mathbf{C}_z^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}_j\mathbf{C}_y^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}_z\mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} & -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ \mathbf{W}\mathbf{C}_y\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} & 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0, j = 1,\ldots,N \tag{2.54}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{ZA}_j^{\mathrm{T}} + \mathbf{ZA}_k^{\mathrm{T}} - \mathbf{B}_{2k}\mathbf{WC}_{\mathrm{y}}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} - \mathbf{B}_{2j}\mathbf{WC}_{\mathrm{y}}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}_j\mathbf{Z} + \mathbf{A}_k\mathbf{Z} - \mathbf{A}_k\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{2j}^{\mathrm{T}} - \mathbf{A}_j\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{2k}^{\mathrm{T}} & \cdots \\ \mathbf{C}_{\mathrm{z}}\mathbf{ZA}_j^{\mathrm{T}} + \mathbf{C}_{\mathrm{z}}\mathbf{ZA}_k^{\mathrm{T}} & \\ \mathbf{WC}_{\mathrm{y}}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{WC}_{\mathrm{y}}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} & \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_j\mathbf{ZC}_{\mathrm{z}}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}_k\mathbf{ZC}_{\mathrm{z}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}_j\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}_k\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{\mathrm{T}} \\ -2\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ 0 & -2\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0,\ j = 1,\ldots,N-1, k = j+1,\ldots,N \tag{2.55}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Z} \end{bmatrix} \succ 0 \tag{2.56}$$

$$\begin{bmatrix} \mu\mathbf{I} & (\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{Z} - \mathbf{SC}_{\mathrm{y}})^{\mathrm{T}} \\ (\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{Z} - \mathbf{SC}_{\mathrm{y}}) & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0 \tag{2.57}$$

ile verilen dışbükey optimizasyon probleminin çözümünden, $\boldsymbol{u}(t) = \mathbf{K}\,\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \mathbf{WS}^{-1}\,\dot{\boldsymbol{y}}(t)$ olarak elde edilebilir.

İspat: Performans ölçütü (2.1) ifadesini minimum kılan çıkış türevi geri beslemeli kontrol kanununun (2.29) ile verilen koşulu sağladığı Teorem 2.2 ile gösterilmiştir. PBDZD evrik durum uzay formundaki kapalı çevrim sistem (2.53), (2.29) içerisinde yerine konulduğunda

$$\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Psi}\,\dot{x}(t) < 0 \tag{2.58}$$

Burada $\boldsymbol{\Psi}$ ifadesi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi} = {} & \mathbf{YA}^{-1}(\theta(t))(\mathbf{I} - \mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{KC}_{\mathrm{y}}) + (\mathbf{I} - \mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{KC}_{\mathrm{y}})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{Y} + \\ & \mathbf{C}_{\mathrm{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{QC}_{\mathrm{z}} + \mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{RKC}_{\mathrm{y}} \end{aligned} \tag{2.59}$$

olarak verilmektedir. Schur tümleyen kullanıldığında, (2.63) ile (2.64) denktir.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Xi} & \mathbf{C}_{\mathrm{z}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}_{\mathrm{z}} & -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ \mathbf{KC}_{\mathrm{y}} & 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{2.60}$$
$$\boldsymbol{\Xi} = \mathbf{YA}^{-1}(\theta(t))(\mathbf{I} - \mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{KC}_{\mathrm{y}}) + (\mathbf{I} - \mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{KC}_{\mathrm{y}})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\theta(t))$$

Yeni bir değişken olarak $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Y}^{-1}$ tanımlanıp, (2.60) koşulu solundan ve sağından sırası ile $diag(\mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z}, \mathbf{I}, \mathbf{I})$ ve $diag(\mathbf{ZA}^{\mathrm{T}}(\theta(t)), \mathbf{I}, \mathbf{I})$ matrisleri ile çarpılırsa

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\mathbf{C}_y)\mathbf{Z}\mathbf{A}^T(\theta(t))+\mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\mathbf{C}_y)^T & \cdots \\ \mathbf{C}_z\mathbf{Z}\mathbf{A}^T(\theta(t)) & \\ \mathbf{K}\mathbf{C}_y\mathbf{Z}\mathbf{A}^T(\theta(t)) & \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z}\mathbf{C}_z^T & \mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z}\mathbf{C}_y^T\mathbf{K}^T \\ -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.61)$$

yazılabilir. Burada, $\mathbf{C}_y\mathbf{Z}=\mathbf{S}\mathbf{C}_y$ kabulü ve $\mathbf{K}\mathbf{S}=\mathbf{W}$ değişken dönüşümü ile

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}\mathbf{A}^T(\theta(t))-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{W}\mathbf{C}_y\mathbf{A}^T(\theta(t))+\mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z}-\mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{C}_y^T\mathbf{W}^T\mathbf{B}_2^T(\theta(t)) & \cdots \\ \mathbf{C}_z\mathbf{Z}\mathbf{A}^T(\theta(t)) & \\ \mathbf{W}\mathbf{C}_y\mathbf{A}^T(\theta(t)) & \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z}\mathbf{C}_z^T & \mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{C}_y^T\mathbf{W}^T \\ -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.62)$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 2.3 kullanıldığında (2.62) koşulundan (2.54) ve (2.55)koşulları elde edilmiş olunur. $\mathbf{C}_y\mathbf{Z}=\mathbf{S}\mathbf{C}_y$ eşitliği ise Yardımcı Teorem 2.2 sayesinde (2.57) DME olarak çıkış türevi geri beslemeli dayanıklı kontrolör tasarımında kullanılabilir. Performans ölçütünün minimizasyonu için (2.57) ifadesinin elde edilişi ise Teorem 2.1 içerisinde açıklanmıştır. ■

2.4 Doğrusal Matris Eşitsizlikleri Tabanlı Daynaıklı Kontrolörlerin ve Cebirsel Riccati Eşitliği Tabanlı Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli Kontrolörlerin Sayısal Benzetim Çalışmaları ile Karşılaştırılması

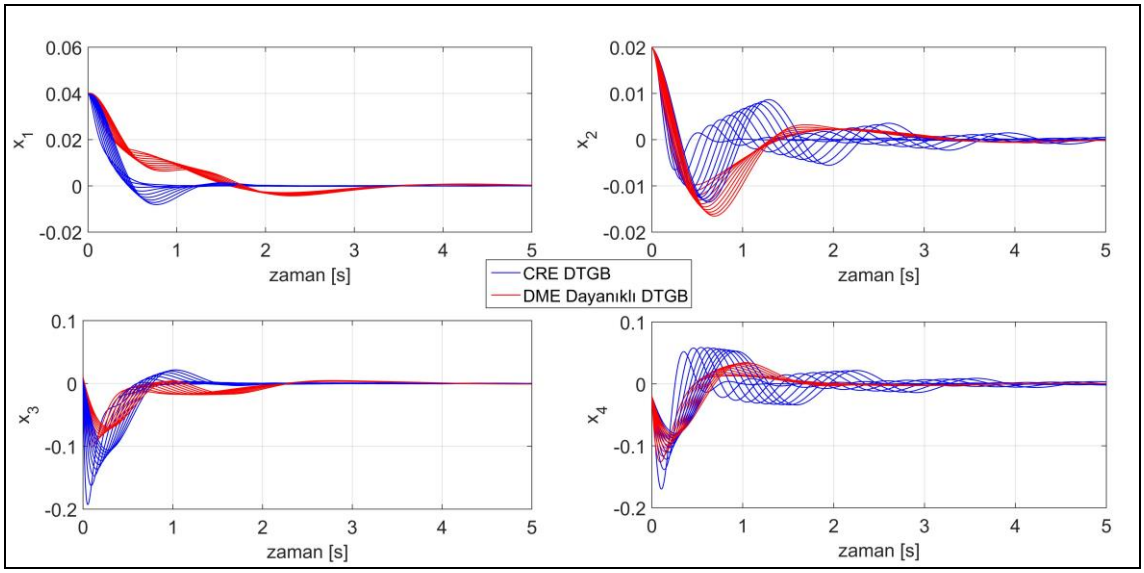
Bu bölümde bir sayısal örnek üzerinden önerilen DME tabanlı DTGB ve ÇTGB dayanıklı LQ optimal kontrolörlerin Abdelaziz [45] tarafından önerilmiş olan CRE tabanlı DTGB ve ÇTGB LQ optimal tasarımlar ile karşılaştırılması amaçlanmıştır. Kullanılan sayısal örnek model (2.34) ile Bölüm 2.2 içerisinde verilmiştir. Performans ağırlıklandırma matrisleri olarak (2.35) ve (2.36) kullanıldığında elde edilen, DTGB LQ optimal kontrol kazancı (2.37) ile görülmektedir

Bu çalışmada ise aynı performans ağırlıklandırma matrisleri (2.35) ve (2.36) için DTGB dayanıklı LQ optimal kontrolör tasarlanacaktır. Bölüm 2.2 de verilen parametrelerden kütle değeri bu sefer $m=[5\ \ 20]$ kg aralığında değişken alınarak sistem yanıtları

incelenecektir. $\mathbf{C}_z = \mathbf{I}$ seçildiğinde Teorem 2.4 aracılığı ile DTGB dayanıklı LQ optimal kontrolör

$$\mathbf{K}_{sdf3} = \begin{bmatrix} 129.9647 & 43.5976 & 20.3286 & 17.8920 \\ 29.3322 & 75.7528 & 16.9145 & 16.5247 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanmıştır. (2.38) ve (2.67) ile verilen kontrol kazançları kullanıldığında modeli (2.35) ile verilen sistemin $x(0) = [0.04 \quad 0.02 \quad 0.01 \quad -0.02]^{\mathrm{T}}$ başlangıç koşulları altındaki yanıtları her iki kontrolör için Şekil 2.4 de incelenmektedir.

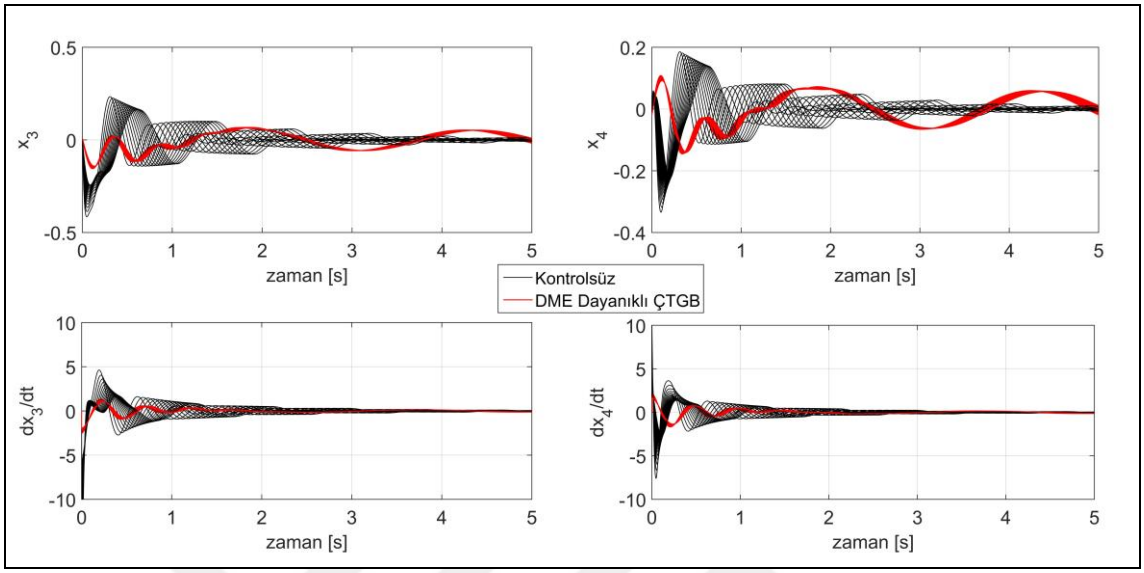


Şekil 2. 4 DME tabanlı dayanıklı DTGB ve CRE tabanlı DTGB kontrolörler için titreşim soğurucu sistem yanıtları

Şekil 2.4 den açıkça görüldüğü üzere CRE tabanlı tasarım (2.37) parametre değişimlerinden etkilenerek farklı doğal frekans ve sönüm oranı değerlerine sahip yanıtlar vermektedir. DME tabanlı dayanıklı DTGB (2.66) ise tüm kütle değerleri için birbirine çok daha yakın özelliklere sahip yanıtlar vermektedir. Şimdi PBDZD sistemler için ÇTGB tasarımı üzerine yoğunlaşalım. Performans ağırlıklandırma matrisleri yine (2.35) ve (2.36) olarak alındığında ÇTGB LQ optimal kontrol kazancı [Abdelaziz 2010] çalışmasında (2.39) ile verilmiştir. Bu çalışmada ise performans ağırlıklandırma matrisleri (2.35) ve (2.36) için $\mathbf{C}_z = \mathbf{I}$ seçildiğinde Teorem 2.4 aracılığı ile ÇTGB dayanıklı LQ optimal kontrol kazancı

$$\mathbf{K}_{odf3} = \begin{bmatrix} 36.1061 & 32.8109 \\ 45.9592 & 47.3626 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanmıştır. Modeli (2.35) ile verilen sistemin $x(0) = [0.04 \quad 0.02 \quad 0.01 \quad -0.02]^T$ başlangıç koşulları altındaki yanıtları Şekil 2.5 ile incelenmektedir.



Şekil 2. 5 DME tabanlı dayanıklı ÇTGB ve CRE tabanlı ÇTGB kontrolörler için titreşim soğurucu sistem yanıtları

Şekil 2.5 içerisinde CRE tabanlı yaklaşıma yer verilmemiştir çünkü (2.40) kontrolörü söz konusu parametre değişimlerine karşı kararlılığını koruyamamaktadır. Hız ve ivme yanıtları incelendiğinde DME tabanlı dayanıklı tasarıma ait yanıtların özellikleri parametre değişimlerine karşı daha duyarsız yanıtlar sağladığı açıkça görülmektedir. Yapılan benzetim çalışmaları sonucunda [45] ile önerilen CRE tabanlı tasarımlar parametre belirsizlikleri söz konusu olduğunda performans kaybı yaşamakta olduğu ortaya konmuştur. Teorem 2.3 ve Teorem 2.4 ile verilen tasarımlar ise parametre değişimlerine karşı son derece dayanıklı bir performansa sahiptir. Bundan sonraki kısımda sistem parametrelerindeki değişimlerin ölçülebilir olduğu durumda CRE tabanlı tasarım ile DME tabanlı parametre bağımlı tasarımlar karşılaştırılacaktır. Bu sebep ile çalışmanın devamında, sistemdeki parametre değişimlerini DPD sistem çerçevesinde ele alan DTGB ve ÇTGB DPD LQ optimal kontrolörlerin DME tabanlı sentezlerine yer verilecektir.

2.5 Parametre Bağımlı Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli LQ Optimal Kontrolörlerin Tasarımı

Bu bölümde bir sayısal örnek üzerinden önerilen DME tabanlı DTGB ve ÇTGB dayanıklı LQ optimal kontrolörlerin Bir Doğrusal Parametre Değişimli (DPD) sistem durum uzay formunda

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{B}_2(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{u}(t) \tag{2.63}$$

olarak yazılabilir. Burada $\boldsymbol{x}(t) \in \Re^n$ durum vektörünü; $\boldsymbol{u}(t) \in \Re^m$ kontrol girişi vektörünü göstermektedir ve $\mathbf{A}(\cdot) \in \Re^{n\times n}$ matrisi ise

$$P = \left\{\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t)) : \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t)) = \sum_{j=1}^{N} \theta_j(t)\,\mathbf{A}_j,\ \sum_{j=1}^{N} \theta_j(t) = 1,\ \theta_j(t) \geq 0,\ j = 1,\ldots,N\right\} \tag{2.64}$$

ile verilen P politopu tarafından kapsanmaktadır. Bir başka deyişle sistem matrisi zamanla değişen ve gerçek zamanlı olarak ölçülebilen

$$\theta(t) = \left[\theta_1(t) \quad \ldots \quad \theta_N(t)\right]^{\mathrm{T}},\ \sum_{j=1}^{N} \theta_j(t) = 1,\ \theta_j(t) \geq 0,\ j = 1,\ldots,N \tag{2.65}$$

parametre vektörüne bağlıdır. Bu çalışmada amaç, (2.1) ile verilen performans ölçütünü minimum kılacak parametre bağımlı durum türevi geri beslemeli kontrol kanunu hesaplamaktır. Parametre bağımlı durum türevi geri beslemeli kontrol kanunu

$$\boldsymbol{u}(t) = \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t))\dot{\boldsymbol{x}}(t) \tag{2.66}$$

olarak tanımlansın. Burada parametre bağımlı kontrol kazancı

$$\mathbf{K}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right) = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\theta}_j(t)\mathbf{K}_j,\ \sum_{j=1}^{N} \theta_j(t) = 1,\ \theta_j(t) \geq 0,\ j = 1,\ldots,N \tag{2.67}$$

biçimindedir. DPD kapalı çevrim sistem evrik durum uzay formunda

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{A}^{-1}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right)\left(\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right)\right)\dot{\boldsymbol{x}}\left(t\right) \tag{2.68}$$

biçiminde elde edilir. Parametre bağımlı durum türevi geri beslemeli LQ optimal kontrolör sentezini veren Teorem 2.5 aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Teorem 2.5 Verilmiş olan $\mathbf{Q}$ ve $\mathbf{R}$ performans ağırlıklandırma matrisleri için, evrik durum uzay formundaki (2.74) DPD kapalı çevrim sistemini kararlı kılan ve (2.1)

performans ölçütünü minimize eden parametre bağımlı durum türevi geri beslemeli kontrol kanunu,

min $iz(\mathbf{M})$, koşullar:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} - \mathbf{B}_2\mathbf{W}_j\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}_j\mathbf{Z} - \mathbf{A}_j\mathbf{W}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}_j\mathbf{Z}\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}_j\mathbf{W}_j^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} & -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ \mathbf{W}_j\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} & 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0, \; j = 1, \ldots, N \tag{2.69}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} + \mathbf{Z}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}} - \mathbf{B}_2\mathbf{W}_k\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} - \mathbf{B}_2\mathbf{W}_j\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}_j\mathbf{Z} + \mathbf{A}_k\mathbf{Z} - \mathbf{A}_k\mathbf{W}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} - \mathbf{A}_j\mathbf{W}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \cdots \\ \mathbf{C}_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} + \mathbf{C}_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}} & \\ \mathbf{W}_j\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{W}_k\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_j\mathbf{Z}\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}_k\mathbf{Z}\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}_j\mathbf{W}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}_k\mathbf{W}_j^{\mathrm{T}} \\ -2\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ 0 & -2\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{2.70}$$

$$j = 1, \ldots, N-1, k = j+1, \ldots, N$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Z} \end{bmatrix} \succ 0 \tag{2.71}$$

ile verilen dışbükey optimizasyon probleminin çözümünden, $\boldsymbol{u}(t) = \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t))\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\theta}_j(t)\mathbf{K}_j \, \dot{\boldsymbol{x}}(t)$ olarak elde edilebilir. Burada $\mathbf{K}_j = \mathbf{W}_j\mathbf{Z}^{-1}$ olarak tanımlanmıştır.

İspat: Kontrol kanunu (2.66), performans ölçütü (2.1) ifadesi içerisinde yazıldığında

$$J = \int_0^{\infty} \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)(\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{C}_{\mathbf{z}} + \mathbf{K}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{R}\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t)))\dot{\boldsymbol{x}}(t)dt \tag{2.72}$$

elde edilir. Bir pozitif yarı tanımlı bir $\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}(t)) \in \Re^{n \times n}$ matrisi tanımlanır ve

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\left(\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{C}_{\mathbf{z}} + \mathbf{K}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{R}\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t))\right)\dot{\boldsymbol{x}}(t) = -\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{x}(t)\right) \tag{2.73}$$

eşitliğini sağladığını kabul edecek olursak. (2.73) ifadesinin integrali alındığında

$$\begin{aligned} J = & \int_0^{\infty} \left[\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\left(\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{C}_{\mathbf{z}} + \mathbf{K}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{R}\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t))\right)\dot{\boldsymbol{x}}(t)\right]dt = \\ & -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{x}(t)\Big|_0^{\infty} = -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\infty)\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{x}(\infty) + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{x}(0) \end{aligned} \tag{2.74}$$

ifadesi elde edilir. DPD evrik durum uzay formunda kapalı çevrim sistem (2.68) kararlı kabul edildiğinde $\boldsymbol{x}(\infty)$ ifadesi ortadan kaybolmaktadır ve maliyet fonksiyonunun değeri

$$J = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\,\mathbf{P}\big(\boldsymbol{\theta}(t)\big)\boldsymbol{x}(0) \tag{2.75}$$

olmaktadır. Bu aşamada bir $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^{\mathrm{T}} \succ \mathbf{P}\big(\boldsymbol{\theta}(t)\big)$ değişkeni tanımlayarak (2.73) eşitliğinde yerine yazacak olursak

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)(\mathbf{Q}+\mathbf{K}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{R}\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t)))\dot{\boldsymbol{x}}(t) < -\frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{Y}\,\boldsymbol{x}(t)) \tag{2.76}$$

elde edilir. DPD evrik durum uzay formundaki kapalı çevrim sistem (2.40), (2.76) içerisinde yerine konulduğunda

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\,\boldsymbol{\Psi}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t) < 0 \tag{2.77}$$

elde edilir. Burada $\boldsymbol{\Psi}$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Psi} = {} & \mathbf{Y}\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta}(t))(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t)))+(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t)))^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t))\,\mathbf{Y}+\\ & \mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{C}_{\mathbf{z}}+\mathbf{K}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{R}\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t))\end{aligned} \tag{2.78}$$

ile verilmektedir. Yardımcı Teorem 2.1 ile verilmiş olan Schur tümleyen kullanıldığında, (2.78) ile (2.79) denktir.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Xi} & \mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{K}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t)) \\ \mathbf{C}_{\mathbf{z}} & -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t)) & 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0$$
$$\boldsymbol{\Xi} = \mathbf{Y}\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta}(t))(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t)))+(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t)))^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t)) \tag{2.79}$$

Yeni bir değişken olarak $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Y}^{-1}$ tanımlanıp, (2.79) koşulu solundan ve sağından sırası ile $diag(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{Z},\mathbf{I},\mathbf{I})$ ve $diag(\mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t)),\mathbf{I},\mathbf{I})$ matrisleri ile çarpılırsa

$$\begin{bmatrix} \big(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\big(\boldsymbol{\theta}(t)\big)\big)\mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\big(\boldsymbol{\theta}(t)\big)+\mathbf{A}\big(\boldsymbol{\theta}(t)\big)\mathbf{Z}\big(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\big(\boldsymbol{\theta}(t)\big)\big)^{\mathrm{T}} & & \\ \mathbf{C}_{\mathbf{z}}\mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\big(\boldsymbol{\theta}(t)\big) & \cdots & \\ \mathbf{K}^{\mathrm{T}}\big(\boldsymbol{\theta}(t)\big)\mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\big(\boldsymbol{\theta}(t)\big) & & \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\big(\boldsymbol{\theta}(t)\big)\mathbf{Z}\mathbf{C}_{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}\big(\boldsymbol{\theta}(t)\big)\mathbf{Z}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\big(\boldsymbol{\theta}(t)\big) \\ -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{2.80}$$

yazılabilir. $\mathbf{W}(\boldsymbol{\theta}(t))=\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{Z}$ değişken dönüşümü uygulandığında

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t))-\mathbf{B}_2\mathbf{W}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t))+\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{Z}-\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{W}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \cdots \\ \mathbf{C}_{\mathrm{z}}\mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t)) & \\ \mathbf{W}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t)) & \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{Z}\mathbf{C}_{\mathrm{z}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{W}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t)) \\ -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0 \qquad (2.81)$$

ifadesi elde edilmektedir. Yardımcı Teorem 2.3 kullanıldığında (2.81) ifadesi bizi (2.69) ve (2.70) koşullarına götürmektedir. Performans ölçütünün minimizasyonu için (2.71) ifadesinin elde edilişi ise Teorem 2.1 içerisinde açıklanmıştır. ■

DPD sistem (2.68) için performans ölçütü (2.1) ifadesini minimum kılan,

$$\boldsymbol{u}(t)=\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t))\dot{\boldsymbol{y}}(t) \qquad (2.82)$$

Parametre bağımlı ÇTGB kontrol kanununu ele alalım. Burada, $\dot{\boldsymbol{y}}(t)=\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ türevi ölçülebilen çıkış vektörüdür ve parametre bağımlı kontrol kazancı

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t))=\sum_{j=1}^{N}\theta_j(t)\mathbf{K}_j,\ \sum_{j=1}^{N}\theta_j(t)=1,\ \theta_j(t)\geq 0,\ j=1,\ldots,N \qquad (2.83)$$

Biçimindedir. DPD kapalı çevrim sistem evrik durum uzay formunda

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta}(t))(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{C}_{\mathrm{y}})\dot{\boldsymbol{x}}(t) \qquad (2.84)$$

biçiminde elde edilir. Parametre bağımlı ÇTGB LQ optimal kontrolör sentezini veren Teorem 2.6 aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Teorem 2.6 Verilmiş olan $\mathbf{Q}$ ve $\mathbf{R}$ performans ağırlıklandırma matrisleri ve bir μ skaleri için, evrik durum uzay formundaki (2.84) DPD kapalı çevrim sistemini kararlı kılan ve (2.1) performans ölçütünü minimize eden parametre bağımlı durum türevi geri beslemeli kontrol kanunu,

min $iz(\mathbf{M})$, koşullar:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}-\mathbf{B}_2\mathbf{W}_j\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{A}_j\mathbf{Z}-\mathbf{A}_j\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}_j\mathbf{Z}\mathbf{C}_{\mathrm{z}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}_j\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_j^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}_{\mathrm{z}}\mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} & -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ \mathbf{W}_j\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} & 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0,\ j=1,\ldots,N \qquad (2.85)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{Z}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}-\mathbf{B}_2\mathbf{W}_k\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}-\mathbf{B}_2\mathbf{W}_j\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}+\mathbf{A}_j\mathbf{Z}+\mathbf{A}_k\mathbf{Z}-\mathbf{A}_k\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}-\mathbf{A}_j\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \cdots \\ \mathbf{C}_{\mathrm{z}}\mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{C}_{\mathrm{z}}\mathbf{Z}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}} & \\ \mathbf{W}_j\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}+\mathbf{W}_k\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_j\mathbf{Z}\mathbf{C}_{\mathrm{z}}^{\mathrm{T}}+\mathbf{A}_k\mathbf{Z}\mathbf{C}_{\mathrm{z}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}_j\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_k^{\mathrm{T}}+\mathbf{A}_k\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_j^{\mathrm{T}} \\ -2\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ 0 & -2\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0,$$

$$j=1,\ldots,N-1, k=j+1,\ldots,N \tag{2.86}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Z} \end{bmatrix} \succ 0 \tag{2.87}$$

$$\begin{bmatrix} \mu\mathbf{I} & \left(\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{Z}-\mathbf{S}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)^{\mathrm{T}} \\ \left(\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{Z}-\mathbf{S}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right) & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0 \tag{2.88}$$

ile verilen dışbükey optimizasyon probleminin çözümünden, $\boldsymbol{u}(t)=\mathbf{K}\left(\theta(t)\right)\dot{\boldsymbol{y}}(t)=\sum_{j=1}^{N}\theta_j(t)\mathbf{K}_j\,\dot{\boldsymbol{y}}(t)$ olarak elde edilebilir. Burada $\mathbf{K}_j=\mathbf{W}_j\mathbf{S}^{-1}$ olarak tanımlanmıştır.

İspat: Kontrol kanunu (2.82), performans ölçütü (2.1) ifadesi içerisinde yazıldığında

$$J=\int_0^{\infty}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)(\mathbf{C}_{\mathrm{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{C}_{\mathrm{z}}+\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{R}\mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{C}_{\mathrm{y}})\dot{\boldsymbol{x}}(t)dt \tag{2.89}$$

elde edilir. Bir pozitif yarı tanımlı bir $\mathbf{P}\left(\theta(t)\right)\in\Re^{n\times n}$ matrisi tanımlanır ve

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)(\mathbf{C}_{\mathrm{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{C}_{\mathrm{z}}+\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{R}\mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{C}_{\mathrm{y}})\dot{\boldsymbol{x}}(t)=-\frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(\theta(t))\boldsymbol{x}(t)) \tag{2.90}$$

eşitliğini sağladığını kabul edecek olursak. (2.89) ifadesinin integrali alındığında

$$\begin{aligned} J=&\int_0^{\infty}\left[\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)(\mathbf{C}_{\mathrm{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{C}_{\mathrm{z}}+\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{R}\mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{C}_{\mathrm{y}})\dot{\boldsymbol{x}}(t)\right]dt= \\ &-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(\theta(t))\boldsymbol{x}(t)\Big|_0^{\infty}=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\infty)\mathbf{P}(\theta(t))\boldsymbol{x}(\infty)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\mathbf{P}(\theta(t))\boldsymbol{x}(0) \end{aligned} \tag{2.91}$$

ifadesi elde edilir. DPD evrik durum uzay formunda kapalı çevrim sistem (2.84) kararlı kabul edildiğinde $\boldsymbol{x}(\infty)$ ifadesi ortadan kaybolmaktadır ve maliyet fonksiyonunun değeri

$$J = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{x}(0) \tag{2.92}$$

olmaktadır. Bu aşamada bir $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^{\mathrm{T}} \succ \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}(t))$ değişkeni tanımlayarak (2.95) eşitliğinde yerine yazacak olursak

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)(\mathbf{C}_{\mathrm{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{C}_{\mathrm{z}} + \mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{R}\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{C}_{\mathrm{y}})\dot{\boldsymbol{x}}(t) < -\frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{Y}\,\boldsymbol{x}(t)) \tag{2.93}$$

elde edilir. DPD evrik durum uzay formundaki kapalı çevrim sistem (2.84), (2.93) içerisinde yerine konulduğunda

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Psi}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t) < 0 \tag{2.94}$$

elde edilir. Burada $\boldsymbol{\Psi}$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Psi} = {} & \mathbf{Y}\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta}(t))(\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t))) + (\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t)))^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{Y} + \\ & \mathbf{C}_{\mathrm{z}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{C}_{\mathrm{z}} + \mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{R}\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\end{aligned} \tag{2.95}$$

ile verilmektedir. Yardımcı Teorem 2.1 ile verilmiş olan Schur tümleyen kullanıldığında, (2.95) ile (2.96) denktir.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Xi} & \mathbf{C}_{\mathrm{z}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t)) \\ \mathbf{C}_{\mathrm{z}} & -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{C}_{\mathrm{y}} & 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0$$
$$\boldsymbol{\Xi} = \mathbf{Y}\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta}(t))(\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{C}_{\mathrm{y}}) + (\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{C}_{\mathrm{y}})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t)) \tag{2.96}$$

Yeni bir değişken olarak $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Y}^{-1}$ tanımlanıp, (2.96) koşulu solundan ve sağından sırası ile $diag(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{Z}, \mathbf{I}, \mathbf{I})$ ve $diag(\mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t)), \mathbf{I}, \mathbf{I})$ matrisleri ile çarpılırsa

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{C}_{\mathrm{y}})\mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t)) + \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{C}_{\mathrm{y}})^{\mathrm{T}} & \cdots \\ \mathbf{C}_{\mathrm{z}}\mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t)) & \\ \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t)) & \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{Z}\mathbf{C}_{\mathrm{z}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{Z}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}(t)) \\ -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{2.97}$$

yazılabilir. Burada, $\mathbf{C}_y\mathbf{Z}=\mathbf{S}\mathbf{C}_y$ kabulü ve $\mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{S}=\mathbf{W}(\theta(t))$ değişken dönüşümü ile

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\theta(t))-\mathbf{B}_2\mathbf{W}(\theta(t))\mathbf{C}_y\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\theta(t))+\mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z}-\mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{C}_y^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \cdots \\ \mathbf{C}_z\mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\theta(t)) & \\ \mathbf{W}(\theta(t))\mathbf{C}_y\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\theta(t)) & \end{bmatrix} \tag{2.98}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z}\mathbf{C}_z^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{C}_y^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}(\theta(t)) \\ -\mathbf{Q}^{-1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} \prec 0$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 2.3 kullanıldığında (2.98) koşulundan (2.85) ve (2.86) koşulları elde edilmiş olunur. $\mathbf{C}_y\mathbf{Z}=\mathbf{S}\mathbf{C}_y$ eşitliği ise Yardımcı Teorem 2.2 sayesinde (2.88) DME olarak parametre bağımlı çıkış türevi geri beslemeli kontrolör tasarımında kullanılabilir. Performans ölçütünün minimizasyonu için (2.87) ifadesinin elde edilişi ise Teorem 2.1 içerisinde açıklanmıştır. ■

2.6 Doğrusal Matris Eşitsizlikleri Tabanlı Parametre Bağımlı Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli LQ Optimal Kontrolör Tasarımlarının Cebirsel Riccati Eşitliği Tabanlı Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli Kontrolörler ile Karşılaştırılması

Bu bölümde bir sayısal örnek üzerinden önerilen DME tabanlı DTGB ve ÇTGB parametre bağımlı LQ optimal kontrolörlerin Abdelaziz [Abdelaziz 2010] tarafından önerilmiş olan CRE tabanlı DTGB ve ÇTGB LQ optimal tasarımlar ile karşılaştırılması amaçlanmıştır. Kullanılan sayısal örnek model (2.35) ile Bölüm 2.2 içerisinde verilmiştir. Performans ağırlıklandırma matrisleri olarak (2.36) ve (2.37) kullanıldığında elde edilen, DTGB LQ optimal kontrol kazancı (2.37) ile görülmektedir

Bu çalışmada ise aynı performans ağırlıklandırma matrisleri (2.36) ve (2.37) için DTGB dayanıklı LQ optimal kontrolör tasarlanacaktır. Bölüm 2.2 de verilen parametreler arasından kütle değeri bu sefer $m=[5\ \ 20]$ kg aralığında değişken alınarak sistem yanıtları incelenecektir. Parametre değişimlerine göre kendini ayarlayabilen kontrolör tasarımı için sistem DPD durum uzay biçiminde ifade edilmelidir. Fakat (2.62) ile verilen denklemden görüldüğü üzere $\mathbf{B}_2$ matrisi parametre bağımlı olarak seçilememektedir. Kütlenin değişimi söz konusu olduğunda kontrol girişi matrisinin de DPD biçiminde olması gerektiği için,

$$\frac{U_1(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \leftrightarrow \dot{u}_1(t) = -\frac{1}{\tau} u_1(t) + \frac{1}{\tau} v_1(t) \tag{2.99}$$

$$\frac{U_2(s)}{V_2(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \leftrightarrow \dot{u}_2(t) = -\frac{1}{\tau} u_2(t) + \frac{1}{\tau} v_2(t) \tag{2.100}$$

ile verilen birinci mertebe filtreler ile kontrol giriş matrisini sistem matrisine katacak olursak, (2.34) modeli (2.104) ve (2.105) dinamikleri ile beraber;

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \left(\tilde{\mathbf{A}}_0 + \boldsymbol{\alpha}(t)\,\tilde{\mathbf{A}}_1\right)\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{B}_2\,\boldsymbol{u}(t) \tag{2.101}$$

biçiminde DPD sistem olarak ifade edilebilir. Burada $\boldsymbol{\alpha}(t) = 1/m$ olarak seçilmiştir ve

$$\tilde{\mathbf{A}}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \tag{2.102}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 z_1 & -k_2 z_2 & -b_1 z_1 & -b_2 z_2 & z_1 & z_2 \\ -k_1 z_2 & -k_2 z_2 & -b_1 z_2 & -b_2 z_1 & z_2 & z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.103}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1/\tau & 0 \\ 0 & 1/\tau \end{bmatrix} \tag{2.104}$$

Burada, $z_1 = \left(1 + 10L^2/J\right)$ ve $z_2 = \left(1 - 10L^2/J\right)$ olarak verilmiştir. (2.102) ve (2.103) matrisleri cinsinden (2.68) ifadesindeki politopik bağımlı DPD sistem matrisi

$$\mathbf{A}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right) = \sum_{j=1}^{2} \boldsymbol{\theta}_j(t)\,\mathbf{A}_j \tag{2.105}$$

şeklinde inşaa edilebilir. Burada $\theta_j(t)$ ifadesi

$$\theta_1 = \frac{\overline{\alpha} - \alpha}{\overline{\alpha} - \underline{\alpha}} \tag{2.106}$$

$$\theta_2 = \frac{\alpha - \underline{\alpha}}{\overline{\alpha} - \underline{\alpha}} \tag{2.107}$$

olarak verilmektedir ve politopik koordinatları göstermektedir; $\mathbf{A}_j$ ise

$$\mathbf{A}_1 = \tilde{\mathbf{A}}_0 + \underline{\alpha}\,\tilde{\mathbf{A}}_1 \tag{2.108}$$

$$\mathbf{A}_2 = \tilde{\mathbf{A}}_0 + \overline{\alpha}\,\tilde{\mathbf{A}}_1 \tag{2.109}$$

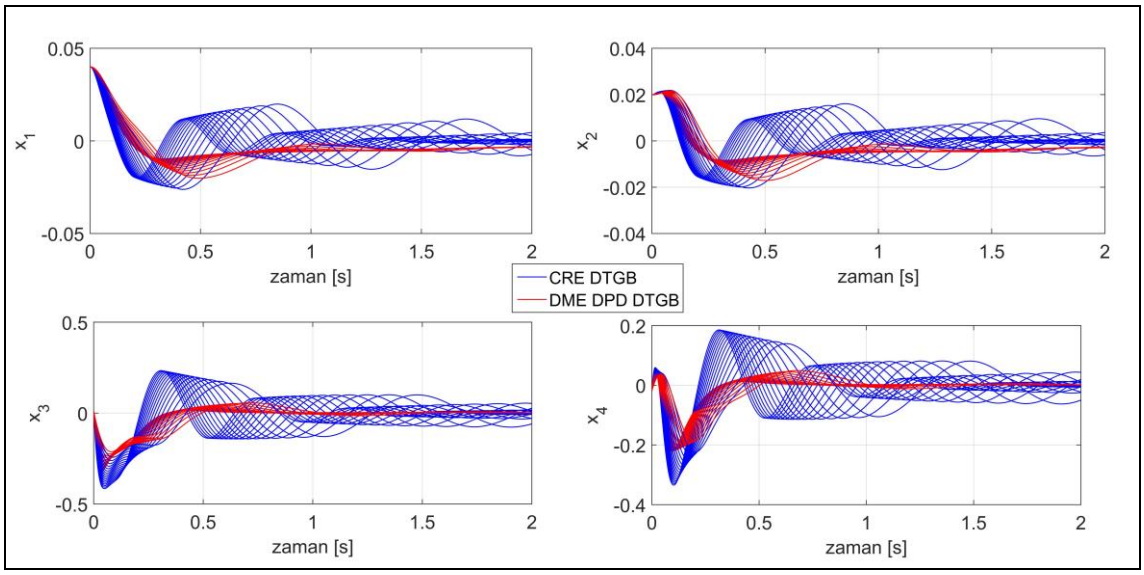
0larak verilmektedir ve politop köşelerini göstermektedir. Söz konusu DPD model için $\mathbf{C}_z = \mathbf{I}$ seçildiğinde Teorem 2.5 aracılığı ile DTGB parametre bağımlı LQ optimal kontrolör

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} -134.1899 & -73.6485 & 49.9261 & 45.6662 & 2.3154 & 0.1400 \\ -122.8198 & -122.4099 & 37.7058 & 40.0178 & 0.2629 & 2.1923 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} -134.1958 & -73.6534 & 49.9266 & 45.6667 & 2.3154 & 0.1400 \\ -122.8255 & -122.4157 & 37.7061 & 40.0181 & 0.2629 & 2.1924 \end{bmatrix}$$

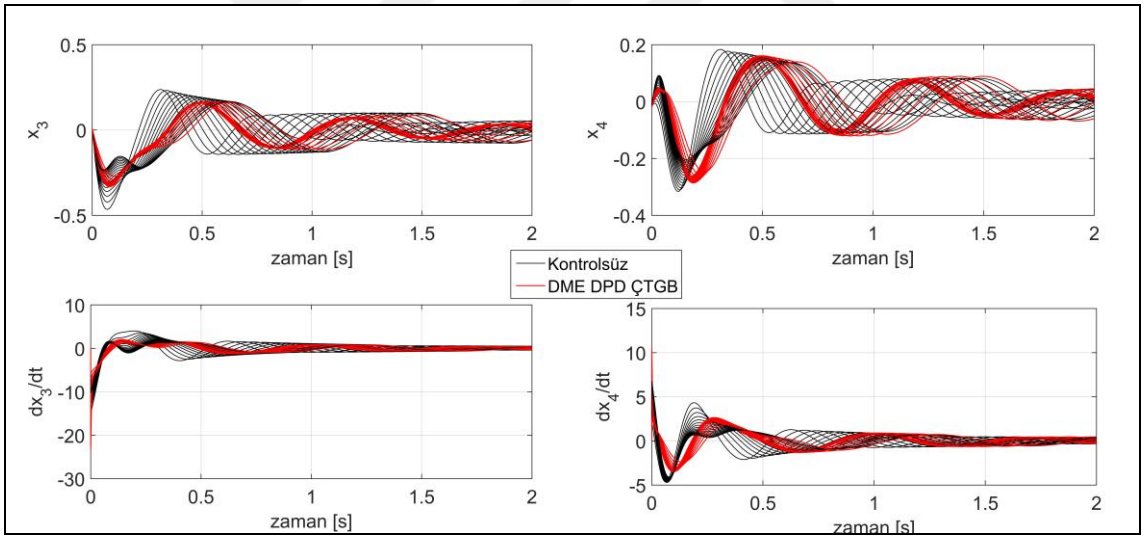
şeklinde hesaplanmıştır. (2.37) ve (2.109-110) ile verilen kontrol kazançları kullanıldığında modeli (2.34) ile verilen sistemin $\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.02 & 0.01 & -0.02 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ başlangıç koşulları altında farklı kütle değerleri karşısındaki yanıtları her iki kontrolör için Şekil 2.6 da incelenmektedir.

Şekil 2.6 da açıkça görüldüğü üzere CRE tabanlı tasarım (2.38) parametre değişimlerinden etkilenerek farklı doğal frekans ve sönüm oranı değerlerine sahip yanıtlar vermektedir. DME tabanlı DPD DTGB LQ optimal kontrolör ise tüm kütle değerleri için birbirine çok daha yakın özelliklere sahip yanıtlar vermektedir. Şimdi DPD sistemler için ÇTGB tasarımı üzerine yoğunlaşalım. Performans ağırlıklandırma matrisleri yine (2.36) ve (2.37) olarak alındığında ÇTGB LQ kontrol kazancı [45] çalışmasında verilmiştir.



Şekil 2. 6 DME tabanlı dayanıklı DTGB ve CRE tabanlı DTGB kontrolörler için titreşim soğurucu sistem yanıtları

Bu çalışmada ise performans ağırlıklandırma matrisleri (2.36) ve (2.37) için $\mathbf{C}_z = \mathbf{I}$ seçilmiştir.



Şekil 2. 7 DME tabanlı dayanıklı ÇTGB ve CRE tabanlı ÇTGB kontrolörler için titreşim soğurucu sistem yanıtları

Teorem 2.6 aracılığı ile ÇTGB parametre bağımlı LQ optimal kontrol kazançları

$$\mathbf{K}_{\text{odf}1} = \begin{bmatrix} 2.1560 & 1.5007 \\ 2.0791 & 2.6836 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\text{odf}2} = \begin{bmatrix} -0.1121 & -0.5512 \\ 0.2856 & 0.9966 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanmıştır. Modeli (2.35) ile verilen sistemin $\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.02 & 0.01 & -0.02 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ başlangıç koşulları altında farklı kütle değerleri karşısındaki yanıtları Şekil 2.7 ile incelenmektedir.

Şekil 2.7 içerisinde CRE tabanlı yaklaşıma yer verilmemiştir çünkü (2.39) kontrolörü söz konusu parametre değişimlerine karşı kararlılığını koruyamamaktadır. Hız ve ivme yanıtları incelendiğinde DME tabanlı dayanıklı tasarıma ait yanıtların özellikleri parametre değişimlerine karşı daha duyarsız yanıtlar sağladığı açıkça görülmektedir. Yapılan benzetim çalışmaları sonucunda [Abdelaziz 2010] ile önerilen CRE tabanlı tasarımlar parametre belirsizlikleri söz konusu olduğunda performans kaybı yaşamakta olduğu ortaya konmuştur. Teorem 2.5 ve Teorem 2.5 ile verilen tasarımlar ise parametre değişimlerine karşı ayarlanabilen kazançları sayesinde daha yüksek bir titreşim soğurma performansına sahiptir.

Yapılan sayısal benzetim çalışmaları bölüm boyunca sentezlenen DME tabanlı DTB ve ÇTGB kontrol kanunlarının CRE tabanlı yaklaşımla kıyaslanmasına olanak sağlamıştır. DZD sistemler özelinde DME tabanlı yaklaşım ile çarpıcı bir üstünlük elde edilmekte hatta DTGB durumunda CRE ile neredeyse aynı kazançlar hesaplanmaktadır. Fakat, parametre belirsizliklere ele alındığı anda PBDZD ve DPD sistem formülasyonlarında dayanıklı ve parametre bağımlı DME tabanlı yaklaşımlar çok daha iyi bir performans sergilemekte, kararlılığı garanti etmektedir.

BÖLÜM 3

DOĞRUSAL MATRİS EŞİTSİZLİKLERİ YAKLAŞIMI İLE L_2 KAZANÇLI DURUM VE ÇIKIŞ TÜREVİ GERİ BESLEMELİ KONTROL PROBLEMİ

Bu bölümde, DZD sistemler, PBDZD sistemler, DPD sistemler için DTGB ve ÇTGB kontrolörlerin tasarımına yönelik DME tabanlı sentezler geliştirilmesi amaçlanmıştır. İlgili kontrol kanunları

$$\frac{\|\boldsymbol{z}(t)\|_2}{\|\boldsymbol{w}(t)\|_2} < \gamma \tag{3.1}$$

ile verilen L_2 kazancını minimize edecek şekilde seçilecek olursa, L_2 kazançlı DTGB ve ÇTGB kontrol kanunları elde edilmiş olur. Burada, $\boldsymbol{z}(t)$ kontrol edilmek istenen çıkışlar vektörüdür.

İlk olarak Bölüm 3.1 içerisinde DZD sistemler için DTGB ve ÇTGB L_2 kazançlı kontrolörlerin sentezi ele alınmıştır. Ardından PBDZD sistemler için DTGB ve ÇTGB kontrolörlerin DME tabanlı sentezleri Bölüm 3.2 ile verilmiştir. DTGB ve ÇTGB L_2 kazançlı kontrolörlerin DPD sistemleri için tasarımı Bölüm 3.3 içerisinde sunulmuştur.

3.1 Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli L_2 Kazançlı Kontrolörlerin Tasarımı

Bir Doğrusal Zamanla Değişmeyen (DZD) sistem durum uzay formunda

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \mathbf{A}\,\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{B}_1\,\boldsymbol{w}(t) + \mathbf{B}_2\,\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) &= \mathbf{C}\,\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{D}\,\boldsymbol{w}(t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

olarak ele alınsın. Burada $x(t) \in \Re^n$ durum vektörünü; $\boldsymbol{w}(t) \in \Re^p$ bozucu giriş vektörünü; $\boldsymbol{u}(t) \in \Re^m$ kontrol girişi vektörünü; $\boldsymbol{z}(t) \in \Re^q$ ise kontrol edilmek istenen

çıkışlar vektörünü göstermektedir. $\mathbf{A} \in \Re^{n\times n}$ durum matrisini; $\mathbf{B}_1 \in \Re^{n\times p}$ kontrol girişi matrisini; $\mathbf{B}_2 \in \Re^{n\times m}$ ise kontrol girişi matrisini göstermektedir. $\mathbf{C} \in \Re^{q\times n}$ ve $\mathbf{D} \in \Re^{q\times p}$ matrisleri ise kontrol edilmek istene çıkışlar vektörünü oluşturmaktadır. Burada amaç, (3.1) ile verilmiş olan L_2 kazancını minimum kılan,

$$\boldsymbol{u}(t) = \mathbf{K}\, \dot{\boldsymbol{x}}(t) \tag{3.3}$$

DTGB kontrol kanunu hesaplamaktır. Kontrol kanunu (3.3) vasıtasıyla DZD kapalı çevrim sistem durum uzay formunda

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \mathbf{A}_{\mathrm{d}}\, \boldsymbol{x}(t) + \mathbf{B}_{\mathrm{d}}\, \boldsymbol{w}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) &= \mathbf{C}_{\mathrm{d}}\, \boldsymbol{x}(t) + \mathbf{D}_{\mathrm{d}}\, \boldsymbol{w}(t) \end{aligned} \tag{3.4}$$

olarak yazılabilir. Burada kapalı çevrim durum uzay matrisleri $\mathbf{A}_{\mathrm{d}} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{A}$; $\mathbf{B}_{\mathrm{d}} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}_1$; $\mathbf{C}_{\mathrm{d}} = \mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}_{\mathrm{d}} = \mathbf{D}$ olarak verilmektedir. DTGB L_2 kazançlı kontrolör sentezini veren Teorem 3.1 aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Teorem 3.1 (3.4) *kapalı çevrim sisteminin asimptotik kararlılığı ve* γ *gibi bir pozitif reel sayıdan küçük* L_2 *kazancına sahip olması için* $\mathbf{Z} \in \Re^{n\times n}$ *pozitif tanımlı simetrik matrisi ve* $\mathbf{W} \in \Re^{m\times n}$ *matrisi*

min γ, *koşullar:*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Z} - \mathbf{B}_2\mathbf{W}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \mathbf{A}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{Z}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} - \mathbf{B}_2\mathbf{W}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}\mathbf{Z} - \mathbf{C}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{D} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{3.5}$$

ile verilen dışbükey optimizasyon probleminin çözümünden elde edilebilirse; kapalı çevrim sistemin $\boldsymbol{w}(t)$ *bozucularından* $\boldsymbol{z}(t)$ *performans çıkışlarına olan* L_2 *kazancını* γ *gibi bir pozitif reel sayıdan küçük kılan durum türevi geri beslemeli kontrolör* $\boldsymbol{u}(t) = \mathbf{K}\, \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{W}\mathbf{Z}^{-1}\, \dot{\boldsymbol{x}}(t)$ *olarak hesaplanabilir.*

İspat: Durum uzay formunda ifade DZD kapalı çevrim sistemlerin L_2 kazancı Yardımcı Teorem 3.1 ile hesaplanabilir.

Yardımcı Teorem 3.1 [62] *Kapalı çevrim sistem* (3.4) *için bir* $\mathbf{P} \in \Re^{n\times n}$ *pozitif tanımlı simetrik matrisi*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_d^T\mathbf{P}+\mathbf{A}_d\mathbf{P} & \mathbf{P}\mathbf{B}_d & \mathbf{C}_d^T \\ \mathbf{B}_d^T\mathbf{P} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_d^T \\ \mathbf{C}_d & \mathbf{D}_d & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{3.6}$$

koşulu altında bulunabiliyorsa, kapalı çevrim sistem (3.4) için L_2 kazanç koşulu(3.1) sağlanmaktadır.

Kapalı çevrim sistem (3.4) durum uzay matrisleri (3.6) içerisinde yerlerine yazıldığında

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K})^{-T}\mathbf{P}+\mathbf{P}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{A} & \mathbf{P}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}_1 & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}_1^T(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K})^{-T}\mathbf{P} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.7) eşitsizliği $diag\left((\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K})\mathbf{Z},\mathbf{I},\mathbf{I}\right)$ ve $diag\left(\mathbf{Z}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K})^T,\mathbf{I},\mathbf{I}\right)$ ifadeleri ile solundan ve sağından çarpıldığında (3.7) kısıtı (3.8)' e denktir.

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K})\mathbf{Z}\mathbf{A}^T+\mathbf{A}\mathbf{Z}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K})^T & \mathbf{B}_1 & (\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K})\mathbf{Z}\mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}_1^T & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{C}\mathbf{Z}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K})^T & \mathbf{D} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{3.8}$$

Burada $\mathbf{Z}=\mathbf{Z}^T=\mathbf{P}^{-1}$ olarak seçilmiştir ve $\mathbf{W}=\mathbf{K}\mathbf{Z}$ değişken dönüşümü uygulandığında DME (3.5) elde edilmiş olur. ■

Yorum 3.1: *Teorem* 3.1 *ile verilmiş olan L_2 kazançlı DTGB kontrolör tasarımında kontrol edilmek istenen çıkışlar vektörü durum vektörü $\boldsymbol{x}(t)$ ve bozucu vektörü $\boldsymbol{w}(t)$ değişkenlerinin fonksiyonları olarak ifade edilebilmektedir. Bazı mühendislik problemleri özelinde ise $\boldsymbol{u}(t)$ kontrol girişleri değişkenin kontrol edilmek istenen çıkışlar vektöründe yer alması önem arz etmektedir.*

Bu bilgiler ışığında alternatif bir L_2 kazançlı DTGB tasarımı için bir DZD sistem durum uzay formunda

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \mathbf{A}\,\boldsymbol{x}(t)+\mathbf{B}_1\,\boldsymbol{w}(t)+\mathbf{B}_2\,\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) &= \mathbf{C}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\mathbf{D}_1\,\boldsymbol{w}(t)+\mathbf{D}_2\,\boldsymbol{u}(t) \end{aligned} \tag{3.9}$$

olarak tekrar yazılabilir. DTGB kontrol kanunu (3.3); (3.9) içerisine yazıldığında evrik durum uzay formundaki kapalı çevrim sistem

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\right)\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_1\,\boldsymbol{w}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) &= \left(\mathbf{C}+\mathbf{D}_2\mathbf{K}\right)\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \mathbf{D}_1\,\boldsymbol{w}(t) \end{aligned} \tag{3.10}$$

biçiminde elde edilmiş olur. Evrik durum uzay formundaki kapalı çevrim sistem (3.10) için minimumum L_2 kazancını sağlayacak DTGB kontrolör sentezi Teorem 3.2 ile aşağıdaki gibi verilmektedir.

Teorem 3.2 (3.10) *kapalı çevrim sisteminin asimptotik kararlılığı ve* γ *gibi bir pozitif reel sayıdan küçük* L_2 *kazancına sahip olması için* $\mathbf{Z} \in \Re^{n\times n}$ *pozitif tanımlı simetrik matrisi ve* $\mathbf{W} \in \Re^{m\times n}$ *matrisi*

min γ, *koşullar:*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_2\,\mathbf{W}+\mathbf{Z}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}+\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_1 & \mathbf{Z}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}+\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_2^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}} & -\gamma\,\mathbf{I} & \mathbf{D}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}\mathbf{Z}+\mathbf{D}_2\mathbf{W} & \mathbf{D}_1 & -\gamma\,\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{3.11}$$

ile verilen dışbükey optimizasyon probleminin çözümünden elde edilebilirse; kapalı çevrim sistemin $\boldsymbol{w}(t)$ *bozucularından* $\boldsymbol{z}(t)$ *performans çıkışlarına olan* L_2 *kazancını* γ *gibi bir pozitif reel sayıdan küçük kılan durum türevi geri beslemeli kontrolör* $\boldsymbol{u}(t) = \mathbf{K}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{W}\mathbf{Z}^{-1}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ *olarak hesaplanabilir.*

İspat: Kapalı çevrim sistem (3.10) evrik durum uzay formunda yazıldığı için Yardımcı Teorem 3.1 kullanılamaz. Fakat Boyd et al. [59] tarafından verilen Yardımcı Teorem 3.2 böyle bir durumda son derece kullanışlıdır.

Yardımcı Teorem 3.2 [59]: *Pozitif tanımlı karesel formdaki bir* $V(t)$ *Lyapunov fonksiyonu için*

$$\dot{V}(t) + \gamma^{-1}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t) - \gamma\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{w}(t) < 0 \tag{3.12}$$

koşulu sağlanıyorsa asimptotik kararlılık ve (3.1) *ile verilen* L_2 *kazancı koşullarını garanti edilmektedir*.

Lyapunov fonksiyonu adayımızı

$$V(t) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{P}\,\boldsymbol{x}(t) \tag{3.13}$$

olarak seçecek olursak; türevi

$$\dot{V}(t) = \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\right)\dot{x}(t) + \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_1 w(t) + \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}\mathbf{P}\,\dot{x}(t) + w^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}\mathbf{P}\,\dot{x}(t) \tag{3.14}$$

olarak yazılabilir. Genişletilmiş durum vektörünü $\xi(t) = \left[\dot{x}(t) \quad w(t)\right]^{\mathrm{T}}$ olarak belirleyerek evrik durum uzay formundaki kapalı çevrim sistem (3.10) ve (3.14) ifadelerini (3.12) içerisinde yerlerine koyduğumuzda

$$\dot{V}(t) + \gamma^{-1}z^{\mathrm{T}}(t)z(t) - \gamma w^{\mathrm{T}}(t)w(t) = \xi^{\mathrm{T}}(t)\,\Omega\,\xi(t) < 0$$
$$\Omega = \begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\right) + \left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}\mathbf{P} & \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}\mathbf{P} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\mathbf{C}+\mathbf{D}_2\mathbf{K}\right)^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{D}_1^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\gamma^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{C}+\mathbf{D}_2\mathbf{K} & \mathbf{D}_1 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 2.1 ile verilen Schur tümleyen formülünü uyguladığımızda ise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\right) + \left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}\mathbf{P} & \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_1 & \left(\mathbf{C}+\mathbf{D}_2\mathbf{K}\right)^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}\mathbf{P} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}+\mathbf{D}_2\mathbf{K} & \mathbf{D}_1 & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{3.16}$$

elde edilir. Yeni bir değişken olarak $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}^{-1}$ tanımlanacak olursa, $diag(\mathbf{Z},\mathbf{I},\mathbf{I})$ ve $diag(\mathbf{Z},\mathbf{I},\mathbf{I})$ ile solundan ve sağından çarptığımızda; $\mathbf{W} = \mathbf{K}\mathbf{Z}$ değişken dönüşümü uygulanırsa (3.11) elde edilmiş olur. ■

Yorum 3.2: Teorem 3.2 ile verilmiş olan L_2 kazançlı DTGB kontrolör tasarımında kontrol edilmek istenen çıkışlar vektörü durum vektörü $u(t)$ kontrol girişleri değişkenini de içerecek şekilde yenilenmiştir. Bu bazı problemler özelinde avantajlı olabileceği gibi $x(t)$ durum vektörünün artık kontrol edilmek istenen çıkışlar içinde yer almadığı göz önünde bulundurulmalıdır. Bu bilgiler ışığında her iki sentezinde problem özelinde birbirine karşı avantajının el değiştirebileceğini göstermektedir.

DZD sistem (3.2) için, (3.1) ile verilmiş olan L_2 kazancını minimum kılan,

$$u(t) = \mathbf{K}\,\dot{y}(t) \tag{3.17}$$

ÇTGB kontrol kanununu ele alalım. Burada, $\dot{y}(t) = \mathbf{C}_{\mathrm{y}}\,\dot{x}(t)$ türevi ölçülebilen çıkışlar vektörüdür. Kontrol kanunu (3.17) vasıtasıyla DZD kapalı çevrim sistem durum uzay formunda

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \mathbf{A}_{\mathrm{cl}}\,\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{B}_{\mathrm{cl}}\,\boldsymbol{w}(t)\\ \boldsymbol{z}(t) &= \mathbf{C}_{\mathrm{cl}}\,\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{D}_{\mathrm{cl}}\,\boldsymbol{w}(t)\end{aligned} \tag{3.18}$$

olarak yazılabilir. Burada kapalı çevrim durum uzay matrisleri $\mathbf{A}_{\mathrm{cl}} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}})^{-1}\mathbf{A}$; $\mathbf{B}_{\mathrm{cl}} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}})^{-1}\mathbf{B}_1$; $\mathbf{C}_{\mathrm{cl}} = \mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}_{\mathrm{cl}} = \mathbf{D}$ olarak verilmektedir. ÇTGB L_2 kazançlı kontrolör sentezini veren Teorem 3.3 aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Teorem 3.3 Verilmiş olan bir μ pozitif reel sayısı için, (3.4) kapalı çevrim sisteminin asimptotik kararlılığı ve γ gibi bir pozitif reel sayıdan küçük L_2 kazancına sahip olması için $\mathbf{Z} \in \Re^{n\times n}$ pozitif tanımlı simetrik matrisi ve $\mathbf{W} \in \Re^{m\times p}$, $\mathbf{S} \in \Re^{p\times p}$ matrisleri

min γ, koşullar:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{AZ} - \mathbf{B}_2\mathbf{W}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \mathbf{A}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{Z}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} - \mathbf{B}_2\mathbf{W}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}\mathbf{Z} - \mathbf{C}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{D} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{3.19}$$

$$\begin{bmatrix} \mu\mathbf{I} & (\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{Z} - \mathbf{S}\mathbf{C}_{\mathrm{y}})^{\mathrm{T}} \\ (\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{Z} - \mathbf{S}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}) & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0 \tag{3.20}$$

ile verilen dışbükey optimizasyon probleminin çözümünden elde edilebilirse; kapalı çevrim sistemin $\boldsymbol{w}(t)$ bozucularından $\boldsymbol{z}(t)$ performans çıkışlarına olan L_2 kazancını γ gibi bir pozitif reel sayıdan küçük kılan ÇTGB kontrolör $\boldsymbol{u}(t) = \mathbf{K}\,\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \mathbf{W}\mathbf{S}^{-1}\,\dot{\boldsymbol{y}}(t)$ olarak hesaplanabilir.

İspat: Kapalı çevrim sistem (3.18) durum uzay matrisleri (3.6) içerisinde yerlerine yazıldığında

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}})^{-\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}})^{-1}\mathbf{A} & \mathbf{P}(\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}})^{-1}\mathbf{B}_1 & \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}(\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}})^{-\mathrm{T}}\mathbf{P} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{3.21}$$

elde edilir. (3.21) eşitsizliği $diag\big((\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}})\mathbf{Z}, \mathbf{I}, \mathbf{I}\big)$ ve $diag\big(\mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}})^{\mathrm{T}}, \mathbf{I}, \mathbf{I}\big)$ ifadeleri ile solundan ve sağından çarpıldığında (3.21) kısıtı (3.22)' ye denktir.

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}})\mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}\mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}})^{\mathrm{T}} & \mathbf{B}_1 & (\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}})\mathbf{Z}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}\mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}})^{\mathrm{T}} & \mathbf{D} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{3.22}$$

Burada $\mathbf{Z}=\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}=\mathbf{P}^{-1}$ olarak seçilmiştir. Burada $\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{Z}=\mathbf{S}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}$ kabulü ve $\mathbf{W}=\mathbf{K}\,\mathbf{S}$ değişken dönüşümü ile (3.19) elde edilmektedir. $\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{Z}=\mathbf{S}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}$ eşitliği ise Yardımcı Teorem 2.2 sayesinde DME (3.20) olarak dış bükey optimizasyon problemine katılabilir. ■

Alternatif bir L_2 kazançlı ÇTGB tasarımı için bir DZD sistem (3.9) ele alındığında ÇTGB kontrol kanunu (3.17); (3.9) içerisine yazıldığında evrik durum uzay formundaki kapalı çevrim sistem

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)&=\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\,\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_1\,\boldsymbol{w}(t)\\ \boldsymbol{z}(t)&=\left(\mathbf{C}+\mathbf{D}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\mathbf{D}_1\,\boldsymbol{w}(t)\end{aligned} \tag{3.23}$$

biçiminde elde edilmiş olur. Evrik durum uzay formundaki kapalı çevrim sistem (3.23) için minimumum L_2 kazancını sağlayacak ÇTGB kontrolör sentezi Teorem 3.4 ile aşağıdaki gibi verilmektedir.

Teorem 3.4 Verilmiş olan bir μ pozitif reel sayısı için, (3.23) kapalı çevrim sisteminin asimptotik kararlılığı ve γ gibi bir pozitif reel sayıdan küçük L_2 kazancına sahip olması için $\mathbf{Z}\in\Re^{n\times n}$ pozitif tanımlı simetrik matrisi ve $\mathbf{W}\in\Re^{m\times p}$, $\mathbf{S}\in\Re^{p\times p}$ matrisleri

min γ, koşullar:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_2\mathbf{W}\,\mathbf{C}_{\mathrm{y}}+\mathbf{Z}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}+\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_1 & \mathbf{Z}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}+\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_2^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}} & -\gamma\,\mathbf{I} & \mathbf{D}_1^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{C}\mathbf{Z}+\mathbf{D}_2\mathbf{W}\mathbf{C}_{\mathrm{y}} & \mathbf{D}_1 & -\gamma\,\mathbf{I}\end{bmatrix}\prec 0 \tag{3.24}$$

$$\begin{bmatrix}\mu\,\mathbf{I} & \left(\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{Z}-\mathbf{S}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)^{\mathrm{T}}\\ \left(\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{Z}-\mathbf{S}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right) & \mu\,\mathbf{I}\end{bmatrix}\succ 0 \tag{3.25}$$

ile verilen dışbükey optimizasyon probleminin çözümünden elde edilebilirse; kapalı çevrim sistemin $\boldsymbol{w}(t)$ bozucularından $\boldsymbol{z}(t)$ performans çıkışlarına olan L_2 kazancını γ gibi bir pozitif reel sayıdan küçük kılan ÇTGB kontrolör $\boldsymbol{u}(t)=\mathbf{K}\,\dot{\boldsymbol{y}}(t)=\mathbf{W}\mathbf{S}^{-1}\,\dot{\boldsymbol{y}}(t)$ olarak hesaplanabilir.

İspat: Kapalı çevrim sistem (3.23) evrik durum uzay formunda yazıldığı için Boyd et al. [59] tarafından verilen Yardımcı Teorem 3.2 böyle bir durumda son derece kullanışlıdır ve (3.23) için asimptotik kararlılık ve L_2 kazancı koşulları (3.12) sağlandıkça garanti

edilmektedir. Bu aşamada Lyapunov fonksiyonu adayı olarak (3.13) ile verildiği gibi $V(t) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{P}\,\boldsymbol{x}(t)$ seçilecek olursa; türevi

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) = {} & \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_1\,\boldsymbol{w}(t) + \\ & \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}\mathbf{P}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}\mathbf{P}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)\end{aligned} \tag{3.26}$$

olarak yazılabilir. Genişletilmiş durum vektörünü $\boldsymbol{\xi}(t) = \left[\dot{\boldsymbol{x}}(t) \quad \boldsymbol{w}(t)\right]^{\mathrm{T}}$ olarak belirleyerek evrik durum uzay formundaki kapalı çevrim sistem (3.23) ve (3.26) ifadelerini (3.12) içerisinde yerlerine koyduğumuzda

$$\begin{aligned}&\dot{V}(t) + \gamma^{-1}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t) - \gamma\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\,\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{\xi}(t) < 0 \\ &\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix}\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right) + \left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}\mathbf{P} & \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}\mathbf{P} & -\gamma\mathbf{I}\end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix}\left(\mathbf{C}+\mathbf{D}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{D}_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\gamma^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{C}+\mathbf{D}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}} & \mathbf{D}_1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3.27}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 2.1 ile verilen Schur tümleyen formülünü uyguladığımızda ise

$$\begin{bmatrix}\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right) + \left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}\mathbf{P} & \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_1 & \left(\mathbf{C}+\mathbf{D}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}\mathbf{P} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}+\mathbf{D}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}} & \mathbf{D}_1 & -\gamma\mathbf{I}\end{bmatrix} \prec 0 \tag{3.28}$$

elde edilir. Yeni bir değişken olarak $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}^{-1}$ tanımlanacak olursa, $diag(\mathbf{Z},\mathbf{I},\mathbf{I})$ ve $diag(\mathbf{Z},\mathbf{I},\mathbf{I})$ ile solundan ve sağından çarptığımızda;

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)\mathbf{Z} + \mathbf{Z}\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_1 & \mathbf{Z}\left(\mathbf{C}+\mathbf{D}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}\mathbf{Z}+\mathbf{D}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{Z} & \mathbf{D}_1 & -\gamma\mathbf{I}\end{bmatrix} \prec 0 \tag{3.29}$$

Burada $\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{Z} = \mathbf{S}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}$ kabulü ve $\mathbf{W} = \mathbf{K}\,\mathbf{S}$ değişken dönüşümü ile (3.24) elde edilmektedir. $\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{Z} = \mathbf{S}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}$ eşitliği ise Yardımcı Teorem 2.2 sayesinde DME (3.25) olarak dış bükey optimizasyon problemine katılabilir. ■

3.2 Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli L_2 Kazançlı Dayanıklı Kontrolörlerin Tasarımı

Bir PBDZD sistem durum uzay formunda

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{B}_1(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{w}(t) + \mathbf{B}_2(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{z}(t) &= \mathbf{C}\,\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{D}\,\boldsymbol{w}(t)\end{aligned} \tag{3.30}$$

olarak ele alınsın. Burada, durum, bozucu girişi ve kontrol girişi matrisleri, $\mathbf{A}(\cdot)$, $\mathbf{B}_1(\cdot)$ ve $\mathbf{B}_2(\cdot)$

$$P = \left[(\mathbf{A},\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2)(\theta(t)) : (\mathbf{A},\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2)(\theta(t)) = \sum_{j=1}^{N} \theta_j(t)(\mathbf{A}_j,\mathbf{B}_{1j},\mathbf{B}_{2j}), \sum_{j=1}^{N} \theta_j(t) = 1, \theta_j(t) \geq 0,\ j = 1,\ldots,N \right]$$

(3.31)

ile verilen P politopu tarafından kapsanmaktadır. Bir başka deyişle sistem matrisleri zamanla değişen

$$\theta(t) = \left[\theta_1(t) \quad \cdots \quad \theta_N(t)\right]^{\mathrm{T}}, \sum_{j=1}^{N} \theta_j(t) = 1, \theta_j(t) \geq 0,\ j = 1,\ldots,N \tag{3.32}$$

parametre vektörüne bağlıdır. Burada amaç, (3.1) ile verilmiş olan L_2 kazancını minimum kılan DTGB dayanıklı kontrol kanununu hesaplamaktır. DTGB kontrol kanunu (3.3) vasıtasıyla PBDZD kapalı çevrim sistem durum uzay formunda

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \mathbf{A}_{\mathrm{cl}}\,\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{B}_{\mathrm{cl}}\,\boldsymbol{w}(t)\\ \boldsymbol{z}(t) &= \mathbf{C}_{\mathrm{cl}}\,\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{D}_{\mathrm{cl}}\,\boldsymbol{w}(t)\end{aligned} \tag{3.33}$$

olarak yazılabilir. Burada kapalı çevrim durum uzay matrisleri $\mathbf{A}_{\mathrm{cl}} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{B}_2(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{K}\right)^{-1}\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))$; $\mathbf{B}_{\mathrm{cl}} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{B}_2(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{K}\right)^{-1}\mathbf{B}_1(\boldsymbol{\theta}(t))$; $\mathbf{C}_{\mathrm{cl}} = \mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}_{\mathrm{cl}} = \mathbf{D}$ olarak verilmektedir. DTGB L_2 kazançlı dayanıklı kontrolör sentezini veren Teorem 3.1 aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Teorem 3.5 (3.33) *formundaki PBDZD kapalı çevrim sisteminin asimptotik kararlılığı ve* γ *gibi bir pozitif reel sayıdan küçük L_2 kazancına sahip olması için* $\mathbf{Z} \in \Re^{n\times n}$ *pozitif tanımlı simetrik matrisi ve* $\mathbf{W} \in \Re^{m\times n}$ *matrisi*

min γ *, koşullar:*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_j\mathbf{Z} - \mathbf{B}_{2j}\mathbf{W}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} + \mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} - \mathbf{A}_j\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{2j}^{\mathrm{T}} & \mathbf{B}_{1j} & \mathbf{Z}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} - \mathbf{B}_{2j}\mathbf{W}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_{1j}^{\mathrm{T}} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}\mathbf{Z} - \mathbf{C}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{2j}^{\mathrm{T}} & \mathbf{D} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0;\ j = 1,\ldots,N \tag{3.34}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_j\mathbf{Z}+\mathbf{A}_k\mathbf{Z}-\mathbf{B}_{2j}\mathbf{W}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}-\mathbf{B}_{2k}\mathbf{W}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{Z}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}-\mathbf{A}_j\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{2k}^{\mathrm{T}}-\mathbf{A}_k\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{2j}^{\mathrm{T}} & & \\ \mathbf{B}_{1j}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}_{1k}^{\mathrm{T}} & & \\ 2\mathbf{C}\mathbf{Z}-\mathbf{C}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{2j}^{\mathrm{T}}-\mathbf{C}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{2k}^{\mathrm{T}} & & \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1j}+\mathbf{B}_{1k} & 2\mathbf{Z}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}-\mathbf{B}_{2j}\mathbf{W}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}-\mathbf{B}_{2k}\mathbf{W}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} \\ -2\gamma\mathbf{I} & 2\mathbf{D}^{\mathrm{T}} \\ 2\mathbf{D} & -2\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0;\ j=1,\ldots,N-1, k=j+1,\ldots,N; \tag{3.35}$$

ile verilen dışbükey optimizasyon probleminin çözümünden elde edilebilirse; kapalı çevrim sistemin $\boldsymbol{w}(t)$ *bozucularından* $\boldsymbol{z}(t)$ *performans çıkışlarına olan* L_2 *kazancını* γ *gibi bir pozitif reel sayıdan küçük kılan durum türevi geri beslemeli kontrolör* $\boldsymbol{u}(t)=\mathbf{K}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\mathbf{W}\mathbf{Z}^{-1}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ *olarak hesaplanabilir.*

İspat: Kapalı çevrim sistem (3.33) durum uzay matrisleri (3.6) içerisinde yerlerine yazıldığında

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\theta(t))(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K})^{-\mathrm{T}}\mathbf{P}+\mathbf{P}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K})^{-1}\mathbf{A}(\theta(t)) & \mathbf{P}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}_1(\theta(t)) & \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}(\theta(t))(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K})^{-\mathrm{T}}\mathbf{P} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{3.36}$$

elde edilir. (3.36) eşitsizliği $diag((\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K})\mathbf{Z},\mathbf{I},\mathbf{I})$ ve $diag(\mathbf{Z}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K})^{\mathrm{T}},\mathbf{I},\mathbf{I})$ ifadeleri ile solundan ve sağından çarpıldığında (3.36) kısıtı (3.37)' ye denktir.

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K})\mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\theta(t))+\mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K})^{\mathrm{T}} & \mathbf{B}_1(\theta(t)) & (\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K})\mathbf{Z}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}(\theta(t)) & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}\mathbf{Z}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K})^{\mathrm{T}} & \mathbf{D} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{3.37}$$

Burada $\mathbf{Z}=\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}=\mathbf{P}^{-1}$ olarak seçilmiştir ve $\mathbf{W}=\mathbf{K}\mathbf{Z}$ değişken dönüşümü uygulandığında Yardımcı Teorem 2.3 kullanılarak DME (3.34) ve (3.35) elde edilmiş olur. ■

Alternatif bir L_2 kazançlı dayanıklı DTGB tasarımı için bir PBDZD sistem durum uzay formunda

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \mathbf{A}(\theta(t))\boldsymbol{x}(t)+\mathbf{B}_1(\theta(t))\boldsymbol{w}(t)+\mathbf{B}_2(\theta(t))\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) &= \mathbf{C}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\mathbf{D}_1\,\boldsymbol{w}(t)+\mathbf{D}_2\,\boldsymbol{u}(t) \end{aligned} \tag{3.38}$$

olarak tekrar yazılabilir. DTGB kontrol kanunu (3.3); (3.9) içerisine yazıldığında evrik durum uzay formundaki kapalı çevrim sistem

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= \mathbf{A}^{-1}(\theta(t))\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\right)\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \mathbf{A}^{-1}(\theta(t))\mathbf{B}_1(\theta(t))\boldsymbol{w}(t)\\ \boldsymbol{z}(t) &= \left(\mathbf{C}+\mathbf{D}_2\mathbf{K}\right)\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \mathbf{D}_1\,\boldsymbol{w}(t)\end{aligned} \tag{3.39}$$

biçiminde elde edilmiş olur. Evrik durum uzay formundaki kapalı çevrim PBDZD sistem (3.39) için minimumum L_2 kazancını sağlayacak DTGB kontrolör sentezi Teorem 3.6 ile aşağıdaki gibi verilmektedir.

Teorem 3.6 (3.39) *kapalı çevrim sisteminin asimptotik kararlılığı ve* γ *gibi bir pozitif reel sayıdan küçük* L_2 *kazancına sahip olması için* $\mathbf{Z} \in \Re^{n\times n}$ *pozitif tanımlı simetrik matrisi ve* $\mathbf{W} \in \Re^{m\times n}$ *matrisi*

min γ *, koşullar:*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} - \mathbf{B}_{2j}\mathbf{W}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}_j\mathbf{Z} - \mathbf{A}_j\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{2j}^{\mathrm{T}} & \mathbf{B}_{1j} & \mathbf{A}_j\mathbf{Z}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}_j\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_2^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_{1j}^{\mathrm{T}} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}\mathbf{Z} + \mathbf{D}_2\mathbf{W}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_1 & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0;\ j = 1,\ldots,N \tag{3.40}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} + \mathbf{Z}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}} - \mathbf{B}_{2j}\mathbf{W}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}} - \mathbf{B}_{2k}\mathbf{W}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}_j\mathbf{Z} + \mathbf{A}_k\mathbf{Z} - \mathbf{A}_j\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{2k}^{\mathrm{T}} - \mathbf{A}_k\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{2j}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_{1j}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}_{1k}^{\mathrm{T}} \\ 2\mathbf{C}\mathbf{Z} + \mathbf{D}_2\mathbf{W}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} + \mathbf{D}_2\mathbf{W}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1j} + \mathbf{B}_{1k} & \mathbf{A}_j\mathbf{Z}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}_k\mathbf{Z}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}_j\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_2^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}_k\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_2^{\mathrm{T}} \\ -2\gamma\mathbf{I} & 2\mathbf{D}_1^{\mathrm{T}} \\ 2\mathbf{D}_1 & -2\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0;\ j = 1,\ldots,N-1, k = j+1,\ldots,N \tag{3.41}$$

ile verilen dışbükey optimizasyon probleminin çözümünden elde edilebilirse; kapalı çevrim sistemin $\boldsymbol{w}(t)$ *bozucularından* $\boldsymbol{z}(t)$ *performans çıkışlarına olan* L_2 *kazancını* γ *gibi bir pozitif reel sayıdan küçük kılan durum türevi geri beslemeli kontrolör* $\boldsymbol{u}(t) = \mathbf{K}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{W}\mathbf{Z}^{-1}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ *olarak hesaplanabilir.*

İspat: Kapalı çevrim sistem (3.39) evrik durum uzay formunda yazıldığı için Yardımcı Teorem 3.2 böyle bir durumda son derece kullanışlıdır. Lyapunov fonksiyonu adayımızı $V(t) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{P}\,\boldsymbol{x}(t)$ olarak seçecek olursak; türevi

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) = {} & \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}(\theta(t))\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\right)\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}(\theta(t))\mathbf{B}_1(\theta(t))\boldsymbol{w}(t) + \\ & \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\theta(t))\,\mathbf{P}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\theta(t))\,\mathbf{P}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)\end{aligned} \tag{3.42}$$

olarak yazılabilir. Genişletilmiş durum vektörünü $\boldsymbol{\xi}(t)=\left[\dot{\boldsymbol{x}}(t) \quad \boldsymbol{w}(t)\right]^{\mathrm{T}}$ olarak belirleyerek evrik durum uzay formundaki kapalı çevrim sistem (3.39) ve (3.42) ifadelerini (3.12) içerisinde yerlerine koyduğumuzda

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(t)+\gamma^{-1}\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t)-\gamma\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{w}(t)=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{\xi}(t)<0\\
&\boldsymbol{\Omega}=\begin{bmatrix}\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}(\theta(t))\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\right)+\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{P} & \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}(\theta(t))\mathbf{B}_1(\theta(t))\\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{P} & -\gamma\mathbf{I}\end{bmatrix}+\\
&\quad\begin{bmatrix}\left(\mathbf{C}+\mathbf{D}_2\mathbf{K}\right)^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{D}_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\gamma^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{C}+\mathbf{D}_2\mathbf{K} & \mathbf{D}_1\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 2.1 ile verilen Schur tümleyen formülünü uyguladığımızda ise

$$\begin{bmatrix}\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}(\theta(t))\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\right)+\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{P} & \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}(\theta(t))\mathbf{B}_1(\theta(t)) & \left(\mathbf{C}+\mathbf{D}_2\mathbf{K}\right)^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{P} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_1^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{C}+\mathbf{D}_2\mathbf{K} & \mathbf{D}_1 & -\gamma\mathbf{I}\end{bmatrix}\prec 0 \tag{3.44}$$

elde edilir. Yeni bir değişken olarak $\mathbf{Z}=\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}=\mathbf{P}^{-1}$ tanımlanacak olursa, $diag(\mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z},\mathbf{I},\mathbf{I})$ ve $diag(\mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\theta(t)),\mathbf{I},\mathbf{I})$ ile solundan ve sağından çarptığımızda; $\mathbf{W}=\mathbf{K}\mathbf{Z}$ değişken dönüşümü uygulanırsa Yardımcı Teorem 2.3 sayesinde (3.40) ve (3.41) DMEleri elde edilmiş olur. ■

PBDZD sistem (3.30) için, (3.1) ile verilmiş olan L_2 kazancını minimum kılan, (3.17) ÇTGB kontrol kanununu ele alalım. Kontrol kanunu (3.17) vasıtasıyla DZD kapalı çevrim sistem durum uzay formunda

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=\mathbf{A}_{\mathrm{cl}}\,\boldsymbol{x}(t)+\mathbf{B}_{\mathrm{cl}}\,\boldsymbol{w}(t)\\
\boldsymbol{z}(t)&=\mathbf{C}_{\mathrm{cl}}\,\boldsymbol{x}(t)+\mathbf{D}_{\mathrm{cl}}\,\boldsymbol{w}(t)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

olarak yazılabilir. Burada kapalı çevrim durum uzay matrisleri $\mathbf{A}_{\mathrm{cl}}=(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}})^{-1}\mathbf{A}(\theta(t))$; $\mathbf{B}_{\mathrm{cl}}=(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}})^{-1}\mathbf{B}_1(\theta(t))$; $\mathbf{C}_{\mathrm{cl}}=\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}_{\mathrm{cl}}=\mathbf{D}$ olarak verilmektedir. ÇTGB L_2 kazançlı kontrolör sentezini veren Teorem 3.7 aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Teorem 3.7 Verilmiş olan bir μ pozitif reel sayısı için, (3.45) *kapalı çevrim sisteminin asimptotik kararlılığı ve* γ *gibi bir pozitif reel sayıdan küçük* L_2 *kazancına sahip olması için* $\mathbf{Z} \in \Re^{n\times n}$ *pozitif tanımlı simetrik matrisi ve* $\mathbf{W} \in \Re^{m\times p}$, $\mathbf{S} \in \Re^{p\times p}$ *matrisleri*

min γ *, koşullar:*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_j\mathbf{Z}-\mathbf{B}_{2j}\mathbf{W}\mathbf{C}_y\mathbf{A}_j^T+\mathbf{Z}\mathbf{A}_j^T-\mathbf{A}_j\mathbf{C}_y^T\mathbf{W}^T\mathbf{B}_{2j}^T & \mathbf{B}_{1j} & \mathbf{Z}\mathbf{C}^T-\mathbf{B}_{2j}\mathbf{W}\mathbf{C}_y\mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}_{1j}^T & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{C}\mathbf{Z}-\mathbf{C}\mathbf{C}_y^T\mathbf{W}^T\mathbf{B}_{2j}^T & \mathbf{D} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0;\ j=1,\ldots,N \tag{3.46}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_j\mathbf{Z}+\mathbf{A}_k\mathbf{Z}-\mathbf{B}_{2j}\mathbf{W}\mathbf{C}_y\mathbf{A}_k^T-\mathbf{B}_{2k}\mathbf{W}\mathbf{C}_y\mathbf{A}_j^T+\mathbf{Z}\mathbf{A}_j^T+\mathbf{Z}\mathbf{A}_k^T-\mathbf{A}_j\mathbf{C}_y^T\mathbf{W}^T\mathbf{B}_{2k}^T-\mathbf{A}_k\mathbf{C}_y^T\mathbf{W}^T\mathbf{B}_{2j}^T \\ \mathbf{B}_{1j}^T+\mathbf{B}_{1k}^T \\ 2\mathbf{C}\mathbf{Z}-\mathbf{C}\mathbf{C}_y^T\mathbf{W}^T\mathbf{B}_{2j}^T-\mathbf{C}\mathbf{C}_y^T\mathbf{W}^T\mathbf{B}_{2k}^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1j}+\mathbf{B}_{1k} & 2\mathbf{Z}\mathbf{C}^T-\mathbf{B}_{2j}\mathbf{W}\mathbf{C}_y\mathbf{C}^T-\mathbf{B}_{2k}\mathbf{W}\mathbf{C}_y\mathbf{C}^T \\ -2\gamma\mathbf{I} & 2\mathbf{D}^T \\ 2\mathbf{D} & -2\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0;\ j=1,\ldots,N-1, k=j+1,\ldots,N \tag{3.47}$$

$$\begin{bmatrix} \mu\mathbf{I} & \left(\mathbf{C}_y\mathbf{Z}-\mathbf{S}\mathbf{C}_y\right)^T \\ \left(\mathbf{C}_y\mathbf{Z}-\mathbf{S}\mathbf{C}_y\right) & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0 \tag{3.48}$$

ile verilen dışbükey optimizasyon probleminin çözümünden elde edilebilirse; kapalı çevrim sistemin $\boldsymbol{w}(t)$ *bozucularından* $\boldsymbol{z}(t)$ *performans çıkışlarına olan* L_2 *kazancını* γ *gibi bir pozitif reel sayıdan küçük kılan dayanıklı ÇTGB kontrolör* $\boldsymbol{u}(t)=\mathbf{K}\,\dot{\boldsymbol{y}}(t)=\mathbf{W}\mathbf{S}^{-1}\,\dot{\boldsymbol{y}}(t)$ *olarak hesaplanabilir.*

İspat: Kapalı çevrim sistem (3.45) durum uzay matrisleri (3.6) içerisinde yerlerine yazıldığında

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi} & \mathbf{P}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\mathbf{C}_y)^{-1}\mathbf{B}_1(\theta(t)) & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}_1^T(\theta(t))(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\mathbf{C}_y)^{-T}\mathbf{P} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{3.49}$$

$$\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{A}^T(\theta(t))(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\mathbf{C}_y)^{-T}\mathbf{P}+\mathbf{P}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\mathbf{C}_y)^{-1}\mathbf{A}(\theta(t)) \tag{3.50}$$

elde edilir. (3.49) eşitsizliği $diag\left((\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\mathbf{C}_y)\mathbf{Z},\mathbf{I},\mathbf{I}\right)$ ve $diag\left(\mathbf{Z}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\mathbf{C}_y)^T,\mathbf{I},\mathbf{I}\right)$ ifadeleri ile solundan ve sağından çarpıldığında (3.49) kısıtı (3.51)' e denktir.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} & \mathbf{B}_1(\theta(t)) & (\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\mathbf{C}_y)\mathbf{Z}\mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}_1^T(\theta(t)) & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{C}\mathbf{Z}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\mathbf{C}_y)^T & \mathbf{D} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{3.51}$$

$$\boldsymbol{\Phi} = (\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\mathbf{C}_y)\mathbf{Z}\mathbf{A}^T(\theta(t)) + \mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\mathbf{C}_y)^T \tag{3.52}$$

Burada $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^T = \mathbf{P}^{-1}$ olarak seçilmiştir. $\mathbf{C}_y\mathbf{Z} = \mathbf{S}\mathbf{C}_y$ kabulü ve $\mathbf{W} = \mathbf{K}\,\mathbf{S}$ değişken dönüşümü uygulandığında Yardımcı Teorem 2.3 ile (3.46) ve (3.47) elde edilmektedir. $\mathbf{C}_y\mathbf{Z} = \mathbf{S}\mathbf{C}_y$ eşitliği ise Yardımcı Teorem 2.2 sayesinde DME (3.48) olarak dış bükey optimizasyon problemine katılabilir. ■

Alternatif bir L_2 kazançlı dayanıklı ÇTGB tasarımı için bir PBDZD sistem (3.38) ele alındığında ÇTGB kontrol kanunu (3.17); (3.38) içerisine yazıldığında evrik durum uzay formundaki kapalı çevrim sistem

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= \mathbf{A}^{-1}(\theta(t))(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\mathbf{C}_y)\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \mathbf{A}^{-1}(\theta(t))\mathbf{B}_1(\theta(t))\boldsymbol{w}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) &= (\mathbf{C}+\mathbf{D}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_y)\dot{\boldsymbol{x}}(t) + \mathbf{D}_1\,\boldsymbol{w}(t) \end{aligned} \tag{3.53}$$

biçiminde elde edilmiş olur. Evrik durum uzay formundaki kapalı çevrim sistem (3.53) için minimumum L_2 kazancını sağlayacak ÇTGB kontrolör sentezi Teorem 3.8 ile aşağıdaki gibi verilmektedir.

Teorem 3.8 Verilmiş olan bir μ pozitif reel sayısı için, (3.53) *kapalı çevrim sisteminin asimptotik kararlılığı ve* γ *gibi bir pozitif reel sayıdan küçük* L_2 *kazancına sahip olması için* $\mathbf{Z} \in \Re^{n\times n}$ *pozitif tanımlı simetrik matrisi ve* $\mathbf{W} \in \Re^{m\times p}$, $\mathbf{S} \in \Re^{p\times p}$ *matrisleri*

min γ *, koşullar:*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}\mathbf{A}_j^T - \mathbf{B}_{2j}\mathbf{W}\mathbf{C}_y\mathbf{A}_j^T + \mathbf{A}_j\mathbf{Z} - \mathbf{A}_j\mathbf{C}_y^T\mathbf{W}^T\mathbf{B}_{2j}^T & \mathbf{B}_{1j} & \mathbf{A}_j\mathbf{Z}\mathbf{C}^T + \mathbf{A}_j\mathbf{C}_y^T\mathbf{W}^T\mathbf{D}_2^T \\ \mathbf{B}_{1j}^T & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_1^T \\ \mathbf{C}\mathbf{Z}\mathbf{A}_j^T + \mathbf{D}_2\mathbf{W}\mathbf{C}_y\mathbf{A}_j^T & \mathbf{D}_1 & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0;\ j = 1, \ldots, N$$

(3.54)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{Z}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}-\mathbf{B}_{2j}\mathbf{W}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}-\mathbf{B}_{2k}\mathbf{W}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{A}_j\mathbf{Z}+\mathbf{A}_k\mathbf{Z}-\mathbf{A}_j\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{2k}^{\mathrm{T}}-\mathbf{A}_k\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{2j}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_{1j}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}_{1k}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}\mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{C}\mathbf{Z}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}+\mathbf{D}_2\mathbf{W}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{D}_2\mathbf{W}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1j}+\mathbf{B}_{1k} & \mathbf{A}_j\mathbf{Z}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}+\mathbf{A}_k\mathbf{Z}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}+\mathbf{A}_j\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_2^{\mathrm{T}}+\mathbf{A}_k\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_2^{\mathrm{T}} \\ -2\gamma\mathbf{I} & 2\mathbf{D}_1^{\mathrm{T}} \\ 2\mathbf{D}_1 & -2\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0$$

$$j=1,\ \ldots,\ N-1, k=j+1,\ \ldots, N$$

(3.55)

$$\begin{bmatrix} \mu\mathbf{I} & \left(\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{Z}-\mathbf{S}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)^{\mathrm{T}} \\ \left(\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{Z}-\mathbf{S}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right) & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0 \tag{3.56}$$

ile verilen dışbükey optimizasyon probleminin çözümünden elde edilebilirse; kapalı çevrim sistemin $\boldsymbol{w}(t)$ *bozucularından* $\boldsymbol{z}(t)$ *performans çıkışlarına olan* L_2 *kazancını* γ *gibi bir pozitif reel sayıdan küçük kılan ÇTGB kontrolör* $\boldsymbol{u}(t)=\mathbf{K}\,\dot{\boldsymbol{y}}(t)=\mathbf{W}\mathbf{S}^{-1}\,\dot{\boldsymbol{y}}(t)$ *olarak hesaplanabilir.*

İspat: Kapalı çevrim sistem (3.53) evrik durum uzay formunda yazıldığı için Boyd vd. [59] tarafından verilen Yardımcı Teorem 3.2 böyle bir durumda son derece kullanışlıdır ve (3.23) için asimptotik kararlılık ve L_2 kazancı koşulları (3.12) sağlandıkça garanti edilmektedir. Bu aşamada Lyapunov fonksiyonu adayı olarak (3.13) ile verildiği gibi $V(t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{P}\,\boldsymbol{x}(t)$ seçilecek olursa; türevi

$$\begin{aligned} \dot{V}(t)=\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}(\theta(t))\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}(\theta(t))\mathbf{B}_1(\theta(t))\boldsymbol{w}(t)+ \\ \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{P}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{P}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t) \end{aligned} \tag{3.57}$$

olarak yazılabilir. Genişletilmiş durum vektörünü $\boldsymbol{\xi}(t)=\left[\dot{\boldsymbol{x}}(t)\quad \boldsymbol{w}(t)\right]^{\mathrm{T}}$ olarak belirleyerek evrik durum uzay formundaki kapalı çevrim sistem (3.51) ve (3.54) ifadelerini (3.12) içerisinde yerlerine koyduğumuzda

$$\dot{V}(t)+\gamma^{-1}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t)-\gamma\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{w}(t)=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\xi}(t)<0$$

$$\boldsymbol{\Omega}=\begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}(\theta(t))\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)+\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{P} & \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}(\theta(t))\mathbf{B}_1(\theta(t)) \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{P} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix} \left(\mathbf{C}+\mathbf{D}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{D}_1^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\gamma^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{C}+\mathbf{D}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_{\mathrm{y}} & \mathbf{D}_1 \end{bmatrix}$$

(3.58)

elde edilir. Yardımcı Teorem 2.1 ile verilen Schur tümleyen formülünü uyguladığımızda ise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}(\theta(t))\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\mathbf{C}_y\right)+\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\mathbf{C}_y\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{P} & \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{P} & \mathbf{C}+\mathbf{D}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_y \\ \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}(\theta(t))\mathbf{B}_1(\theta(t)) & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_1^{\mathrm{T}} \\ \left(\mathbf{C}+\mathbf{D}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_y\right)^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_1 & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{3.59}$$

elde edilir. Yeni bir değişken olarak $\mathbf{Z}=\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}=\mathbf{P}^{-1}$ tanımlanacak olursa, $diag(\mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z},\mathbf{I},\mathbf{I})$ ve $diag(\mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\theta(t)),\mathbf{I},\mathbf{I})$ ile solundan ve sağından çarptığımızda;

$$\begin{bmatrix} \left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\mathbf{C}_y\right)\mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\theta(t))+\mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z}\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2(\theta(t))\mathbf{K}\mathbf{C}_y\right)^{\mathrm{T}} & \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}(\theta(t)) & \mathbf{C}\mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\theta(t))+\mathbf{D}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_y\mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\theta(t)) \\ \mathbf{B}_1(\theta(t)) & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z}\left(\mathbf{C}+\mathbf{D}_2\mathbf{K}\mathbf{C}_y\right)^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_1 & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{3.60}$$

Burada $\mathbf{C}_y\mathbf{Z}=\mathbf{S}\mathbf{C}_y$ kabulü ve $\mathbf{W}=\mathbf{K}\mathbf{S}$ değişken dönüşümü ile beraber Yardımcı Teorem 2.3 kullanıldığında (3.54) ve (3.55) elde edilmektedir. $\mathbf{C}_y\mathbf{Z}=\mathbf{S}\mathbf{C}_y$ eşitliği ise Yardımcı Teorem 2.2 sayesinde DME (3.56) olarak dış bükey optimizasyon problemine katılabilir. ■

3.3 Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli L_2 Kazançlı Parametre Bağımlı Kontrolörlerin Tasarımı

Bir DPD sistem durum uzay formunda

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \mathbf{A}(\theta(t))\boldsymbol{x}(t)+\mathbf{B}_1(\theta(t))\boldsymbol{w}(t)+\mathbf{B}_2\,\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) &= \mathbf{C}(\theta(t))\boldsymbol{x}(t)+\mathbf{D}(\theta(t))\boldsymbol{w}(t) \end{aligned} \tag{3.61}$$

olarak ele alınsın. Burada durum uzay matrisleri $\mathbf{A}(\cdot)$, $\mathbf{B}_1(\cdot)$, $\mathbf{A}(\cdot)$, $\mathbf{C}(\cdot)$ ve $\mathbf{D}(\cdot)$

$$P=\left[\begin{array}{l}\left(\mathbf{A},\mathbf{B}_1,\mathbf{C},\mathbf{D}\right)\left(\theta(t)\right):\left(\mathbf{A},\mathbf{B}_1,\mathbf{C},\mathbf{D}\right)\left(\theta(t)\right)=\sum_{j=1}^{N}\theta_j(t)\left(\mathbf{A}_j,\mathbf{B}_{1j},\mathbf{B}_{2j},\mathbf{C}_j,\mathbf{D}_j\right)\\ \sum_{j=1}^{N}\theta_j(t)=1,\theta_j(t)\geq 0,\ j=1,\ldots,N\end{array}\right] \tag{3.62}$$

ile verilen P politopu tarafından kapsanmaktadır. Bir başka deyişle sistem matrisleri zamanla değişen

$$\boldsymbol{\theta}(t)=\left[\theta_1(t)\quad\cdots\quad\theta_N(t)\right]^{\mathrm{T}},\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{\theta}_j(t)=1,\boldsymbol{\theta}_j(t)\geq 0,\ j=1,\ldots,N \tag{3.63}$$

parametre vektörüne bağlıdır. Burada amaç, (3.1) ile verilmiş olan L_2 kazancını minimum kılan DTGB parametre bağımlı kontrol kanununu

$$\boldsymbol{u}(t)=\mathbf{K}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right)\dot{\boldsymbol{x}}(t) \tag{3.64}$$

olarak tanımlansın. Burada parametre bağımlı kontrol kazancı

$$\mathbf{K}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right)=\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{\theta}_j(t)\mathbf{K}_j,\ \sum_{j=1}^{N}\theta_j(t)=1,\ \theta_j(t)\geq 0,\ \ j=1,\ldots,N \tag{3.65}$$

biçimindedir. Kontrol kanunu (3.64) vasıtasıyla DPD kapalı çevrim sistem durum uzay formunda

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=\mathbf{A}_{\mathbf{d}}\ \boldsymbol{x}(t)+\mathbf{B}_{\mathbf{d}}\ \boldsymbol{w}(t)\\ \boldsymbol{z}(t)&=\mathbf{C}_{\mathbf{d}}\ \boldsymbol{x}(t)+\mathbf{D}_{\mathbf{d}}\ \boldsymbol{w}(t)\end{aligned} \tag{3.66}$$

olarak yazılabilir. Burada kapalı çevrim durum uzay matrisleri $\mathbf{A}_{\mathbf{d}}=\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right)\right)^{-1}\mathbf{A}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right);\quad \mathbf{B}_{\mathbf{d}}=\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right)\right)^{-1}\mathbf{B}_1\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right);\quad \mathbf{C}_{\mathbf{d}}=\mathbf{C}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right)$ ve $\mathbf{D}_{\mathbf{d}}=\mathbf{D}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right)$ olarak verilmektedir. DTGB L_2 kazançlı parametre bağımlı kontrolör sentezini veren Teorem 3.9 aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Teorem 3.9 (3.66) formundaki DPD kapalı çevrim sisteminin asimptotik kararlılığı ve γ gibi bir pozitif reel sayıdan küçük L_2 kazancına sahip olması için $\mathbf{Z}\in\Re^{n\times n}$ pozitif tanımlı simetrik matrisi ve $\mathbf{W}_j\in\Re^{m\times n},\ j=1,\ldots,N$ matrisleri

min γ, koşullar:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_j\mathbf{Z}-\mathbf{B}_2\mathbf{W}_j\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}-\mathbf{A}_j\mathbf{W}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{B}_{1j} & \mathbf{Z}\mathbf{C}_j^{\mathrm{T}}-\mathbf{B}_2\mathbf{W}_j\mathbf{C}_j^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_{1j}^{\mathrm{T}} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_j^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}_j\mathbf{Z}-\mathbf{C}_j\mathbf{W}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_j & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0;\ j=1,\ldots,N \tag{3.67}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_j\mathbf{Z}+\mathbf{A}_k\mathbf{Z}-\mathbf{B}_2\mathbf{W}_j\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}-\mathbf{B}_2\mathbf{W}_k\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{Z}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}-\mathbf{A}_j\mathbf{W}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}-\mathbf{A}_k\mathbf{W}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_{1j}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}_{1k}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}_j\mathbf{Z}+\mathbf{C}_k\mathbf{Z}-\mathbf{C}_k\mathbf{W}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}-\mathbf{C}_j\mathbf{W}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1j}+\mathbf{B}_{1k} & \mathbf{Z}\mathbf{C}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{Z}\mathbf{C}_k^{\mathrm{T}}-\mathbf{B}_2\mathbf{W}_j\mathbf{C}_k^{\mathrm{T}}-\mathbf{B}_2\mathbf{W}_k\mathbf{C}_j^{\mathrm{T}} \\ -2\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{D}_k^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{D}_j+\mathbf{D}_k & -2\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0;\ j=1,\ldots,N-1, k=j+1,\ldots,N; \tag{3.68}$$

ile verilen dışbükey optimizasyon probleminin çözümünden elde edilebilirse; kapalı çevrim sistemin $\boldsymbol{w}(t)$ bozucularından $\boldsymbol{z}(t)$ performans çıkışlarına olan L_2 kazancını γ gibi bir pozitif reel sayıdan küçük kılan durum türevi geri beslemeli kontrolör $\boldsymbol{u}(t)=\mathbf{K}(\theta(t))\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\sum_{j=1}^{N}\theta_j(t)\mathbf{K}_j\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ olarak elde edilebilir. Burada $\mathbf{K}_j=\mathbf{W}_j\,\mathbf{Z}^{-1}$ olarak tanımlanmıştır.

İspat: Kapalı çevrim sistem (3.66) durum uzay matrisleri (3.6) içerisinde yerlerine yazıldığında

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi} & \mathbf{P}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t)))^{-1}\mathbf{B}_1(\theta(t)) & \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\theta(t)) \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}(\theta(t))(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t)))^{-\mathrm{T}}\mathbf{P} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}^{\mathrm{T}}(\theta(t)) \\ \mathbf{C}(\theta(t)) & \mathbf{D}(\theta(t)) & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{3.69}$$

$$\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\theta(t))(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t)))^{-\mathrm{T}}\mathbf{P}+\mathbf{P}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t)))^{-1}\mathbf{A}(\theta(t)) \tag{3.70}$$

elde edilir. (3.68) eşitsizliği $diag((\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t)))\mathbf{Z},\mathbf{I},\mathbf{I})$ ve $diag(\mathbf{Z}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t)))^{\mathrm{T}},\mathbf{I},\mathbf{I})$ ifadeleri ile solundan ve sağından çarpıldığında (3.68) kısıtı (3.70)' e denktir.

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t)))\mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\theta(t))+\mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t)))\mathbf{K})^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}(\theta(t)) \\ \mathbf{C}(\theta(t))\mathbf{Z}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t)))^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(\theta(t)) & (\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t)))\mathbf{Z}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\theta(t)) \\ -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}^{\mathrm{T}}(\theta(t)) \\ \mathbf{D}(\theta(t)) & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{3.71}$$

Burada $\mathbf{Z}=\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}=\mathbf{P}^{-1}$ olarak seçilmiştir ve $\mathbf{W}(\boldsymbol{\theta}(t))=\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{Z}$ değişken dönüşümü uygulandığında Yardımcı Teorem 2.3 kullanılarak DME (3.66) ve (3.67) elde edilmiş olur. ■

Alternatif bir L_2 kazançlı dayanıklı DTGB tasarımı için bir DPD sistem durum uzay formunda

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{x}(t)+\mathbf{B}_1(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{w}(t)+\mathbf{B}_2\,\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{z}(t)&=\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}(t))\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\mathbf{D}_1(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{w}(t)+\mathbf{D}_2\,\boldsymbol{u}(t)\end{aligned} \tag{3.72}$$

olarak tekrar yazılabilir. DTGB parametre bağımlı kontrol kanunu (3.64); (3.71) içerisine yazıldığında evrik durum uzay formundaki kapalı çevrim sistem

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)&=\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta}(t))(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t)))\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{B}_1(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{w}(t)\\ \boldsymbol{z}(t)&=(\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}(t))+\mathbf{D}_2\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t)))\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\mathbf{D}_1\,\boldsymbol{w}(t)\end{aligned} \tag{3.73}$$

biçiminde elde edilmiş olur. Evrik durum uzay formundaki kapalı çevrim sistem (3.73) için minimumum L_2 kazancını sağlayacak DTGB kontrolör sentezi Teorem 3.10 ile aşağıdaki gibi verilmektedir.

Teorem 3.10 (3.73) kapalı çevrim sisteminin asimptotik kararlılığı ve γ gibi bir pozitif reel sayıdan küçük L_2 kazancına sahip olması için $\mathbf{Z}\in\Re^{n\times n}$ pozitif tanımlı simetrik matrisi ve $\mathbf{W}_j\in\Re^{m\times n}$, $j=1,\ldots,N$ matrisleri

min γ, koşullar:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}-\mathbf{B}_2\mathbf{W}_j\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{A}_j\mathbf{Z}-\mathbf{A}_j\mathbf{W}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{B}_{1j} & \mathbf{A}_j\mathbf{Z}\mathbf{C}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{A}_j\mathbf{W}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_2^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{B}_{1j}^{\mathrm{T}} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{1j}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{C}_j\mathbf{Z}+\mathbf{D}_2\mathbf{W}_j\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_{1j} & -\gamma\mathbf{I}\end{bmatrix}\prec 0;\ j=1,\ldots,N \tag{3.74}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{Z}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}-\mathbf{B}_2\mathbf{W}_j\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}-\mathbf{B}_2\mathbf{W}_k\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{A}_j\mathbf{Z}+\mathbf{A}_k\mathbf{Z}-\mathbf{A}_j\mathbf{W}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}-\mathbf{A}_k\mathbf{W}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{B}_{1j}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}_{1k}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{C}_j\mathbf{Z}+\mathbf{C}_k\mathbf{Z}+\mathbf{D}_2\mathbf{W}_j\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}+\mathbf{D}_2\mathbf{W}_k\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{1j}+\mathbf{B}_{1k} & \mathbf{A}_j\mathbf{Z}\mathbf{C}_k^{\mathrm{T}}+\mathbf{A}_k\mathbf{Z}\mathbf{C}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{A}_j\mathbf{W}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_2^{\mathrm{T}}+\mathbf{A}_k\mathbf{W}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_2^{\mathrm{T}}\\ -2\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{1j}^{\mathrm{T}}+\mathbf{D}_{1k}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{D}_{1j}+\mathbf{D}_{1k} & -2\gamma\mathbf{I}\end{bmatrix}\prec 0 \tag{3.75}$$
$$j=1,\ldots,N-1,k=j+1,\ldots,N$$

ile verilen dışbükey optimizasyon probleminin çözümünden elde edilebilirse; kapalı çevrim sistemin $\boldsymbol{w}(t)$ bozucularından $\boldsymbol{z}(t)$ performans çıkışlarına olan L_2 kazancını γ gibi bir pozitif reel sayıdan küçük kılan durum türevi geri beslemeli kontrolör $\boldsymbol{u}(t)=\mathbf{K}(\theta(t))\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\sum_{j=1}^{N}\theta_j(t)\mathbf{K}_j\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ olarak elde edilebilir. Burada $\mathbf{K}_j=\mathbf{W}_j\,\mathbf{Z}^{-1}$ olarak tanımlanmıştır.

İspat: Kapalı çevrim sistem (3.73) evrik durum uzay formunda yazıldığı için Yardımcı Teorem 3.2 böyle bir durumda son derece kullanışlıdır. Lyapunov fonksiyonu adayımızı $V(t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{P}\,\boldsymbol{x}(t)$ olarak seçecek olursak; türevi

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)=&\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}(\theta(t))(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t)))\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}(\theta(t))\mathbf{B}_1(\theta(t))\boldsymbol{w}(t)+\\&\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t)))^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{P}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{P}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)\end{aligned} \tag{3.76}$$

olarak yazılabilir. Genişletilmiş durum vektörünü $\boldsymbol{\xi}(t)=\left[\dot{\boldsymbol{x}}(t)\quad \boldsymbol{w}(t)\right]^{\mathrm{T}}$ olarak belirleyerek evrik durum uzay formundaki kapalı çevrim sistem (3.73) ve (3.76) ifadelerini (3.12) içerisinde yerlerine koyduğumuzda

$$\begin{aligned}&\dot{V}(t)+\gamma^{-1}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t)-\gamma\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{w}(t)=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\,\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{\xi}(t)<0\\&\boldsymbol{\Omega}=\\&\begin{bmatrix}\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}(\theta(t))(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t)))+(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t)))^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{P} & \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}(\theta(t))\mathbf{B}_1(\theta(t))\\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{P} & -\gamma\mathbf{I}\end{bmatrix}+\\&\begin{bmatrix}(\mathbf{C}(\theta(t))+\mathbf{D}_2\mathbf{K}(\theta(t)))^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{D}_1^{\mathrm{T}}(\theta(t))\end{bmatrix}\gamma^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{C}(\theta(t))+\mathbf{D}_2\mathbf{K}(\theta(t)) & \mathbf{D}_1(\theta(t))\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3.77}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 2.1 ile verilen Schur tümleyen formülünü uyguladığımızda ise

$$\begin{bmatrix}\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}(\theta(t))(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t)))+(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t)))^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{P} & \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}(\theta(t))\mathbf{B}_1(\theta(t)) & (\mathbf{C}(\theta(t))+\mathbf{D}_2\mathbf{K}(\theta(t)))^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}(\theta(t))\mathbf{P} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_1^{\mathrm{T}}(\theta(t))\\ \mathbf{C}(\theta(t))+\mathbf{D}_2\mathbf{K}(\theta(t)) & \mathbf{D}_1(\theta(t)) & -\gamma\mathbf{I}\end{bmatrix}\prec 0 \tag{3.78}$$

elde edilir. Yeni bir değişken olarak $\mathbf{Z}=\mathbf{Z}^{\mathbf{T}}=\mathbf{P}^{-1}$ tanımlanacak olursa, $diag(\mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z},\mathbf{I},\mathbf{I})$ ve $diag(\mathbf{Z}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\theta(t)),\mathbf{I},\mathbf{I})$ ile solundan ve sağından çarptığımızda;

$\mathbf{W}(\theta(t))=\mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{Z}$ değişken dönüşümü uygulanırsa Yardımcı Teorem 2.3 sayesinde (3.74) ve (3.75) DMEleri elde edilmiş olur. ■

DPD sistem (3.61) için, (3.1) ile verilmiş olan L_2 kazancını minimum kılan, ÇTGB parametre bağımlı kontrol kanununu

$$\boldsymbol{u}(t)=\mathbf{K}(\theta(t))\dot{\boldsymbol{y}}(t) \tag{3.79}$$

ile verilmiş olsun. olarak tanımlansın. Burada, $\dot{\boldsymbol{y}}(t)=\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ türevi ölçülebilen çıkışlar vektörüdür. Parametre bağımlı kontrol kazancı

$$\mathbf{K}(\theta(t))=\sum_{j=1}^{N}\theta_j(t)\mathbf{K}_j,\ \sum_{j=1}^{N}\theta_j(t)=1,\ \theta_j(t)\geq 0,\ j=1,\ldots,N \tag{3.80}$$

olarak tanımlandığında DZD kapalı çevrim sistem durum uzay formunda

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=\mathbf{A}_{\mathrm{cl}}\,\boldsymbol{x}(t)+\mathbf{B}_{\mathrm{cl}}\,\boldsymbol{w}(t)\\ \boldsymbol{z}(t)&=\mathbf{C}_{\mathrm{cl}}\,\boldsymbol{x}(t)+\mathbf{D}_{\mathrm{cl}}\,\boldsymbol{w}(t)\end{aligned} \tag{3.81}$$

olarak yazılabilir. Burada kapalı çevrim durum uzay matrisleri $\mathbf{A}_{\mathrm{cl}}=\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)^{-1}\mathbf{A}(\theta(t))$; $\mathbf{B}_{\mathrm{cl}}=\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)^{-1}\mathbf{B}_1(\theta(t))$; $\mathbf{C}_{\mathrm{cl}}=\mathbf{C}(\theta(t))$ ve $\mathbf{D}_{\mathrm{cl}}=\mathbf{D}(\theta(t))$ olarak verilmektedir. ÇTGB L_2 kazançlı parametre bağımlı kontrolör sentezini veren Teorem 3.11 aşağıdaki gibi elde edilebilir.

Teorem 3.11 Verilmiş olan bir μ pozitif reel sayısı için, (3.81) kapalı çevrim sisteminin asimptotik kararlılığı ve γ gibi bir pozitif reel sayıdan küçük L_2 kazancına sahip olması için $\mathbf{Z}\in\Re^{n\times n}$ pozitif tanımlı simetrik matrisi, $\mathbf{W}_j\in\Re^{m\times p}$, $j=1,\ldots,N$ matrisleri ve $\mathbf{S}\in\Re^{p\times p}$ matrisi

min γ, koşullar:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_j\mathbf{Z}-\mathbf{B}_2\mathbf{W}_j\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}-\mathbf{A}_j\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{B}_{1j} & \mathbf{Z}\mathbf{C}_j^{\mathrm{T}}-\mathbf{B}_2\mathbf{W}_j\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{C}_j^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{B}_{1j}^{\mathrm{T}} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_j^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{C}_j\mathbf{Z}-\mathbf{C}_j\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_j & -\gamma\mathbf{I}\end{bmatrix}\prec 0 \tag{3.82}$$
$$j=1,\ldots,N$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_j\mathbf{Z}+\mathbf{A}_k\mathbf{Z}-\mathbf{B}_2\mathbf{W}_j\mathbf{C}_y\mathbf{A}_k^T-\mathbf{B}_2\mathbf{W}_k\mathbf{C}_y\mathbf{A}_j^T+\mathbf{Z}\mathbf{A}_j^T+\mathbf{Z}\mathbf{A}_k^T-\mathbf{A}_j\mathbf{C}_y^T\mathbf{W}_k^T\mathbf{B}_2^T-\mathbf{A}_k\mathbf{C}_y^T\mathbf{W}_j^T\mathbf{B}_2^T \\ \mathbf{B}_{1j}^T+\mathbf{B}_{1k}^T \\ \mathbf{C}_j\mathbf{Z}+\mathbf{C}_k\mathbf{Z}-\mathbf{C}_j\mathbf{C}_y^T\mathbf{W}_k^T\mathbf{B}_2^T-\mathbf{C}_k\mathbf{C}_y^T\mathbf{W}_j^T\mathbf{B}_2^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1j}+\mathbf{B}_{1k} & \mathbf{Z}\mathbf{C}_j^T+\mathbf{Z}\mathbf{C}_k^T-\mathbf{B}_2\mathbf{W}_j\mathbf{C}_y\mathbf{C}_k^T-\mathbf{B}_2\mathbf{W}_k\mathbf{C}_y\mathbf{C}_j^T \\ -2\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_j^T+\mathbf{D}_k^T \\ \mathbf{D}_j+\mathbf{D}_k & -2\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0$$

$$j=1,\ldots,N-1, k=j+1,\ldots,N$$

(3.83)

$$\begin{bmatrix} \mu\mathbf{I} & \left(\mathbf{C}_y\mathbf{Z}-\mathbf{S}\mathbf{C}_y\right)^T \\ \left(\mathbf{C}_y\mathbf{Z}-\mathbf{S}\mathbf{C}_y\right) & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0 \qquad (3.84)$$

ile verilen dışbükey optimizasyon probleminin çözümünden elde edilebilirse; kapalı çevrim sistemin $\boldsymbol{w}(t)$ bozucularından $\boldsymbol{z}(t)$ performans çıkışlarına olan L_2 kazancını γ gibi bir pozitif reel sayıdan küçük kılan ÇTGB parametre bağımlı kontrolör $\boldsymbol{u}(t)=\mathbf{K}(\theta(t))\dot{\boldsymbol{y}}(t)=\sum_{j=1}^{N}\theta_j(t)\mathbf{K}_j\,\dot{\boldsymbol{y}}(t)$ olarak elde edilebilir. Burada $\mathbf{K}_j=\mathbf{W}_j\mathbf{S}^{-1}$ olarak tanımlanmıştır.

İspat: Kapalı çevrim sistem (3.81) durum uzay matrisleri (3.6) içerisinde yerlerine yazıldığında

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi} & \mathbf{P}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{C}_y)^{-1}\mathbf{B}_1(\theta(t)) & \mathbf{C}^T(\theta(t)) \\ \mathbf{B}_1^T(\theta(t))(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{C}_y)^{-T}\mathbf{P} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}^T(\theta(t)) \\ \mathbf{C}(\theta(t)) & \mathbf{D}(\theta(t)) & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \qquad (3.85)$$

$$\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{A}^T(\theta(t))(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{C}_y)^{-T}\mathbf{P}+\mathbf{P}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{C}_y)^{-1}\mathbf{A}(\theta(t)) \qquad (3.86)$$

Elde edilir. (3.49) eşitsizliği $diag\left((\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{C}_y)\mathbf{Z},\mathbf{I},\mathbf{I}\right)$ ve $diag\left(\mathbf{Z}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{C}_y)^T,\mathbf{I},\mathbf{I}\right)$ ifadeleri ile solundan ve sağından çarpıldığında (3.85) kısıtı (3.87)' y3 denktir.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} & \mathbf{B}_1(\theta(t)) & (\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{C}_y)\mathbf{Z}\mathbf{C}^T(\theta(t)) \\ \mathbf{B}_1^T(\theta(t)) & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}^T(\theta(t)) \\ \mathbf{C}(\theta(t))\mathbf{Z}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{C}_y)^T & \mathbf{D}(\theta(t)) & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \qquad (3.87)$$

$$\boldsymbol{\Phi}=(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{C}_y)\mathbf{Z}\mathbf{A}^T(\theta(t))+\mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z}(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{C}_y)^T \qquad (3.88)$$

Burada $\mathbf{Z}=\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}=\mathbf{P}^{-1}$ olarak seçilmiştir. $\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{Z}=\mathbf{S}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}$ kabulü ve $\mathbf{W}(\boldsymbol{\theta}(t))=\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{S}$ değişken dönüşümü uygulandığında Yardımcı Teorem 2.3 ile (3.82) ve (3.83) elde edilmektedir. $\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{Z}=\mathbf{S}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}$ eşitliği ise Yardımcı Teorem 2.2 sayesinde DME (3.84) olarak dış bükey optimizasyon problemine katılabilir. ■

Alternatif bir L_2 kazançlı ÇTGB parametre bağımlı kontrolör tasarımı için bir DPD sistem (3.72) ele alındığında ÇTGB parametre bağımlı kontrol kanunu (3.79); (3.72) içerisine yazıldığında evrik durum uzay formundaki kapalı çevrim sistem

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)&=\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta}(t))\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{B}_1(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{w}(t)\\ \boldsymbol{z}(t)&=\left(\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}(t))+\mathbf{D}_2\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\mathbf{D}_1(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{w}(t)\end{aligned} \tag{3.89}$$

biçiminde elde edilmiş olur. Evrik durum uzay formundaki kapalı çevrim sistem (3.89) için minimumum L_2 kazancını sağlayacak ÇTGB parametre bağımlı kontrolör sentezi Teorem 3.12 ile aşağıdaki gibi verilmektedir.

Teorem 3.12 Verilmiş olan bir μ pozitif reel sayısı için, (3.89) kapalı çevrim sisteminin asimptotik kararlılığı ve γ gibi bir pozitif reel sayıdan küçük L_2 kazancına sahip olması için $\mathbf{Z}\in\Re^{n\times n}$ pozitif tanımlı simetrik matrisi, $\mathbf{W}_j\in\Re^{m\times p}, j=1,\ldots,N$ matrisleri ve $\mathbf{S}\in\Re^{p\times p}$ matrisi

min γ, koşullar:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}-\mathbf{B}_2\mathbf{W}_j\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{A}_j\mathbf{Z}-\mathbf{A}_j\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{B}_{1j} & \mathbf{A}_j\mathbf{Z}\mathbf{C}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{A}_j\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_2^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{B}_{1j}^{\mathrm{T}} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{1j}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{C}_j\mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{D}_2\mathbf{W}_j\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_{1j} & -\gamma\mathbf{I}\end{bmatrix}\prec 0 \tag{3.90}$$

$$j=1,\ldots N$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{Z}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}-\mathbf{B}_2\mathbf{W}_j\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}-\mathbf{B}_2\mathbf{W}_k\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{A}_j\mathbf{Z}+\mathbf{A}_k\mathbf{Z}-\mathbf{A}_j\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}-\mathbf{A}_k\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{B}_{1j}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}_{1k}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{C}_j\mathbf{Z}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}+\mathbf{C}_k\mathbf{Z}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{D}_2\mathbf{W}_j\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}}+\mathbf{D}_2\mathbf{W}_k\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{1j}+\mathbf{B}_{1k} & \mathbf{A}_j\mathbf{Z}\mathbf{C}_k^{\mathrm{T}}+\mathbf{A}_k\mathbf{Z}\mathbf{C}_j^{\mathrm{T}}+\mathbf{A}_j\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_2^{\mathrm{T}}+\mathbf{A}_k\mathbf{C}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_2^{\mathrm{T}}\\ -2\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{1j}^{\mathrm{T}}+\mathbf{D}_{1k}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{D}_{1j}+\mathbf{D}_{1k} & -2\gamma\mathbf{I}\end{bmatrix}\prec 0$$

$$j=1,\ \ldots,\ N-1, k=j+1,\ \ldots, N$$

(3.91)

$$\begin{bmatrix} \mu\mathbf{I} & \left(\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{Z}-\mathbf{S}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)^{\mathrm{T}} \\ \left(\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\mathbf{Z}-\mathbf{S}\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right) & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0 \tag{3.92}$$

ile verilen dışbükey optimizasyon probleminin çözümünden elde edilebilirse; kapalı çevrim sistemin $\boldsymbol{w}(t)$ bozucularından $\boldsymbol{z}(t)$ performans çıkışlarına olan L_2 kazancını γ gibi bir pozitif reel sayıdan küçük kılan ÇTGB parametre bağımlı kontrolör $\boldsymbol{u}(t)=\mathbf{K}\left(\theta(t)\right)\dot{\boldsymbol{y}}(t)=\sum_{j=1}^{N}\theta_j(t)\mathbf{K}_j\,\dot{\boldsymbol{y}}(t)$ olarak elde edilebilir. Burada $\mathbf{K}_j=\mathbf{W}_j\,\mathbf{S}^{-1}$ olarak tanımlanmıştır.

İspat: Kapalı çevrim sistem (3.89) evrik durum uzay formunda yazıldığı için Boyd vd. [59] tarafından verilen Yardımcı Teorem 3.2 böyle bir durumda son derece kullanışlıdır ve (3.89) için asimptotik kararlılık ve L_2 kazancı koşulları (3.12) sağlandıkça garanti edilmektedir. Bu aşamada Lyapunov fonksiyonu adayı olarak (3.13) ile verildiği gibi $V(t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\,\mathbf{P}\,\boldsymbol{x}(t)$ seçilecek olursa; türevi

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)=\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\left(\theta(t)\right)\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\left(\theta(t)\right)\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\left(\theta(t)\right)\mathbf{B}_1\left(\theta(t)\right)\boldsymbol{w}(t)+\\ \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\left(\theta(t)\right)\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}\left(\theta(t)\right)\mathbf{P}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\left(\theta(t)\right)\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}\left(\theta(t)\right)\mathbf{P}\,\dot{\boldsymbol{x}}(t)\end{aligned} \tag{3.93}$$

olarak yazılabilir. Genişletilmiş durum vektörünü $\boldsymbol{\xi}(t)=\left[\dot{\boldsymbol{x}}(t)\quad \boldsymbol{w}(t)\right]^{\mathrm{T}}$ olarak belirleyerek evrik durum uzay formundaki kapalı çevrim sistem (3.51) ve (3.54) ifadelerini (3.12) içerisinde yerlerine koyduğumuzda

$$\begin{aligned}&\dot{V}(t)+\gamma^{-1}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t)-\gamma\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{w}(t)=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\xi}(t)<0\\ &\boldsymbol{\Omega}=\begin{bmatrix}\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\left(\theta(t)\right)\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\left(\theta(t)\right)\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)+\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}\left(\theta(t)\right)\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}\left(\theta(t)\right)\mathbf{P} & \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}\left(\theta(t)\right)\mathbf{B}_1\left(\theta(t)\right)\\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\left(\theta(t)\right)\mathbf{A}^{-\mathrm{T}}\left(\theta(t)\right)\mathbf{P} & -\gamma\mathbf{I}\end{bmatrix}+\\ &\begin{bmatrix}\left(\mathbf{C}\left(\theta(t)\right)+\mathbf{D}_2\mathbf{K}\left(\theta(t)\right)\mathbf{C}_{\mathrm{y}}\right)^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{D}_1^{\mathrm{T}}\left(\theta(t)\right)\end{bmatrix}\gamma^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{C}\left(\theta(t)\right)+\mathbf{D}_2\mathbf{K}\left(\theta(t)\right)\mathbf{C}_{\mathrm{y}} & \mathbf{D}_1\left(\theta(t)\right)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3.94}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 2.1 ile verilen Schur tümleyen formülünü uyguladığımızda ise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}(\theta(t))\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{C}_y\right)+\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{C}_y\right)^T\mathbf{A}^{-T}(\theta(t))\mathbf{P} & \mathbf{B}_1^T(\theta(t))\mathbf{A}^{-T}(\theta(t))\mathbf{P} & \mathbf{C}(\theta(t))+\mathbf{D}_2\mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{C}_y \\ \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1}(\theta(t))\mathbf{B}_1(\theta(t)) & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_1^T(\theta(t)) \\ \left(\mathbf{C}(\theta(t))+\mathbf{D}_2\mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{C}_y\right)^T & \mathbf{D}_1(\theta(t)) & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{3.95}$$

elde edilir. Yeni bir değişken olarak $\mathbf{Z}=\mathbf{Z}^T=\mathbf{P}^{-1}$ tanımlanacak olursa, $diag(\mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z},\mathbf{I},\mathbf{I})$ ve $diag(\mathbf{Z}\mathbf{A}^T(\theta(t)),\mathbf{I},\mathbf{I})$ ile solundan ve sağından çarptığımızda;

$$\begin{bmatrix} \left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{C}_y\right)\mathbf{Z}\mathbf{A}^T(\theta(t))+\mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z}\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}_2\mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{C}_y\right)^T & \mathbf{B}_1^T(\theta(t)) & \mathbf{C}(\theta(t))\mathbf{Z}\mathbf{A}^T(\theta(t))+\mathbf{D}_2\mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{C}_y\mathbf{Z}\mathbf{A}^T(\theta(t)) \\ \mathbf{B}_1(\theta(t)) & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_1^T(\theta(t)) \\ \mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{Z}\left(\mathbf{C}(\theta(t))+\mathbf{D}_2\mathbf{K}(\theta(t))\mathbf{C}_y\right)^T & \mathbf{D}_1(\theta(t)) & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{3.96}$$

Burada $\mathbf{C}_y\mathbf{Z}=\mathbf{S}\mathbf{C}_y$ kabulü ve $\mathbf{W}=\mathbf{K}\mathbf{S}$ değişken dönüşümü ile beraber Yardımcı Teorem 2.3 kullanıldığında (3.90) ve (3.91) elde edilmektedir. $\mathbf{C}_y\mathbf{Z}=\mathbf{S}\mathbf{C}_y$ eşitliği ise Yardımcı Teorem 2.2 sayesinde DME (3.92) olarak dış bükey optimizasyon problemine katılabilir. ■

BÖLÜM 4

TAŞIT SÜSPANSİYON SİSTEMLERİNİN MODELLENMESİ

Bu bölümde, taşıt titreşimlerinin aktif kontrolü için kontrolör tasarımında kullanılacak olan matematiksel modellerin elde edilmesi amaçlanmıştır. Taşıt süspansiyon sistemleri;

- Sürüş konforu için yol pürüzlülüğü, tümsek, çukur tipi bozuculardan kaynaklanan titreşimlerin yalıtılması;
- Lastik ile yol arasındaki teması koruyarak yol tutuşu ve manevra kabiliyetinin korunması;
- Süspansiyon çarpması sonucu oluşabilecek konfor kaybı ve mekanik hasar durumlarından kaçınılması;

olarak sıralanan hedefleri gerçekleştirmek amacıyla tasarlanırlar. Literatürde son derece yaygın olarak kullanılan iki serbestlik dereceli çeyrek taşıt modeli sayesinde konfor, yol tutuşu ve süspansiyon sıkışması üzerine son derece faydalı çıkarımlar yapılabilmektedir. Çeyrek taşıt modeline eyleyici dinamiklerinin eklenmesi ve koltuk süspansiyonu, sürücü modellerinin eklenmesi ile daha da kullanışlı modeller elde edilmesi mümkündür.

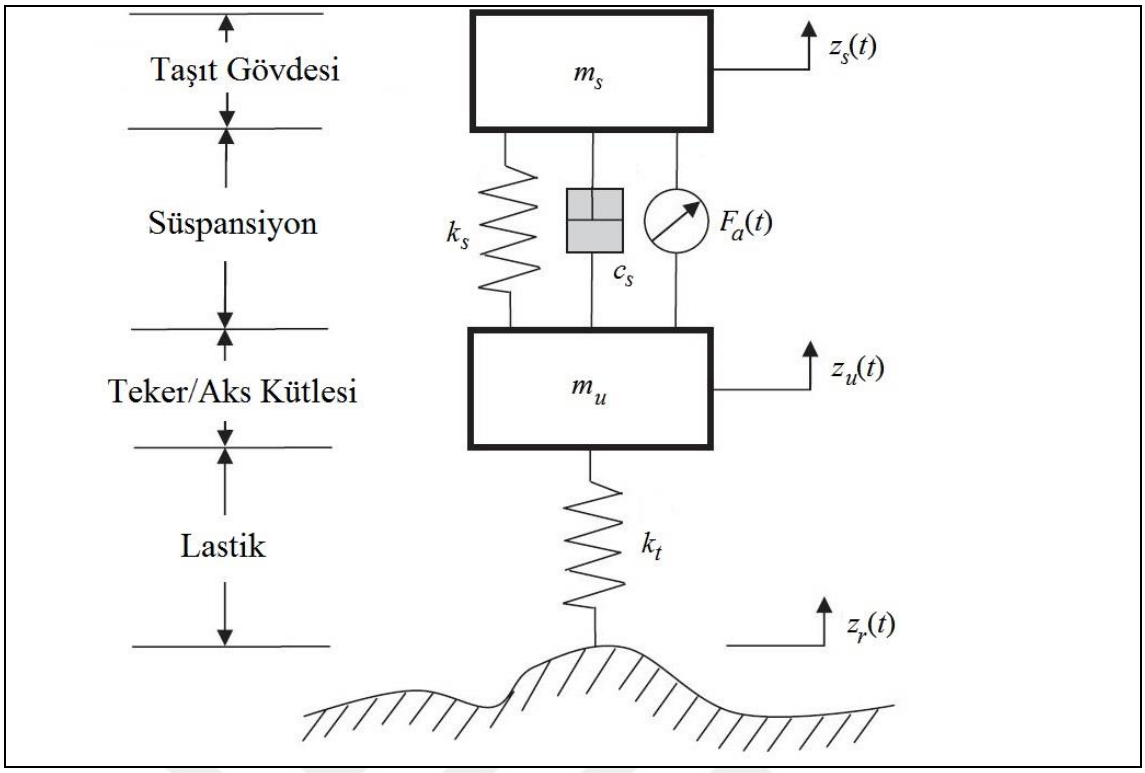
Bölüm 4.1 kapsamında Literatürde son derece yaygın olarak kullanılan çeyrek taşıt süspansiyon (ÇT) modeline ait hareket denklemleri verilmiş ve DZD sistem olarak durum uzay formunda ifade edilmiştir. Ardından söz konusu modele elektro hidrolik eyleyici dinamiği eklenmesiyle elektro hidrolik çeyrek taşıt süspansiyon (EHÇT) modelini harekt denklemleri ve DZD durum uzay gösterimi Bölüm 4.2 ile

sunulmaktadır. Bölüm 4.3 içerisinde sürücü modeli entegre çeyrek taşıt süspansiyon (SEÇT) modeli ve sürücü modeli entegre elektro hidrolik çeyrek taşıt süspansiyon (EHÇT) modeli için hareket denklemleri ile DZD durum uzay gösterimi elde edilmiştir. Söz konusu modellerdeki parametrelerin belirsizlik içermesi durumunda kontrolör tasarımı için PBDZD modellerin elde edilmesi Bölüm 4.4 içerisinde anlatılmaktadır. Bölüm 4.5 kapsamında ise parametre bağımlı kontrolör tasarımı için DPD durum uzay modeli verilmektedir. Taşıt titreşimlerinin analizi için kullanılacak yol bozucuların matematiksel modelleri tümsek ve ISO rastgele yol pürüzlülüğü senaryoları için Bölüm 4.6 ile sunulmaktadır. Son olarak bölüm 4.7 ile taşıt titreşimlerinin açık çevrim yanıtları farklı senaryolar için sunularak performans sınırları incelenmektedir. Bölüm 4.7 ile yapılan analizler ışığında LQ optimal ve L_2 kazançlı kontrolör tasarımlarında kullanılması gerkene performans ölçütleri Bölüm 4.8 içerisinde belirlenmiştir.

4.1 Çeyrek Taşıt Süspansiyon Modeli

Literatürdeki çalışmalar göstermektedir ki taşıt titreşimi ile ilgili güçlü analiz ve tasarımlar iki serbestlik dereceli çeyrek taşıt modeli ile yapılaibilmektedir [7]. Örneğin, Hedrick ve Butsuen aktif kontrol ile erişilebilecek performans limitlerini inceledikleri çalışmalarından ÇT modeli üzerinde yapılan çıkarımların, tam taşıt modeli üzerinden hala geçerli olduğunu göstermektedir [4]. Çeyrek taşıt modeli taşıt gövdesi ve tekerlek/aks kütlesini içeren iki serbestlik dereceli modeldir ve Şekil 4.8 ile görülmektedir.

Şekil 4.1' de, m_s taşıt gövdesini; m_u teker/aks kütlesini göstermektedir. k_s ve c_s süspansiyon elemanın yay ve sönüm katsayılarıdır. k_t lastiğin esnekliğini gösteren rijitlik katsayısıdır. z_s ve z_u sırasıyla taşıt gövdesi ve teker/aks yer değiştirmelerini göstermektedir. z_r tümsek veya rastgele tip yol profiline air yer değiştirme değişkenidir. F_a ise kontrolör tarafından hesaplanan aktif kontrol kuvvetidir.



Şekil 4. 1 Fiziksel ÇT Modeli

ÇT modelini oluşturan hareket denklemleri

$$\ddot{z}_s(t) = -\frac{c_s}{m_s}(\dot{z}_s(t) - \dot{z}_u(t)) - \frac{k_s}{m_s}(z_s(t) - z_u(t)) + \frac{1}{m_s}F_a(t) \tag{4.1}$$

$$\ddot{z}_u(t) = \frac{c_s}{m_u}(\dot{z}_s(t) - \dot{z}_u(t)) + \frac{k_s}{m_s}(z_s(t) - z_u(t)) - \frac{k_t}{m_s}(z_u(t) - z_t(t)) - \frac{1}{m_u}F_a(t) \tag{4.2}$$

ile verilmektedir. Durum değişkenleri

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} z_s(t) & z_u(t) & \dot{z}_s(t) & \dot{z}_u(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{4.3}$$

olarak seçildiğinde DZD durum uzay gösterimi

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{A}\,\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{B}_1\,\boldsymbol{w}(t) + \mathbf{B}_2\,\boldsymbol{u}(t) \tag{4.4}$$

biçiminde yazılabilir. Bozucu vektörü $\boldsymbol{w}(t) = z_r(t)$ olarak; kontrol girişi vektörü ise $\boldsymbol{u}(t) = F_a(t)$ olarak seçilmiştir. Burada DZD durum uzay matrisleri (4.5)-(4.7) ile verilmektedir.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_s}{m_s} & \frac{k_s}{m_s} & -\frac{c_s}{m_s} & \frac{c_s}{m_s} \\ \frac{k_s}{m_u} & -\frac{k_s+k_t}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & -\frac{c_s}{m_u} \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

$$\mathbf{B_1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & k_t/m_u\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{4.6}$$

$$\mathbf{B_2}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1/m_s & -1/m_u\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{4.7}$$

ÇT modeli parametleri Çizelge 4.1 ile verilmektedir [18].

Çizelge 4. 1 Çeyrek taşıt süspansiyon modeli parametreleri

parametre	değeri	birimi	parametre	değeri	birimi
m_s	320	[kg]	k_t	200000	[N/m]
m_u	40	[kg]	c_s	1000	[Ns/m]
k_s	18000	[N/m]			

4.2 Elektro Hidrolik Eyleyicili Çeyrek Taşıt Süspansiyon Modeli

Bu bölümde ÇT modeline elektro hidrolik eyleyici modelinin eklenmesi ele alınmaktadır. Bölüm 4.1 de tanımlanmış olan aktif kontrol kuvveti taşıt gövdesi ile teker/aks kütlesi arasına yerleştirilmiş olan elektro hidrolik eyleyici aracılığı ile üretilmektedir. Sonuç olarak aktif kontrol kuvveti hidrolik silindir içerisindeki yük basıncı P_L ve piston alanı olan A_p cinsinden $F_a(t)=A_pP_L(t)$ olarak ifade edilebilmektedir.

Aktif süspansiyon sistemleri tasarımı için sıklıkla kullanılmakta olan doğrusal eketro hidrolik eyleyici dinamiği

$$\frac{V_t}{4\beta_e}\dot{P}_L(t)=-C_{tp}P_L(t)-A_p(\dot{z}_s(t)-\dot{z}_u(t))+Q_L(t) \tag{4.8}$$

ile verilmektedir [18]. Burada V_t toplam silindir içi hacim; β_e hidrolik yağa ait etkin esneklik modülü; C_{tp} ise toplam piston sızma katsayısıdır. Burada $a_1=4\beta_e/V_t$ ve $a_2=a_1C_{tp}$ değişkenlerini tanımlayalım. Hareket denklemleri (4.1) ve (4.2) ile elektro hidrolik eyleyici dinamiği (4.9) bir arada yazılacak olursak, durum vektörü

$$\boldsymbol{x}(t) = \left[z_s(t) \quad z_u(t) \quad z_s(t) \quad z_u(t) \quad P_L(t)/\overline{P}_L \right]^{\mathbf{T}} \tag{4.9}$$

olarak seçildiğinde,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{k_s}{m_s} & \dfrac{k_s}{m_s} & -\dfrac{c_s}{m_s} & \dfrac{c_s}{m_s} & \dfrac{A_p \overline{P}_L}{m_s} \\ \dfrac{k_s}{m_u} & -\dfrac{(k_s + k_t)}{m_u} & \dfrac{c_s}{m_u} & -\dfrac{c_s}{m_u} & -\dfrac{A_p \overline{P}_L}{m_u} \\ 0 & 0 & -\dfrac{a_1 A_p}{\overline{P}_L} & \dfrac{a_1 A_p}{\overline{P}_L} & -a_2 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

$$\mathbf{B_1} = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad k_t/m_u \quad 0 \right]^{\mathbf{T}} \tag{4.11}$$

$$\mathbf{B_2} = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad a_1/\overline{P}_L \quad 0 \right]^{\mathbf{T}} \tag{4.12}$$

ile verilen durum uzay matrisleri sayesinde EHÇT model (4.4) ile verilen DZD durum uzay formunda idafe edilmiş olur. Bozucu vektörü $\boldsymbol{w}(t) = z_r(t)$ olarak; kontrol girişi vektörü ise $\boldsymbol{u}(t) = Q_L(t)$ olarak seçilmiştir. (4.9) ile verilmiş olan durum vektörü seçimi göstermektedir ki yük basıncı P_L, kendisinin maksimum değeri $\overline{P}_L$ ile ölçeklenmiştir. Söz konusu ölçekleme ile durum uzay matrislerinin elemanları arasındaki büyük farklar olmasının önüne geçilmektedir. Aksi takdirde bu durum kotü koşullaşmış matrislere sebebiyet vermekte ve kontrolör tasarımı sırasında problem oluşturabilmektedir [17], [18]. EHÇT modelde kullanılan elektro hidrlik eyleyici modeli parametreleri Çizelge 4.2 ile verilmektetedir [18].

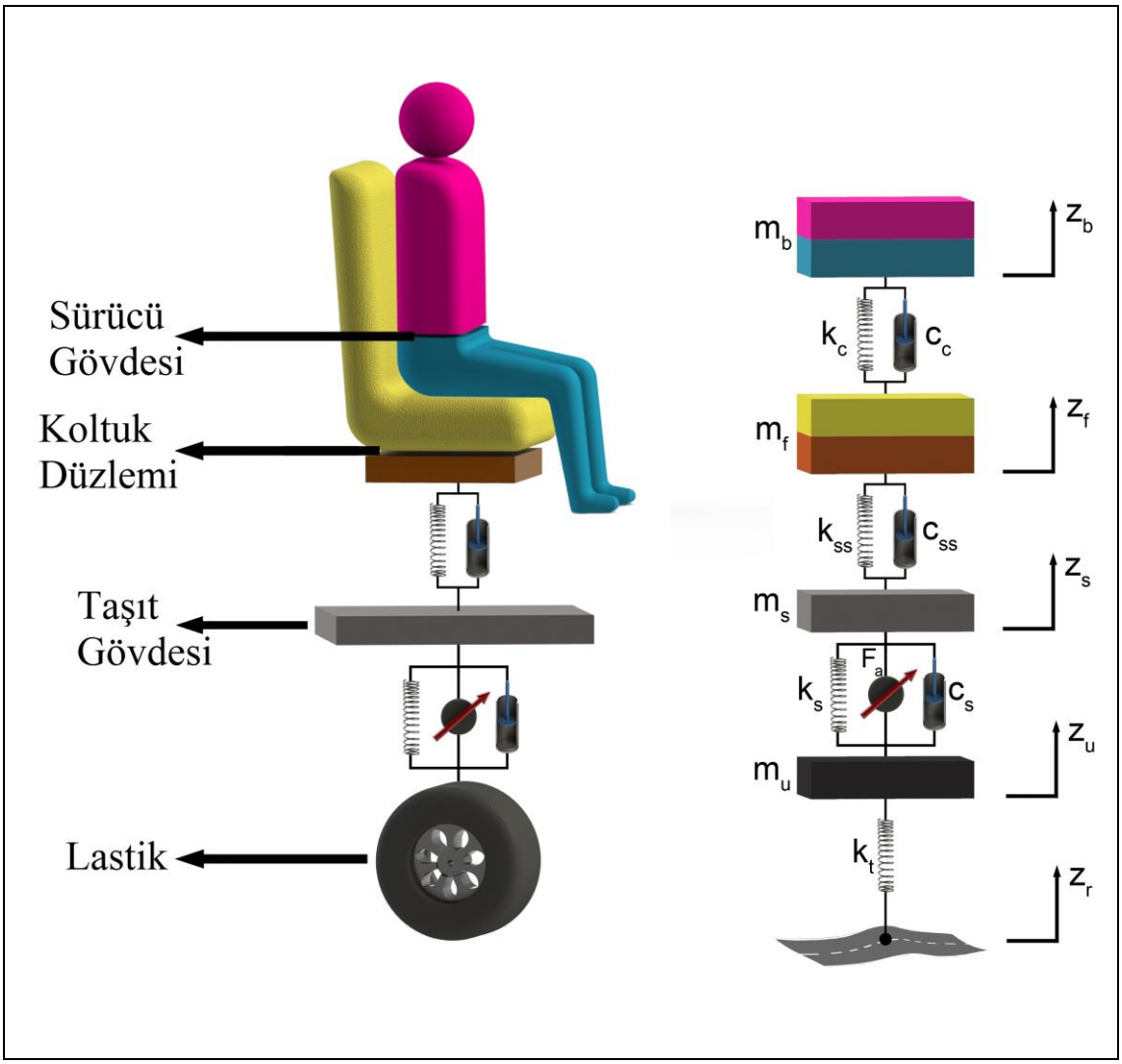
Çizelge 4. 2 Elektro hidrolik eyleyici modeli parametreleri

parametre	değeri	birimi	parametre	değeri	birimi
a_1	4.515x10^3	[N/m^5]	A_p	3.35x10^{-4}	[m^2]
a_2	1	[1/s]	$\overline{P}_L$	1.03425x10^7	[Pa]

4.3 Sürücü Modeli Entegre Çeyrek Taşıt Süspansiyon Modeli

Bu bölümde ÇT modeline sürücü ve koltuk süspansiyon modelinin eklenmesi ele alınmaktadır. SEÇT modelinde ÇT modeline ek olarak koltuk düzlemi ve sürücü gövdesi içeren dört serbestlik dereceli bir modeldir ve Şekil 4.2 ile görülmektedir.

Şekil 4.2' de, m_s taşıt gövdesini; m_u teker/aks kütlesini göstermektedir; m_f koltuk düzlemi kütlesini ve m_b sürücü gövdesinin kütlesini göstermektedir. k_c ve c_c koltuk minderinin elemanın yay ve sönüm katsayılarını; k_{ss} ve c_{ss} koltuk ile taşıt gövdesi arasındaki süspansiyon elemanın yay ve sönüm katsayılarını; k_s ve c_s ise taşıt gövdesi ile teker/aks kütlesi arasındaki süspansiyon elemanın yay ve sönüm katsayılarını; göstermektedir. k_t lastiğin esnekliğini gösteren rijitlik katsayısıdır.



Şekil 4.2 Fiziksel SEÇT modeli

z_b, z_f, z_s ve z_u sırasıyla sürücü gövdesi, koltuk düzlemi, taşıt gövdesi ve teker/aks yer değiştirmelerini göstermektedir. z_r tümsek veya rastgele tip yol profiline air yer değiştirme değişkenidir. F_a ise kontrolör tarafından hesaplanan aktif kontrol kuvvetidir.

SEÇT modelini oluşturan hareket denklemleri

$$\ddot{z}_u(t) = \frac{c_s}{m_u}(\dot{z}_s(t) - \dot{z}_u(t)) + \frac{k_s}{m_s}(z_s(t) - z_u(t)) - \frac{k_t}{m_s}(z_u(t) - z_t(t)) - \frac{1}{m_u}F_a(t) \tag{4.13}$$

$$\ddot{z}_s(t) = -\frac{c_s}{m_s}(\dot{z}_s(t) - \dot{z}_u(t)) - \frac{k_s}{m_s}(z_s(t) - z_u(t)) - \frac{c_{ss}}{m_s}(\dot{z}_s(t) - \dot{z}_f(t)) - \frac{k_{ss}}{m_s}(z_s(t) - z_f(t)) + \frac{1}{m_s}F_a(t) \tag{4.14}$$

$$\ddot{z}_f(t) = -\frac{c_{ss}}{m_f}(\dot{z}_f(t) - \dot{z}_s(t)) - \frac{k_{ss}}{m_f}(z_f(t) - z_s(t)) - \frac{c_c}{m_f}(\dot{z}_f(t) - \dot{z}_b(t)) - \frac{k_c}{m_f}(z_f(t) - z_b(t)) \tag{4.15}$$

$$\ddot{z}_b(t) = -\frac{c_c}{m_b}(\dot{z}_b(t) - \dot{z}_f(t)) - \frac{k_c}{m_b}(z_b(t) - z_f(t)) \tag{4.16}$$

ile verilmektedir [56]. Durum vektörü

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} z_u(t) & z_s(t) & z_f(t) & z_b(t) & \dot{z}_u(t) & \dot{z}_s(t) & \dot{z}_f(t) & \dot{z}_b(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{4.17}$$

olarak seçildiğinde,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_t + k_s}{m_u} & \frac{k_s}{m_u} & 0 & 0 & -\frac{c_s}{m_u} & \frac{c_s}{m_u} & 0 & 0 \\ \frac{k_s}{m_s} & -\frac{k_s + k_{ss}}{m_s} & \frac{k_{ss}}{m_s} & 0 & \frac{c_s}{m_s} & -\frac{c_s + c_{ss}}{m_s} & \frac{c_{ss}}{m_s} & 0 \\ 0 & \frac{k_{ss}}{m_f} & -\frac{k_{ss} + k_c}{m_f} & \frac{k_c}{m_f} & 0 & \frac{c_{ss}}{m_f} & -\frac{c_{ss} + c_c}{m_f} & \frac{c_c}{m_f} \\ 0 & 0 & \frac{k_c}{m_b} & -\frac{k_c}{m_b} & 0 & 0 & \frac{c_c}{m_b} & -\frac{c_c}{m_b} \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

$$\mathbf{B_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & k_t/m_u & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{4.19}$$

$$\mathbf{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1/m_u & 1/m_s & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{4.20}$$

ile verilen durum uzay matrisleri sayesinde SEÇT modeli (4.4) ile verilen DZD durum uzay formunda idafe edilmiş olur. Bozucu vektörü $\boldsymbol{w}(t) = z_r(t)$ olarak; kontrol girişi vektörü ise $\boldsymbol{u}(t) = F_a(t)$ olarak seçilmiştir.

SEÇT modeline elektro hidrolik eyleyici modelinin eklenmesi durumunda SEHÇT model elde edilmektedir. Hareket denklemleri (4.13)-(4.16) ile elektro hidrolik eyleyici dinamiği (4.8) bir araya getirildiğinde, durum vektörü

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} z_u(t) & z_s(t) & z_f(t) & z_b(t) & \dot{z}_u(t) & \dot{z}_s(t) & \dot{z}_f(t) & \dot{z}_b(t) & P_L(t)/\overline{P}_L \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad (4.21)$$

biçiminde seçilecek olursa durum uzay matrisleri (4.22)-(4.24) kullanılarak SEHÇT modeli (4.4) ile verilen DZD durum uzay formunda idafe edilmiş olur.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{-(k_t + k_s)}{m_u} & \dfrac{k_s}{m_u} & 0 & 0 \\ \dfrac{k_s}{m_s} & \dfrac{-(k_s + k_{ss})}{m_s} & \dfrac{k_{ss}}{m_s} & 0 \\ 0 & \dfrac{k_{ss}}{m_f} & \dfrac{-(k_{ss} + k_c)}{m_f} & \dfrac{k_c}{m_f} \\ 0 & 0 & \dfrac{k_c}{m_b} & \dfrac{-k_c}{m_b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{-c_s}{m_u} & \dfrac{c_s}{m_u} & 0 & 0 & \dfrac{-A_p\overline{P}_L}{m_u} \\ \dfrac{c_s}{m_s} & \dfrac{-(c_s + c_{ss})}{m_s} & \dfrac{c_{ss}}{m_s} & 0 & \dfrac{A_p\overline{P}_L}{m_s} \\ 0 & \dfrac{c_{ss}}{m_f} & \dfrac{-(c_{ss} + c_c)}{m_f} & \dfrac{c_c}{m_f} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{c_c}{m_b} & \dfrac{-c_c}{m_b} & 0 \\ \dfrac{a_1 A_p}{\overline{P}_L} & -\dfrac{a_1 A_p}{\overline{P}_L} & 0 & 0 & -a_2 \end{bmatrix} \qquad (4.22)$$

$$\mathbf{B_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & k_t/m_u & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \tag{4.23}$$

$$\mathbf{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1/\overline{P}_L \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \tag{4.24}$$

Burada, bozucu vektörü $\boldsymbol{w}(t) = z_r(t)$ olarak; kontrol girişi vektörü ise $\boldsymbol{u}(t) = Q_L(t)$ olarak seçilmiştir. SEÇT modeli parametreleri Çizelge 4.3 ile verilmektetedir [63].

Çizelge 4. 3 Sürücü modeli entegre çeyrek taşıt süspansiyon modeli parametreleri

parametre	değeri	birimi	parametre	değeri	birimi
m_u	20	[kg]	k_{ss}	7414.86	[N/m]
m_s	300	[kg]	k_c	8228.78	[N/m]
m_f	20	[kg]	c_s	2000	[Ns/m]
m_b	70	[kg]	c_{ss}	1080	[Ns/m]
k_t	180000	[N/m]	c_c	152.8	[Ns/m]
k_s	10000	[N/m]			

4.4 Belirsiz Parametreler İçeren Süspansiyonların Politopik Belirsiz Doğrusal Zamanla Değişen Sistem Formunda Modellenmesi

Taşıt süspansiyonlarındaki bazı parametreler zamanla değişebilmektedir veya kesin oalrak bilinememektedir. Örnek olarak taşıt gövdesinin kütlesi m_s, süspansiyon sönüm katsayısı c_s ve lastik rijitlik katsayısı k_t, bazı durumlarda belirsiz olarak alınabilecek kadar büyük değişimler gösterebilmektedir [64]. Söz konusu parametreler sabit değil değişken olduğunda (4.4) durum uzay gösterimi (4.25) ile verilen hale dönüşür.

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{A}(m_s(t), c_s(t), k_t(t))\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{B}_1(k_t(t))\boldsymbol{w}(t) + \mathbf{B}_2(m_s(t))\boldsymbol{u}(t) \tag{4.25}$$

Söz konusu belirsizlikler altında yüksek performans sergileyen kontrolör tasarımları için parametre belirsizliği içeren durum uzay sistemlerin (4.25),

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{B}_1(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{w}(t) + \mathbf{B}_2(\boldsymbol{\theta}(t))\boldsymbol{u}(t) \tag{4.26}$$

biçiminde PBDZD sistem olarak ifade edilmesi gerekmektedir. Belirsiz parametreler vektörü $\boldsymbol{\theta}(t) \in \Re^p$

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \begin{bmatrix} m_s(t) & c_s(t) & k_t(t) \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \tag{4.27}$$

Burada belirsiz parametreler vektörünün her bir elemanı $\theta_i(t); i=1,\ldots,p$ tüm elemanların önceden bilinen alt üst sınırlar arasında değerler aldığı kabul edilmektedir. Söz konusu alt ve üst sınırlar sırasıyla $\underline{\theta_i}$ ve $\overline{\theta_i}$ olarak ifade edilmektedir yani $\boldsymbol{\theta}(t)$ vektörü ve belirsiz durum uzay sistemi Φ politopu tarafından kapsanmakdatır. (4.26) durum uzay matrisleri politopik belirsizlik ile tanımlanabilir. Burada, politopik belirsiz matrisler

$$\mathbf{A}(\theta(t))=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j(t)\mathbf{A}_j,\ \mathbf{B_1}(\theta(t))=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j(t)\mathbf{B}_{1j},\ \mathbf{B_2}(\theta(t))=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j(t)\mathbf{B}_{2j} \tag{4.28}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Politopik koordinatlar $\alpha_j(t)$

$$\alpha_j\geq 0,\quad j=1,\ldots,N,\ \sum_{j=1}^{N}\alpha_j=1 \tag{4.29}$$

şeklinde yazılmaktadır. Burada $N=2^p$ politop köşelerinin sayısıdır. Politopik koordiantların analitik olarak ifade edilmesi için Pellanda vd. [65] analilitk bir gösterim önermişlerdir. Öncleikle normalize edilmiş koordinatlar

$$\alpha_{\theta_i}=\frac{\overline{\theta_i}-\theta_i(t)}{\overline{\theta_i}-\underline{\theta_i}};\ i=1,\ldots,p. \tag{4.30}$$

olarak hesaplanır. Ardından, politopun her bir köşesi için politopik koordinat

$$\alpha_j=\prod_{j=1}^{N}\tilde{\alpha}_{\theta_i},\tilde{\alpha}_{\theta_i}=\begin{cases}\alpha_{\theta_i}, & \theta_i\in\Phi_j\\ 1-\alpha_{\theta_i}, & \overline{\theta_i}\in\Phi_j\end{cases} \tag{4.31}$$

ile verilmektedir. Burada Φ_j ile Φ politopunun köşeleri gösterilmektedir. (4.30) ve (4.31) ifadelerinin kullanılması ile (4.28) durum uzay sisteminin politopik koordinatları

$$\alpha_1=\frac{\overline{m_s}-m_s(t)}{\overline{m_s}-\underline{m_s}}\times\frac{\overline{c_s}-c_s(t)}{\overline{c_s}-\underline{c_s}}\times\frac{\overline{k_t}-k_t(t)}{\overline{k_t}-\underline{k_t}} \tag{4.32}$$

$$\alpha_2=\frac{\overline{m_s}-m_s(t)}{\overline{m_s}-\underline{m_s}}\times\frac{\overline{c_s}-c_s(t)}{\overline{c_s}-\underline{c_s}}\times\frac{k_t(t)-\underline{k_t}}{\overline{k_t}-\underline{k_t}} \tag{4.33}$$

$$\alpha_3=\frac{\overline{m_s}-m_s(t)}{\overline{m_s}-\underline{m_s}}\times\frac{c_s(t)-\underline{c_s}}{\overline{c_s}-\underline{c_s}}\times\frac{\overline{k_t}-k_t(t)}{\overline{k_t}-\underline{k_t}} \tag{4.34}$$

$$\alpha_4 = \frac{\overline{m_s} - m_s(t)}{\overline{m_s} - \underline{m_s}} \times \frac{c_s(t) - \underline{c_s}}{\overline{c_s} - \underline{c_s}} \times \frac{k_t(t) - \underline{k_t}}{\overline{k_t} - \underline{k_t}} \tag{4.35}$$

$$\alpha_5 = \frac{m_s(t) - \underline{m_s}}{\overline{m_s} - \underline{m_s}} \times \frac{\overline{c_s} - c_s(t)}{\overline{c_s} - \underline{c_s}} \times \frac{\overline{k_t} - k_t(t)}{\overline{k_t} - \underline{k_t}} \tag{4.36}$$

$$\alpha_6 = \frac{m_s(t) - \underline{m_s}}{\overline{m_s} - \underline{m_s}} \times \frac{\overline{c_s} - c_s(t)}{\overline{c_s} - \underline{c_s}} \times \frac{k_t(t) - \underline{k_t}}{\overline{k_t} - \underline{k_t}} \tag{4.37}$$

$$\alpha_7 = \frac{m_s(t) - \underline{m_s}}{\overline{m_s} - \underline{m_s}} \times \frac{c_s(t) - \underline{c_s}}{\overline{c_s} - \underline{c_s}} \times \frac{\overline{k_t} - k_t(t)}{\overline{k_t} - \underline{k_t}} \tag{4.38}$$

$$\alpha_8 = \frac{m_s(t) - \underline{m_s}}{\overline{m_s} - \underline{m_s}} \times \frac{c_s(t) - \underline{c_s}}{\overline{c_s} - \underline{c_s}} \times \frac{k_t(t) - \underline{k_t}}{\overline{k_t} - \underline{k_t}} \tag{4.39}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. (4.32)-(4.39) politopik koordinatlarına ait durum uzay matrislerinin oluşturduğu politopun köşeleri

$$\left(\mathbf{A_1}, \mathbf{B_{11}}, \mathbf{B_{21}}\right) = \left(\mathbf{A}(m_s, c_s, k_t), \mathbf{B_1}(k_t), \mathbf{B_2}(m_s)\right)\Big|_{\underline{m_s}, \underline{c_s}, \underline{k_t}} \tag{4.40}$$

$$\left(\mathbf{A_2}, \mathbf{B_{12}}, \mathbf{B_{22}}\right) = \left(\mathbf{A}(m_s, c_s, k_t), \mathbf{B_1}(k_t), \mathbf{B_2}(m_s)\right)\Big|_{\underline{m_s}, \underline{c_s}, \overline{k_t}} \tag{4.41}$$

$$\left(\mathbf{A_3}, \mathbf{B_{13}}, \mathbf{B_{23}}\right) = \left(\mathbf{A}(m_s, c_s, k_t), \mathbf{B_1}(k_t), \mathbf{B_2}(m_s)\right)\Big|_{\underline{m_s}, \overline{c_s}, \underline{k_t}} \tag{4.42}$$

$$\left(\mathbf{A_4}, \mathbf{B_{14}}, \mathbf{B_{24}}\right) = \left(\mathbf{A}(m_s, c_s, k_t), \mathbf{B_1}(k_t), \mathbf{B_2}(m_s)\right)\Big|_{\underline{m_s}, \overline{c_s}, \overline{k_t}} \tag{4.43}$$

$$\left(\mathbf{A_5}, \mathbf{B_{15}}, \mathbf{B_{25}}\right) = \left(\mathbf{A}(m_s, c_s, k_t), \mathbf{B_1}(k_t), \mathbf{B_2}(m_s)\right)\Big|_{\overline{m_s}, \underline{c_s}, \underline{k_t}} \tag{4.44}$$

$$\left(\mathbf{A_6}, \mathbf{B_{16}}, \mathbf{B_{26}}\right) = \left(\mathbf{A}(m_s, c_s, k_t), \mathbf{B_1}(k_t), \mathbf{B_2}(m_s)\right)\Big|_{\overline{m_s}, \underline{c_s}, \overline{k_t}} \tag{4.45}$$

$$\left(\mathbf{A_7}, \mathbf{B_{17}}, \mathbf{B_{27}}\right) = \left(\mathbf{A}(m_s, c_s, k_t), \mathbf{B_1}(k_t), \mathbf{B_2}(m_s)\right)\Big|_{\overline{m_s}, \overline{c_s}, \underline{k_t}} \tag{4.46}$$

$$\left(\mathbf{A_8}, \mathbf{B_{18}}, \mathbf{B_{28}}\right) = \left(\mathbf{A}(m_s, c_s, k_t), \mathbf{B_1}(k_t), \mathbf{B_2}(m_s)\right)\Big|_{\overline{m_s}, \overline{c_s}, \overline{k_t}} \tag{4.47}$$

biçiminde yazılmaktadır. Parametre belirsizliği durumunda kullanılan ÇT modeli parametreleri ise Çizelge 4.4 ile verilmektedir [64].

Çizelge 4. 4 Parametre belirsizliği durumunda kullanılan ÇT modeli parametreleri

parametre	değeri	birimi	parametre	değeri	birimi
m_s	352.53-470.68	[kg]	k_t	3.1-3.7x10^5	[N/m]
m_u	48.3	[kg]	c_s	900-1700	[Ns/m]
k_s	30010	[N/m]			

4.5 Değişken Taşıt Yükü İçin Süspansyionların Doğrusal Parametre Değişimi ile Modellenmesi

Taşıt titreşimlerinin aktif kontrolünde değişken taşıt yüküne göre kendini ayarlayan kontrolör tasarımları son yıllarda ilgi çekmektedir [19], [20]. Son yıllarda malzeme ve otomotiv endüstrisinde yaşanan gelişmeler sayesinde çok daha hafif taşıtların üretimi mümkün olmaktadır [23]. Bu durumun sonucu olarak taşıtın yüklenme ve yolcu sayısındaki değişiklikler sistem yanıtları üzerinde çok daha büyük etkiler göstermektedir.

EHÇT, SEHÇT modelleri göz önünde bulundurulduğunda değişken taşıt gövdesi kütlesi için DPD sistem

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{A}(m_s(t))\,\boldsymbol{x}(t) + \mathbf{B}_1\,\boldsymbol{w}(t) + \mathbf{B}_2\,\boldsymbol{u}(t) \tag{4.48}$$

olarak yazılabilir. Burada sistem matrisi

$$\mathbf{A}(m_s(t)) = \sum_{j=1}^{2} \alpha_j(t)\,\mathbf{A}_j \tag{4.49}$$

olarak politopik formda yazılabilir. Politopik koordinatlar

$$\alpha_1 = \frac{(1/\underline{m_s}) - (1/m_s(t))}{(1/\underline{m_s}) - (1/\overline{m_s})} \tag{4.50}$$

$$\alpha_2 = \frac{(1/m_s(t)) - (1/\overline{m_s})}{(1/\underline{m_s}) - (1/\overline{m_s})} \tag{4.51}$$

ile verildiğine ilgli politop köşelerine ait sistem matrisleri ise

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}(m_s(t))\big|_{\overline{m_s}} \tag{4.52}$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}(m_s(t))\big|_{\underline{m_s}} \tag{4.53}$$

biçimindedir.

4.6 Yol Bozucularının Modellenmesi

Bu bölümde tümsek tipi ve rastlantısal yol pürüzlülüğü tipi yol profillerinin matematiksel modelleri verilecektir.

4.6.1 Tümsek Tipi Yol Bozucuları

Tümsek tipi yol bozucularının taşıt tireşimlerinin analizinde en yaygın kullanılan bozuculardan biri olduğu bilinmektedir. Tümek tipi bozucuları ifade eden yol profili matematiksel olarak

$$z_r(t) = \begin{cases} \frac{a}{2} 1 - \cos((2\pi V / \ell)t) & 0 \le t \le \frac{\ell}{V} \\ 0 & t \ge \frac{\ell}{V} \end{cases} \tag{4.54}$$

ile gösterilebilir [18]. Burada $a = 0.1\ m$ tümsek yüksekliğini; $\ell = 5\ m$ tümsek uzunluğu değeri olarak alınmaktadır. V taşıt tümsekten geçiş hızını göstermektedir ve farklı değerleri için taşıt titreşimleri incelenebilir.

4.6.2 ISO2631 Rastlantısal Yol Pürüzlülüğü

Taşıt titreşimlerinin analizinde son derece yaygın olarak kulalnılan diğer bozucu tipi ise ISO2631 rastlantısal yol pürüzlülüğüdür [66], [26]. Yol pürüzlülüğü bir titreşim sinyali olarak düşünülebilir ve güç spektral yoğunluk fonksiyonu

$$S_g(\phi) = \begin{cases} S_g(\phi_0)(\frac{\phi}{\phi_0})^{-n_1}, & if\ \phi \le \phi_0 \\ S_g(\phi_0)(\frac{\phi}{\phi_0})^{-n_2}, & if\ \phi \ge \phi_0 \end{cases} \tag{4.55}$$

ile verilebilir. Burada $\phi_0 = 1/2\pi$ referans frekansını; ϕ frekansı; n_1 ve n_2 ise yol pürüzlülük sabitleridir. $S_g(\phi_0)$ değeri yol pürüzlülüğünün ölçümü ile hesaplanması gereken bir ölçekleme sabitidir. Rastlantısal yol pürüzlülüğü

$$z_r(t) = \sum_{n=1}^{N_f} z_n \sin(nw_0 t + \varphi_n) \tag{4.56}$$

ile verilen seri yardımı ile elde edilebilir. Burada her bileşenin genliği z_n ile verilmektedir. Taşıtın seyir hızı sabit kabul edildiğinde z_n değeri (4.57) ile hesaplanabilir.

$$z_n = \sqrt{2S_g(n\Delta\phi)\Delta\phi} \tag{4.57}$$

Burada $\Delta\phi = 2\pi / l$ olarak alınmaktadır ve l yol segmentinin uzunluğunu göstermektedir. $w_0 = 2\pi l/V$ esas yol segmenti geçiş frekansıdır. φ_n bir rastgele değişkendir ve uniform dağılım ile $[0 2\pi)$ aralığında değerler almaktadır. Rastlantısal yol pürüzlülüğü parametreleri ISO2631 standardınca $n_1 = 2$, $n_2 = 1.5$, $N_f = 200$ olarak verilmektedir. Son olarak $S_g(\phi_0)$ değeri B sınıfı iyi kalite yol için $16 \times 10^{-3}\, m^3$, C sınıfı orta kalite yol için $64 \times 10^{-3}\, m^3$, D sınıfı kötü kalite yol için $256 \times 10^{-3}\, m^3$ olarak verilmektedir [25].

BÖLÜM 5

SAYISAL BENZETİM ÇALIŞMALARI

Bu bölümde, önceki bölümlerde sunulmuş olan DTGB ve ÇTGB kontrolörlerin aktif süspansiyon sistemleri tasarımındaki etkinliğini göstermek amacı ile sayısal benzetim çalışmaları sonuçları verilmektedir. Tüm benzetim çalışmaları MATLAB & Simulink ortamında gerçekleştirilmiştir. Dış bükey optimizasyon problemlerinin çözdürülmesi için Yalmip ayrıştırıcısı [67] ve SeDuMi [68] çözücüsü kullanılmıştır.

Bölüm 5.1 içerisinde bir EHÇT modelinin DTGB ve ÇTGB LQ optimal kontrolörler ile elde edilmiş sonuçları gösterilmektedir. Bölüm 5.2 ile DTGB L_2 kazançlı kontrolörün EHÇT modeli için aktik süspansiyon sistemi tasarımındaki performansı incelenmekte ve ardından SEHÇT modeli için DTGB ve ÇTGB L_2 kazançlı kontrolörler karşılaştırılmaktadır. DTGB kontrol kanunu ile aynı sinyallerin ölçümü durumunda tasarlanmış olan bir gözleyici tabanlı durum geri beslemeli kontrol kanunun parametre değişimlerine karşı duyarlılığı Bölüm 5.3 içersinde incelenmiştir. Ardından, Bölüm 5.4 ile parametre değişimlerine karşı dayanıklı DTGB L_2 kazançlı kontrolörün aktif süspansiyon sistemine uygulanması gösterilmiştir. Söz konusu parametre değişimlerine karşı kendini ayarlayabilen PBDTGB LQ optimal ve L_2 kazançlı kontrolörler ile taşıt titreşimlerinin aktif kontrolü son olarak Bölüm 5.5 ve Bölüm 5.6 kapsamında sunulmuştur.

5.1 Taşıt Titreşimlerinin LQ Optimal Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemesi ile Aktif Kontrolü

EHÇT modeli için Teorem 2.1 ve Teorem 2.2 ile verilen DTGB ve ÇTGB LQ optimal kontrolör tasarımları yapılmıştır. Performans ölçütünde yer alan minimize edilmek istenen değişkenler vektörü

$$\mathbf{C}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

ile verilmiştir. Performans ağırlıklandırma matrisleri ise

$$\mathbf{Q} = diag(10^6, 10^{-2}, 10^6, 10^{-2}, 10^{-2}) \tag{5.2}$$

$$\mathbf{R} = 10 \tag{5.3}$$

şeklinde seçilmiştir. Her iki kontrolör de aynı performans ölçütü ile tasarlanmıştır. ÇTGB kontrol kanunu için türevi ölçülebilen çıkışlar vektörü

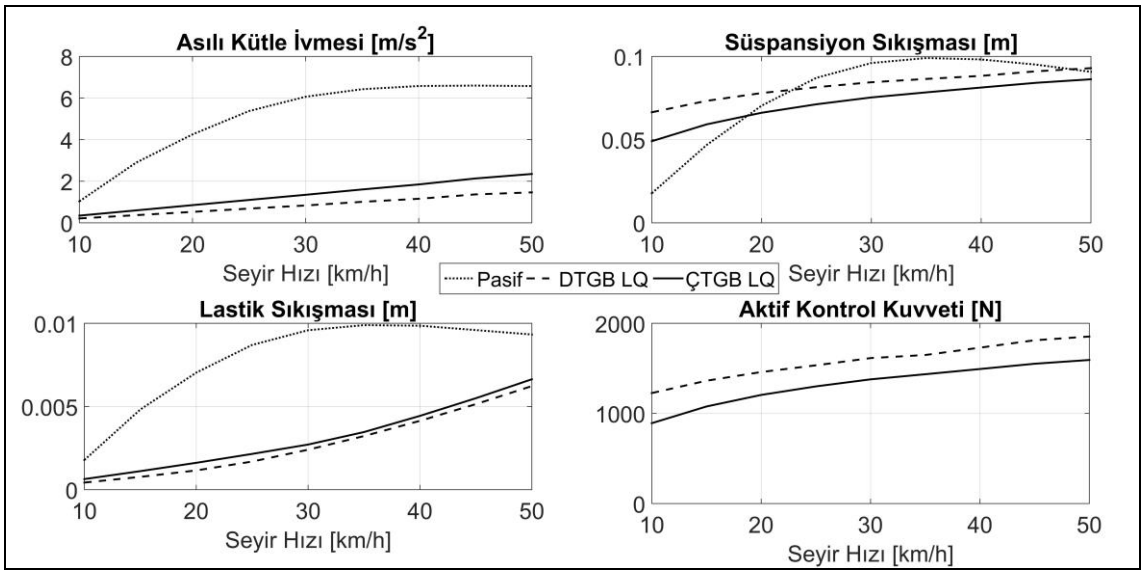
$$\mathbf{C}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

ile belirlenmiştir. Tasarlanan DTGB ve ÇTGB kontrol kazançları aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{K}_{\text{DTGB}} = \begin{bmatrix} 3.3500 & -3.3500 & -0.0001 & 0.001 & 0.0023 \end{bmatrix}$$

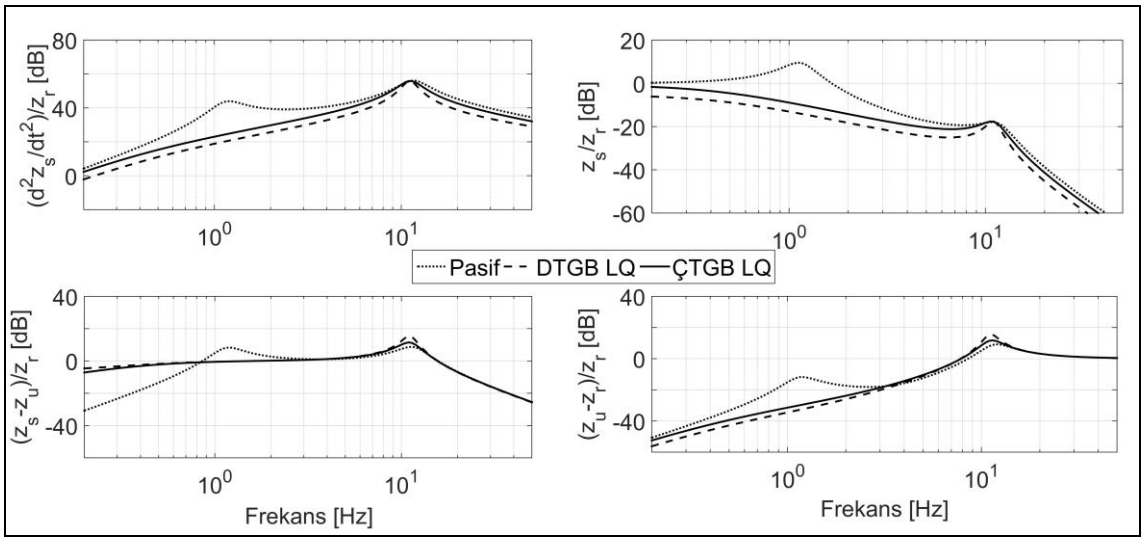
$$\mathbf{K}_{\text{ÇTGB}} = \begin{bmatrix} -0.3242 & -1.4019 \end{bmatrix}$$

Bölüm 4.6.1 ile verilen tümsek tipi bozucular karşısında her iki kontrolör de sınanmıştır. Benzetim çalışmaları boyunca taşıt seyir hızı 10 km/h ile 50 km/h arasında 5 km/h aralıklarla değiştirilerek uygulanmıştır. Yapılan benzetim çalışmaları sonucudna elde edilen asılı kütle ivmesi, süspansiyon sıkışması, lastik sıkışması ve aktif kontrol kuvveti yanıtlarına ait tepe değerlerinin hıza bağlı değişimleri Şekil 5.1 aracılığı ile görülmektedir.



Şekil 5. 1 DTGB ve ÇTGB LQ optimal kontrolörler yanıtlarının tepe değerlernin seyir hızına bağlı değişimi.

Yapılan benzetim sonuçları göstermektedir ki DTGB ve ÇTGB LQ optimal kontrolörlerin her ikisi de asılı kütle ivmesinde büyük düşüş sağlamakta ve dolayısı ile sürüş konforunu iyileştirmektedir. Lastik sıkışmaları incelendiğinde pasif süspansiyon sistemine kıyasla daha iyi bir yol tutuşu sağlandığı açıkça görülmektedir. Süspasnyion sıkışması özelinde büyük bir seyir hızı aralığı için aktif süspansiyonlar daha güvenli yanıtlar üreterek süspansiyon çarpması ihtimalini azaltmaktadır.



Şekil 5. 2 Pasif, DTGB ve ÇTGB LQ optimal kontrol durumları için frekans yanıtları.

DTGB kontrolör ile elde edilen konfor ve harcanan aktif kontrol kuvveti ÇTGB kontrolöre kıyasla daha yüksektir. DTGB kontrolöre tüm hız ve ivme sinyalleri ile beraber eyleyici yük basıncının türevi geri beslenirken, ÇTGB kontrol kanununda

sadece asılı kütle ivmesi ve hızı geri beslenmektedir. Söz konusu ölçüm kolaylığı dikkate alındığında ÇTGB kontrol kanunu ile yaşana performans kayıbı kabul edilebilir seviyededir.

Şekil 5.2 ile gösterilmekte olan frekans yanıtları, Şekil 5.1 üzerindeki gözlemleri doğrulamaktadır. ÇTGB kontrolöre ait cevaplar DTGB kontrolörle karşılaştırıldığında sürüş konforunda biraz geride kalmaktadır ve sürüş güvenliği adına ise daha iyi bir performans ortaya koymaktadır.

5.2 Taşıt Titreşimlerinin L_2 Kazançlı Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemesi ile Aktif Kontrolü

Bu bölümde DTGB ve ÇTGB L2 kazançlı kontrolörler ile EHÇT ve SEHÇT modelleri için gerçekleştirilen aktif süspansiyon sistemlerine ait tümsek tipi yol bozucusu yanıtları incelenecektir

5.2.1 Elektro Hidrolik Eyleyicili Çeyret Taşıt Süspansiyon Modeli için Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli L_2 Kazançlı Kontrolör Yanıtlarının İncelenmesi

EHÇT modeli için Teorem 3.1 ile verilen DTGB L_2 kazançlı kontrolör tasarımı yapılmıştır. Kontrol edilmek istenen çıkışlar vektörü

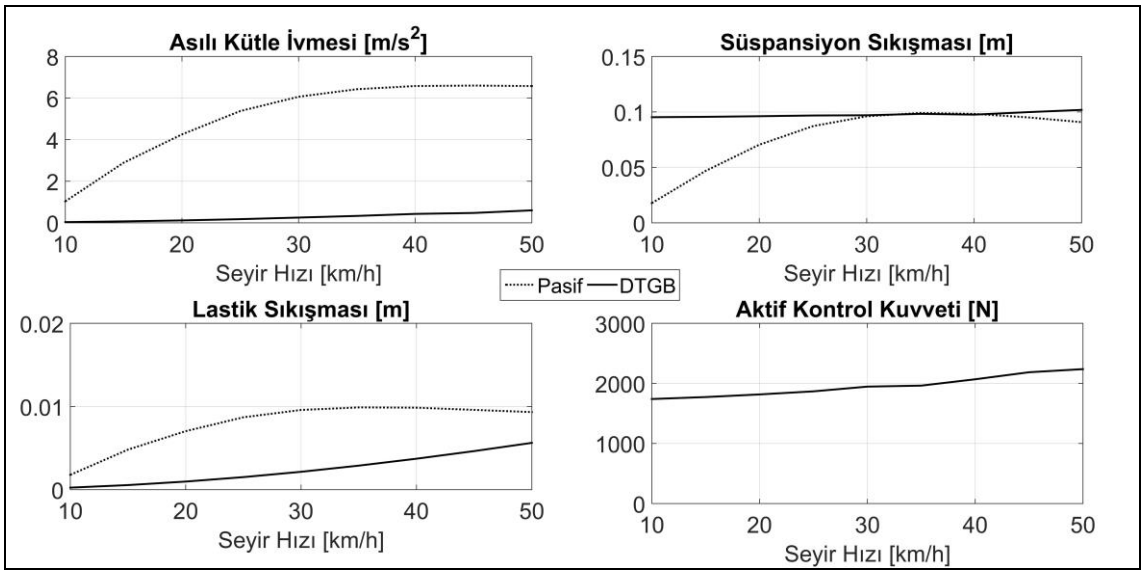
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 1^{-3} & -1^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1^{-3} \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1^{-3} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{5.6}$$

ile verilmiştir. Tasarlanan DTGB kontrol kazancı aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{K}_{\mathrm{DTGB}} = \begin{bmatrix} 3.3500 & -3.3500 & -0.001 & -0.0001 & 0.002 \end{bmatrix}$$

Bölüm 4.6.1 ile verilen tümsek tipi bozucular karşısında kontrolör sınanmıştır. Benzetim çalışmaları boyunca taşıt seyir hızı 10 km/h ile 50 km/h arasında 5 km/h aralıklarla değiştirilerek uygulanmıştır. Yapılan benzetim çalışmaları sonucudna elde edilen asılı kütle ivmesi, süspansiyon sıkışması, lastik sıkışması ve aktif kontrol kuvveti yanıtlarına ait tepe değerlerinin hıza bağlı değişimleri Şekil 5.3 aracılığı ile görülmektedir.



Şekil 5. 3 DTGB L_2 kazançlı kontrolör yanıtlarının tepe değerlernin seyir hızına bağlı değişimi.

Yapılan benzetim sonuçları göstermektedir ki DTGB kontrolör sürüş konfrounda ilerleme yaratmaktadır. Sürüş güvenliği adına süpsansiyon sıkışmasına bakacak olursak, pasif süspansiyona göre bir artış görülse de maksimum değerler anlamında bir kötüleşme görülmemektedir. Lastik sıkışması özelinde ise yol tutuşunun iyileştirildiği açıkça görülmektedir. Sonraki bölümde, SEHÇT modeli için DTGB ve ÇTGB L_2 kazançlı kontrolörlerin performansı incelenecektir.

5.2.2 Sürücü Modeli Entegre Elektro Hidrolik Eyleyicili Çeyret Taşıt Süspansiyon Modeli için Durum ve Çıkış Türevi Geri Beslemeli L_2 Kazançlı Kontrolör Yanıtlarının İncelenmesi

SEHÇT modeli için Teorem 3.1 ve Teorem 3.3 ile verilen DTGB ve ÇTGB L_2 kazançlı kontrolör tasarımları yapılmıştır. Kontrol edilmek istenen çıkışlar vektörü

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{\rho_b k_c}{m_b} & \dfrac{-\rho_b k_c}{m_b} \\ \dfrac{\rho_s k_s}{m_s} & \dfrac{-\rho_s\left(k_s+k_{ss}\right)}{m_s} & \dfrac{\rho_s k_{ss}}{m_s} & 0 \\ -\rho_{ss} & \rho_{ss} & 0 & 0 \\ \rho_{td} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdots$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\rho_b c_c}{m_b} & \frac{-\rho_b c_c}{m_b} & 0 \\ \frac{\rho_s c_s}{m_s} & \frac{-\rho_s (c_s + c_{ss})}{m_s} & \frac{\rho_s c_{ss}}{m_s} & 0 & \frac{\rho_s A_p \overline{P}_L}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{PL} \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\rho_{td} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{5.8}$$

ile verilmiştir. Burada, $\rho_b = 65$, $\rho_s = 65$, $\rho_{ss} = 30$, $\rho_{td} = 30$, $\rho_{PL} = 5$ olarak alınmıştır. Her iki kontrolör de aynı kontrol edilmek istenen çıkışlar vektörü ile tasarlanmıştır. ÇTGB kontrol kanunu için türevi ölçülebilen çıkışlar vektörü

$$\mathbf{C}_{\mathrm{y}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

ile belirlenmiştir. Tasarlanan DTGB ve ÇTGB kontrol kazançları aşağıdaki gibidir.

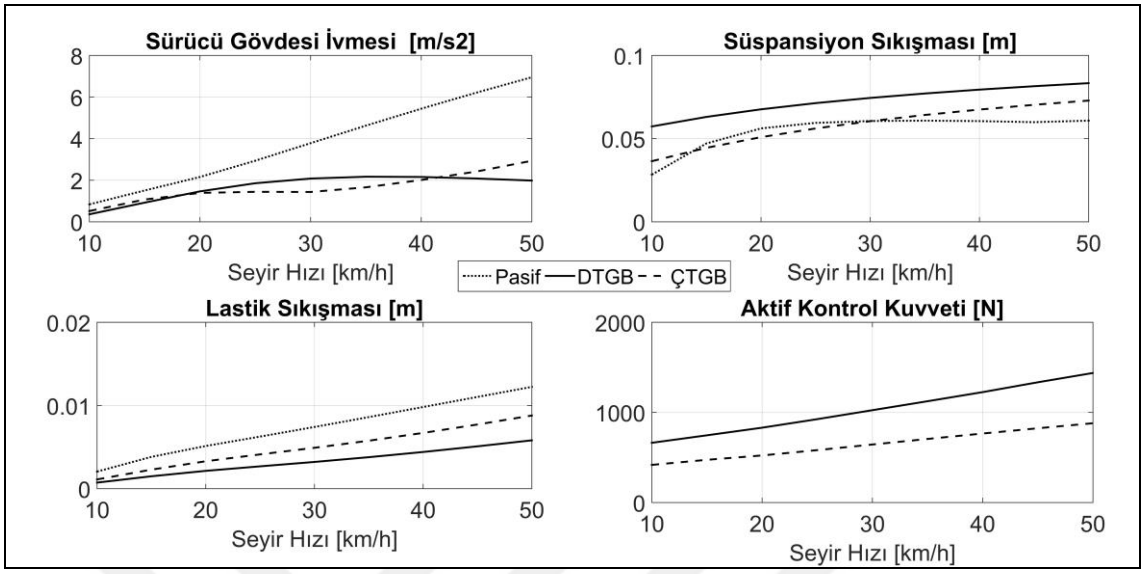
$$\mathbf{K}_{\mathbf{DTGB}} = \begin{bmatrix} -3.3167 & 3.2804 & -0.0004 & 0.0004 \cdots \\ -0.0001 & -0.0111 & -0.001 & 0.001 & 0.0021 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{\text{ÇTGB}}} = \begin{bmatrix} -3.1204 & 3.0579 & -0.0001 & -0.0471 \end{bmatrix}$$

Bölüm 4.6.1 ile verilen tümsek tipi bozucular karşısında her iki kontrolör de sınanmıştır. Benzetim çalışmaları boyunca taşıt seyir hızı 10 km/h ile 50 km/h arasında 5 km/h aralıklarla değiştirilerek uygulanmıştır. Yapılan benzetim çalışmaları sonucudna elde edilen asılı kütle ivmesi, süspansiyon sıkışması, lastik sıkışması ve aktif kontrol kuvveti yanıtlarına ait tepe değerlerinin hıza bağlı değişimleri Şekil 5.4 aracılığı ile görülmektedir.

Yapılan benzetim sonuçları göstermektedir ki DTGB ve ÇTGB L_2 kazançlı kontrolörlerin her ikisi de sürüş konfrounda ilerleme yaratmaktadır. Sürüş güvenliği adına süpsansiyon sıkışmasına bakacak olursak sürüş güvenliği riske edilmektedir. Lastik sıkışması özelinde ise yol tutuşunun iyileştirildiği çaıkça görülmektedir. Beklendiği gibi

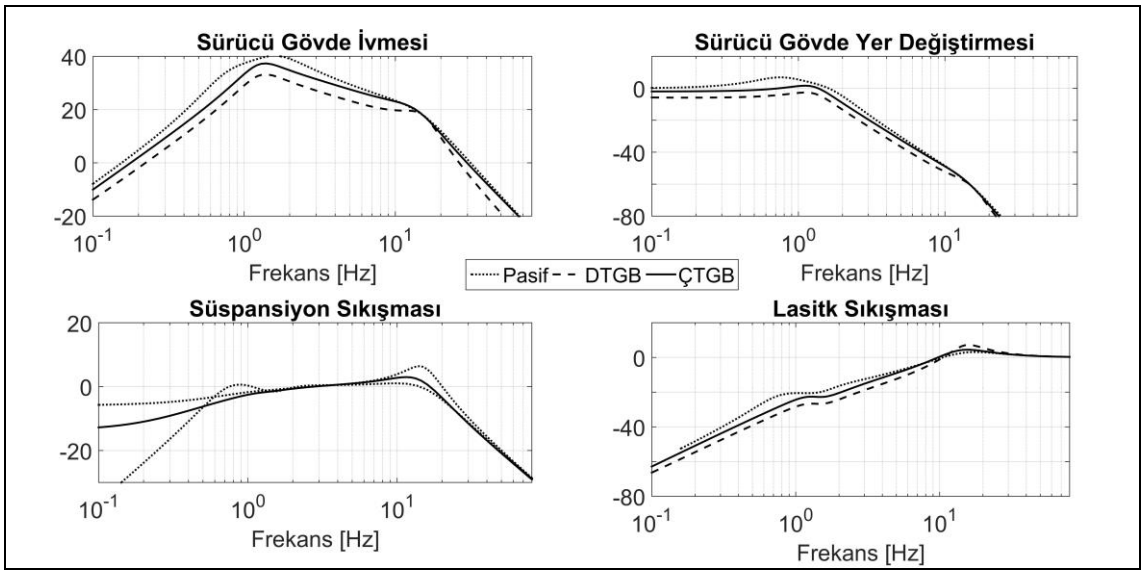
DTGB kontrolör ile elde edilen konfor ve harcanan aktif kontrol kuvveti ÇTGB kontrolöre kıyasla daha yüksektir.



Şekil 5. 4 DTGB ve ÇTGB L_2 kazançlı kontrolörler yanıtlarının tepe değerlernin seyir hızına bağlı değişimi.

DTGB kontrolöre tüm hız ve ivme sinyalleri ile beraber eyleyici yük basıncının türevi geri beslenirken, ÇTGB kontrol kanununda sadece asılı ivme ve hız sinyallerini geri beslenmektedir. Bu bilgiler ışığında ölçüm kolaylığını düşünecek olursak, ÇTGB kontrol kanunu ile yaşana performans kayıbı kabul edilebilir seviyededir.

Şekil 5.5 ile gösterilmekte olan frekans yanıtları, Şekil 5.4 üzerindeki gözlemleri doğrulamaktadır. ÇTGB kontrolöre ait cevaplar DTGB kontrolörle karşıalştırıldığında sürüş konforunda biraz geride kalmaktadır ve sürüş güvenliği adına da öne çıkmaktadır.



Şekil 5. 5 Pasif, DTGB ve ÇTGB L_2 kazançlı kontrolörler çin frekans yanıtları.

5.3 Taşıt Titreşimlerinin Aktif Kontrolünde Durum Türevi Geri Beslemeli ve Gözleyici Tabanlı Durum Geri Beslemeli Yaklaşımların Karşılaştırılması

ÇT modeli için Teorem 3.2 ile verilen DTGB L_2 kazançlı kontrolör tasarımı yapılmıştır ve performansı aynı Gözleyici Tabanlı Durum Geri Beslemeli GTDGB L_2 kazançlı kontrolör ile karşılaştırılmıştır. GTDGB kontrolör tasarımında ölçülen çıkışlar vektörü olarak durum türevi sinyalleri seçilmiştir.

Kontrol edilmek istenen çıkışlar vektörü $\boldsymbol{z}(t)=\left[\rho_a \ddot{\boldsymbol{z}}_s(t) \quad \rho_f F_a(t)\right]^{\mathrm{T}}$ olarak alınmıştır, dolayısı ile durum uzay matrisleri

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \rho_a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{5.10}$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0\\ \rho_f\end{bmatrix} \tag{5.11}$$

Tasarlanan DTGB kontrolör kazancı

$$\mathbf{K}_{\mathbf{dtgb}}=\begin{bmatrix}-10377 & 7709 & -2308 & -5\end{bmatrix}$$

olarak hesaplanmıştır. GTDGB kontrolcü tasarımında kullanılan Yardımcı Teorem 5.1 [62] aşağıda verilmektedir.

Yardımcı Teorem 5.1 [62]: Verilen Bir DZD sistem

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=\mathbf{A}\,\boldsymbol{x}(t)+\mathbf{B}_1\,\boldsymbol{w}(t)+\mathbf{B}_2\,\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{z}(t)&=\mathbf{C}_1\,\boldsymbol{x}(t)+\mathbf{D}_{11}\,\boldsymbol{w}(t)+\mathbf{D}_{12}\,\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)&=\mathbf{C}_2\,\boldsymbol{x}(t)+\mathbf{D}_{21}\,\boldsymbol{w}(t)+\mathbf{D}_{22}\,\boldsymbol{u}(t)\end{aligned} \tag{5.12}$$

için, $\boldsymbol{w}(t)$ bozucu vektöründen $\boldsymbol{z}(t)$ kontrol edilmek istenen çıkışlar vektörüne olan L_2 kazancını minimize eden GTDGB kontrol kanunu

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)&=\mathbf{A}\,\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\mathbf{B}_2\,\boldsymbol{u}(t)+\mathbf{L}_g\,(\boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t))\\ \boldsymbol{u}(t)&=\mathbf{K}_c\,\hat{\boldsymbol{x}}(t)\end{aligned} \tag{5.13}$$

biçimindedir. Burada, tahmin edilen çıkışlar vektörü

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}_2\,\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}_{22}\,\boldsymbol{u}(t) \tag{5.14}$$

şeklindedir. Burada, Durum Geri Beslemeli kontrol kazancı

$\min\ \gamma_c$, (5.15) için

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A}\mathbf{X}_c + \mathbf{B}_2\mathbf{W}_c)^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}\mathbf{X}_c + \mathbf{B}_2\mathbf{W}_c & \mathbf{B}_1 & (\mathbf{C}_1\mathbf{X}_c + \mathbf{D}_{12}\mathbf{W}_c)^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma_c\,\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^{\mathrm{T}} \\ * & * & -\gamma_c\,\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{5.15}$$

ile verilen optimizasyon probleminin çözümünden $\mathbf{K_c} = \mathbf{W_c}\mathbf{X_c^{-1}}$ olarak hesaplanmaktadır. Burada, Gözleyici kazancı ise

$\min\ \gamma_g$, (5.16) için

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{X}_g\mathbf{A} + \mathbf{W}_g\,\mathbf{C}_2)^{\mathrm{T}} + \mathbf{X}_g\mathbf{A} + \mathbf{W}_g\mathbf{C}_2 & \mathbf{X}_g\,\mathbf{B}_1 + \mathbf{W}_g\,\mathbf{D}_{21} & \mathbf{C}_3^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma_g\,\mathbf{I} & 0 \\ * & * & -\gamma_g\,\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{5.16}$$

ile verilen optimizasyon probleminin çözümünden $\mathbf{L}_g = \mathbf{X}_g^{-1}\mathbf{W}_g$ olarak hesaplanmaktadır.

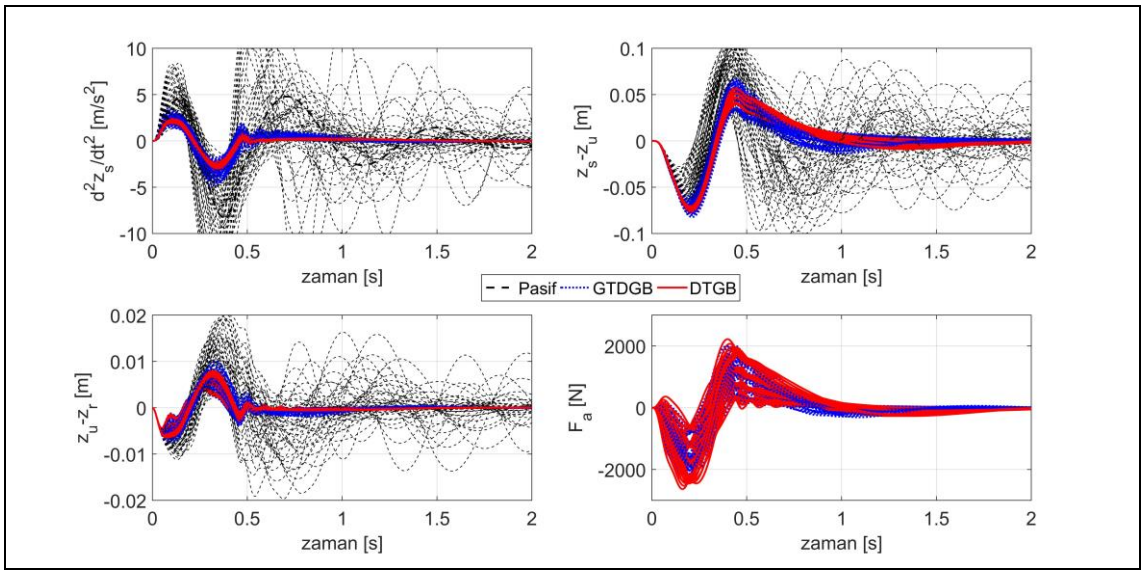
Yardımcı Teorem 5.1 için (5.17) DTGB kontrolcüsü ile aynı kontrol edilmek istenen çıkışlar vektörü tercih edildiğinde, ölçülen çıkışlar vektörü de durum türevi olarak alınırsa, DGB kazancı ve gözleyici kazancı

$$\mathbf{K_{dgb}} = \begin{bmatrix} 11766 & -9327 & -1413 & 58 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_g = \begin{bmatrix} 98.00 & -6.36 & 16.10 & 3.00 \\ -99.00 & 29.48 & -13.70 & 0.01 \\ -76.64 & -0.01 & 0.01 & 0.01 \\ -9.23 & -1475.00 & -0.01 & 0.01 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanmıştır.

Benzetim çalışmaları boyunca taşıt seyir hızı 40 km/h alınmış ve tümsek tipi yol bozucuları uygulanmıştır.



Şekil 5. 6 DTGB ve GTDGB L_2 kazançlı kontrolörler yanıtlarının taşıt parametrelerine bağlı değişimi.

Yapılan benzetim çalışmaları sonucunda elde edilen asılı kütle ivmesi, süspansiyon sıkışması, lastik sıkışması ve aktif kontrol kuvveti yanıtlarının m_s, k_s, c_s değerlerindeki $\pm 50\%$ miktarındaki değişimler için üst üste çizdrilmiş hali Şekil 5.6 ile görülmektedir. GTDGB kontrolörün, durum kestirimi sırasında matematiksel modeli kullandığı için parametre değişmlerine karşı daha duyarlı olduğu genel olarak bilinmektdir. DTGB kontrolör model tabanlı bir tasarım sürecine sahip olsa da çevrimiçi çalışma esnasında matematiksel modelden yararlanmadığı için tüm parametre değişimlerine karşı daha az duyarlıdır. Nicel bir şekilde durumu değerlendirmek istediğimizde asılı kütle ivmesinin RMS değerlerine air standart sapma değeri GTDGB kontrolör için 0.2279, DTGB kontrolör için 0.0731, süspansiyon sıkışmasının RMS değerlerine ait standart sapma değeri GTDGB kontrolör için 0.0017, DTGB kontrolör için 0.0011, lastik sıkışması RMS değerlerine air standart sapma değeri GTDGB kontrolör için 0.0005, DTGB kontrolör için 0.0004 olarak gerçekleşmektedir. Bu bilgiler ışığında sürüş konforu yönünde GTDGB kontrolörün parametre değişimlerine karşı yaklaşık olarak üç kat daha hassas olduğu, süspansiyon sıkışması ve lastik sıkışması gibi sürüş güvenliği parametreleri yönünden ise sırasıyla 54% ve 25% daha hassas olduğu gösterilmiştir.

5.4 Taşıt Titreşimlerinin Durum Türevi Geri Beslemeli L_2 Kazançlı Dayanıklı Kontrolör ile Aktif Kontrolü

ÇT modeli için Teorem 3.1 ve Teorem 3.5 ile verilen DTGB ve DTGB dayanıklı L_2 kazançlı kontrolör tasarımları yapılmıştır. Tasarım aşamasında kontrol kazancı tekil değerlerinin kısıtlanması için Assunçao vd. [46] tarafından sunulmuş olan yardımcı teorem 5.2 kullanılmıştır ve aşağıda verilmektedir.

Yardımcı Teorem 5.2 [46]: $\mathbf{K} = \mathbf{W}\mathbf{Y}^{-1}$ olarak elde edilen kontrol kazancı matrisinin tekil değerlerini σ / μ^2 değeri ile üstten sınırlamak için,

$$\begin{bmatrix} \sigma \mathbf{I} & \mathbf{W} \\ \mathbf{W}^{\mathrm{T}} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0 \tag{5.17}$$

$$\mathbf{Y} \succ \mu \mathbf{I} \tag{5.18}$$

koşulları sağlanmalıdır.

Bu çalışmada, $\mu = 45$, $\sigma = 2025 \times 10^8$ değerleri seçilerek kontrol kazancı tekil değerlerinin 10^4 den küçük tutulması hedeflenmiştir. Kontrol edilmek istenen çıkışlar vektörü

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

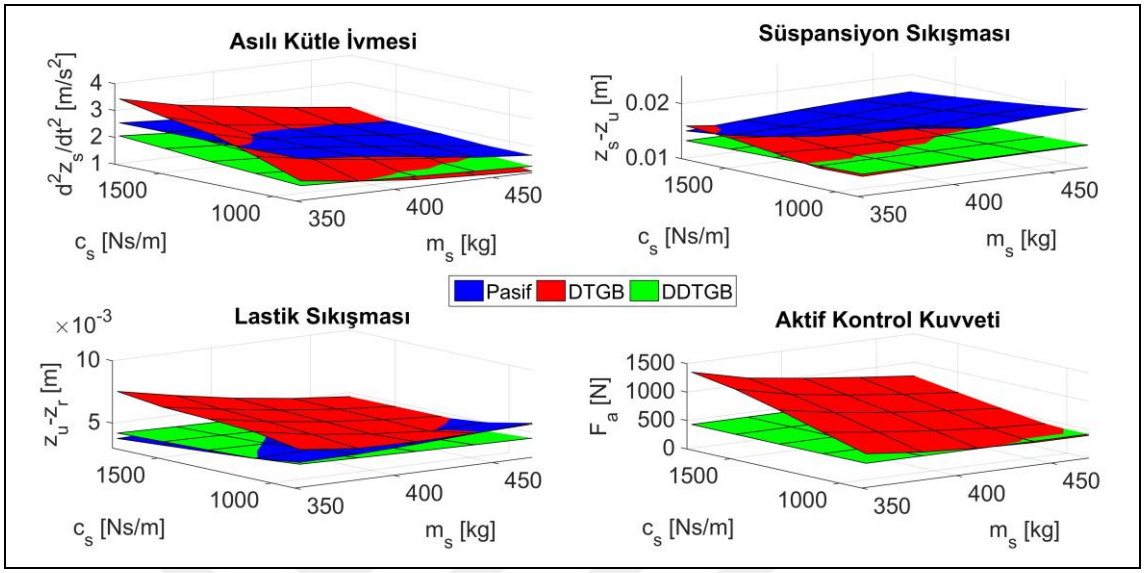
ile verilmiştir. Burada, $\beta = 0.001$, $\alpha = 0.0001$ olarak alınmıştır. Her iki kontrolör de aynı kontrol edilmek istenen çıkışlar vektörü ile tasarlanmıştır.

Tasarlanan DTGB ve Dayanıklı Durum Türevi Geri Beslemeli (DDTGB) kontrol kazançları aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{K}_{\mathbf{DTGB}} = 10^3 \times \begin{bmatrix} -9.8665 & 0.4272 & -0.1276 & -0.0044 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{DDTGB}} = 10^3 \times \begin{bmatrix} -8.4411 & -0.6543 & 0.3211 & 0.0014 \end{bmatrix}$$

Bölüm 4.6.2 ile verilen ISO2631 rastlatısal yol pürüzlülüğü tipi bozucular karşısında her iki kontrolör de sınanmıştır. Benzetim çalışmaları boyunca taşıt seyir hızı 108 km/h alınmış ve C sınıfı yol bozucuları için uygulanmıştır.

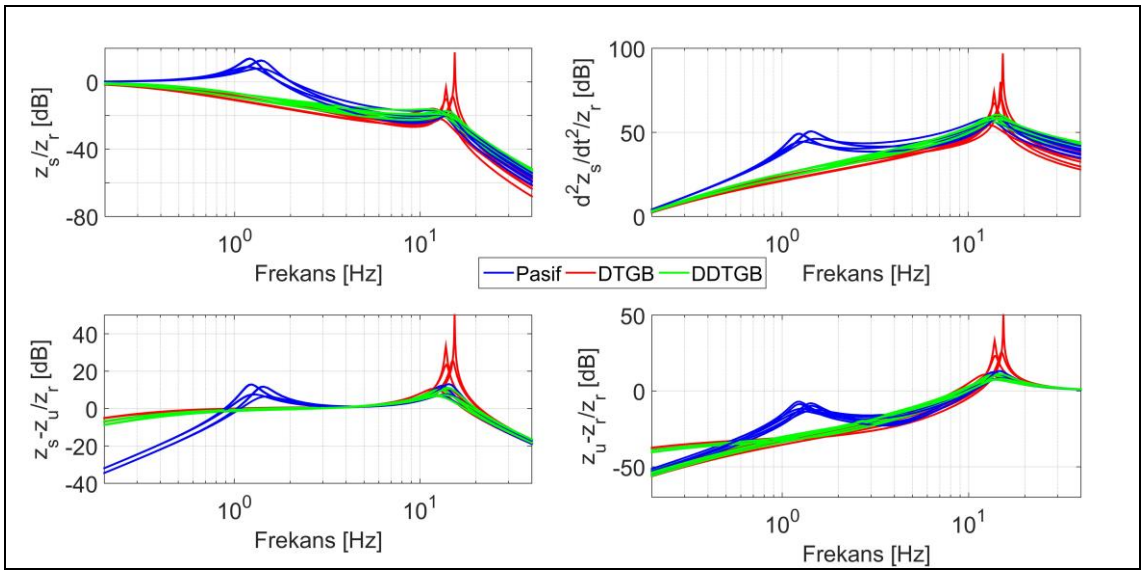


Şekil 5. 7 DTGB ve DDTGB L_2 kazançlı kontrolörler yanıtlarının tepe değerlernin taşıt parametrelerine bağlı değişimi.

Yapılan benzetim çalışmaları sonucunda elde edilen asılı kütle ivmesi, süspansiyon sıkışması, lastik sıkışması ve aktif kontrol kuvveti yanıtlarına ait tepe değerlerinin taşıt parametrelerine bağlı değişimleri Şekil 5.7 aracılığı ile görülmektedir.

Şekil 5.7 ile görüldüğü üzere, kütlenin yüksek, sönümün düşük olduğu durumda DTGB ve DDTGB L_2 kazançlı kontrolörlerin her ikisi de sürüş konfrounda ilerleme yaratmakta, sürüş güvenliği adına ise pasif süspansiyonun gerisine düşmemektedir. Kütle azaldıkça ve sönüm arttıkça ise DTGB kontrolörün performansı kaybolmakta, pasif süspansiyonun dahi gerisine düşmektedir. Sonuç olarak DDTG kontrolörün beklendiği üzerine performansını parametre değişmlerine karşı koruduğu açıkça ortaya konmuştur.

Şekil 5.8 ile gösterilmekte olan frekans yanıtları, Şekil 5.7 üzerindeki gözlemeleri doğrulamaktadır. DDTGB kontrolöre ait cevaplar DTGB kontrolörle karşıalştırıldığında parametre değişimlerine karşı daha az duyarlıdır.



Şekil 5. 8 Pasif, DTGB ve DDTGB L_2 kazançlı kontrol durumları için frekans yanıtları.

5.5 Taşıt Titreşimlerinin Durum Türevi Geri Beslemeli LQ Optimal Parametre Bağımlı Kontrolör ile Aktif Kontrolü

EHÇT modeli için Teorem 2.5 ile verilen Parametre Bağımlı Durum Türevi Geri Beslemeli (PBDTGB) LQ optimal kontrolör tasarımı yapılmıştır. Performans ölçütü

$$\mathbf{C}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

$$\mathbf{Q} = diag(50,50) \tag{5.22}$$

$$\mathbf{R} = 6 \tag{5.23}$$

ile verilmiştir. Tasarlanan PBDTGB kontrolör için elde edilen kontrolörün köşe değeleri aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} -0.0104 & -1.8665 & -0.7448 & -0.0012 & 0.0004 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} -0.0361 & -2.5474 & -0.6924 & -0.0009 & 0.0012 \end{bmatrix}$$

Tasarlanan PBDTGB LQ optimal kontrolörün üstünlüğü göstermek için

$$\mathbf{Q} = diag(3500,0,3500,0,0) \tag{5.24}$$

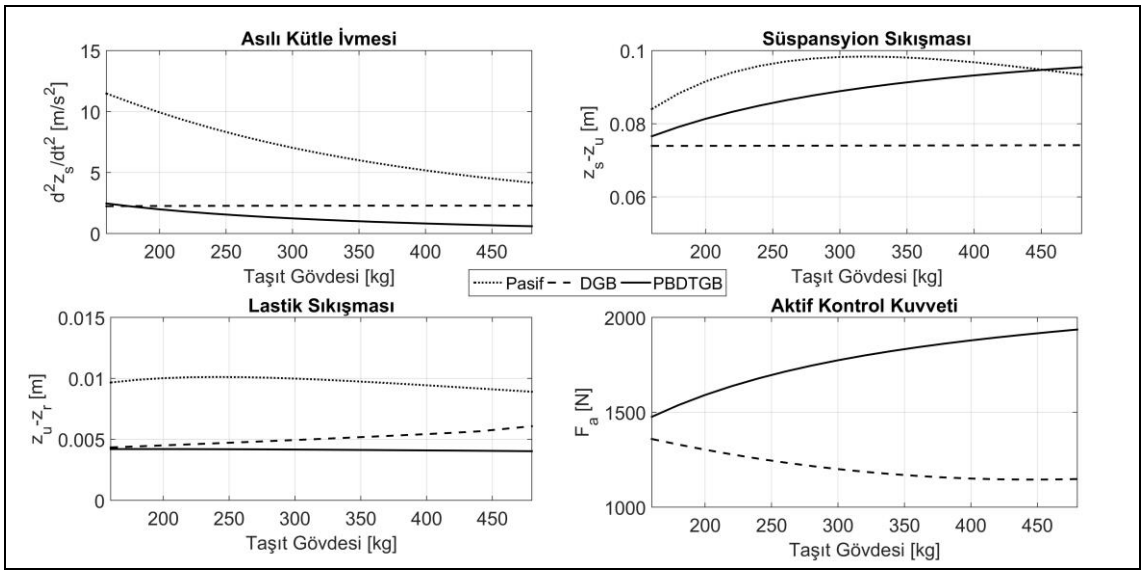
$$\mathbf{R} = 6 \tag{5.25}$$

ile verilen performans ölçütüne sahip geleneksel DGB LQ optimal kontrolör tasarlanmıştor ve elde edile durum geri beslemeli kontrol kazancı

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -68.1155 & 220.9600 & -73.1415 & -2.7713 & -1.5878 \end{bmatrix}$$

ile verilmektedir.

Bölüm 4.6.1 ile verilen tümsek tipi bozucular karşısında her iki kontrolör de sınanmıştır. Benzetim çalışmaları boyunca taşıt seyir hızı 40 km/h alınmıştır. Taşıt gövdesinin kütlesi $\pm\%50$ miktarında değiştirilerek elde edilen asılı kütle ivmesi, süspansiyon sıkışması, lastik sıkışması ve aktif kontrol kuvveti yanıtlarına ait tepe değerlerinin taşıt gövde kütlesine bağlı değişimleri Şekil 5.9 aracılığı ile görülmektedir.



Şekil 5. 9 DTGB ve ÇTGB LQ optimal kontrolör yanıtlarının tepe değerlerinin asılı kütleye bağlı değişimi.

Şekil 5.9 ile açıkça görülmektedir ki, PBDTGB kontrolör kütle değişimleine karşı neredeyse duyarsız yanıtlar üretmektedir. DGB kontrolör ise kütlenin artışı ve azalışları sonucunda daha çok etkilenmektedir. Sonuç olarak PBDTGB kontrolörün beklendiği üzere performansını parametre değişimlerine karşı koruyabildiği açıkça ortaya konmuştur.

5.6 Taşıt Titreşimlerinin Durum Türevi Geri Beslemeli L_2 Kazançlı Parametre Bağımlı Kontrolör ile Aktif Kontrolü

EHÇT modeli için Teorem 3.10 ile verilen Parametre Bağımlı Durum Türevi Geri Beslemeli (PBDTGB) L_2 kazançlı kontrolör tasarımı yapılmıştır. Kontrol edilmek istenen çıkışlar vektörü

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.26}$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \tag{5.27}$$

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \tag{5.28}$$

ile verilmiştir. Tasarlanan PBDTGB kontrolör için elde edilen kontrolörün köşe değeleri aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1.3417 & -3.2613 & -0.5815 & -0.0579 & -0.2587 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1.0712 & -3.3164 & -0.4642 & -0.0464 & -0.2066 \end{bmatrix}$$

Tasarlanan PBDTGB L_2 kazançlı kontrolörün üstünlüğü göstermek için aynı kontrol edilmek istenen çıkışlar vektörü kullanılarak standard Durum Geri Beslemeli (DGB) L_2 kazançlı kontrolör tasarlanmıştır ve elde edile durum geri

beslemeli kontrol kazancı

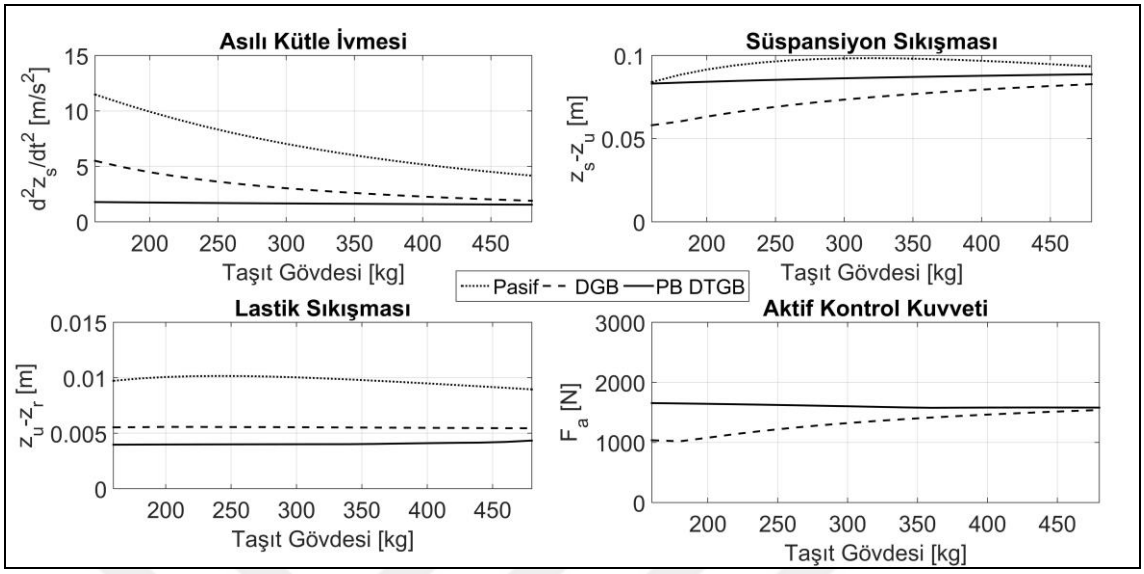
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1.1914 & -1.3042 & 3.3915 & -3.3551 & -0.2291 \end{bmatrix}$$

ile verilmektedir.

Bölüm 4.6.1 ile verilen tümsek tipi bozucular karşısında her iki kontrolör de sınanmıştır. Benzetim çalışmaları boyunca taşıt seyir hızı 40 km/h alınarak uygulanmıştır. Yapılan benzetim çalışmaları ile önerilen PBsonucuna elde edilen asılı kütle ivmesi, süspansiyon sıkışması, lastik sıkışması ve aktif kontrol kuvveti yanıtlarına ait tepe değerlerinin taşıt gövde kütlesine bağlı değişimleri Şekil 5.10 aracılığı ile görülmektedir.

Şekil 5.10 ile açıkça görülmektedir ki, PBDTGB kontrolör kütle değişimleine karşı neredeyse duyarsız yanıtlar üretmektedir. DGB kontrolör ise kütlenin artışı ve azalışları sonucunda daha çok etkilenmektedir. Sonuç olarak PBDTGB kontrolörün beklendiği

üzere performansını parametre değişimlerine karşı koruyabildiği açıkça ortaya konmuştur.



Şekil 5. 8 DTGB ve ÇTGB L_2 kazançlı kontrolörler yanıtlarının tepe değerlerinin asılı kütleye bağlı değişimi.

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Yüksek lisans tezinde, taşıt titreşimlerinin kontrolü için aktif süspansiyon sistemlerinde kolaylıkla uygulanabilir kontrolörlerin tasarım problemi incelenmiştir. İlgili problemin çözümündr DTGB ve ÇTGB kontrol kanunları üzerinde durulmuştur. Verilen karesel bir performans ölçütünün minimizasyonunu garanti eden LQ optimal kontrol ve bozucuların kontrol edilmek istenen çıkışlar üzerindeki etkisini minimize eden L_2 kazançlı kontrol yaklaşımları benimsenmiştir. Söz konusu minimizasyon problemlerinin en önemli aracı dış bükey optimizasyon özelindeki DME olmuştur.

Yüksek lisans tezinin giriş bölümünde, taşıt titreşimlerinin aktif süspansiyonlar ile kontrolü problemine getirilen DME tabnalı çözümleri ve DTGB, ÇTGB yapısında çözülen kontrol problemleri üzerine geniş bir literatür araştırması verilmiştir. Bölüm 2 içerisinde DTGB ve ÇTGB LQ optimal kontrolörlerin dayanıklı ve parametre bağımlı tasarımı için DME tabanlı sentezler sunulmuştur. Ardından sayısal benzetim çalışmaları ile sunulan sentezlerin, literatürde daha önce sunulmuş olan CRE tabanlı sentezler ile karşılaştırılması verilmiştir. DTGB be ÇTGB L_2 kazançlı kontrolörlerin dayanıklı ve parametre bağımlı tasarımı için DME tabanlı sentezleri ise Bölüm 3 içerisinde sunulmuştur. Bölüm 4 kapsamında, taşıt titreşimlerinin analizi için yaygın olarak kullanılan ÇT, EHÇT, SEÇT ve SEHÇT modellerinin DZD, PBDZD ve DPD durum uzay formlarında sunulmuştur. Ayrıca, tasarlanan kontrolörlerin performasını incelemek için kullanılabilecek olan tümsek ve ISO2631 tipi rastlantısal yol pürüzlülüğü bozucularının matematiksel modelleri verilmiştir. Son olarak yüksek lisans tezi kapsamında önerilmiş olan kontrolörlerin etkinliğini ortaya koymak adına farklı yol bozucuları karşısıdna

DTGB ve ÇTGB kontrolörlerin yanıtlarını veren sayısal benzetim çalışmaları Bölüm 5 içerisinde gerçekleştirilmiştir.

Yapılan çalışmalar sonucunda, literatürde yaygın olarak kullanılmakta olan DGB kontrol kanunu ile benzer seviyelerde performansın DTGB ve ÇTGB kontrol kanunları ile de elde edilebildiği gösterilmiştir. Ayrıca, GTDGB kanunlarında görülen parametre belirsizliklerine karşı duyarlılığın azaltıldığı ortaya konmuştur. Tam değerinin bilinmediği ama alt üst sınırlarının bilindiği kabul edilen parametre belirsizliği durumları için dayanıklı ve anlık olarak ölçülebildiği varsayıaln parametre değişimleri durumları için parametre bağımlı kontrol yaklaşımları ile sunulan DTGB ve ÇTGB kontrol kanunları genişletilmiştir. Söz konusu kontrol kanunları sayesinde tam mertebeli dinamik çıkış geri beslemesi veya gözleyici gibi ek dinamiklere gerek duyulmadan aktif süspansiyon sistemleri geliştirilebileceği anlatılmıştır.

Yüksek lisans tezinde geliştirilen kontrol sentezleri ile yapısal sistemlerin, kule vinçlerin, açık deniz platformlarının, gemi yalpa hareketlerinin kontrolü gibi örneklerle çeşitlendirebileceğimiz aktif titreşim kontrolü problemlerine etkin ve kolay gerçeklenebilir çözümler üretilebilir.

Sunulan kontrol sentezlerinin, sonlu frekans bölglerinde L_2 kazancı minimizasyonu, kontrol kazancındaki belirsizlikleri durumlarına karşı narin olmayan tasarım, giriş gecikmesine karşı dayanıklı tasarım özellikleri ile genişletilmesi gelecek çalışmalarda düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Ulsoy, G.A., Peng, H. ve Çakmakçı M., (2012). Automotive Control Systems, First Edition, Cambridge University Press, New York (baskıda).

[2] Smith, C.C., McGehee, D.Y. ve Healey, A.J., (1978). "The Prediciton of Ride Comfort from Acceleration Data", ASME Journal of Dynamical Systems, Measurement and Control, 100(1):34-41.

[3] Gordon, T.J., Marsh, C. ve Milsted, M.G., (1991). "A Comparison of Adaptive LQG and Nonlinear Controllers for Vehicle Suspension Systems", Vehicle System Dynamics, 20(6):321-340.

[4] Hedrick, J.K. ve Butsuen, T., (1990). "Invariant Properties of Automotive Suspensions", Proceedings of the Instuttion of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering, 204(1):21-27.

[5] Sharp, R.S. ve Peng, H., (2011). "Vehicle Dynamics Applications of Optimal Control Theory", Vehicle System Dynamics, 49(7):1073-1111.

[6] Tseng, H.E. ve Hrovat, D., (2015). "State of the Art Survey: Active and Semi-Active Suspension Control", Vehicle System Dynamics, 53(7):1034-1062.

[7] Hrovat, D., (1997). "Survey of Advanced Suspension Developments and Related Optimal Control Applications", Automatica, 33(10):1781-1817.

[8] Güçlü, R., (2005). "Fuzzy Logic Control of Seat Vibrations of a Non-Linear Full Vehicle Model", Nonlinear Dynamics, 40(1):21-34.

[9] Yağız, N., Sakman, L.E. ve Güçlü, R., (2008). "Different Control Applications on a Vehicle Using Fuzzy Logic Control", Sadhana, 33(1):15-25.

[10] Sakman, L.E., Güçlü, R. ve Yağız, N., (2008). "Fuzzy Logic Control of Vehicle Suspensions with Dry Friction Nonlinearity", Sadhana, 30(5):649-659.

[11] Alleyne, A. ve Hedrick, J.K., (1995). "Nonlinear Adaptive Control of Active Suspensions", IEEE Transaction on Control Systems Technology, 3(1):94-101.

[12] Kwak, S.K., Washington, G. ve Yedavalli, R.K., (2002). "Acceleration-Based Vibration Control of Distributed Parameter System Using the "Reciprocal State-Space Framework"", Journal of Sound and Vibration, 251(3):543-557.

[13] Yamashita, M., Fujimori, K., Haykawa, K. ve Kimura, H., (1994). "Application of H_∞ Control to Active Suspension Systems", Automatica, 30(11):1717-1729.

[14] Gahinet, P. ve Apkarian, P., (1994). "A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control", International Journal of Robust and Nonlinear Control, 4:421-448.

[15] Abdellahi, E., Mehdi, D. ve M'Saad, M., (2000). "On the Design of Active Suspension System by H_∞ and mixed H_2/H_∞ : An LMI Approach", Proceedings of the American Control Conference, 28-30 June 2000, Chicago.

[16] Chen, H. ve Guo, K., (2001). "An LMI Approach to multiobjective RMS Gain Control for Active Suspensions", Proceedings of the American Control Conference, 25-27 June 2001, Arlington.

[17] Fialho, I. ve Balas, G., (2002). "Road Adaptive Active Suspension Design Using Lienar Parameter-Varying Gain-Scheduling", IEEE Transactions on Control Systems Technology, 10(1):43-54.

[18] Chen, H. ve Guo, K., (2005). "Constrained H_∞ Control of Active Suspensions: An LMI Approach", IEEE Transactions on Control Systems Technology, 13(3):412-421.

[19] Gao, H., Lam, J. ve Wang, C., (2006). "Multi-Objective Control of Vehicle Active Suspension Systems via Load-Dependent Controllers", Journal of Sound and Vibration, 290(3):654-675.

[20] Leite, V.J.S. ve Peres, P.L.D., (2005). "Pole Location Control Design of an Active Suspension System with Uncertain Parameters", Vehicle System Dynamics, 43(8):561-579.

[21] Soliman, H.M. ve Bajabaa, N.S., (2012). "Robust Guranteed-Cost Control with Regional Pole Placement of Active Suspensions", Journal of Vibration and Control, 19(8):1170-1186.

[22] Soliman, H.M., Benzaouia, A. ve Yousef, H., (2014). "Saturated robust Control with Regional Pole Placement and Application to Car Active Suspension", Journal of Vibration and Control, 22(1):258-269.

[23] Onat, C., Küçükdemiral, İ.B., Sivrioğlu, S ve Yüksek, İ., (2007). "LPV Model Based Gain-Scheduling Controller for a Full Vehicle Active Suspension System", Journal of Vibration and Control, 13(11):1629-1666.

[24] Du, H., Lam, J. ve Syze, K.Y., (2005). "Design of Non-Fragile H_∞ Controller for Active Vehicle Suspensions", Journal of Vibration and Control, 11(2):225-243.

[25] Du, H. ve Zhang, N., (2007). "H_∞ Control of Active Vehicle Suspensions with Actuator Time-Delay", Journal of Sound and Vibration, 301(1):236-252.

[26] Du, H. ve Zhang, N., (2008). "Constrained H_∞ Control of Active Suspension for a Half-Car Model with a Time Delay in Control", Proceedings of the Instuttion of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering, 222(5):665-684.

[27] Li, H., Jing, X. ve Karimi, H.R., (2014). "Output-Feedback-Based H_∞ Control for Vehicle Suspension Systems with Control Delay", IEEE Transactions on Industrial Electronics, 61(1):436-446.

[28] Sun, W., Gao, H. ve Kaynak, O., (2011). "Finite Frequency H_∞ Control for Vehicle Active Suspension Systems", IEEE Transactions on Control Systems Technology, 19(2):416-422.

[29] Sun, W., Zao, Y., Li, J., Zhang, L. ve Gao, H., (2012). "Active Suspension Control with Finite Frequency Band Cosntraints and Actuator Input Delay", IEEE Transactions on Industrial Electronics, 59(1):530-527.

[30] Li, P., Lam, J. ve Cheung, K.C., (2014). "Velocity Dependent Multi-Objective Control of Vehicle Suspension with Preview Measurements", Mechatronics, 24(5):464-475.

[31] Sever, M. ve Yazici, H., (2016). "Disturbance Observer Based Optimal Controller Design for Active Suspension Systems", IFAC-PapersOnLine, 49(9):105-110.

[32] Abdelaziz, T.H.S. ve Valasek, M., (2005). "State Derivative Feedback by LQR for Linear-Time-İnvariant Systems", IFAC Proceedings Volumes, 38(1):435-440.

[33] Baştürk, H.İ., (2013). Disturbance Cancellation by State Derivative Feedback with Application to Ramp-Connected Surface Effect Ships, Doktora Tezi, University of California San Diego, San Diego.

[34] Baştürk, H.I. ve Krstic, M., (2013). "Adaptive Cancellation of Matched Unknown Sinusoidal Disturbances for LTI Systems by State Derivative Feedback", Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 135(1):014501-1-6.

[35] Baştürk, H.I. ve Krstic, M., (2014). "State Derivative Feedback for Adaptive Cancellation of Unmatched Disturbances in Unknown Strict-Feedback LTI Systems", Automatica, 50(10):2539-2545.

[36] Abdelaziz, T.H.S. ve Valasek, M., (2004). "Pole Placement for SISO Linear Systems by State Derivative Feedback", IEE Proceedings-Control Theory and Applications, 151(4):377-385.

[37] Abdelaziz, T.H.S., (2007). "Pole Assignment by State-Derivative Feedback for Single-Input Lienar Systems", Proceedings of the Instuttion of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, 221(7):991-1000.

[38] Abdelaziz, T.H.S., (2008). "Robust Pole Assignment by State Derivative Feedback Using Gradient Flow Approach", Proceedings of the International Conference on Computer Engineering & Systems, 25-27 November 2008, Cairo.

[39] Abdelaziz, T.H.S., (2009). "Robust Pole Assignment for Linear Time Invariant Systems Using State-Derivative Feedback", Proceedings of the Instuttion of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, 223(2):187-199.

[40] Abdelaziz, T.H.S., (2011). "Parametric Eigenstructure Assignment Using State-Derivative Feedback for Linear Systems", Journal of Vibration and Control, 18(12):1809-1827.

[41] Cardim, R., Teixeira, M.C.M., Assunçao, E. ve Covacic, M.R., (2007). "Design of State-Derivative Feedback Controllers Using a State Feedback Controller Design", IFAC Proceedings Volumes, 38(1):435-440.

[42] Moreira, M.R., Junior, E.I.M., Esteves, T.T., Teixeirea, M.C.M., Cardim, R., Assunçao, A. ve Faria, F.A., (2010). "Stabilizability and Disturbance Rejection with State-Derivative Feedback", Mathematical Problems in Engineering, 2010,Article ID 123751:1-12.

[43] Kwak, S.K., Washington, G. ve Yedavalli, R.K. (2000). "Full State Derivative Feedback Control Based on the Reciprocal State Space Framework Using Smart Materials", Proceedings of the 7th Annual International Symposium on Smart Structures and Materials, 19 June 2000, California.

[44] Kwak, S.K., Washington, G. ve Yedavalli, R.K. (2002). "Acceleration Feedback-Based Active and Passive Vibration Control of Landing Gear Components", Journal of Aerospace Engineering, 15(1):1-9.

[45] Abdelaziz, T.H.S. (2010). "Optimal Control Using State Derivative Feedback for Linear Systems", Proceedings of the Instuttion of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, 224(2):185-202.

[46] Assunçao, E., Teixeira, M.C.M., Faria, F.A., da Silva, N.A.P. ve Cardim, R. (2007). "Robust State-Derivative Feedback LMI-Based Designs for Multivariable Linear Systems", International Journal of Control, 80(8):1260-1270.

[47] Faria, F.A., Assunçao, E., Teixeira, M.C.M., Cardim, R. ve da Silva, N.A.P., (2009). "Robust State-Derivative Pole Placement LMI-Based Designs for Linear Systems", International Journal of Control, 82(1):1-12.

[48] Cardim, R., Teixeira, M.C.M., Faria, F.A. ve Assunçao, E., (2009). "LMI Based Digital Redesign of Lienar Time-Invariant Systems with State-Derivative Feedback", Proceedings of the 18th IEEE International Conference on Control Applications Part of 2009 IEEE Multi-Conference on Systems and Control, 8-10 July 2009, Saint Petersbrug.

[49] da Silva, E.R.P., Assunçao, E., Teixeira, Faria, F.A. ve Buzachero, L.F.S., (2011). "Parameter Dependent Lyapunov Functions for State-Derivative Feedback Control in Polytopic Linear Systems", International Journal of Control, 84(8):1377-1386.

[50] da Silva, E.R.P., Assunçao, E., Teixeira, M.C.M. ve Buzachero, L.F.S., (2012). "Less Conservative Control Design for Linear Systems with Polytopic Uncertainties via State Derivative Feedback", Mathematical Problems in Engineering, 2012,Article ID 315049:1-21.

[51] da Silva, E.R.P., Assunçao, E., Teixeira, M.C.M. ve Cardim, R., (2013). "Robust Controller Implementation via State-Derivative Feedback in an Active Suspension System Subjected to Fault", Proceedings of the Conference on Control and Fault Tolerant Systems, 9-11 October 2013, Nice.

[52] Sever, M., Şendur, H.S., Yazıcı, H. ve Arslan, M.S., (2016). "Durum Türevi Geri Beslemeli LQR Kontrolör ile Aktif Süspansiyon Sistemi Tasarımı", Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı 2016, 29 Eylül-1 Ekim 2016, Eskişehir.

[53] Sever, M. ve Yazıcı H., (2017). "Active Control of Vehicle Suspension Systems Having Driver Model via L_2 Gain State Derivative Feedback Controller", Proceedings of the International Conference on Electrical and Electronis Engineering, 8-10 April 2017, Ankara.

[54] Sever, M. ve Yazıcı, H., (2017). "Elektro Hidrolik Süspansiyon Sisteminin L_2 Kazançlı Durum Türevi Geri Beslemesi ile Aktif Titreşim Kontrolü", 18.Ulusal Makine Teorisi Sempozyumu, 5-7 Temmuz 2017, Trabzon.

[55] Yazıcı, H. ve Sever, M., (2017). "L_2 Gain State Derivative Feedback Control of Uncertain Vehicle Suspension System", Journal of Vibration and Control, in Press.

[56] Satoh, M., Fukushima, N., Akatsu, Y., Fujimura, I. ve Fukuyama, K., (1990). "An Active Suspension Employing an Electrohydraulic Pressure Control System", Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control, 5-7 December 1990, Honolulu.

[57] Merker, T., Gaston, G. ve Olaf, T., (2002). "Active Body Control (ABC) the Daimler Chrysler Active Suspension and Damping System", SAE Technical Parper 2002-21-0054.

[58] Streiter, R., (2008). "Active Preview Suspension System", ATZ Worldwide, 110(5):4-11.

[59] Boyd, S., El Gahoui, L., Feron, E. ve Balakrishan, V., (1994). Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, First Edition, Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (baskıda).

[60] Ho, D.W.C. ve Niu, H., (2007). "Robust Fuzzy Design for Nonlinear Uncertain Stochastic Systems via Sliding-Mode Control", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 15(3):350-358.

[61] Montagner, V.F., Oliveria, R.C.L.F., Leite, V.J.S. ve Peres, P.L.D., (2005). "LMI Approach for H_∞ Linear-Parameter-Varying State Fedeback Control", IEE Proceedings-Control Theory and Applications, 152(2):195-201.

[62] Duan, G.R. ve Yu, H.H., (2013). LMIs in Control Systems: Analysis, Design and Applications, First Edition, CRC Press, New York (baskıda).

[63] Du, H., Li, W. ve Zhang, N., (2013). "Vibration Control of Vehicle Seat Integrating with Chassis Suspension and Driver Body Model", Advances in Structural Engineering, 16(1):1-9.

[64] van der Sande, T.P.J., Gysen, B.L.J., Besselink, I.J.M., Paulides, J.J.H., Lomonova, E.A. ve Nijemeir, H., (2013). "Robust Control of an Electromagnetic Active Suspension System: Simulations and Measurements", Mechatronics, 23(2):204-212.

[65] Pellanda, P.C., Apkarian, P. ve Tuan, H.D., (2002). “Missile Autopilot Design via a Multi-Channel LFT/LPV Control Method”, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 12(1):1-20.

[66] Verros, G., Natsavias, S. ve Papadimitriou, C., (2005). “Design Optimization of Quarter-Car Models with Passive and Semi-Active Suspensions Under Random Road Excitation”, Journal of Vibration and Control, 12(1):1-20.

[67] Lofberg, J., (2004). “YALMIP: A Toolbox for Modelling and Optimization in MATLABn”, Proceedings of the IEEE International Symposium on Computer Aided Control System Design, 2-4 September 2004, New Orlenas.

[68] Strum, J.F., (1999). “Using SeDuMi 1.02, a MATLAB Toolbox for Optimization Over Symmetric Cones”, Optimization Methods and Software, 11(4):625-653.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :Mert SEVER

Doğum Tarihi ve Yeri :14/10/1990 İSTANBUL

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : msever@yildiz.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Makine Mühendisliği	Yıldız Teknik Üniversitesi	2014
Lise	Sayısal	Kadıköy İntaş Lisesi	2007

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2015	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

[1] Yazıcı, H. ve Sever, M., (2017). “Active Control of a Non-Linear Landing Gear System Having Oleo Pneumatic Shock Absorber Using Robust LQR Approach”, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineering, Part G: Journal of Aerospace Engineering, 0(0):1-15.

[2] Yazıcı, H. ve Sever, M., (2017). “L_2 Gain State Derivative Feedback Control of Uncertain Vehicle Suspension Systems”, Journal of Vibration and Control, 0(0):1-16.

[3] Sever, M. ve Kırlı, A., (2017). “Investigation of Vehicle Suspension Control Strategies with Wheel Motion Measurements: Delayed Resonator and Extended Ground Hook Control”, International Journal of Advances on Automotive and Technology, 1(2):83-88.

[4] Sever, M. Ve Yazıcı, H. (2016). “Disturbance Observer Based Optimal Vibration Controller Design for Active Suspension Systems”, IFAC-PapersOnline, 49(9):105-110.

[5] Yazıcı, H. ve Sever, M. (2016). “Observer Based Optimal Vibration Control of Full Aircraft System Having Active Landing Gears and Biodynamic Pilot Model”, Shock and Vibration, 2016, Article ID: 2150493:1-20.

Bildiri

[1] Sever, M. ve Yazıcı, H. (2017). “Elektro Hidrolik Süspansiyon Sisteminin L_2 Kazançlı Durum Türevi Geri Beslemesi ile Aktif Titreşim Kontrolü”, Ulusal Makine Teorisi Sempozyumu (UMTS 2017), 6-7 Temmuz 2017, Trabzon.

[2] Sever, M. (2017). “Gradient Descent Based Classification of Road Induced Disturbances for Active Suspension Systems”, 2017’ Scientific Meeting on Electrical-Electronics & Biomedical Engineering and Computer Science (EBBT 2017), 20-21 April 2017, Istanbul.

[3] Sever, M. ve Yazıcı, H., (2017). “Active Control of Vehicle Suspension System Having Driver Model via L_2 Gain State Derivative Feedback Controller”, 4th International Conference on Electrical and Electronics Engineering (ICEEE 2017), 8-10 April 2017, Ankara.

[4] Aktaş, A., Sever, M. ve Yazıcı, H., (2016). “Gain Scheduling LQR Control of Linear Parameter Varying Overhead Crane”, Elektrik-Elektronik ve Biyomedikal Mühendisliği Konferansı (ELECO 2016), 1-3 Aralık 2016, Bursa.

[5] Sever, M. ve Kırlı, A., (2016). “Investigation of Active Suspension Control Strategies Only with Wheel Motion Measurements: Delayed Resonator and Ground Hook”, International Conference on Advances in Automotive Technologies 2016 (AAT 2016), 11-14 October 2016, Istanbul.

[6] Sever, M., Şendur, H.S., Yazıcı, H. ve Arslan, M.S., (2016). “Durum Türevi Geri Beslemeli LQR Kontrolör ile Aktif Süspansiyon Sistemi Tasarımı”, Otomatik

Kontrol Türk Milli Komitesi Ulusal Toplantısı 2016 (TOK 2016), 29 Eylül-1 Ekim 2016, Eskişehir**.**

[7] Aktaş, A., Sever, M. ve Yazıcı, H., (2016). "Doğrusal Matris Eşitsizlikleri Tabanlı Dayanıklı Kutup Yerleştirme ile Tepe Vincin Konum Kontrolü", Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi Ulusal Toplantısı 2016 (TOK 2016), 29 Eylül-1 Ekim 2016, Eskişehir.

[8] Kaya, E.E., Sever, M., Arslan, M.S. ve Yazıcı, H., (2016). "Bir aktif Römork Frenleme Sisteminin Dayanıklı H_2 Kutup Yerleştirmeli Kontrolü", Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi Ulusal Toplantısı 2016 (TOK 2016), 29 Eylül-1 Ekim 2016, Eskişehir.

[9] Sever, M., Kaya, E.E., Arslan, M.S. ve Yazıcı, H., (2016). "Active Trailer Braking System Design with Linear Matrix Inequalities Based Multi-Objective Robust LQR Controller for Vehicle-Trailer Systems", IEEE Intelligent Vehicles Symposium 2016 (IV 2016), 19-22 June 2016, Gothenburg.

[10] Sever, M. ve Yazıcı, H., (2016). "Nonlinear Vibration Analysis of Oleo Pneumatic Landing Gear System Integrated with Biodynamic Pilot Model", 2nd International Conference on Advances in Mechanical Engineering (ICAME 2016), 10-13 May 2016, Istanbul.

[11] Sever, M., Göktaş, G., Yazıcı, H. ve Küçükdemiral, İ.B., (2015). "Linear Matrix Inequalities Based State Feedback and Reference Feedforward Actuator Saturated H-Infinity Control of Small-Scale Unmaned Helicopter", 9th International Conference on Elctrical and Electronics Engineering (ELECO 2016), Bursa.

[12] Sever, M., Göktaş, G., Yazıcı, H. ve Küçükdemiral, İ.B., (2015). "Bir Asimetrik Yapısal Sistemin Titreşimlerinin Doğrusal Matris Eşitsizlikleri Tabanlı Karma H_2/H_∞ Durum Geri-Beslemeli Kontrolör ile Aktif Kontrolü", Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi Ulusal Toplantısı 2015 (TOK 2015), Denizli.

[13] Göktaş, G., Sever, M., Yazıcı, H. ve Küçükdemiral, İ.B., (2015). "Doğrusal Matris Eşitsizlikleri Tabanlı Dayanıklı Doyumlu Eylyicilere Sahip H_2 Durum Geri-Beslemeli Kontrolör ile bir Geminin Yalpa Hareketinin Kontrolü", Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi Ulusal Toplantısı 2015 (TOK 2015), Denizli.

[14] Özülkü, E., Göktaş, G., Sever, M., Yazıcı, H. ve Küçükdemiral, İ.B., (2015). "Öz-uyarlamalı Bulanık Mantık Kontrolör ile Bir Balıkçı Teknesinin Yalpa Hareketinin Kontrolü", Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi Ulusal Toplantısı 2015 (TOK 2015), Denizli.

[15] Sever, M., Göktaş, G., Yazıcı, H. ve Küçükdemiral, İ.B., (2015). "Asimetrik Yapısal Sistemlerin Titreşimlerinin Doyumlu Eyleyicilere Sahip Doğrusal Matris Eşitsizlikleri Tabanlı H_∞ Denetleyici ile Azaltılması", Uluslarası Katılımlı 17.Makine Teorisi Sempozyumu (UMTS 2015), İzmir.

[16] Sever, M., Yazıcı, H. ve Küçükdemiral, İ.B., (2015). "Disturbance Attenuation of Asymmetric Structure by LMI Based Optimal State Feedback Controller with

Saturated Actuators”, 6th International Conference on Modelling, Simulation and Applied Optimization (ICMSAO 2015), Kocaeli.

[17] Sever, M., Yazıcı, H. ve Küçükdemiral, İ.B., (2014). “Durum Geri Beslemeli Doğrusal Parametreleri Değişen H_∞ Kontrolör ile Doğrusal Olmayan Bir Süspansiyon Sisteminin Aktif Kontrolü”, Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi Ulusal Toplantısı 2014 (TOK 2014), Denizli.

[18] Sever, M., Şen, B. ve Cengiz, K.E., (2013). “Çok Serbestlik Dereceli Asimetrik Bir Yapısal Sistemin Titreşimlerinin Öz Uyarlamalı Bulanık Mantık P-ID Kontrolör ile Kontrolü”, 16. Ulusal Makine Teorisi Sempozyumu (UMTS 2013), Erzurum.