MARMARA ÜNİVERSİTESİ
İKTİSADİ ve İDARİ BİLİMLER FAKÜLTESİ
EKONOMETRİ BÖLÜMÜ

IV. ULUSAL EKONOMETRİ ve İSTATİSTİK SEMPOZYUMU BİLDİRİLERİ

EDİTÖRLER

Yrd.Doç.Dr. A.Mete ÇİLİNGİRTÜRK

Araş. Gör. Ebru ÇAĞLAYAN Araş.Gör. S. Erdal DİNÇER Araş.Gör. İ. Esen ZEREN

14-16 MAYIS 1999
ANTALYA

BİLİM KURULU

Prof.Dr. Besim AKIN
Prof.Dr. Şahin AKKAYA
Prof.Dr. Aydın AYAYDIN
Prof.Dr. Mustafa AYTAÇ
Prof.Dr. Şemsettin BAĞIRKAN
Prof.Dr. Alaattin BAŞAR
Prof.Dr. Nihat BOZDAĞ
Prof.Dr. Metin ÇAKICI
Prof.Dr. İbrahim DOĞAN
Prof.Dr. Durmuş DÜNDAR
Prof.Dr. Haluk ERLAT
Prof.Dr. Ebru ERTAŞ
Prof.Dr. Sacit ERTAŞ
Prof.Dr. Öner ESEN
Prof.Dr. Ömer GEBİZLİOĞLU
Prof.Dr. MehmetGENCELİ
Prof.Dr. Ahmet GÖKÇEN
Prof.Dr. Selahattin GÜRİŞ
Prof.Dr. Necmi GÜRSAKAL
Prof.Dr. Baki IŞIKARA
Prof.Dr. Merih İPEK
Prof.Dr. Yüksel İŞYAR
Prof.Dr. Doğan KARGÜL
Prof.Dr. Zehra KASNAKOĞLU
Prof.Dr. Halil KAYIM
Prof.Dr. Ahmet KILIÇBAY
Prof.Dr. Bilge ALOBA KÖKSAL
Prof.Dr .Zehra MULUK
Prof.Dr. Ahmet ÖZTÜRK
Prof.Dr. Bedriye SARAÇOĞLU
Prof.Dr. Özer SERPER
Prof.Dr. Mehmet ŞAHİNOĞLU
Prof.Dr. Ümit ŞENESEN
Prof.Dr. Gülay ŞENESEN
Prof.Dr. Hüseyin TATLIDİL
Prof.Dr. Münevver TURANLI
Prof.Dr. Ateş VURAN
Prof.Dr. Kemal YOĞURTÇUGİL
Doç.Dr. Işıl AKGÜL
Doç.Dr. Şahamet BÜLBÜL
Doç.Dr. Altan ÇABUK
Doç.Dr. Kadir ERTAŞ
Doç.Dr. Mustafa GÜNEŞ
Doç.Dr. Levent ŞENYAY
Doç.Dr. Aydın ÜNSAL

DÜZENLEME KURULU

Prof.Dr. Münevver TURANLI
Prof.Dr. Besim AKIN
Prof.Dr. Şemsettin BAĞIRKAN
Prof.Dr. İbrahim DOĞAN
Prof.Dr. Selahattin GÜRİŞ
Doç.Dr. Işıl AKGÜL
Doç.Dr. Şahamet BÜLBÜL
Yrd.Doç.Dr. Şevki KAYLAV
Yrd.Doç.Dr. Fatma URFALIOĞLU
Öğr.Gör.Dr. Tuncay CAN
Öğr.Gör.Dr. M.Ahmet ÇİLİNGİRTÜRK
Arş.Gör. Serkan AKGÜRSU
Arş.Gör. Dilek ALTAŞ
Arş.Gör.Ebru ÇAĞLAYAN
Arş.Gör. Dicle DEMİRHAN
Arş.Gör. Erdal DİNÇER
Arş.Gör. Habib KOÇAK
Arş.Gör. Hülya SAYYAN
Arş.Gör.A.SEYFULLAHOĞULLARI
Arş.Gör. Turgut ÜN
Arş.Gör.Esen ZEREN

15 MAYIS 1999 BİLDİRİLERİ.....605

A SALONU

BİRİNCİ OTURUM
Oturum Başkanı : Altan ÇABUK (Çukurova Üniversitesi)

Rahmi YAMAK – Nebiye YAMAK (Karadeniz Teknik Üniversitesi).....609
Türkiye Ekonomisinde Mevsimselliğin Türü ve Boyutu
Nezir KÖSE – Nuri UÇAR (Gazi Ü. – Çankaya Ü.).....619
Durağan Vektör Otoregresif Süreçlerde Gecikme uzunluğunu Belirleyen Kriterlerin Karşılaştırılması : Hata Terimleri Arasındaki Çapraz Korelasyon Derecesi ve Parametre Matrisi Özdeğerlerinin Sıfıra Yakınlığının Etkileri
Sinan TİMURLENK (Atatürk Üniversitesi).....633
Türkiye'de Döviz Kurlarındaki Değişkenlik ve İhracat

İKİNCİ OTURUM
Oturum Başkanı : Gülay Günlük ŞENESEN(İstanbul Üniversitesi)

Hikmet ÇAĞLAR – N. ÇAĞLAR (Yıldız Teknik Üniversitesi).....649
Penalized En Küçük Kareler ve B-Spline Smoothing
Ali Hakan BÜYÜKLÜ (İstanbul Üniversitesi).....655
Robust Tahmin Edicilerin Kullanılma Sebep ve Sonuçları
Atıf EVREN (İstanbul Üniversitesi).....671
Doğrusal Olmayan Regresyonda Kimi Sorunlar ve Bazı Çözüm Önerileri
Mustafa SEVÜKTEKİN (Uludağ Üniversitesi).....681
Censored Regresyon Analizi – Tobit Model Bir Uygulama

ÜÇÜNCÜ OTURUM
Oturum Başkanı : Mustafa GÜNEŞ (Dokuz Eylül Üniversitesi)

Murat DOĞANLAR (Çukurova Üniversitesi).....695
Türk Ekonomisi İçin İhracat Talep Fonksiyonlarının Tahmini : Koentegrasyon Yaklaşımı

B SALONU

BİRİNCİ OTURUM
Oturum Başkanı : Metin ÇAKICI (Ege Üniversitesi)

Cengiz YILMAZ – Tuncer ÖZDİL (Celal Bayar Üniversitesi).....709
Türkiye Ekonomisinde Yapısal Değişimin Girdi-Çıktı Analiziyle İncelenmesi
Nihat BOZDAĞ – Şenol ALTAN (Gazi Üniversitesi).....719
Girdi-Çıktı Analizinde Girdi Katsayılarının Tahmininde Değişik Bir Yöntem ve Uygulaması
Öner GÜNÇAVDI – Suat KÜÇÜKÇİFTÇİ (İstanbul Teknik Üniversitesi).....731
Açık Bir Ekonomide Sermaye/ Emek Oranı : Türkiye İçin 1979-1990 Karşılaştırması
Erkan IŞIĞIÇOK (Uludağ Üniversitesi).....747
Kanonik Korelasyon Çözümlemesi : Bursa'daki 500 Büyük Firmanın Girdi İle Çıktı Değişkenleri Üzerine Bir Uygulama

Doğrusal Olmayan Regresyonda Kimi Sorunlar ve Bazı Çözüm Önerileri*

Özet

Doğrusal olmayan regresyonda tahmin uzayının genellikle zihinlerde canlandırılamaz oluşu doğrusal regresyondan farklı kimi ek zorluklar getirmektedir. Bunlardan bir tanesi türev matrisinin her aşamada, parametre değerlerinin andaki tahminlerine bağlı olarak hesaplanması zorunluluğudur. Bu da parametre değerlerinin başlangıç değerlerinin dışsal olarak belirlenmesi gerektiği anlamına gelmektedir.

İkinci bir güçlük ise doğrusal modellerde regresyon diagnostiği için kullanılan kimi istatistiklerin doğrusal olmayan modeller için yanıltıcı sonuçlar verebilmesidir. Özellikle tahmin uzayında eğriselliğin yüksek olduğu durumlarda istatistik literatüründe sözü edilen diagnostik ölçütleri doğrusal modellerde oynadıkları rolü oynayamamaktadırlar.

Bir başka problem ise "çoklu doğrusal bağlantı" durumunda ortaya çıkmaktadır. Çoklu doğrusal bağlantı doğrusal halde "bir veri problemi" iken doğrusal olmayan halde modelin kendisinden de kaynaklanabilmektedir.

1.1. Doğrusal Model

İstsatistik ve Ekonometri'de , regresyon analizinde en sık başvurulan model doğrusal regresyon modelidir. Bunun nedeni doğada, bilimde en sık rastlanan ilişki türünün doğrusal ilişki olması değil, modelin araştırmacılara sunduğu hareket alanının ya da esnekliğin büyüklüğüdür.

Çok değişkenli doğrusal regresyon,

$$Y_n = \beta_1 X_{n1} + \beta_2 X_{n2} + \ldots + \beta_p X_{np} + \varepsilon_n$$

denklemi ile ifade edilir. Burada Y_n, bağımlı değişkenin n. değeri; X_{np}, p. bağımsız değişkenin n. gözlem değeri; β_p, p. parametre değeridir. ε_n ise $\varepsilon \approx N(0,\sigma^2 I)$ varsayılan stokastik değişken ana kütle hata payıdır. (I nxn boyutlu birim matristir.)

Doğrusal regresyon modeli için değişkenlerin modele doğrusal olarak girme zorunluluğunun bulunmadığını vurgulamak gerekir. Değişkenler modele üstel ya da logaritmik olarak girebilir.[1] Dikkat edilmesi gereken parametrelerin modelde doğrusal olarak bulunmaları zorunluluğudur. Doğrusal olan bir model parametrelerinde doğrusal olan bir modeldir.[2]

Matris notasyonu kullanılacak olursa çok değişkenli regresyon modeli;

$Y_{nx1} = X_{pxn}\beta_{nx1} + \varepsilon_{nx1}$ *biçiminde ifade edilir.*

$E[Y] = X\beta$ *olduğu için* $X\beta$ *çarpımı modelin beklenen fonksiyonu olarak adlandırılır.[3]*

---

* Atıf Evren Araştırma Görevlisi, Dr.,İstanbul Üniversitesi İktisat Fakültesi

[1] *Ross;G.J.S.;Nonlinear Estimation;Springer-Verlag;1990,s1.*

[2] *Jennrich;R.I.;An Introduction to Computational Statistics:Regression Analysis;Prentice-Hall;1995;s239.*

[3] *Bates;D.M.;Watts;D.G.;Nonlinear Regression Analysis and Its Applications;John Wiley;1988,s2.*

X matrisi (n.p) terimi beklenen değer fonksiyonunun n. satırının p. parametreye göre türevini verdiği için türev matrisi olarak adlandırılır. "Doğrusal modeller için herhangi bir parametreye göre alınan birinci türevler bütün parametrelerden bağımsızdır."[4]

1.2. Doğrusallaştırma

Bazı modeller; değişkenlerinde gerçekleştirilecek bazı uygun dönüşümler ile doğrusal hale getirilebilir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta dönüşüm gerçekleştirildikten sonra ana kütle hata payının dönüştürülmüş halinin ne tür bir olasılık dağılımı izleyeceğinin bilinmesidir.[5]

Orijinal model için geçerli kabul edilen $\varepsilon \approx N(0,\sigma^2 I)$ durumu, uygun bir dönüşüm sonrasında büyük bir olasılıkla geçerliliğini yitirecektir. Bilindiği gibi bu varsayım en küçük kareler (E.K.K.) tahmincilerinin değerlerinin belirlenmesinde zorunlu değildir. Ancak parametrelere ilişkin güven aralığı hesaplanması ya da hipotez testlerinin gerçekleştirilmesi aşamalarında gerekli olmaktadır. [6]

1.3. Doğrusal Olmayan Modeller

Bazı modeller doğrusallaştırılamaz. Büyüme modelleri ile ilgili bir dizi diferansiyel denklemin çözümünden elde edilen modeller, doğrusal olmayan regresyona yol açan tipik örneklerdir. Bundan başka, ağırlıklı veya genelleştirilmiş E.K.K. yönteminin doğrusal olmayan regresyonun özel bir hali olması[7], doğrusal olmayan regresyon analizinin lehine bir diğer göstergedir.

1.4. Doğrusal Regresyonun Geometrisi

$Y = X\beta + \varepsilon$ modeli için E:K.K. tahminleri

$\beta^* = (X'X)^{-1}X'Y$ normal denklemleri ile bulunur. Yine parametrelerin varyans-kovaryans matrisi de; $V(\beta^*) = (X'X)^{-1}\sigma^2$ formülü ile bulunur. Bu matristen ve E.K.K. tahminlerinden hareketle parametrelere ilişkin güven aralığı hesabı ve hipotez testleri gerçekleştirilmektedir.

$H = X(X'X)^{-1}X'$ matrisi de regresyon diyagnostiğinde kullanılmaktadır.

$\hat{Y}$ bağımlı değişkenin tahmin değerleri vektörü, e de kalıntı değerleri vektörü olmak üzere

---

[4] a.g.y.
[5] Seber;G.A.F.;Wild,C.J.,Nonlinear Regression;John Wiley;1989,s16
[6] Draper;N.R.;Smith, H.,Applied Regression Analysis;John Wiley;Third Edition;1998;s136
[7] Gallant;A.R.;Nonlinear Statistical Models;John Wiley;Second Edition;1987;s3

$\hat{Y} = HY$ ve $e = (I - H)Y$ eşitlikleri hatırlanacak olursa H'ın $\hat{Y}$ ve e vektörlerinin bulunmasında kullanılan özel projeksiyon matrisi olduğu görülecektir.[8]

Bu durumda $\hat{Y} = HY$ işlemi ile Y vektörünün; her biri X matrisinin sütunlarında yer alan p tane vektörün gerdiği, beklenen değer uzayına projeksiyonu gerçekleştirilmiş olmaktadır. Yine $e = (I - H)Y$ işlemi ile, kalıntı değerleri, X matrisinin sütun vektörleri tarafından gerilen uzaya dik bir uzaya, Y vektörünün projeksiyonu sonucunda elde edilir. Bu uzay n-p boyutlu kalıntı uzayıdır. Yine p tane parametre vektörü tarafından gerilen parametre uzayı da p boyutlu olmaktadır.

Bundan başka beklenen değer uzayından parametre uzayına dönüşümün Jakobyen determinantı $|X'X|^{1/2}$'ya eşittir. Başka bir biçimde söylenirse parametre uzayındaki birim alanların beklenen değer uzayındaki birim alana oranı $|X'X|^{-1/2}$'ye eşittir.[9]

Bu durumda bütün doğrusal modeller için, parametre uzayında bulunan, birbirinden eşit uzaklıkta paralel doğruların, beklenen değer uzayında, birbirinden eşit uzaklıkta paralel doğrulara karşılık geldiği söylenmelidir. Yine bir uzaydaki dikdörtgenlerin ,diğerindeki paralel yüzlere; bir uzaydaki daire ya da kürelerin, diğerinde elips ya da elipsoidlere karşılık geldiğini belirtmek gerekir. Dahası Jakobyen determinantının değerinin sabit olması; bir uzaydaki birim alanların, diğerinde de sınırlı olmasını getirmektedir. Bu özellikler doğrusal regresyon analizini kolaylıkla uygulanabilir hale getirmektedir.[10]

2.1.Doğrusal Olmayan Regresyon

Doğrusal olmayan regresyon modeli;

$Y_n = f(X_n;\theta) + \varepsilon_n$ denklemi ile ifade edilir. Bu model $f(X_n;\theta)$ beklenen değer fonksiyonunun, parametrelerin doğrusal olmayan bir fonksiyonu olması farklılığı dışında, doğrusal model ile aynıdır.

"Doğrusal olmayan modeller için; beklenen değer fonksiyonunun parametrelere göre türevlerinden en az bir tanesi; parametrelerden en az bir tanesine bağımlı olmaktadır."[11] Bunun dışında ana kütle hata payının dağılımına ilişkin varsayımlar geçerliliğini korumaktadır: $\varepsilon \approx N(0,\sigma^2 I)$

2.2.Doğrusal Olmayan Regresyonun Geometrisi

Bu durumda $f(X_n;\theta)$ beklenen değer yüzeyi; $\Re^n$ Öklid uzayında p boyutlu bir yüzey olmaktadır.

---

[8] Montgomery;D.C.,Peck,E.A.;Introduction to Linear Regression Analysis;John Wiley;Second Edition;1991;s123
[9] Bates;D.M.;...;a.g.e.;s12
[10] a.g.y.
[11] a.g.e.;s32

E.K.K. tahminleri her zaman olduğu gibi Y vektörüne bu yüzey üzerindeki en yakın noktanın bulunmasını amaçlamaktadır.

Doğrusal olmayan regresyonda genel olarak şunlar doğrudur:

i)Beklenen değer yüzeyi $f(X_n;\theta)$ n boyutlu uzayda p boyutlu eğrisel bir yüzeydir.

ii)Parametre uzayındaki parametre doğruları; eğrisel beklenen değer yüzeyinin eğrilerine karşılık gelmektedirler.

iii) Parametre uzayındaki birim alanların ne büyüklükte olduğunu gösteren Jakobyen matrisinin determinantı, doğrusal durumdakinin aksine sabit değildir.[12]

Bundan başka doğrusal regresyonda, kalıntı vektörünün beklenen değer uzayına dik olduğu noktada optimizasyon gerçekleşirken; doğrusal olmayan modellerde, minimum, kalıntı vektörünün beklenen değer yüzeyinin teğetine, dik olduğu noktalarda aranır.[13]

Son olarak doğrusal olmayan modellerde, birden fazla minimum adayının söz konusu olabileceğini de not etmek gerekir.

2.3.Parametre Tahminleri

Doğrusal olmayan regresyonda; beklenen değer yüzeyinin eğriselliği, parametre tahminlerinin tekrara dayalı (iteratif) yöntemlerle gerçekleştirilmesini zorunlu kılmaktadır. Bu zorunluluk alternatif parametre tahmin yöntemleri üzerine bir literatürün doğmasına yol açmıştır. [14]

Burada konunun; doğrusal regresyon modeli ile analoji içerisinde sürdürülebilmesi bakımından Gauss-Newton tekrara dayalı yöntemine gönderme yapılacaktır. Yoksa adı geçen yöntemin lehine (ve dolayısıyla diğerlerinin aleyhine) bir tercih söz konusu değildir. Bununla beraber pek çok başka algoritmanın Gauss-Newton algoritmasının revize edilmiş hali olması bu algoritmanın popülerliğini arttırmaktadır.[15]

Gauss-Newton yöntemi beklenen değer fonksiyonu $f(X_n;\theta)$'nın bir parametre tahmin noktasında Taylor serisi açılımıyla doğrusallaştırılmasına dayanır:

θ'nın küçük bir θ^* komşuluğu içerisinde beklenen değer fonksiyonu $f(X_n;\theta)=f_n(\theta)$ doğrusal bir Taylor serisi açılımı ile

$$f_n(\theta)\approx f_n(\theta^*)+\sum_{r=1}^{p}\left.\frac{\partial f_n}{\partial \theta_r}\right|_{\theta^*}(\theta_r-\theta_r^*);\qquad F_{\cdot}(\theta)=\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta'}=\left[\left(\frac{\partial f_i(\theta)}{\partial \theta_j}\right)\right]$$

$f(\theta)\approx f(\theta^*)+F_{\cdot}(\theta-\theta^*)$ yazılarak doğrusallaştırılır. Eğer

---

[12] *a.g.e.;s39*

[13] *Seber;G.A.F.;...;a.g.e.;s129*

[14] *Bu konuda bkz. Bazaraa;M.S.;Sherali;H.D.;Shetty;C.M.;Nonlinear Programming-Theory and Algoritms;John Wiley;Second Edition1993 ve Buchanan; J.L.;Turner;P.R.;Numerical Methods and Analysis;Mc Graw-Hill;1992*

[15] *Jennrich;...;a.g.e.;s248.*

$Z = Y - f(\theta^*) = \varepsilon$
$\beta = \theta - \theta^*$ *denilirse*

Kalıntı kareleri toplamı

$$s(\theta) = \|Y - f(\theta)\|^2 \approx \|Y - f(\theta^*) - F.(\theta - \theta^*)\|^2 = \|Z - F.\beta\|^2$$

olarak da ifade edilebilir. Buradan hareketle kalıntı kareleri toplamını minimize eden parametre tahminleri

$\beta^* = (F'.F.)^{-1}F'.Z$ *denklemi ile bulunur. Yine orijinal değişkenler yerine konulursa*

$\beta^* = \theta - \theta^* = (F'.F.)^{-1}F'.(Y - f(\theta^*))$ *yazılabilir.*[16]

Eğer

$\theta^0 = \theta^*$
$\theta^1 = \theta$ *değişkenleri de tanımlanacak olursa*

$\theta^1 = \beta^* + \theta^0$ *yazılır. Bu durumda tipik bir k+1. adım için*

$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + \hat{\beta}_k$ *denklemi yazılabilir. İterasyonlar ya ardışık parametre tahmin değerlerinin birbirlerine yaklaşması ya da kalıntı kareleri toplamında gözle görülür bir azalış olmaması halinde sona erdirilmektedir.*[17]

Yine parametrelerin varyans-kovaryans matrisi de $V(\theta^*) = (F'.F.)^{-1}\sigma^2$ *ile bulunur. Buradaki türev matrisi* F*'in doğrusal regresyondaki* X *matrisi ile aynı rolü oynadığına dikkat edilmelidir. Dahası doğrusal durumdaki projeksiyon matrisi* $H = X(X'X)^{-1}X'$*'ın oynadığı rolün burada* $P_F = F.(F'.F.)^{-1}F'.$ *matrisi tarafından üstlenildiğini belirtmek gerekir.*[18]

3. Bazı Güçlükler

3.1 Parametrelerin Başlangıç Tahminleri

Doğrusal olmayan regresyonda bir parametre tahmin noktasından diğerine ulaşılmakta ve bu sürecin sonunda, kalıntı kareleri toplamını minimize eden parametre tahminlerine ulaşılacağı umulmaktadır.

Buradaki ilk sorun parametrelerin başlangıç değerlerinin nasıl belirleneceğidir. Çünkü Gauss-Newton algoritması ve benzer yöntemler, başlangıç değerlerinin gerçek değerlere (optimum değerlere) yakın olması halinde tatmin edici sonuçlar vermektedir. Dahası beklenen değer uzayının birden fazla minimuma sahip olabilmesi; iterasyonlar

---

[16] *Seber;...;a.g.e.;s23*
[17] *Yakınsama ölçütü olarak neyin dikkate alınacağı konusunda da farklı görüşler vardır. Ancak yakınsamayı kolaylaştırıcı bir yaklaşım için bkz. Draper;N.R.;...;a.g.e.;s510.*
[18] *a.g.e.;s24-25*

sonucunda yakınsanan noktanın bir yerel minimum olmadığının garantisini de vermemektedir.

Başlangıç değerlerini sağlıklı olarak belirleyebilmek için bazı özel noktalarda, beklenen değer fonksiyonunun ya da fonksiyonun türevlerinin davranışını, parametreler cinsinden belirlemeye çalışmak; parametre sayısını azaltmaya çalışmak ve dolayısıyla parametre uzayının boyutlarını düşürmek; koşullu doğrusallık kullanmak; parametre dönüşümüne gitmek; optimumun arandığı parametre uzayına bazı kısıtlamalar getirerek iterasyon sayısını düşürmeye çalışmak gibi yöntemler yararlı olabilir. Örneğin;

$f(x;\theta)=\theta_1+\theta_2\exp(-\theta_3 x)$ *fonksiyonunda* $x=0$ *değeri için fonksiyon*

$f(x;\theta)=\theta_1+\theta_2$ *biçimini alacağından;* $\theta_1+\theta_2$ *toplamı için bir başlangıç tahmin değeri elde etmek mümkündür. Yine* $\theta_3>0$ *olması durumunda*

$\lim_{x\to\infty} f(x;\theta)=\theta_1$ *değeri elde edilir. Başka bir ifade ile burada* θ_1 *parametresi eğrinin yatay asimptotuna eşit olmaktadır.*

$f(x;\theta)=\dfrac{\theta_1 x}{\theta_2+x}$ *Michaelis-Menten modelinde*

$\lim_{x\to\infty} f(x;\theta)=\theta_1$ *olduğu için bağımlı değişkenin alacağı maksimum değerden hareketle* θ_1 *parametresi için bir başlangıç değeri bulunabilir. Öte yandan* $x=\theta_2$ *değeri denklemde yerine konulursa, bu değerin fonksiyonun maksimumunun yarısına eşit olduğu görülecektir. Bazen de beklenen değer fonksiyonunun türevlerinden hareket etmek uygun olabilir. Örneğin yukarıdaki modelde fonksiyonun x'e göre türevi alınır ve* $x=0$ *noktasında bu türev hesaplanırsa* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0)=\dfrac{\theta_1}{\theta_2}$ *sonucu elde edilir. Dolayısıyla* $x=0$ *noktasında*

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ *interpolasyonu yapılarak ve elde edilen bu değer maksimum y değerine bölünerek* θ_2 *parametresi için bir başlangıç değeri bulunabilir.* [19]

Bir diğer pratik önlem de koşullu doğrusallık kullanmak biçimindedir. Örneğin, beklenen değer fonksiyonunun davranışının doğrusal olduğu bölgelerin belirlenebilmesi durumunda; bu bölgelerde değişkenler arasındaki ilişkinin doğrusallığından hareketle, (doğrusal E.K.K. uygulayarak) parametreler için başlangıç tahmin değerleri bulmak da söz konusu olabilir.

3.2.Doğrusal Bağlantı

---

[19] *Benzeri öneriler için bkz. Bates;D.M.;...;a.g.e.;Üçüncü Bölüm ve Seber;G.A.F.;...;a.g.e.;Üçüncü Bölüm.*

Doğrusal olmayan regresyonda bağımsız değişkenler arasındaki doğrusal bağlantı sorunu varlığını sürdürmektedir. Doğrusal regresyonda, türev matrisi X_{nxp}'nin rankının p'den az ve dolayısıyla $(X'X)$'nin tekil olması durumunda parametre tahminleri gerçekleştirilemez. Bu derecede olmasa da önemli bir başka problem X matrisinin rankının p'ye eşit olmasına karşılık, X matrisinin bazı sütun vektörlerinin birbirleri ile yüksek korelasyonlu olmasıdır. Bu durumda ise $(X'X)$ matrisi yaklaşık olarak tekil olur.[20]

Doğrusal modellerde bu durum bir veri problemidir. Başka bir deyişle X matrisinin yapısıyla oynanarak problemin üstesinden gelinebilir. Bu "oynama" bazen yeni gözlemler yapmak iken, bazen de önemli açıklayıcı değişkenlerle korelasyonu yüksek bazı değişkenlerin modelden dışlanması biçiminde olur.

Doğrusal regresyonda X matrisinin oynadığı rolü doğrusal olmayan regresyonda F matrisinin oynaması nedeniyle , doğrusal olmayan regresyonda, bağımsız değişkenler arasındaki bir doğrusal bağlantı probleminin, hem veri hem de parametrizasyon yönteminden kaynaklı bir sorun olabildiğini belirtmek gerekir.[21]

Doğrusal regresyonda doğrusal bağlantının tipik göstergesi elde edilen yüksek R^2 skorlarına karşılık ; parametre tahminlerinin standart hatalarının çok yüksek çıkmasıdır. Bundan başka, parametre değerlerinden birinde küçük bir değişiklik, diğer parametre tahminlerinde dramatik değişikliklere yol açıyorsa, bu da bir gösterge olarak kabul edilir. Ayrıca, bazı parametre tahminlerinin cebirsel işaretlerinin yanlış çıkması ya da umulanın çok üzerinde değerler alması da bir diğer gösterge olarak düşünülür.[22] Bu durum doğrusal olmayan regresyon için de genel olarak geçerlidir. Parametre uzayında, parametreler için çizilen güven sınırı bölgesinin şekline bakarak da bu durumu teşhis etmek mümkün olabilir. Son olarak, doğrusal olmayan regresyondaki doğrusal bağlantı sorununu, doğrusal hallerdeki doğrusal bağlantı probleminin çözümü için geliştirilen, örneğin "ridge regression" yöntemlerine gönderme yaparak çözmeyi deneyen, Levenberg-Marquardt algoritmalarını hatırlamak yararlı olabilir.[23]

3.3.Eğrisellik ve Kalıntı Analizi

Doğrusal modellerde türev matrisi X sadece gözlem değerlerine bağlıdır. Dolayısıyla parametrelere göre alınan ikinci türevler sıfırdır. Başka bir deyişle doğrusal modeller için beklenen değer düzleminin(ya da daha genel bir ifade ile yüzeyinin) eğriselliğinin

---

[20] Seber;...;a.g.e.;s104.
[21] a.g.e.;s118.
[22] Greene;W.H.;Econometric Analysis;John Wiley; Second Edition;1993;s266-267.
[23] Seber;...;a.g.e.;s624.

sıfır olduğu söylenebilir. "Eğrisellik ikinci türevlerle ilgili bir kavramdır ve bir $f(\theta)$ beklenen değer yüzeyinin eğilme ya da bükülme derecesini veren bir ölçüttür."[24]

Bates ve Watts, eğriselliğin ölçülmesinde iki ölçüt kullandılar. Beklenen değer yüzeyinin eğriselliğini birbirine ortogonal iki bileşene ayırdılar. Bunlardan bir tanesini beklenen değer yüzeyinin içsel eğriselliği olarak tanımladılar (intrinsic nonlinearity).Diğerini ise parametre etkili (parameters-effects nonlinearity) olarak adlandırdılar.[25]

Bu konuda Ross; içsel eğriselliği; parametre dönüşümleri ile ortadan kaldırılamayan; çözüm uzayının eğriselliği olarak; parametre etkili eğriselliği ise parametre sisteminin seçimine bağlı olarak gündeme gelen eğrisellik olarak ele almaktadır.[26]

$\hat{\theta}$; θ *yakınlarında bir değer olsun. Eğer beklenen değer fonksiyonunun ikinci dereceden bir Taylor serisi açılımı yapılacak olursa*

$f(\theta) \approx f(\hat{\theta}) + \hat{F}.(\theta - \hat{\theta}) + \frac{1}{2}(\theta - \hat{\theta})' \hat{F}..(\theta - \hat{\theta})$ *yazılabilir.*

Yine $\delta = (\theta - \hat{\theta})$ *denilirse*

$f(\theta) - f(\hat{\theta}) \approx \hat{F}.(\theta - \hat{\theta}) + \frac{1}{2}(\theta - \hat{\theta})' \hat{F}..(\theta - \hat{\theta}) = \hat{F}.\delta + \frac{1}{2}\delta' \hat{F}..\delta$ *yazılabilir.*

Burada $\hat{F}_{.nxp} = \left[\left(\frac{\partial f_i(\theta)}{\partial \theta_j}\right)\right]_{\theta=\hat{\theta}}$ *ve* $\hat{F}_{..nxpxp} = \left[\left(\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta_r \partial \theta_s}\right)\right]_{\theta=\hat{\theta}}$ *olduğu da belirtilmelidir.*

Bu aşamada beklenen değer yüzeyinin bir düzlem ile temsil edilebilmesi; şüphesiz yukarıdaki denklemdeki quadratik ifade $\delta' \hat{F}..\delta$ *'nın değerinin doğrusal terim* $\hat{F}.\delta$ *'ya oranla büyüklüğüne bağlıdır.*[27] *Bates ve Watts eğriselliğin birbirine ortogonal iki bileşenden hareketle tanımladılar:*

$\hat{F}.. = \hat{F}^T.. + \hat{F}^N..$ *Burada T ve N bileşenleri eğriselliğin beklenen değer yüzeyine teğet ve normal bileşenlerini belirtmek için kullanılmaktadır. Bates ve Watts bu her iki kareli bileşeni doğrusal terimlerle kıyaslamak için şu istatistikleri önermişlerdir:*

---

[24] *a.g.e.;s127.*
[25] *Bates;...;a.g.e.,s223*
[26] *Ross;...;a.g.e.;s176.*
[27] *Seber;...;a.g.e.;s129-131.*

$$K_{\delta}^{T} = \frac{\left\| \delta' \hat{F}^{T} .. \delta \right\|}{\left\| \hat{F} . \delta \right\|^{2}}, \qquad K_{\delta}^{N} = \frac{\left\| \delta' \hat{F}^{N} .. \delta \right\|}{\left\| \hat{F} . \delta \right\|^{2}}$$ [28]

Bu oranlara sırasıyla parametre nedenli eğrisellik ve içsel eğrisellik adları verilmiştir. Eğer beklenen değer yüzeyinin kendisine teğet olan düzlem ile temsil edilmesi (doğrusallaştırma) amaçlanıyorsa , öncelikle bu iki oranın da küçük olması gerekmektedir. Diğer yandan, literatürde içsel eğrisellik veri kabul edilmekte ve parametre etkili eğriselliğin, yeni bir parametrizasyon işlemi ile ortadan kaldırılması amaçlanmaktadır. Yine bu konuda geniş bir literatür oluşmuş durumdadır. Goldberg'in yaklaşımı; Beale'nin eğrisellik kriterleri; bu bağlamda ele alınmalıdır. [29] *Beklenen değer yüzeyindeki eğriselliğin yüksek olması halinde Seber, kalıntı analizi ile ilgili istatistiklerin yanıltıcı olabildiğini göstermektedir.*[30] *Ross; uygun parametre dönüşümlerinin gerçekleştirilmesi durumunda, eğrisellikle ilgili bu istatistiklerin her seferinde hesaplanmasının zorunlu olmadığını ifade etmektedir.*[31]

4.Sonuç

Doğrusal olmayan regresyona doğrusallaştırma yaklaşımının belirli sınırları vardır. Beklenen değer yüzeyinde eğriselliğin yüksek olması durumunda ; hem hesaplanan güven aralıkları; gerçekleştirilen hipotez testi sonuçları güvenilirliğini yitirmektedir; hem de kalıntı analizi ile ilgili sonuçlar yanıltıcı olabilmektedir.

Bundan başka parametrelerin başlangıç tahmin değerlerinin gerçek değerlerine yakın seçilmesi halinde Gauss-Newton ve benzeri yaklaşımlar tatmin edici sonuçlar vermektedir. Regresyon analizi öncesi araştırmacılara düşen; parametreler için sağlıklı başlangıç değerleri bulmak; olabiliyorsa tahmin edilecek parametre değerlerinin bir kısmını modele sabit olarak girerek parametre uzayının boyutunu düşürmek; bazı durumlarda koşullu doğrusallık kullanmak; algoritmaların istenmeyen bölgelere saparak hesaplamaları ağırlaştırmalarını önlemek için parametre uzayına kimi kısıtlamalar koymak olabilir. Son olarak doğrusal olmayan regresyonda doğrusal bağlantının modelden de kaynaklanabilmesi saptamasından hareketle olabildiğince yalın modeller denenmeli, ya da en azından farklı parametrizasyon yöntemleri denenmelidir.

---

[28] *a.g.y.*
[29] *a.g.e.;s154-159.*
[30] *a.g.e.;s174 ve sonrası*
[31] *Ross;...;a.g.e.;s41.*