T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$\mathbb{E}^4$ ÖKLİD UZAYINDA ÖTELEME HİPERYÜZEYLERİ

İpek AKKILINÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Prof. Dr. Salim YÜCE

Temmuz, 2021

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$\mathbb{E}^4$ ÖKLİD UZAYINDA ÖTELEME HİPERYÜZEYLERİ

İpek AKKILINÇ tarafından hazırlanan tez çalışması 30.07.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Salim YÜCE
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Salim YÜCE, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU, Üye
İstanbul Gelişim Üniversitesi _____

Danışmanım Prof. Dr. Salim YÜCE sorumluluğunda tarafımca hazırlanan $\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayında Öteleme Hiperyüzeyleri başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

İpek AKKILINÇ

İmza

Desteklerini esirgemeyen
sevgili aileme...

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hayata geçirilmesinde bilgi, tecrübe ve desteğini benden esirgemeyip, her adımda bana büyük bir özenle yol gösteren saygıdeğer ve kıymetli hocam Prof. Dr. Salim YÜCE'ye, beni yaşamımın her aşamasında büyük bir fedakârlıkla destekleyen sevgili aileme ve arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

İpek AKKILINÇ

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ vii

ŞEKİL LİSTESİ ix

TABLO LİSTESİ x

ÖZET xi

ABSTRACT xii

1 GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1

1.2 Tezin Amacı 3

1.3 Orjinal Katkı 3

2 TEMEL KAVRAMLAR 4

2.1 $\mathbb{R}^4$ Reel Vektör Uzayında İç Çarpım 4

2.2 $\mathbb{R}^4$ Reel Vektör Uzayında Vektörel Çarpım 5

2.2.1 Vektörel Çarpımın Özellikleri 5

2.3 $\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayında Eğriler Teorisi 6

2.3.1 Hız Vektörü 6

2.3.2 Skaler Hız Fonksiyonu ve Skaler Hız 6

2.3.3 Serret-Frenet Vektörleri, Eğrilikleri ve Formülleri 7

3 $\mathbb{E}^4$ ÖKLİD UZAYINDA HİPERYÜZEYLER 9

3.1 Kapalı Denklem Yardımıyla Yüzeyin Tanımı 9

3.2 Kapalı Denklemi ile Verilen Yüzeyin Birim Normal Vektör Alanı 9

3.3 $\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayında Yüzey Tanımı 9

3.4 Parametrik Denklemi ile Verilen Yüzeyin Birim Normal Vektör Alanı . . 10

3.5 Temel Formlar 10

3.6 Şekil Operatörü (Weingarten Dönüşümü) 11

3.6.1 Şekil Operatörü Matrisinin Hesabı 12

3.7 Gauss Eğriliği 15

3.8 Ortalama Eğrilik 16

4 ÖKLİD UZAYINDA ÖTELEME HİPERYÜZEYLERİ **17**
4.1 $\mathbb{E}^n$ Öklid Uzayında Birim Hızlı Olmayan Düzlemsel Eğriler Tarafından Üretilen Öteleme Hiperyüzeyleri 17
4.1.1 $\mathbb{E}^n$ Öklid Uzayında $(n-1)$ Parametreli Öteleme Hiperyüzeyleri 17
4.1.2 $\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayında Öteleme Hiperyüzeyleri 19
4.1.3 $\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayında 2 Parametreli Öteleme Yüzeyleri 24
4.1.4 $\mathbb{E}^3$ Öklid Uzayında Öteleme Yüzeyleri 30
4.2 $\mathbb{E}^3$ Öklid Uzayında Birim Hızlı, Düzlemsel Olmayan Eğriler Tarafından Üretilen Öteleme Yüzeyleri 38
4.2.1 $\mathbb{E}^3$ Öklid Uzayında Öteleme Yüzeyleri 38

5 $\mathbb{E}^4$ ÖKLİD UZAYINDA ÖTELEME HİPERYÜZEYLERİ **42**
5.1 $\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayında Birim Hızlı, Düzlemsel Olmayan Eğriler Tarafından Üretilen Öteleme Hiperyüzeyleri 42
5.1.1 Birim Normal Vektör Alanı 43
5.1.2 Temel Formlar 44
5.1.3 Şekil Operatörü 45
5.1.4 Gauss Eğriliği 46
5.1.5 Ortalama Eğrilik 47

6 SONUÇ VE ÖNERİLER **57**

KAYNAKÇA **58**

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR **60**

SİMGE LİSTESİ

M^{n-1}	$(n-1)$ boyutlu hiperyüzey
M^3	3 boyutlu hiperyüzey
$\mathbb{R}^4$	4 boyutlu standart reel vektör uzayı
$\mathbb{E}^4$	4 boyutlu Öklid uzayı
T_α	α eğrisinin teğet vektörü
N_α	α eğrisinin asli normal vektörü
$k_{1\alpha}$	α eğrisinin birinci eğriliği
$\sigma_{\alpha\beta}$	α ve β eğrilerinin teğet vektörleri arasındaki açı
$\sigma_{\alpha\gamma}$	α ve γ eğrilerinin teğet vektörleri arasındaki açı
$\sigma_{\beta\gamma}$	β ve γ eğrilerinin teğet vektörleri arasındaki açı
T_β	β eğrisinin teğet vektörü
N_β	β eğrisinin asli normal vektörü
$k_{1\beta}$	β eğrisinin birinci eğriliği
T_γ	γ eğrisinin teğet vektörü
N_γ	γ eğrisinin asli normal vektörü
$k_{1\gamma}$	γ eğrisinin birinci eğriliği
N	Birim normal vektör alanı
θ_α	Birim normal vektör alanı ile α eğrisinin asli normali arasındaki açı
θ_β	Birim normal vektör alanı ile β eğrisinin asli normali arasındaki açı
θ_γ	Birim normal vektör alanı ile γ eğrisinin asli normali arasındaki açı
I	Birinci temel form
ϕ_{ij}	Birinci temel form katsayıları
$\mathbf{I}$	Birinci temel form katsayılarının oluşturduğu matris

K	Gauss eğriliği
$\langle , \rangle$	İç çarpım fonksiyonu
II	İkinci temel form
φ_{ij}	İkinci temel form katsayıları
II	İkinci temel form katsayılarının oluşturduğu matris
$\chi\left(M^3\right)$	M^3 üzerindeki teğet vektör alanlarının kümesi
$\mathbb{E}^n$	n boyutlu Öklid uzayı
$\|\|$	Norm
H	Ortalama eğrilik
D	Riemann konneksiyonu
S	Şekil operatörü
$\otimes$	Vektörel çarpım

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1.1 DZ Bank Cam Tavanı, Berlin 1
Şekil 4.1 Yumurta kutusu öteleme yüzeyi 34
Şekil 4.2 Hiperbolik paraboloid öteleme yüzeyi 36

TABLO LİSTESİ

Tablo 1.1 Öklid uzayında öteleme hiperyüzeyleri 2

ÖZET

$\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayında Öteleme Hiperyüzeyleri

İpek AKKILINÇ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Salim YÜCE

Bu tez 6 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmış olup bu bölümde literatür özeti, tezin amacı ve orijinal katkı verilmiştir. İkinci bölümde, tezin bütünü için kullanılacak temel kavramlar, tanımlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde 4-boyutlu Öklid uzayında hiperyüzey tanımı ve temel özellikleri verilerek hiperyüzeylerin geometrik özelliklerinden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde ise n-boyutlu Öklid uzayında farklı parametrelerdeki öteleme hiperyüzeyleri ele alınmıştır.

Beşinci bölüm tezin orjinal kısmını oluşturmaktadır.

Beşinci bölümde, 4-boyutlu Öklid uzayında üç parametreli öteleme hiperyüzeyleri parametreleri farklı ve birim hızlı üç eğrinin toplamı olarak elde edilen hiperyüzeyler olarak tanımlanmıştır. Bu eğrilere hiperyüzeyin üreteç eğrileri adı verilmektedir. Bu hiperyüzeylerin birim normal vektör alanı, temel formları, şekil operatörü matrisi, Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği gibi geometrik özellikleri incelenmiştir. Son bölüm olan altıncı bölümde ise orijinal bölümden elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Öteleme hiperyüzeyi, 4-boyutlu Öklid uzayı, şekil operatörü, temel form, Gauss eğriliği

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

Translation Hypersurfaces in Euclidean 4-Space

İpek AKKILINÇ

Department of Mathematics
Master of Science Thesis

Advisor: Prof. Dr. Salim YÜCE

This thesis consists of six chapters.

The first chapter is devoted to the introduction, and in this chapter, the summary of the literature, objective of the thesis and the original contribution are given. In the second chapter, basic concepts, definitions and theorems to be used for the whole thesis are given. In the third chapter, the definition of hypersurface in Euclidean 4-space and its basic properties are given and geometric properties of hypersurfaces are mentioned. In the fourth chapter, translation hypersurfaces with different parameters in n-dimensional Euclidean space are discussed.

The fifth chapter constitutes the original part of the thesis.

In the fifth chapter, three-parameter translation hypersurfaces in Euclidean 4-space are defined as hypersurfaces obtained as the sum of three curves with different parameters and unit speed. The curves included here are called the generator curves of the hypersurface. Geometric properties of these hypersurfaces are examined. In the last chapter, the sixth chapter, the results obtained from the original chapter are included.

Keywords: Translation hypersurface, Euclidean 4-space, shape operator, fundamental form, Gaussian curvature

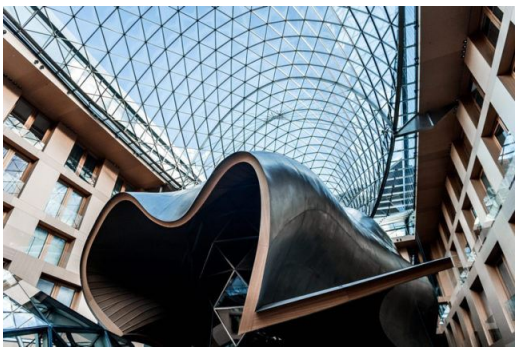
1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

3-boyutlu Öklid uzayında Öteleme yüzeyleri ilk olarak 1835 yılında Heinrich Ferdinand Scherk tarafından ortaya atılmış olup Heinrich kendi adıyla nitelendirdiği Scherk yüzeyinin tek minimal öteleme yüzeyi olduğunu göstermiştir [1]. Daha sonraları öteleme yüzeyleri farklı boyutlu uzaylarda farklı açılardan ele alınarak birçok geometrici tarafından incelenmiştir [2, 3].

Öncelikle 3-boyutlu Öklid uzayında öteleme yüzeyleri üzerine çalışmalar yapılmış [4–6] daha sonra bu çalışmalar genelleştirilerek 4-boyuta ve n-boyuta kadar taşınmıştır [3, 7]. Ayrıca Öklid dışı Geometride de (özellikle Lorentz-Minkowski uzayı ve Galile uzayı olmak üzere) daha birçok çalışma mevcuttur [8–12]. Yapılan araştırmalar arasında minimal öteleme yüzeyleri [13, 14], afin öteleme yüzeyleri [15–17], Weingarten öteleme yüzeyleri [18, 19] ve sabit eğrilikli öteleme yüzeyleri [11, 20] gibi çeşitli çalışmalar yer almaktadır.

Günümüzde öteleme yüzeyleri genellikle mimari alanda dizayn amaçlı kullanılmaktadır. Bunun en güzel örneklerinden biri olarak Almanya'nın Berlin şehrinde yer alan DZ Bank adlı bankanın cam tavanının tasarımı verilebilir [21]. Ek olarak; silindir, eliptik paraboloid, yumurta kutusu yüzeyi ve helikoid yüzeyi öteleme yüzeyi örneklerinden bazılarıdır.



Şekil 1.1 DZ Bank Cam Tavanı, Berlin

Literatürde $\mathbb{E}^n$ Öklid Uzayında farklı parametrelerdeki öteleme yüzeyleri üzerine yapılmış çalışmalar tablo 1.1'de birim hızlı ve düzlemsel olmalarına göre gruplara ayrılmıştır. Mavi renk ile yazılan kısım 5. bölümde ele alınan tezin orjinal kısımdır.

Tablo 1.1 Öklid uzayında öteleme hiperyüzeyleri

	Düzlemsel Eğriler Tarafından Üretilen Öteleme Yüzeyleri	**Düzlemsel Olmayan Eğriler Tarafından Üretilen Öteleme Yüzeyleri**
Birim Hızlı Eğriler Tarafından Üretilen Öteleme Yüzeyleri		1) $\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayında Öteleme Hiperyüzeyleri 2) $\mathbb{E}^3$ Öklid Uzayında Öteleme Yüzeyleri [5, 22].
Birim Hızlı Olmayan Eğriler Tarafından Üretilen Öteleme Yüzeyleri	1) $\mathbb{E}^n$ Öklid Uzayında $(n-1)$ Parametreli Öteleme Hiperyüzeyleri [7, 19]. 2) $\mathbb{E}^n$ Öklid Uzayında 2 Parametreli Öteleme Hiperyüzeyleri [2, 23]. 3) $\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayında Öteleme Hiperyüzeyleri [24]. 4) $\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayında 2 Parametreli Öteleme Yüzeyleri [25]. 5) $\mathbb{E}^3$ Öklid Uzayında Öteleme Yüzeyleri [4, 6].	

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasının amacı; literatürde var olan n-boyutlu Öklid uzayında farklı parametrelerdeki öteleme hiperyüzeylerini araştırmak ve M. Çetin tarafından [5]'de verilen 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı, düzlemsel olmayan iki üreteç eğrisi tarafından üretilen öteleme yüzeylerinin birim normal vektör alanı, temel formları, şekil operatörü ve şekil operatörünün cebirsel değişmezlerini 4-boyutlu Öklid uzayına genelleştirmektir.

1.3 Orjinal Katkı

Yukarıda belirtilen amaç çerçevesinde $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında birim hızlı ve düzlemsel olmayan üç üreteç eğrisi tarafından üretilen öteleme hiperyüzeylerine genelleme yapılması ve bu hiperyüzeylerin birim normal vektör alanı, temel formları, şekil operatörü matrisi, Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik formüllerinin bulunması tezin literatüre kazandırdığı orjinal katkılardır.

2
TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar, tanımlar ve teoremler verilmiştir. Bu bölüm 3 kısımdan oluşmaktadır.
Birinci ve ikinci kısımlarda 4 boyutlu reel vektör uzayında iç çarpım ve vektörel çarpımın tanımı verilerek vektörel çarpımın özelliklerinden bahsedilmiştir.
Üçincü kısımda ise birim hızlı uzay eğrilerinin tanımı verilerek Frenet formüllerinden ve eğriliklerden bahsedilmiştir.

2.1 $\mathbb{R}^4$ Reel Vektör Uzayında İç Çarpım

Tanım 2.1. $\mathbb{R}^4$ reel vektör uzayı olmak üzere $a=(a_i), b=(b_i)\in\mathbb{R}^4$ için

$$\begin{aligned}\langle,\rangle : \mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}\\ (a,b) &\to \langle a,b\rangle = \sum_{i=1}^{4} a_i b_i\end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu fonksiyona $\mathbb{R}^4$ üzerinde *standart iç çarpım* veya *Öklid iç çarpımı* veya *Öklid anlamında Öklid iç çarpım fonksiyonu* adı verilir. $\mathbb{R}^4$ kümesi Öklid iç çarpım fonksiyonu ile birlikte bir iç çarpım uzayı olup *Öklid uzayı* olarak adlandırılır [26].

Teorem 2.1. *$\mathbb{R}^4$ üzerinde $\vec{0}\neq a,b\in\mathbb{R}^4$ vektörleri için*

$$\begin{aligned}\langle,\rangle : \mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}\\ (a,b) &\to \langle a,b\rangle = \|a\|\|b\|cos\theta\end{aligned} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Burada θ; a ve b vektörleri arasındaki açıdır [26].

2.2 $\mathbb{R}^4$ Reel Vektör Uzayında Vektörel Çarpım

Tanım 2.2. $\mathbb{R}^4$ reel vektör uzayında $1 \leq i \leq 4$ olmak üzere $a = (a_i)$, $b = (b_i)$ ve $c = (c_i)$ vektörleri verilsin. a, b ve c vektörlerinin *vektörel çarpımı* $a \otimes b \otimes c$ şeklinde gösterilir ve

$$\begin{aligned} a \otimes b \otimes c &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \\ &= b \otimes c \otimes a = c \otimes a \otimes b \\ &= -(c \otimes b \otimes a) = -(b \otimes a \otimes c) = -(a \otimes c \otimes b) \end{aligned} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\mathbb{R}^4$ uzayının standart bazıdır [27].

2.2.1 Vektörel Çarpımın Özellikleri

Vektörel çarpımın özellikleri aşağıda maddeler halinde verilmiştir [27].

1. $a = (a_i)$, $b = (b_i)$, $c = (c_i) \in \mathbb{R}^4$ vektörleri için vektörel çarpım aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} a \otimes b \otimes c = &\{\langle (a_2, a_3, a_4), (b_2, b_3, b_4) \otimes (c_2, c_3, c_4) \rangle\} e_1 \\ &- \{\langle (a_1, a_3, a_4), (b_1, b_3, b_4) \otimes (c_1, c_3, c_4) \rangle\} e_2 \\ &+ \{\langle (a_1, a_2, a_4), (b_1, b_2, b_4) \otimes (c_1, c_2, c_4) \rangle\} e_3 \\ &- \{\langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \otimes (c_1, c_2, c_3) \rangle\} e_4. \end{aligned} \tag{2.4}$$

2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^4$ için $a \otimes b \otimes c = 0$ olması için gerek ve yeter koşul a, b, c vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır.

3. $\forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}^4$ için $\langle a \otimes b \otimes c, d \otimes e \otimes f \rangle = \begin{vmatrix} \langle a, d \rangle & \langle a, e \rangle & \langle a, f \rangle \\ \langle b, d \rangle & \langle b, e \rangle & \langle b, f \rangle \\ \langle c, d \rangle & \langle c, e \rangle & \langle c, f \rangle \end{vmatrix}$ eşitliği sağlanır.

4. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^4$ için $\Delta = \|a \otimes b \otimes c\|^2 = \begin{vmatrix} \langle a, a \rangle & \langle a, b \rangle & \langle a, c \rangle \\ \langle b, a \rangle & \langle b, b \rangle & \langle b, c \rangle \\ \langle c, a \rangle & \langle c, b \rangle & \langle c, c \rangle \end{vmatrix}$ eşitliği sağlanır.

2.3 $\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayında Eğriler Teorisi

Tanım 2.3. $I \subseteq \mathbb{R}, I = (a,b)$ bir açık alt aralık olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha : I &\to \mathbb{E}^4 \\ t &\to \alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t)\big) \end{aligned} \tag{2.5}$$

diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\alpha(I) \subset \mathbb{E}^4$ alt kümesine $\mathbb{E}^4$ uzayında *diferansiyellenebilir bir eğri (veya parametrik bir eğri)* denir. Ayrıca (I,α) ikilisine eğrinin koordinat komşuluğu, I alt kümesine eğrinin *parametre aralığı* ve $t \in I$ reel sayısına da eğrinin *parametresi* denir. Bir eğri $M = \alpha(I) \subset \mathbb{E}^4$ şeklinde veya kısaca (α) ile gösterilir [28].

2.3.1 Hız Vektörü

Tanım 2.4. $\mathbb{E}^4$ uzayında bir M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin.
$\alpha : I \to \mathbb{E}^4$ fonksiyonunun koordinat fonksiyonları $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t)$ olmak üzere $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t)\big) \subset \mathbb{E}^4$ yazılabilir. Buradan elde edilen

$$\frac{d\alpha}{dt}\Big|_t = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}\Big|_t, \frac{d\alpha_2}{dt}\Big|_t, \frac{d\alpha_3}{dt}\Big|_t, \frac{d\alpha_4}{dt}\Big|_t\right) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \frac{d\alpha_3}{dt}, \frac{d\alpha_4}{dt}\right)\Big|_t \tag{2.6}$$

vektörüne M eğrisinin $\alpha(t) \in M$ noktasındaki *hız vektörü* denir. Diğer bir ifadeyle, $(\alpha'(t), \alpha(t)) = \alpha'(t)\big|_{\alpha(t)} \in T_{\mathbb{E}^4}(\alpha(t))$ vektörüne M eğrisinin $\alpha(t)$ noktasında (I,α) *komşuluğuna göre hız vektörü* denir [28].

2.3.2 Skaler Hız Fonksiyonu ve Skaler Hız

Tanım 2.5. $\mathbb{E}^4$ uzayında bir M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\begin{aligned} \|\alpha'\| : I &\to \mathbb{R} \\ t &\to \|\alpha'(t)\| \end{aligned} \tag{2.7}$$

olarak tanımlı fonksiyona M eğrisinin (I,α) koordinat komşuluğuna göre *skalar hız fonksiyonu* ve $\|\alpha'\| \in \mathbb{R}$ reel sayısına da M eğrisinin (I,α) koordinat komşuluğuna göre $\|\alpha(t)\|$ noktasındaki *skalar hızı* denir. Burada $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t)\big)$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik yazılabilir [28]:

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{d\alpha_i}{dt}\right)^2} \tag{2.8}$$

Tanım 2.6. $\mathbb{E}^4$ uzayında bir M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. M eğrisinin her noktasındaki hız vektörü birim ise yani $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisine *birim hızlı eğri* denir ve $s \in I$ parametresine de eğrinin *yay parametresi* denir [28].

Tanım 2.7. Hız vektörü her noktada sıfırdan farklı olan eğriye *regüler eğri* denir. Yani her t için $\alpha'(t) \neq \vec{0}$ oluyorsa (başka bir ifadeyle $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ ise) α eğrisine *regüler eğri* denir [28].

2.3.3 Serret-Frenet Vektörleri, Eğrilikleri ve Formülleri

Tanım 2.8. $\mathbb{E}^4$ uzayında bir M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\left\{\alpha', \alpha'', \alpha''', \alpha^{(4)}\right\}$ temel çatısından elde edilen $\{T,N,B_1,B_2\}$ ortonormal vektör alanları sistemine M eğrisinin $\alpha(t) \in M$ noktasındaki *Serret-Frenet 4-ayaklısı* veya kısaca *Frenet çatısı* denir. Burada $\alpha(t) \in M$ için T,N,B_1 ve B_2 vektörlerinin her birine $\alpha(t)$ noktasında bir *Frenet vektörü* denir [28].

Teorem 2.2. *$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ eğrisi $s \in I$ bir yay parametresi ile verilsin. α eğrisinin Frenet vektörleri,*

$$T = \alpha', \qquad N = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}, \qquad B_2 = -\frac{\alpha' \otimes \alpha'' \otimes \alpha'''}{\|\alpha' \otimes \alpha'' \otimes \alpha'''\|}, \qquad B_1 = B_2 \otimes T \otimes N \tag{2.9}$$

şeklindedir ve $\{T,N,B_1,B_2\}$ sistemi 4-boyutlu Öklid uzayında bir ortonormal sistemdir [28].

Tanım 2.9. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ birim hızlı eğrisi verilsin. α eğrisinin birinci eğriliği $k_1(s) = \|\alpha''(s)\| = \|T'(s)\|$ şeklinde tanımlanır [28].

Teorem 2.3. *$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ birim hızlı eğrisi verilsin. α eğrisinin ikinci ve üçüncü eğriliği*

$$k_2(s) = \frac{\langle B_1(s), \alpha'''(s)\rangle}{k_1(s)}, \qquad k_3(s) = \frac{\left\langle B_2(s), \alpha^{(4)}(s)\right\rangle}{k_1(s)\,k_2(s)} \tag{2.10}$$

şeklindedir [28].

Teorem 2.4. *$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ birim hızlı eğrisinin $\{T, N, B_1, B_2, k_1, k_2, k_3\}$ Frenet elemanları için*

$$\begin{aligned} T'(s) &= k_1(s) N(s), \\ N'(s) &= -k_1(s) T(s) + k_2(s) B_1(s), \\ B_1'(s) &= -k_2(s) N(s) + k_3(s) B_2(s), \\ B_2'(s) &= -k_3(s) B_1(s) \end{aligned} \tag{2.11}$$

formülleri geçerlidir. Bu formüllere Frenet Formülleri *denir [28].*

Tanım 2.10. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ birim hızlı eğrisi verilsin. $\{T, N, B_1, B_2\}$ ortonormal sistemindeki T vektörüne eğrinin *teğet vektör alanı*; N vektörüne eğrinin *asli normal vektör alanı*; B_1 vektörüne eğrinin *birinci binormal vektör alanı* ve B_2 vektörüne ise eğrinin *ikinci binormal vektör alanı* denir [28].

Not 2.1. k_1 birinci eğriliği, eğrinin teğet doğrusundan; k_2 ikinci eğriliği, eğrinin düzlemsel bir eğriden; k_3 üçüncü eğriliği, eğrinin uzaysal bir eğriden sapmasının bir ölçüsüdür. Bundan dolayı,
$k_1 = 0$ olması için gerek ve yeter koşul α eğrisinin bir doğru olmasıdır.
$k_2 = 0$ olması için gerek ve yeter koşul α eğrisinin düzlemsel olmasıdır.
$k_3 = 0$ olması için gerek ve yeter koşul α eğrisinin $\mathbb{R}^4$ uzayının 3-boyutlu bir alt uzayında yatan bir eğri olmasıdır [28].

3
$\mathbb{E}^4$ ÖKLİD UZAYINDA HİPERYÜZEYLER

Bu bölümde 4 boyutlu Öklid uzayında hiperyüzey tanımı ve temel özellikleri verilerek birim normal vektör alanı, şekil operatörü matrisi, temel formlar, Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik tanımlarından bahsedilmiştir.

3.1 Kapalı Denklem Yardımıyla Yüzeyin Tanımı

Tanım 3.1.

$$M^3 = \left\{ X = \left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) \in \mathbb{E}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} f : U \subset \mathbb{E}^4 \xrightarrow{\text{diferansiyellenebilir}} \mathbb{R} \\ X \to f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = c = \text{sabit} \end{array} \quad \forall P \in M^3, \overrightarrow{\nabla f}\,|_P \neq \vec{0} \right\} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlı kümeye $\mathbb{E}^4$ *uzayında* 3*-boyutlu hiperyüzey* adı verilir [28, 29].

3.2 Kapalı Denklemi ile Verilen Yüzeyin Birim Normal Vektör Alanı

Tanım 3.2. M^3 hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı N olmak üzere

$$N = \mp \frac{\overrightarrow{\nabla f}}{\left\| \overrightarrow{\nabla f} \right\|} \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır [28, 29].

3.3 $\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayında Yüzey Tanımı

Tanım 3.3. Denklem (3.1)'de verilen M^3 hiperyüzeyinin parametrik formu

$$\begin{aligned} &\phi : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{E}^4 \\ &\quad (u, v, w) \to \phi\,(u, v, w) = \left(\phi_1(u, v, w), \phi_2(u, v, w), \phi_3(u, v, w), \phi_4(u, v, w)\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada ϕ_i, $1 \leq i \leq 4$ olmak üzere $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı diferansiyellenebilir reel fonksiyonlardır. $\phi(U) = M^3 \subset \mathbb{E}^4$ alt kümesinin bir hiperyüzey olması için gerek ve yeter koşul $\{\phi_u, \phi_v, \phi_w\}$ sisteminin lineer bağımsız olmasıdır [28, 29].

3.4 Parametrik Denklemi ile Verilen Yüzeyin Birim Normal Vektör Alanı

Tanım 3.4. M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u,v,w) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen bir hiperyüzey olsun. M^3 hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı

$$N(u,v,w) = \frac{\phi_u \otimes \phi_v \otimes \phi_w}{\|\phi_u \otimes \phi_v \otimes \phi_w\|} \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanır [28, 29].

3.5 Temel Formlar

Tanım 3.5. M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir hiperyüzey olmak üzere M^3 hiperyüzeyinin birinci temel formu $\forall X, Y \in \chi(M^3)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} I : \chi(M^3) \times \chi(M^3) &\to C^\infty(M^3, \mathbb{R}) \\ (X,Y) &\to I(X,Y) = \langle X, Y \rangle \end{aligned} \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanır [28, 29].

Teorem 3.1. *M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u,v,w) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen bir hiperyüzey olsun. M^3 hiperyüzeyinin I. temel formu*

$$I = \phi_{11}du^2 + \phi_{22}dv^2 + \phi_{33}dw^2 + 2(\phi_{12}dudv + \phi_{13}dudw + \phi_{23}dvdw) \tag{3.6}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $1 \leq i, j \leq 3$ olmak üzere ϕ_{ij} katsayıları M^3 hiperyüzeyinin I. temel form katsayılarıdır [28, 29].

İspat. M^3 hiperyüzeyi üzerinde $a \leq t \leq b$ için $\alpha(t) = \phi(u(t), v(t), w(t))$ eğrisi verilsin. $\alpha(t)$ eğrisinin yay uzunluk fonksiyonu $s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du$ olmak üzere $\frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\|$ 'dir.

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left\|\alpha'(t)\right\|^2 = \left\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \right\rangle = I\left(\alpha'(t), \alpha'(t)\right) \tag{3.7}$$

ve

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= \frac{d\phi}{dt} = \phi_u \frac{du}{dt} + \phi_v \frac{dv}{dt} + \phi_w \frac{dw}{dt} \\ &= d\phi = \phi_u du + \phi_v dv + \phi_w dw\end{aligned} \tag{3.8}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}I(\alpha'(t), \alpha'(t)) =& I(d\phi, d\phi) = \langle d\phi, d\phi \rangle \\ &= \langle \phi_u du + \phi_v dv + \phi_w dw, \phi_u du + \phi_v dv + \phi_w dw \rangle \\ &= \langle \phi_u, \phi_u \rangle du^2 + \langle \phi_v, \phi_v \rangle dv^2 + \langle \phi_w, \phi_w \rangle dw^2 + \\ &\quad 2\langle \phi_u, \phi_v \rangle dudv + 2\langle \phi_u, \phi_w \rangle dudw + 2\langle \phi_v, \phi_w \rangle dvdw\end{aligned} \tag{3.9}$$

şeklinde elde edilir. O halde, (3.16) eşitlikleri kullanılırsa, M^3 hiperyüzeyinin birinci temel formu

$$I = ds^2 = \phi_{11} du^2 + \phi_{22} dv^2 + \phi_{33} dw^2 + 2(\phi_{12} dudv + \phi_{13} dudw + \phi_{23} dvdw) \tag{3.10}$$

olarak bulunur. ■

Not 3.1. M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u, v, w) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen bir hiperyüzey olmak üzere M^3 hiperyüzeyinin birinci temel form katsayılarına karşılık gelen matrisi

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{12} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{13} & \phi_{23} & \phi_{33} \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

şeklinde ifade edilir [28, 29].

3.6 Şekil Operatörü (Weingarten Dönüşümü)

Tanım 3.6. M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir hiperyüzey olmak üzere M^3 hiperyüzeyinin şekil operatörü (veya Weingarten dönüşümü)

$$\begin{aligned}S : \chi(M^3) &\to \chi(M^3) \\ X &\to S(X) = D_X N\end{aligned} \tag{3.12}$$

şeklinde tanımlanır. Burada D, $\mathbb{E}^4$ uzayında bir Riemann konneksiyon ve $\chi(M^3)$, M^3 hiperyüzeyinin vektör alanları uzayıdır [28, 29].

3.6.1 Şekil Operatörü Matrisinin Hesabı

Aşağıdaki dönüşüm yardımıyla

$$\begin{aligned} \phi : U \subset \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{E}^4 \\ (u,v,w) &\to \phi(u,v,w) \end{aligned} \tag{3.13}$$

$\phi(U) = M^3$ hiperyüzeyi verilsin. $T_{M^3}P = Sp\{\phi_u|_P, \phi_v|_P, \phi_w|_P\}$ ve $\chi(M^3) = Sp\{\phi_u, \phi_v, \phi_w\}$ olmak üzere $S : \chi(M^3) \to \chi(M^3)$ dönüşümünün $\{\phi_u, \phi_v, \phi_w\}$ bazına göre matrisini bulalım:

$$\begin{aligned} S(\phi_u) &= a_{11}\phi_u + a_{21}\phi_v + a_{31}\phi_w, \\ S(\phi_v) &= a_{12}\phi_u + a_{22}\phi_v + a_{32}\phi_w, \\ S(\phi_w) &= a_{13}\phi_u + a_{23}\phi_v + a_{33}\phi_w \end{aligned} \tag{3.14}$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada $1 \leq i,j \leq 3$ olmak üzere $a_{ij} \in \mathbb{R}$'dir. Böylece M^3 hiperyüzeyinin şekil operatörü matrisi

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

şeklinde elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \phi_{11} = \langle \phi_u, \phi_u \rangle, \quad \phi_{12} = \langle \phi_u, \phi_v \rangle, \quad \phi_{13} = \langle \phi_u, \phi_w \rangle, \\ \phi_{22} = \langle \phi_v, \phi_v \rangle, \quad \phi_{23} = \langle \phi_v, \phi_w \rangle, \quad \phi_{33} = \langle \phi_w, \phi_w \rangle \end{aligned} \tag{3.16}$$

olmak üzere (3.14) eşitlikleri sırasıyla ϕ_u, ϕ_v ve ϕ_w ile iç çarpılırsa aşağıdaki lineer denklem sistemleri elde edilir:

$$\begin{cases} \varphi_{11} = \langle S(\phi_u), \phi_u \rangle = a_{11}\phi_{11} + a_{21}\phi_{12} + a_{31}\phi_{13}, \\ \varphi_{12} = \langle S(\phi_u), \phi_v \rangle = a_{11}\phi_{12} + a_{21}\phi_{22} + a_{31}\phi_{23}, \\ \varphi_{13} = \langle S(\phi_u), \phi_w \rangle = a_{11}\phi_{13} + a_{21}\phi_{23} + a_{31}\phi_{33}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_{21} = \langle S(\phi_v), \phi_u \rangle = a_{12}\phi_{11} + a_{22}\phi_{12} + a_{32}\phi_{13}, \\ \varphi_{22} = \langle S(\phi_v), \phi_v \rangle = a_{12}\phi_{12} + a_{22}\phi_{22} + a_{32}\phi_{23}, \\ \varphi_{23} = \langle S(\phi_v), \phi_w \rangle = a_{12}\phi_{13} + a_{22}\phi_{23} + a_{32}\phi_{33}, \end{cases} \tag{3.17}$$

$$\begin{cases} \varphi_{31} = \langle S(\phi_w), \phi_u \rangle = a_{13}\phi_{11} + a_{23}\phi_{12} + a_{33}\phi_{13}, \\ \varphi_{32} = \langle S(\phi_w), \phi_v \rangle = a_{13}\phi_{12} + a_{23}\phi_{22} + a_{33}\phi_{23}, \\ \varphi_{33} = \langle S(\phi_w), \phi_w \rangle = a_{13}\phi_{13} + a_{23}\phi_{23} + a_{33}\phi_{33} \end{cases}$$

$\{\phi_u, \phi_v, \phi_w\}$ sistemi lineer bağımsız olduğundan, (3.16) denkleminden ve vektörel çarpımın 4. özelliğinden katsayılar matrisinin determinantı

$$\Delta = \|\phi_u \otimes \phi_v \otimes \phi_w\|^2 = \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{12} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{13} & \phi_{23} & \phi_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3.18}$$

şeklinde elde edilir. $\Delta \neq 0$ olduğundan bu lineer denklem sistemleri Cramer metoduyla çözülebilir ve çözümü tektir. Daha sonra (3.14), (3.16) ve (3.17) denklemleri kullanılarak M^3 hiperyüzeyinin şekil operatörünün matrisi bulunur [28, 29].

Tanım 3.7. M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir hiperyüzey olmak üzere M^3 hiperyüzeyinin ikinci temel formu $\forall X, Y \in \chi(M^3)$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanır [28, 29]:

$$\begin{aligned} II : \chi(M^3) \times \chi(M^3) &\to C^\infty(M^3, \mathbb{R}) \\ (X, Y) &\to II(X, Y) = \langle S(X), Y \rangle \end{aligned} \tag{3.19}$$

Teorem 3.2. *M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u, v, w) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen bir hiperyüzey olsun. M^3 hiperyüzeyinin II. temel formu*

$$II = \varphi_{11}du^2 + \varphi_{22}dv^2 + \varphi_{33}dw^2 + 2(\varphi_{12}dudv + \varphi_{13}dudw + \varphi_{23}dvdw) \tag{3.20}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $1 \leq i, j \leq 3$ olmak üzere φ_{ij} katsayıları M^3 hiperyüzeyinin II. temel form katsayılarıdır [28, 29].

İspat. M^3 hiperyüzeyi üzerinde $a \leq t \leq b$ için $\alpha(t) = \phi(u(t), v(t), w(t))$ eğrisi verilsin.

$$\begin{aligned} II\left(\alpha'(t), \alpha'(t)\right) =& II(d\phi, d\phi) = \langle S(d\phi), d\phi \rangle \\ &= \langle S(\phi_u du + \phi_v dv + \phi_w dw), \phi_u du + \phi_v dv + \phi_w dw \rangle \\ &= \langle S(\phi_u)du + S(\phi_v)dv + S(\phi_w)dw, \phi_u du + \phi_v dv + \phi_w dw \rangle \\ &= \langle S(\phi_u), \phi_u \rangle du^2 + \langle S(\phi_v), \phi_v \rangle dv^2 + \langle S(\phi_w), \phi_w \rangle dw^2 + \\ &\quad 2\langle S(\phi_u), \phi_v \rangle dudv + 2\langle S(\phi_u), \phi_w \rangle dudw + 2\langle S(\phi_v), \phi_w \rangle dvdw \end{aligned} \tag{3.21}$$

elde edilir. (3.17) eşitlikleri kullanılırsa M^3 hiperyüzeyinin ikinci temel formu

$$II = \varphi_{11}du^2 + \varphi_{22}dv^2 + \varphi_{33}dw^2 + 2(\varphi_{12}dudv + \varphi_{13}dudw + \varphi_{23}dvdw) \tag{3.22}$$

olarak bulunur. ■

Not 3.2. M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u,v,w) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen bir hiperyüzey olmak üzere M^3 hiperyüzeyinin ikinci temel form katsayılarına karşılık gelen matrisi

$$\mathbf{II} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{13} & \varphi_{23} & \varphi_{33} \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

şeklinde ifade edilir [28, 29].

Sonuç 3.1. *M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u,v,w) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen bir hiperyüzey olmak üzere (3.17) eşitliklerinden (3.11) ve (3.23) matrisleri kullanılarak*

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{13} & \varphi_{23} & \varphi_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{12} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{13} & \phi_{23} & \phi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

eşitliği elde edilir. Buradan M^3 hiperyüzeyinin şekil operatörü matrisi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{12} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{13} & \phi_{23} & \phi_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{13} & \varphi_{23} & \varphi_{33} \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

veya aşağıdaki şekilde yazılabilir [28, 29]:

$$S = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{II} \tag{3.26}$$

Teorem 3.3. *M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u,v,w) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen bir hiperyüzey olsun. D, $\mathbb{E}^4$ uzayında bir Reimann konneksiyon ve N, M^3 hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı olmak üzere*

$$\begin{aligned} S(\phi_u) &= D_{\phi_u} N = N_u, \\ S(\phi_v) &= D_{\phi_v} N = N_v, \\ S(\phi_w) &= D_{\phi_w} N = N_w \end{aligned} \tag{3.27}$$

eşitlikleri sağlanır [28, 29].

İspat. α, M^3 hiperyüzeyi üzerinde bir eğri ve $\phi(u, v_0, w_0) = \alpha(u)$ olmak üzere

$$S(\phi_u) = S\left(\alpha'(u)\right) = D_{\alpha'(u)} N = (N \circ \alpha)'(u) = N_u \tag{3.28}$$

bulunur.

Benzer şekilde $\phi(u_0, v, w_0) = \beta(v)$ ve $\phi(u_0, v_0, w) = \gamma(w)$ eğrileri için

$$\begin{aligned} S(\phi_v) &= N_v, \\ S(\phi_w) &= N_w \end{aligned} \tag{3.29}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.4. *M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u, v, w) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen bir hiperyüzey olsun. N, M^3 hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı ve α, M^3 hiperyüzeyi üzerinde bir eğri olmak üzere*

$$\langle \alpha'', N \rangle = -\langle S(\alpha'), \alpha' \rangle \tag{3.30}$$

eşitliği sağlanır [28, 29].

İspat. $\alpha'(t)$ vektörü, $\forall \alpha(t) \in M^3$ için, M^3 hiperyüzeyine daima teğet olduğundan

$$\langle \alpha'(t), N \rangle = 0 \tag{3.31}$$

yazılabilir. Buradan t parametresine göre türev alınırsa

$$\langle \alpha''(t), N \rangle + \langle \alpha'(t), N' \rangle = 0 \tag{3.32}$$

bulunur. Teorem 3.3 gereğince

$$\langle \alpha''(t), N \rangle = -\langle \alpha'(t), N' \rangle = -\langle S(\alpha'(t)), \alpha'(t) \rangle \tag{3.33}$$

elde edilir. ■

3.7 Gauss Eğriliği

Tanım 3.8. M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir hiperyüzey olsun.

$$\begin{aligned} K : M^3 &\to \mathbb{R} \\ P &\to K(P) = \det S(P) \end{aligned} \tag{3.34}$$

şeklinde ifade edilen fonksiyona M^3 hiperyüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu ve $K(P) \in \mathbb{R}$ sayısına da M^3 hiperyüzeyinin P noktasındaki *Gauss eğriliği* adı verilir [28, 29].

Not 3.3. M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u, v, w) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen bir hiperyüzey olmak üzere M^3 hiperyüzeyinin Gauss eğriliği aşağıdaki şekilde yazılabilir [28,29]:

$$K = \det S = \frac{\det \mathbf{II}}{\det \mathbf{I}} \tag{3.35}$$

3.8 Ortalama Eğrilik

Tanım 3.9. M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir hiperyüzey olsun.

$$\begin{aligned} H : M^3 &\to \mathbb{R} \\ P &\to H(P) = \frac{1}{3} izS(P) \end{aligned} \tag{3.36}$$

şeklinde ifade edilen H fonksiyonuna M^3 hiperyüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(P) \in \mathbb{R}$ sayısına da M^3 hiperyüzeyinin P noktasındaki *ortalama eğriliği* adı verilir [28, 29].

Tanım 3.10. M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir hiperyüzey olsun. S, $P \in M^3$ noktasındaki şekil operatörü olmak üzere $X_P, Y_P \in T_{M^3}(P)$ için,

$$\langle S(X_P), Y_P \rangle = 0 \tag{3.37}$$

ise bu iki tanjant vektör *eşleniktir* denir. Bir $X_P \neq \vec{0}$ tanjant vektörü için,

$$\langle S(X_P), X_P \rangle = 0 \tag{3.38}$$

ise X_P doğrultusuna, M^3 hiperyüzeyinin P noktasındaki bir *asimptotik doğrultusu* adı verilir. Her noktasındaki teğet vektörü asimptotik olan eğriye ise M^3 hiperyüzeyi üzerinde bir *asimptotik çizgidir* denir [28, 29].

Teorem 3.5. *M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir hiperyüzey olmak üzere α, M^3 hiperyüzeyi üzerinde bir eğri ve N, M^3 hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı olsun. α eğrisinin bir asimptotik çizgi olması için gerek ve yeter koşul $\langle \alpha'', N \rangle = 0$ olmasıdır [28, 29].*

İspat. ($\Rightarrow$): α eğrisi M^3 hiperyüzeyi üzerinde asimptotik çizgi olsun. $\langle \alpha'', N \rangle = 0$ olduğunu kanıtlayalım. α eğrisi asimptotik çizgi olduğundan $\langle S(\alpha'), \alpha' \rangle = 0$ dır. Teorem 3.4 gereğince ve $\langle S(\alpha'), \alpha' \rangle = 0$ olduğundan $\langle \alpha'', N \rangle = 0$ elde edilir.

($\Leftarrow$): $\langle \alpha'', N \rangle = 0$ olsun. α eğrisinin asimptotik çizgi olduğunu kanıtlayalım. Teorem 3.4 gereğince ve $\langle \alpha'', N \rangle = 0$ olduğundan $\langle S(\alpha'), \alpha' \rangle = 0$ bulunur. O halde α eğrisi M^3 hiperyüzeyi üzerinde bir asimptotik çizgidir. ■

Tanım 3.11. M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir hiperyüzey ve M^3 hiperyüzeyinin ortalama eğriliği H olmak üzere $H = 0$ ise hiperyüzeye *Minimal hiperyüzey* adı verilir [28, 29].

4
ÖKLİD UZAYINDA ÖTELEME HİPERYÜZEYLERİ

Bu bölümde literatürde var olan çalışmalar ele alınarak n boyutlu Öklid uzayında farklı parametrelerdeki öteleme hiperyüzeylerinin geometrik özellikleri incelenmiştir. Alt başlıklar öteleme hiperyüzeyini oluşturan eğrilerin düzlemsel ve birim hızlı olma durumlarına göre ayrılmıştır.

4.1 $\mathbb{E}^n$ Öklid Uzayında Birim Hızlı Olmayan Düzlemsel Eğriler Tarafından Üretilen Öteleme Hiperyüzeyleri

Bu kısımda n boyutlu Öklid uzayında $(n-1)$ parametreli birim hızlı olmayan eğriler tarafından üretilen öteleme hiperyüzeylerinin tanımı verilerek geometrik özelliklerinden bahsedilmiştir.

4.1.1 $\mathbb{E}^n$ Öklid Uzayında $(n-1)$ Parametreli Öteleme Hiperyüzeyleri

Tanım 4.1. U, $\mathbb{E}^{n-1}$ Öklid uzayında açık küme, $1 \leq i \leq n-1$ için $f_i : U \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve $\alpha_i : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ eğrileri $x_i x_n$ düzleminde bulunan birim hızlı olmayan düzlemsel üreteç eğrileri olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{E}^{n-1} &\to \mathbb{E}^n \\ (u_1, ..., u_{n-1}) &\to \phi(u_1, ..., u_{n-1}) \\ &= \alpha_1(u_1) + ... + \alpha_{n-1}(u_{n-1}) \\ &= \underbrace{\big(u_1, 0, ..., 0, f_1(u_1)\big)}_{\{\text{Sıralı n-li}\}} + \big(0, u_2, ..., 0, f_2(u_2)\big) + ... + \big(0, 0, ..., u_{n-1}, f_{n-1}(u_{n-1})\big) \\ &= \big(u_1, u_2, ..., u_{n-1}, f_1(u_1) + f_2(u_2) + ... + f_{n-1}(u_{n-1})\big) \end{aligned} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanan $\phi(u_1, ..., u_{n-1}) = M^{n-1}$ yüzeyine $\mathbb{E}^n$ uzayında $(n-1)$ *parametreli öteleme hiperyüzeyi* denir [7, 19].

Teorem 4.1. *M^{n-1}, $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında $\phi(u_1,...,u_{n-1}) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme hiperyüzeyi olsun. M^{n-1} öteleme hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı aşağıdaki şekildedir [7, 19]:*

$$N = \frac{\left(-f_1', ..., -f_{n-1}', 1\right)}{\sqrt{1 + {f_1'}^2 + ... + {f_{n-1}'}^2}} \tag{4.2}$$

Teorem 4.2. *M^{n-1}, $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında $\phi(u_1,...,u_{n-1}) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme hiperyüzeyi olsun. M^{n-1} öteleme hiperyüzeyinin I. temel formu*

$$I = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\delta_{ij} + f_i' f_j'\right) du_i du_j \tag{4.3}$$

şeklindedir [19].

Teorem 4.3. *M^{n-1}, $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında $\phi(u_1,...,u_{n-1}) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme hiperyüzeyi olsun. M^{n-1} öteleme hiperyüzeyinin II. temel formu*

$$II = \sum_{i=1}^{n-1} -\frac{f_i''}{\sqrt{1 + {f_1'}^2 + ... + {f_{n-1}'}^2}} du_i^2 \tag{4.4}$$

şeklindedir [19].

Teorem 4.4. *M^{n-1}, $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında $\phi(u_1,...,u_{n-1}) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme hiperyüzeyi olsun. $1 \le i, j \le n-1$ için M^{n-1} öteleme hiperyüzeyinin şekil operatörü matrisi $S = \left(a_{ij}\right)$ olmak üzere*

$$a_{ij} = \frac{f_i''}{\sqrt{1 + {f_1'}^2 + ... + {f_{n-1}'}^2}} - \frac{f_i'' f_i' f_j'}{\left(1 + {f_1'}^2 + ... + {f_{n-1}'}^2\right)^{3/2}} \tag{4.5}$$

şeklinde ifade edilir [19].

Teorem 4.5. *M^{n-1}, $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında $\phi(u_1,...,u_{n-1}) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme hiperyüzeyi olsun. M^{n-1} öteleme hiperyüzeyinin Gauss eğriliği*

$$K = \frac{f_1'' f_2'' ... f_{n-1}''}{\left(1 + {f_1'}^2 + ... + {f_{n-1}'}^2\right)^{(n+1)/2}} \tag{4.6}$$

şeklindedir [19].

Teorem 4.6. *M^{n-1}, $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında $\phi(u_1,...,u_{n-1}) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme hiperyüzeyi olsun. M^{n-1} öteleme hiperyüzeyinin ortalama eğriliği*

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}\left(1 + \sum_{j\neq i}^{n-1} {f_j'}^2\right) f_i''}{(n-1)\left(1 + {f_1'}^2 + ... + {f_{n-1}'}^2\right)^{3/2}} \tag{4.7}$$

şeklindedir [7, 19].

4.1.2 $\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayında Öteleme Hiperyüzeyleri

Tanım 4.2. U, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında açık küme, $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}$ ve $h : U \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ ve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ eğrileri $1 \leq i \leq 3$ için $x_i x_4$ düzleminde bulunan birim hızlı olmayan düzlemsel üreteç eğrileri olmak üzere

$$\begin{aligned} &\phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^4 \\ &(u,v,w) \to \phi(u,v,w) = \alpha(u) + \beta(v) + \gamma(w) \\ &\qquad = \big(u,0,0,f(u)\big) + \big(0,v,0,g(v)\big) + \big(0,0,w,h(w)\big) \\ &\qquad = \big(u,v,w,f(u) + g(v) + h(w)\big) \end{aligned} \tag{4.8}$$

şeklinde tanımlanan $\phi(u,v,w) = M^3$ yüzeyine $\mathbb{E}^4$ uzayında *öteleme hiperyüzeyi* denir [24].

Teorem 4.7. *M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u,v) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme hiperyüzeyi olsun. M^3 öteleme hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı*

$$N = \frac{1}{\sqrt{W}}\big(f'(u), g'(v), h'(w), -1\big) \tag{4.9}$$

şeklindedir. Burada $W = 1 + \big(f'(u)\big)^2 + \big(g'(v)\big)^2 + \big(h'(w)\big)^2$ şeklindedir [24].

İspat. $\chi\big(M^3\big) = Sp\{\phi(u), \phi(v), \phi(w)\}$ olmak üzere M^3 öteleme hiperyüzeyinin teğet vektörleri

$$\begin{aligned} \phi_u &= \alpha'(u) = \big(1,0,0,f'(u)\big), \\ \phi_v &= \beta'(v) = \big(0,1,0,g'(v)\big), \\ \phi_w &= \gamma'(v) = \big(0,0,1,h'(w)\big) \end{aligned} \tag{4.10}$$

şeklindedir. $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir hiperyüzeyin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{\phi_u \otimes \phi_v \otimes \phi_w}{\|\phi_u \otimes \phi_v \otimes \phi_w\|} \tag{4.11}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan

$$\begin{aligned} \phi_u \otimes \phi_v \otimes \phi_w &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 0 & 0 & f'(u) \\ 0 & 1 & 0 & g'(v) \\ 0 & 0 & 1 & h'(w) \end{vmatrix} \\ &= \big(f'(u), g'(v), h'(w), -1\big) \end{aligned} \tag{4.12}$$

ve

$$\|\phi_u \otimes \phi_v \otimes \phi_w\| = \sqrt{1 + (f'(u))^2 + (g'(v))^2 + (h'(w))^2} = W^2 \tag{4.13}$$

eşitlikleri (4.11) denkleminde yerine yazılırsa

M^3 öteleme hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{1}{\sqrt{W}}\left(f'(u), g'(v), h'(w), -1\right) \tag{4.14}$$

şeklinde elde edilir. ■

Teorem 4.8. *M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u,v,w) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme hiperyüzeyi olsun. M^3 öteleme hiperyüzeyinin birinci temel formu*

$$\begin{aligned} I = &\left(1+\left(f'(u)\right)^2\right)du^2 + \left(1+\left(g'(v)\right)^2\right)dv^2 + \left(1+\left(h'(w)\right)^2\right)dw^2 \\ &+ 2f'(u)\,g'(v)\,dudv + 2f'(u)h'(w)\,dudw + 2g'(v)h'(w)\,dvdw \end{aligned} \tag{4.15}$$

şeklindedir [24].

İspat. $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir hiperyüzeyin birinci temel formu

$$I = \phi_{11}du^2 + \phi_{22}dv^2 + \phi_{33}dw^2 + 2\phi_{12}dudv + 2\phi_{13}dudw + 2\phi_{23}dvdw \tag{4.16}$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir yüzeyin birinci temel form katsayıları $1 \le i,j \le 3$ olmak üzere

$$\phi_{ij} = \left\langle \phi_i, \phi_j \right\rangle \tag{4.17}$$

şeklinde tanımlandığından M^3 hiperyüzeyinin birinci temel form katsayıları (4.10) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= \langle \phi_u, \phi_u \rangle = 1 + \left(f'(u)\right)^2, & \phi_{12} &= \langle \phi_u, \phi_v \rangle = f'(u)\,g'(v), \\ \phi_{22} &= \langle \phi_v, \phi_v \rangle = 1 + \left(g'(v)\right)^2, & \phi_{13} &= \langle \phi_u, \phi_w \rangle = f'(u)h'(w), \\ \phi_{33} &= \langle \phi_w, \phi_w \rangle = 1 + \left(h'(w)\right)^2, & \phi_{23} &= \langle \phi_v, \phi_w \rangle = g'(v)h'(w) \end{aligned} \tag{4.18}$$

şeklinde elde edilir. Buradan yazılırsa M^3 öteleme hiperyüzeyinin birinci temel formu

$$\begin{aligned} I = &\left(1+\left(f'(u)\right)^2\right)du^2 + \left(1+\left(g'(v)\right)^2\right)dv^2 + \left(1+\left(h'(w)\right)^2\right)dw^2 \\ &+ 2f'(u)\,g'(v)\,dudv + 2f'(u)h'(w)\,dudw + 2g'(v)h'(w)\,dvdw \end{aligned} \tag{4.19}$$

şeklinde elde edilir. ■

Teorem 4.9. *M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u,v,w) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme hiperyüzeyi olsun. M^3 öteleme hiperyüzeyinin ikinci temel formu*

$$II = -\frac{f''(u)}{\sqrt{W}}du^2 - \frac{g''(v)}{\sqrt{W}}dv^2 - \frac{h''(w)}{\sqrt{W}}dw^2 \tag{4.20}$$

şeklindedir.

İspat. $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir hiperyüzeyin ikinci temel formu

$$II = \varphi_{11}du^2 + \varphi_{22}dv^2 + \varphi_{33}dw^2 + 2\varphi_{12}dudv + 2\varphi_{13}dudw + 2\varphi_{23}dvdw \tag{4.21}$$

şeklinde tanımlanır. M^3 hiperyüzeyinin ikinci temel form katsayıları ise

$$\varphi_{ij} = -\left\langle \phi_{ij}, N \right\rangle \tag{4.22}$$

şeklinde tanımlandığından

$$\begin{aligned} \phi_{uu} &= \alpha''(u) = \left(1,0,0,f''(u)\right), & \phi_{uv} &= \phi_{vu} = 0, \\ \phi_{vv} &= \beta''(v) = \left(0,1,0,g''(v)\right), & \phi_{uw} &= \phi_{wu} = 0, \\ \phi_{ww} &= \gamma''(w) = \left(0,0,1,h''(w)\right), & \phi_{vw} &= \phi_{wv} = 0 \end{aligned} \tag{4.23}$$

eşitlikleri ve (4.9) denklemi kullanılarak M^3 hiperyüzeyinin ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= -\langle N, \phi_{uu} \rangle = \frac{-f''(u)}{\sqrt{W}} & \varphi_{12} &= -\langle N, \phi_{uv} \rangle = 0, \\ \varphi_{22} &= -\langle N, \phi_{vv} \rangle = \frac{-g''(v)}{\sqrt{W}} & \varphi_{13} &= -\langle N, \phi_{uw} \rangle = 0, \\ \varphi_{33} &= -\langle N, \phi_{ww} \rangle = \frac{-h''(w)}{\sqrt{W}} & \varphi_{23} &= -\langle N, \phi_{vw} \rangle = 0 \end{aligned} \tag{4.24}$$

şeklinde elde edilir. Buradan (4.24) eşitlikleri (4.21) denkleminde yerine yazılırsa M^3 öteleme hiperyüzeyinin ikinci temel formu

$$II = -\frac{f''(u)}{\sqrt{W}}du^2 - \frac{g''(v)}{\sqrt{W}}dv^2 - \frac{h''(w)}{\sqrt{W}}dw^2 \tag{4.25}$$

şeklinde elde edilir. ■

Teorem 4.10. *M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u,v,w) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme hiperyüzeyi olsun. M^3 öteleme hiperyüzeyinin şekil operatörü matrisi*

$$S = \frac{1}{W^{3/2}} \begin{pmatrix} -f''(u)\left(1+(g'(v))^2+(h'(w))^2\right) & f'(u)g'(v)g''(u) & f'(u)h'(w)h''(w) \\ f'(u)g'(v)f''(u) & -g''(v)\left(1+(f'(u))^2+(h'(w))^2\right) & g'(v)h'(w)h''(w) \\ f'(u)h'(w)f''(u) & g'(v)h'(w)g''(v) & -h''(w)\left(1+(f'(u))^2+(g'(v))^2\right) \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

şeklindedir [30].

İspat. $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir hiperyüzeyin şekil operatörü matrisi

$$S = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{II} \tag{4.27}$$

denklemi ile tanımlanır. Burada $\mathbf{I}^{-1}$ birinci temel form katsayılarından oluşan matrisin tersi ve **II** ise ikinci temel form katsayılarından oluşan matristir. Birinci temel form katsayılarından oluşan matris

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1+\left(f'(u)\right)^2 & f'(u)\,g'(v) & f'(u)\,h'(w) \\ f'(u)\,g'(v) & 1+\left(g'(v)\right)^2 & g'(v)\,h'(w) \\ f'(u)\,h'(w) & g'(v)\,h'(w) & 1+\left(h'(w)\right)^2 \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

olmak üzere bu matrisin tersi

$$\mathbf{I}^{-1} = \frac{1}{W}\begin{pmatrix} 1+(g'(v))^2+(h'(w))^2 & -f'(u)\,g'(v) & -f'(u)\,h'(w) \\ -f'(u)\,g'(v) & 1+(f'(u))^2+(h'(w))^2 & -g'(v)\,h'(w) \\ -f'(u)\,h'(w) & -g'(v)\,h'(w) & 1+(f'(u))^2+(g'(v))^2 \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

şeklinde bulunur. İkinci temel form katsayıları ise

$$\varphi_{ij} = -\left\langle \phi_{ij}, N \right\rangle \tag{4.30}$$

şeklinde tanımlandığından

$$\begin{aligned} \phi_{uu} &= \alpha''(u) = \left(1,0,0,f''(u)\right), & \phi_{uv} &= \phi_{vu} = 0, \\ \phi_{vv} &= \beta''(v) = \left(0,1,0,g''(v)\right), & \phi_{uw} &= \phi_{wu} = 0, \\ \phi_{ww} &= \gamma''(w) = \left(0,0,1,h''(w)\right), & \phi_{vw} &= \phi_{wv} = 0 \end{aligned} \tag{4.31}$$

eşitlikleri ve (4.30) denklemi kullanılarak M^3 hiperyüzeyinin ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= -\langle N, \phi_{uu}\rangle = \frac{-f''(u)}{\sqrt{W}} & \varphi_{12} &= -\langle N, \phi_{uv}\rangle = 0, \\ \varphi_{22} &= -\langle N, \phi_{vv}\rangle = \frac{-g''(v)}{\sqrt{W}} & \varphi_{13} &= -\langle N, \phi_{uw}\rangle = 0, \\ \varphi_{33} &= -\langle N, \phi_{ww}\rangle = \frac{-h''(w)}{\sqrt{W}} & \varphi_{23} &= -\langle N, \phi_{vw}\rangle = 0 \end{aligned} \tag{4.32}$$

şeklinde elde edilir. M^3 hiperyüzeyinin ikinci temel form katsayılarının oluşturduğu matris

$$\mathbf{II} = \frac{1}{\sqrt{W}}\begin{pmatrix} -f''(u) & 0 & 0 \\ 0 & -g''(v) & 0 \\ 0 & 0 & -h''(w) \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

şeklindedir.

O halde (4.27) denklemi yardımıyla M^3 öteleme hiperyüzeyinin şekil operatörü matrisi

$$S=\frac{1}{W^{3/2}}\begin{pmatrix} 1+(g'(v))^2+(h'(w))^2 & -f'(u)g'(v) & -f'(u)h'(w) \\ -f'(u)g'(v) & 1+(f'(u))^2+(h'(w))^2 & -g'(v)h'(w) \\ -f'(u)h'(w) & -g'(v)h'(w) & 1+(f'(u))^2+(g'(v))^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -f''(u) & 0 & 0 \\ 0 & -g''(v) & 0 \\ 0 & 0 & -h''(w) \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

$$=\frac{1}{W^{3/2}}\begin{pmatrix} -f''(u)\left(1+(g'(v))^2+(h'(w))^2\right) & f'(u)g'(v)g''(u) & f'(u)h'(w)h''(w) \\ f'(u)g'(v)f''(u) & -g''(v)\left(1+(f'(u))^2+(h'(w))^2\right) & g'(v)h'(w)h''(w) \\ f'(u)h'(w)f''(u) & g'(v)h'(w)g''(v) & -h''(w)\left(1+(f'(u))^2+(g'(v))^2\right) \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur. ■

Teorem 4.11. *M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u,v,w)=\phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme hiperyüzeyi olsun. M^3 öteleme hiperyüzeyinin Gauss eğriliği*

$$K=-\frac{f''(u)g''(v)h''(w)}{W^{5/2}} \tag{4.35}$$

şeklindedir.

İspat. $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir hiperyüzeyin Gauss eğriliği

$$K=\det S=\frac{\det \mathbf{II}}{\det \mathbf{I}} \tag{4.36}$$

şeklinde tanımlanır. O halde (4.28) ve (4.33) matrisleri kullanılarak

$$\det \mathbf{I}=1+f'(u)^2+g'(v)^2+h'(w)^2=W \tag{4.37}$$

ve

$$\det \mathbf{II}=-\frac{f''(u)g''(v)h''(w)}{W^{3/2}} \tag{4.38}$$

eşitlikleri bulunur. Bulunan değerler (4.36) denkleminde yerine yazılırsa M^3 öteleme hiperyüzeyinin Gauss eğriliği

$$K=-\frac{f''(u)g''(v)h''(w)}{W^{5/2}} \tag{4.39}$$

şeklinde elde edilir. ■

Teorem 4.12. *M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u,v,w) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme hiperyüzeyi olsun. M^3 öteleme hiperyüzeyinin ortalama eğriliği aşağıdaki şekildedir:*

$$H = \frac{-f''(u)\left(1+(g'(v))^2+(h'(w))^2\right) - g''(v)\left(1+(f'(u))^2+(h'(w))^2\right) - h''(w)\left(1+(f'(u))^2+(g'(v))^2\right)}{3W^{3/2}} \tag{4.40}$$

İspat. $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir hiperyüzeyin ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{3}\text{iz}S \tag{4.41}$$

şeklinde tanımlanır. O halde (4.26) denklemi yardımıyla M^3 öteleme hiperyüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \frac{-f''(u)\left(1+(g'(v))^2+(h'(w))^2\right) - g''(v)\left(1+(f'(u))^2+(h'(w))^2\right) - h''(w)\left(1+(f'(u))^2+(g'(v))^2\right)}{3W^{3/2}} \tag{4.42}$$

şeklinde elde edilir. ■

4.1.3 $\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayında 2 Parametreli Öteleme Yüzeyleri

Tanım 4.3. U, $\mathbb{E}^2$ Öklid uzayında açık küme, $f_3, f_4 : U \to \mathbb{R}$ ve $g_3, g_4 : U \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ ve $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ eğrileri $i = 1,2$ için $x_i = 0$ düzleminde bulunan birim hızlı olmayan düzlemsel üreteç eğrileri olmak üzere

$$\begin{aligned} &\phi : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^4 \\ &(u,v) \to \phi(u,v) = \alpha(u) + \beta(v) \\ &\qquad\qquad = \left(u, 0, f_3(u), f_4(u)\right) + \left(0, v, g_3(v), g_4(v)\right) \\ &\qquad\qquad = \left(u, v, f_3(u) + g_3(v), f_4(u) + g_4(v)\right) \end{aligned} \tag{4.43}$$

şeklinde tanımlanan $\phi(u,v) = M^2$ yüzeyine $\mathbb{E}^4$ uzayında 2-*parametreli öteleme yüzeyi* denir [25].

Teorem 4.13. *M^2, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u,v) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme yüzeyi olsun. M^2 öteleme yüzeyinin birim normal vektör alanları*

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{E}}}\left(-f_3'(u), -g_3'(v), 1, 0\right), \\ N_2 &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{E}\tilde{W}}}\left(\tilde{F}f_3'(u) - \tilde{E}f_4'(u), \tilde{F}g_3'(v) - \tilde{E}g_4'(v), -\tilde{F}, \tilde{E}\right) \end{aligned} \tag{4.44}$$

şeklindedir.

Burada

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= 1+\left(f_3'(u)\right)^2+\left(g_3'(v)\right)^2,\\ \tilde{F} &= f_3'(u)\,f_4'(u)+g_3'(v)\,g_4'(v),\\ \tilde{G} &= 1+\left(f_4'(u)\right)^2+\left(g_4'(v)\right)^2,\\ \tilde{W}^2 &= \tilde{E}\tilde{G}-\tilde{F}^2\end{aligned} \tag{4.45}$$

şeklindedir [21, 25].

İspat. M^2 öteleme yüzeyinin birim normal vektör alanları

$$\begin{aligned}N_1 &= \frac{1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}}\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right),\\ N_2 &= \frac{1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2}}\left(b_1,b_2,b_3,b_4\right)\end{aligned} \tag{4.46}$$

olsun. $\chi\left(M^2\right)=Sp\left\{\phi_u,\phi_v\right\}$ olmak üzere $\phi(u,v)=M^2$ yüzeyinin teğet vektörleri

$$\begin{aligned}\phi_u &= \alpha'(u)=\left(1,0,f_3'(u),f_4'(u)\right),\\ \phi_v &= \beta'(v)=\left(0,1,g_3'(v),g_4'(v)\right)\end{aligned} \tag{4.47}$$

ve ikinci kısmi türevleri

$$\begin{aligned}\phi_{uu} &= \alpha''(u)=\left(0,0,f_3''(u),f_4''(u)\right),\\ \phi_{uv} &= \phi_{vu}=0,\\ \phi_{vv} &= \beta''(v)=\left(0,0,g_3''(v),g_4''(v)\right)\end{aligned} \tag{4.48}$$

şeklinde bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}&\langle\phi_u,N_1\rangle=0, && \langle N_1,N_2\rangle=0,\\ &\langle\phi_v,N_1\rangle=0, && \langle N_1,N_1\rangle=1,\\ &\langle\phi_u,N_2\rangle=0, && \langle N_2,N_2\rangle=1,\\ &\langle\phi_v,N_2\rangle=0 &&\end{aligned} \tag{4.49}$$

eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}\left\langle\left(1,0,f_3'(u),f_4'(u)\right),\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)\right\rangle &= a_1+f_3'(u)\,a_3+f_4'(u)\,a_4=0,\\ \left\langle\left(0,1,g_3'(v),g_4'(v)\right),\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)\right\rangle &= a_2+g_3'(v)\,a_3+g_4'(v)\,a_4=0\end{aligned} \tag{4.50}$$

denklemlerinde $a_3=1$ ve $a_4=0$ alınırsa $a_1=-f_3'(u)$ ve $a_2=-g_3'(v)$ şeklinde bulunur. Buradan N_1 birim normal vektör alanı

$$N_1=\frac{1}{\sqrt{1+\left(f_3'(u)\right)^2+\left(g_3'(v)\right)^2}}\left(-f_3'(u),-g_3'(v),1,0\right) \tag{4.51}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde (4.49) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} b_1 + f_3'(u)\, b_3 + f_4'(u)\, b_4 &= 0, \\ b_2 + g_3'(v)\, b_3 + g_4'(v)\, b_4 &= 0, \\ -f_3'(u)\, b_1 - g_3'(v)\, b_2 + b_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.52}$$

denklemleri elde edilir. Buradan $b_4 = 1 + \left(f_3'(u)\right)^2 + \left(g_3'(v)\right)^2$ alınırsa (4.45) eşitliklerinden N_2 birim normal vektör alanı

$$N_2 = \frac{1}{\sqrt{\tilde{E}\tilde{W}}} \left(\tilde{F} f_3'(u) - \tilde{E} f_4'(u), \tilde{F} g_3'(v) - \tilde{E} g_4'(v), -\tilde{F}, \tilde{E}\right) \tag{4.53}$$

şeklinde elde edilir. ■

Teorem 4.14. *M^2, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u,v) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme yüzeyi olsun. M^2 öteleme yüzeyinin birinci temel formu*

$$I = \left(1 + \left(f_3'(u)\right)^2 + \left(f_4'(u)\right)^2\right) du^2 + \left(f_3'(u)\, g_3'(v) + f_4'(u)\, g_4'(v)\right) du dv + \left(1 + \left(f_4'(u)\right)^2 + \left(g_4'(v)\right)^2\right) dv^2 \tag{4.54}$$

şeklindedir [21, 25].

İspat. $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında 2 parametreli yüzeyin birinci temel formu

$$I = \phi_{11} du^2 + 2\phi_{12} du dv + \phi_{22} dv^2 \tag{4.55}$$

şeklinde tanımlanır. Burada ϕ_{11}, ϕ_{12} ve ϕ_{22} yüzeyin birinci temel form katsayılarıdır. $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir yüzeyin birinci temel form katsayıları

$$\phi_{ij} = \left\langle \phi_i, \phi_j \right\rangle \tag{4.56}$$

şeklinde tanımlandığından M^2 yüzeyinin birinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= \langle \phi_u, \phi_u \rangle = 1 + \left(f_3'(u)\right)^2 + \left(f_4'(u)\right)^2, \\ \phi_{12} &= \langle \phi_u, \phi_v \rangle = f_3'(u)\, g_3'(v) + f_4'(u)\, g_4'(v), \\ \phi_{22} &= \langle \phi_v, \phi_v \rangle = 1 + \left(g_3'(v)\right)^2 + \left(g_4'(v)\right)^2 \end{aligned} \tag{4.57}$$

şeklinde elde edilir. O halde (4.57) eşitlikleri (4.55) denkleminde yerine yazılırsa M^2 öteleme yüzeyinin birinci temel formu

$$I = \left(1 + \left(f_3'(u)\right)^2 + \left(f_4'(u)\right)^2\right) du^2 + \left(f_3'(u)\, g_3'(v) + f_4'(u)\, g_4'(v)\right) du dv + \left(1 + \left(g_3'(v)\right)^2 + \left(g_4'(v)\right)^2\right) dv^2 \tag{4.58}$$

şeklinde elde edilir. ■

Teorem 4.15. *M^2, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u,v)=\phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme yüzeyi olsun. M^2 öteleme yüzeyinin ikinci temel formları aşağıdaki şekildedir [21, 25]:*

$$\begin{aligned} II_1 &= \frac{f_3''(u)}{\sqrt{\tilde{E}}}du^2+\frac{g_3''(v)}{\sqrt{\tilde{E}}}dv^2, \\ II_2 &= \frac{\tilde{E}f_4''(u)-\tilde{F}f_3''(u)}{\sqrt{\tilde{E}}\tilde{W}}du^2+\frac{\tilde{E}g_4''(v)-\tilde{F}g_3''(v)}{\sqrt{\tilde{E}}\tilde{W}}dv^2 \end{aligned} \tag{4.59}$$

İspat. $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında 2 parametreli yüzeyin ikinci temel formları

$$\begin{aligned} II_1 &= \varphi_{11}^1du^2+2\varphi_{12}^1dudv+\varphi_{22}^1dv^2, \\ II_2 &= \varphi_{11}^2du^2+2\varphi_{12}^2dudv+\varphi_{22}^2dv^2 \end{aligned} \tag{4.60}$$

şeklinde tanımlanır. İkinci temel form katsayıları ise

$$\varphi_{ij}^k=\left\langle \phi_{ij},N_k\right\rangle \tag{4.61}$$

şeklinde tanımlandığından ve (4.48) eşitlikleri kullanılarak $k=1$ için

$$\begin{aligned} \varphi_{11}^1 &= \langle \phi_{uu},N_1\rangle=\frac{1}{\tilde{E}}\left\langle \left(0,0,f_3''(u),f_4''(u)\right),\left(-f_3'(u),-g_3'(v),1,0\right)\right\rangle=\frac{f_3''(u)}{\sqrt{\tilde{E}}}, \\ \varphi_{12}^1 &= \langle \phi_{uv},N_1\rangle=0, \\ \varphi_{22}^1 &= \langle \phi_{vv},N_1\rangle=\frac{1}{\tilde{E}}\left\langle \left(0,0,g_3''(v),g_4''(v)\right),\left(-f_3'(u),-g_3'(v),1,0\right)\right\rangle=\frac{g_3''(v)}{\sqrt{\tilde{E}}} \end{aligned} \tag{4.62}$$

elde edilir. Benzer şekilde $k=2$ için

$$\begin{aligned} \varphi_{11}^2 &= \langle \phi_{uu},N_2\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{E}}\tilde{W}}\left\langle \left(0,0,f_3''(u),f_4''(u)\right),\left(\tilde{F}f_3'(u)-\tilde{E}f_4'(u),\tilde{F}g_3'(v)-\tilde{E}g_4'(v),-\tilde{F},\tilde{E}\right)\right\rangle \\ &= \frac{\tilde{E}f_4''(u)-\tilde{F}f_3''(u)}{\sqrt{\tilde{E}}\tilde{W}} \end{aligned}$$

$$\varphi_{12}^2=\langle \phi_{uv},N_2\rangle=0, \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{22}^2 &= \langle \phi_{vv},N_2\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{E}}\tilde{W}}\left\langle \left(0,0,g_3''(v),g_4''(v)\right),\left(\tilde{F}f_3'(u)-\tilde{E}f_4'(u),\tilde{F}g_3'(v)-\tilde{E}g_4'(v),-\tilde{F},\tilde{E}\right)\right\rangle \\ &= \frac{\tilde{E}g_4''(v)-\tilde{F}g_3''(v)}{\sqrt{\tilde{E}}\tilde{W}} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. O halde (4.62) ve (4.63) eşitlikleri (4.60) denkleminde yerine yazılırsa

M^2 öteleme yüzeyinin ikinci temel formları aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$II_1 = \frac{f_3''(u)}{\sqrt{\tilde{E}}}du^2 + \frac{g_3''(v)}{\sqrt{\tilde{E}}}dv^2,$$
$$II_2 = \frac{\tilde{E}f_4''(u) - \tilde{F}f_3''(u)}{\sqrt{\tilde{E}}\tilde{W}}du^2 + \frac{\tilde{E}g_4''(v) - \tilde{F}g_3''(v)}{\sqrt{\tilde{E}}\tilde{W}}dv^2 \tag{4.64}$$

■

Teorem 4.16. *M^2, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u,v) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme yüzeyi olsun. M^2 öteleme yüzeyinin şekil operatörü matrisleri*

$$S_{N_1} = \frac{1}{W^2}\begin{pmatrix} \frac{f_3''(u)}{\sqrt{\tilde{E}}} & 0 \\ 0 & \frac{g_3''(v)}{\sqrt{\tilde{E}}} \end{pmatrix},$$
$$S_{N_2} = \frac{1}{W^2}\begin{pmatrix} \frac{\tilde{E}f_4''(u) - \tilde{F}f_3''(u)}{\sqrt{\tilde{E}}\tilde{W}} & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{E}g_4''(v) - \tilde{F}g_3''(v)}{\sqrt{\tilde{E}}\tilde{W}} \end{pmatrix} \tag{4.65}$$

şeklindedir. Burada
$W^2 = 1 + \left(f_3'(u)\right)^2 + \left(f_4'(u)\right)^2 + \left(g_3'(v)\right)^2 + \left(g_4'(v)\right)^2 + \left(f_3'(u)\,g_4'(v) - f_4'(u)\,g_3'(v)\right)^2 = \tilde{W}^2$
şeklindedir [21, 25].

İspat. $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında 2 parametreli yüzeyin şekil operatörü matrisleri $k = 1, 2$ olmak üzere

$$S_{N_k} = \frac{1}{\phi_{11}\phi_{22} - (\phi_{12})^2}\begin{pmatrix} \varphi_{11}^k\phi_{22} - \varphi_{12}^k\phi_{12} & \varphi_{12}^k\phi_{22} - \varphi_{22}^k\phi_{12} \\ \varphi_{12}^k\phi_{11} - \varphi_{11}^k\phi_{12} & -\varphi_{12}^k\phi_{12} + \varphi_{22}^k\phi_{11} \end{pmatrix} \tag{4.66}$$

şeklinde tanımlanır. O halde (4.57), (4.62) ve (4.63) eşitlikleri (4.66) denkleminde yerine yazılırsa M^2 öteleme yüzeyinin şekil operatörü matrisleri

$$S_{N_1} = \frac{1}{W^2}\begin{pmatrix} \frac{f_3''(u)}{\sqrt{\tilde{E}}} & 0 \\ 0 & \frac{g_3''(v)}{\sqrt{\tilde{E}}} \end{pmatrix},$$
$$S_{N_2} = \frac{1}{W^2}\begin{pmatrix} \frac{\tilde{E}f_4''(u) - \tilde{F}f_3''(u)}{\sqrt{\tilde{E}}\tilde{W}} & 0 \\ 0 & \frac{\tilde{E}g_4''(v) - \tilde{F}g_3''(v)}{\sqrt{\tilde{E}}\tilde{W}} \end{pmatrix} \tag{4.67}$$

şeklinde bulunur. ■

Teorem 4.17. *M^2, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u,v)=\phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme yüzeyi olsun. M^2 öteleme yüzeyinin Gauss eğriliği*

$$K=\frac{f_3''(u)\,g_3''(v)\,\tilde{G}-\left(f_3''(u)\,g_4''(v)+g_3''(v)\,f_4''(u)\right)\tilde{F}+f_4''(u)\,g_4''(v)\,\tilde{E}}{\tilde{W}^2W^2} \tag{4.68}$$

şeklindedir [21, 25].

İspat. $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında 2 parametreli yüzeyin Gauss eğriliği

$$K=\frac{1}{W^2}\left[\varphi_{11}^1\varphi_{22}^1-\left(\varphi_{12}^1\right)^2+\varphi_{11}^2\varphi_{22}^2-\left(\varphi_{12}^2\right)^2\right] \tag{4.69}$$

şeklinde tanımlandığından (4.62) ve (4.63) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$K=\frac{1}{W^2}\left[\left(\frac{f_3''(u)}{\sqrt{\tilde{E}}}\right)\left(\frac{g_3''(v)}{\sqrt{\tilde{E}}}\right)+\left(\frac{\tilde{E}f_4''(u)-\tilde{F}f_3''(u)}{\sqrt{\tilde{E}}\tilde{W}}\right)\left(\frac{\tilde{E}g_4''(v)-\tilde{F}g_3''(v)}{\sqrt{\tilde{E}}\tilde{W}}\right)\right] \tag{4.70}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
K&=\frac{1}{W^2}\left[\frac{f_3''(u)\,g_3''(v)}{\tilde{E}}+\frac{\tilde{E}^2f_4''(u)\,g_4''(v)-\tilde{E}\tilde{F}\left(f_4''(u)\,g_3''(v)+f_3''(u)\,g_4''(v)\right)+\tilde{F}^2f_3''(u)\,g_3''(v)}{\tilde{E}\tilde{W}^2}\right]\\
&=\frac{1}{W^2}\left[\frac{\tilde{W}^2f_3''(u)\,g_3''(v)+\tilde{E}^2f_4''(u)\,g_4''(v)-\tilde{E}\tilde{F}\left(f_4''(u)\,g_3''(v)+f_3''(u)\,g_4''(v)\right)+\tilde{F}^2f_3''(u)\,g_3''(v)}{\tilde{E}\tilde{W}^2}\right]\\
&=\frac{1}{W^2}\left[\frac{\tilde{E}^2f_4''(u)\,g_4''(v)-\tilde{E}\tilde{F}\left(f_4''(u)\,g_3''(v)+f_3''(u)\,g_4''(v)\right)+\left(\tilde{F}^2+\tilde{W}^2\right)f_3''(u)\,g_3''(v)}{\tilde{E}\tilde{W}^2}\right]\\
&=\frac{1}{W^2}\left[\frac{\tilde{E}^2f_4''(u)\,g_4''(v)-\tilde{E}\tilde{F}\left(f_4''(u)\,g_3''(v)+f_3''(u)\,g_4''(v)\right)+\left(\tilde{E}\tilde{G}\right)f_3''(u)\,g_3''(v)}{\tilde{E}\tilde{W}^2}\right]\\
&=\frac{1}{W^2}\left[\frac{\tilde{E}f_4''(u)\,g_4''(v)-\tilde{F}\left(f_4''(u)\,g_3''(v)+f_3''(u)\,g_4''(v)\right)+\tilde{G}f_3''(u)\,g_3''(v)}{\tilde{W}^2}\right]
\end{aligned} \tag{4.71}$$

bulunur. O halde M^2 öteleme yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K=\frac{f_3''(u)\,g_3''(v)\,\tilde{G}-\left(f_3''(u)\,g_4''(v)+g_3''(v)\,f_4''(u)\right)\tilde{F}+f_4''(u)\,g_4''(v)\,\tilde{E}}{\tilde{W}^2W^2} \tag{4.72}$$

şeklinde elde edilir. ■

Teorem 4.18. *M^2, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u,v)=\phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme yüzeyi olsun. M^2 öteleme yüzeyinin ortalama eğriliği aşağıdaki şekildedir [21, 25]:*

$$H=\frac{f_3''(u)\,\phi_{22}+g_3''(v)\,\phi_{11}}{2\sqrt{\tilde{E}}W^2}N_1+\frac{\phi_{22}\left(f_4''(u)\,\tilde{E}-f_3''(u)\,\tilde{F}\right)+\phi_{11}\left(g_4''(v)\,\tilde{E}-g_3''(v)\,\tilde{F}\right)}{2\sqrt{\tilde{E}}\tilde{W}W^2}N_2 \tag{4.73}$$

İspat. $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında 2 parametreli yüzeyin ortalama eğriliği

$$H=\frac{1}{2W^2}\left[\left(\varphi_{11}^1\phi_{22}+\varphi_{22}^1\phi_{11}-2\varphi_{12}^1\phi_{12}\right)N_1+\left(\varphi_{11}^2\phi_{22}+\varphi_{22}^2\phi_{11}-2\varphi_{12}^2\phi_{12}\right)N_2\right] \tag{4.74}$$

şeklinde tanımlandığından (4.57), (4.62) ve (4.63) denklemleri yardımıyla

$$H=\frac{1}{2W^2}\left[\left(\frac{f_3''(u)}{\sqrt{\tilde{E}}}\phi_{22}+\frac{g_3''(v)}{\sqrt{\tilde{E}}}\phi_{11}\right)N_1+\left(\frac{\tilde{E}f_4''(u)-\tilde{F}f_3''(u)}{\sqrt{\tilde{E}}\tilde{W}}\phi_{22}+\frac{\tilde{E}g_4''(v)-\tilde{F}g_3''(v)}{\sqrt{\tilde{E}}\tilde{W}}\phi_{11}\right)N_2\right] \tag{4.75}$$

bulunur. Buradan M^2 öteleme yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H=\frac{f_3''(u)\,\phi_{22}+g_3''(v)\,\phi_{11}}{2\sqrt{\tilde{E}}W^2}N_1+\frac{\phi_{22}\left(f_4''(u)\,\tilde{E}-f_3''(u)\,\tilde{F}\right)+\phi_{11}\left(g_4''(v)\,\tilde{E}-g_3''(v)\,\tilde{F}\right)}{2\sqrt{\tilde{E}}\tilde{W}W^2}N_2 \tag{4.76}$$

şeklinde elde edilir. ■

4.1.4 $\mathbb{E}^3$ Öklid Uzayında Öteleme Yüzeyleri

Tanım 4.4. U, $\mathbb{E}^2$ Öklid uzayında açık küme, $f:U\to\mathbb{R}$ ve $g:U\to\mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{E}^3$ ve $\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{E}^3$ eğrileri $i=1,2$ için $x_i=0$ düzleminde bulunan birim hızlı olmayan düzlemsel üreteç eğrileri olmak üzere

$$\begin{aligned}&\phi:\mathbb{E}^2\to\mathbb{E}^3\\&(u,v)\to\phi(u,v)=\alpha(u)+\beta(v)\\&\qquad\qquad=\left(u,0,f(u)\right)+\left(0,v,g(v)\right)\\&\qquad\qquad=\left(u,v,f(u)+g(v)\right)\end{aligned} \tag{4.77}$$

şeklinde tanımlanan $\phi(u,v)=M^2$ yüzeyine $\mathbb{E}^3$ uzayında *öteleme yüzeyi* denir [4, 6].

Teorem 4.19. *M^2, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\phi(u,v)=\phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme yüzeyi olsun. M^2 öteleme yüzeyinin birim normal vektör alanı*

$$N=\frac{1}{\sqrt{1+(f'(u))^2+(g'(v))^2}}\left(-f'(u),-g'(v),1\right) \tag{4.78}$$

şeklindedir [4, 6].

İspat. $\chi\left(M^2\right)=Sp\{\phi(u),\phi(v)\}$ olmak üzere M^2 öteleme yüzeyinin teğet vektörleri

$$\begin{aligned}\phi_u&=\alpha'(u)=\left(1,0,f'(u)\right),\\\phi_v&=\beta'(v)=\left(0,1,g'(v)\right)\end{aligned} \tag{4.79}$$

şeklindedir.

$\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir yüzeyin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{\phi_u \otimes \phi_v}{\|\phi_u \otimes \phi_v\|} \tag{4.80}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan

$$\begin{aligned} \phi_u \otimes \phi_v &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f'(u) \\ 0 & 1 & g'(v) \end{vmatrix} \\ &= \left(-f'(u), -g'(v), 1\right) \end{aligned} \tag{4.81}$$

ve

$$\|\phi_u \otimes \phi_v\| = \sqrt{1 + (f'(u))^2 + (g'(v))^2} \tag{4.82}$$

eşitlikleri (4.80) denkleminde yerine yazılırsa

M^2 öteleme yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(u))^2 + (g'(v))^2}} \left(-f'(u), -g'(v), 1\right) \tag{4.83}$$

şeklinde elde edilir. ■

Teorem 4.20. *M^2, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\phi(u,v) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme yüzeyi olsun. M^2 öteleme yüzeyinin birinci temel formu*

$$I = \left(1 + \left(f'(u)\right)^2\right) du^2 + 2 f'(u)\, g'(v)\, du dv + \left(1 + \left(g'(v)\right)^2\right) dv^2 \tag{4.84}$$

şeklindedir [6].

İspat. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir yüzeyin birinci temel formu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$I = \phi_{11} du^2 + 2\phi_{12} du dv + \phi_{22} dv^2 \tag{4.85}$$

$\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir yüzeyin birinci temel form katsayıları ise

$$\phi_{ij} = \left\langle \phi_i, \phi_j \right\rangle \tag{4.86}$$

şeklinde tanımlandığından M^2 yüzeyinin birinci temel form katsayıları (4.79) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}\phi_{11} &= \langle \phi_u, \phi_u \rangle = 1 + \left(f'(u)\right)^2, \\ \phi_{12} &= \langle \phi_u, \phi_v \rangle = f'(u)\, g'(v), \\ \phi_{22} &= \langle \phi_v, \phi_v \rangle = 1 + \left(g'(v)\right)^2\end{aligned} \tag{4.87}$$

şeklinde elde edilir. Buradan (4.87) eşitlikleri (4.85) denkleminde yerine yazılırsa M^2 öteleme yüzeyinin birinci temel formu

$$I = \left(1 + \left(f'(u)\right)^2\right) du^2 + 2 f'(u)\, g'(v)\, du dv + \left(1 + \left(g'(v)\right)^2\right) dv^2 \tag{4.88}$$

şeklinde elde edilir. ■

Teorem 4.21. *M^2, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\phi(u,v) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme yüzeyi olsun. M^2 öteleme yüzeyinin ikinci temel formu*

$$II = \frac{f''(u)}{\sqrt{1 + (f'(u))^2 + (g'(v))^2}} du^2 + \frac{g''(v)}{\sqrt{1 + (f'(u))^2 + (g'(v))^2}} dv^2 \tag{4.89}$$

şeklindedir [6].

İspat. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir yüzeyin ikinci temel formu

$$II = \varphi_{11} du^2 + 2\varphi_{12} du dv + \varphi_{22} dv^2 \tag{4.90}$$

şeklinde tanımlanır. İkinci temel form katsayıları ise

$$\varphi_{ij} = -\left\langle \phi_{ij}, N \right\rangle \tag{4.91}$$

şeklinde tanımlandığından

$$\begin{aligned}\phi_{uu} &= \alpha''(u) = \left(1, 0, f''(u)\right), \\ \phi_{uv} &= \phi_{vu} = 0, \\ \phi_{vv} &= \beta''(v) = \left(0, 1, g''(v)\right)\end{aligned} \tag{4.92}$$

eşitlikleri ve (4.91) denklemi kullanılarak M^2 yüzeyinin ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned}\varphi_{11} &= -\langle N, \phi_{uu} \rangle = \frac{-f''(u)}{\sqrt{1 + (f'(u))^2 + (g'(v))^2}} \\ \varphi_{12} &= -\langle N, \phi_{uv} \rangle = 0, \\ \varphi_{22} &= -\langle N, \phi_{vv} \rangle = \frac{-g''(v)}{\sqrt{1 + (f'(u))^2 + (g'(v))^2}}\end{aligned} \tag{4.93}$$

şeklinde elde edilir. Buradan (4.93) eşitlikleri (4.90) denkleminde yerine yazılırsa

M^2 öteleme yüzeyinin ikinci temel formu

$$II = \frac{f''(u)}{\sqrt{1+(f'(u))^2+(g'(v))^2}}du^2 + \frac{g''(v)}{\sqrt{1+(f'(u))^2+(g'(v))^2}}dv^2 \tag{4.94}$$

şeklinde elde edilir. ■

Teorem 4.22. *M^2, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\phi(u,v) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme yüzeyi olsun. M^2 öteleme yüzeyinin şekil operatörü matrisi*

$$S = \frac{1}{\left(1+(f'(u))^2+(g'(v))^2\right)^{3/2}} \begin{pmatrix} -f''(u)\left(1+(g'(v))^2\right) & f'(u)g'(v)f''(u) \\ f'(u)g'(v)g''(v) & -\left(1+(f'(u))^2\right)g''(v) \end{pmatrix} \tag{4.95}$$

şeklindedir [6].

İspat. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir yüzeyin şekil operatörü matrisi

$$S = \frac{1}{\phi_{11}\phi_{22}-(\phi_{12})^2} \begin{pmatrix} \varphi_{11}\phi_{22}-\varphi_{12}\phi_{12} & \varphi_{12}\phi_{22}-\varphi_{22}\phi_{12} \\ \varphi_{12}\phi_{11}-\varphi_{11}\phi_{12} & -\varphi_{12}\phi_{12}+\varphi_{22}\phi_{11} \end{pmatrix} \tag{4.96}$$

şeklinde tanımlanır. O halde (4.87) ve (4.93) eşitlikleri (4.96) denkleminde yerine yazılırsa M^2 öteleme yüzeyinin şekil operatörü matrisi

$$S = \frac{1}{\left(1+(f'(u))^2+(g'(v))^2\right)^{3/2}} \begin{pmatrix} -f''(u)\left(1+(g'(v))^2\right) & f'(u)g'(v)f''(u) \\ f'(u)g'(v)g''(v) & -\left(1+(f'(u))^2\right)g''(v) \end{pmatrix} \tag{4.97}$$

şeklinde bulunur. ■

Teorem 4.23. *M^2, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\phi(u,v) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme yüzeyi olsun. M^2 öteleme yüzeyinin Gauss eğriliği aşağıdaki şekildedir [6]:*

$$K = \frac{f''(u)g''(v)}{\left(1+(f'(u))^2+(g'(v))^2\right)^2} \tag{4.98}$$

İspat. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir yüzeyin Gauss eğriliği

$$K = \frac{\varphi_{11}\varphi_{22}-(\varphi_{12})^2}{\phi_{11}\phi_{22}-(\phi_{12})^2} \tag{4.99}$$

şeklinde tanımlanır. O halde (4.87) ve (4.93) eşitlikleri (4.99) denkleminde yerine yazılırsa M^2 öteleme yüzeyinin Gauss eğriliği aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$K = \frac{f''(u)g''(v)}{\left(1+(f'(u))^2+(g'(v))^2\right)^2} \tag{4.100}$$

■

Teorem 4.24. *M^2, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\phi(u,v)=\phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme yüzeyi olsun. M^2 öteleme yüzeyinin ortalama eğriliği*

$$H=\frac{f''(u)\left(1+\left(g'(v)\right)^2\right)+g''(v)\left(1+\left(f'(u)\right)^2\right)}{2\left(1+(f'(u))^2+(g'(v))^2\right)^{3/2}} \tag{4.101}$$

şeklindedir [6].

İspat. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir yüzeyin ortalama eğriliği

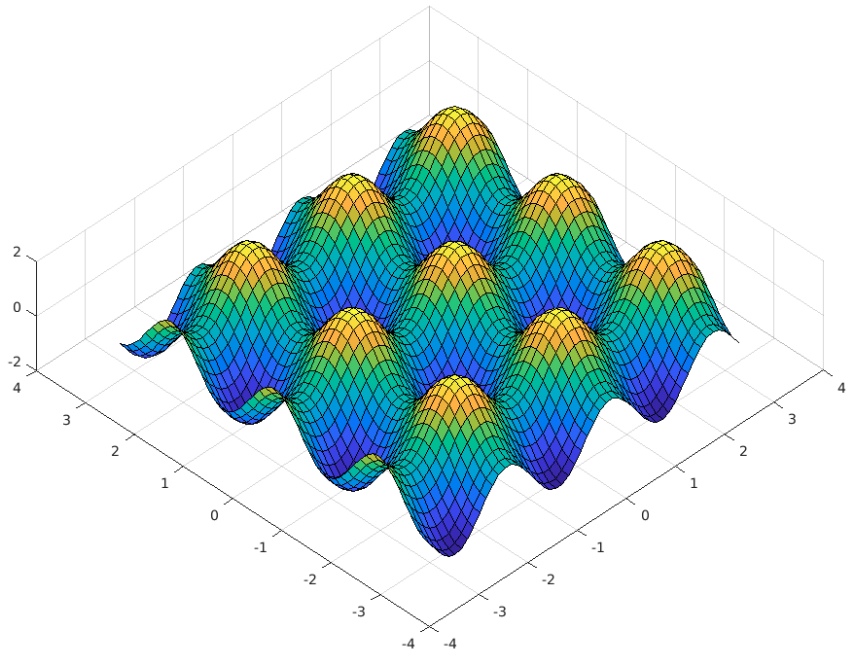
$$H=\frac{\phi_{11}\varphi_{22}-2\phi_{12}\varphi_{12}+\phi_{22}\varphi_{11}}{2\left(\phi_{11}\phi_{22}-(\phi_{12})^2\right)} \tag{4.102}$$

şeklinde tanımlanır. O halde (4.87) ve (4.93) eşitlikleri (4.102) denkleminde yerine yazılırsa M^2 öteleme yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H=\frac{f''(u)\left(1+\left(g'(v)\right)^2\right)+g''(v)\left(1+\left(f'(u)\right)^2\right)}{2\left(1+(f'(u))^2+(g'(v))^2\right)^{3/2}} \tag{4.103}$$

şeklinde elde edilir. ■

Örnek 4.1. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\phi(u,v)=M^2=(u,v,\sin 3u+\cos 3v)$ parametrik denklemiyle verilen yumurta kutusu yüzeyi bir öteleme yüzeyi örneğidir. Burada $\phi(u,v)=\alpha(u)+\beta(v)$ olmak üzere $\alpha(u)=(u,0,\sin 3u)$ ve $\beta(v)=(0,v,\cos 3v)$ eğrileri yumurta kutusu öteleme yüzeyinin üreteç eğrileridir.



Şekil 4.1 Yumurta kutusu öteleme yüzeyi

$\chi\left(M^2\right) = Sp\left\{\phi_u, \phi_v\right\}$ olmak üzere $\phi(u,v) = M^2$ yumurta kutusu öteleme yüzeyinin teğet vektörleri

$$\begin{aligned} \phi_u &= \alpha^{'}(u) = (1, 0, 3\cos 3u), \\ \phi_v &= \beta^{'}(v) = (0, 1, -3\sin 3v) \end{aligned} \tag{4.104}$$

şeklindedir. Buradan bulunan değerler

$$N = \frac{\phi_u \otimes \phi_v}{\|\phi_u \otimes \phi_v\|} \tag{4.105}$$

denkleminde yerine yazılırsa M^2 yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + 9\cos^2 3u + 9\sin^2 3v}} (3\cos 3u, 3\sin 3v, 1) \tag{4.106}$$

şeklinde elde edilir. M^2 yüzeyinin birinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= \langle \phi_u, \phi_u \rangle = 1 + 9\cos^2 3u, \\ \phi_{12} &= \langle \phi_u, \phi_v \rangle = -9\cos 3u \sin 3v, \\ \phi_{22} &= \langle \phi_v, \phi_v \rangle = 1 + 9\sin^2 3v \end{aligned} \tag{4.107}$$

ve ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} \phi_{uu} &= \alpha^{''}(u) = (0, 0, -9\sin 3u), \\ \phi_{uv} &= 0, \\ \phi_{vv} &= \beta^{''}(v) = (0, 0, -9\cos 3v) \end{aligned} \tag{4.108}$$

eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= -\langle \phi_{uu}, N \rangle = \frac{9\cos^2 3u}{\sqrt{1 + 9\cos^2 3u + 9\sin^2 3v}} \\ \varphi_{12} &= -\langle \phi_{uv}, N \rangle = 0, \\ \varphi_{22} &= -\langle \phi_{vv}, N \rangle = \frac{9\cos^2 3u}{\sqrt{1 + 9\cos^2 3u + 9\sin^2 3v}} \end{aligned} \tag{4.109}$$

şeklinde elde edilir. Buradan M^2 öteleme yüzeyinin birinci ve ikinci temel formları ise (4.107) ve (4.109) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} I &= \left(1 + 9\cos^2 3u\right) du^2 - (9\cos 3u \sin 3v)\, du dv + \left(1 + 9\sin^2 3v\right) dv^2, \\ II &= \frac{9\cos^2 3u}{\sqrt{1 + 9\cos^2 3u + 9\sin^2 3v}} du^2 + \frac{9\cos^2 3u}{\sqrt{1 + 9\cos^2 3u + 9\sin^2 3v}} dv^2 \end{aligned} \tag{4.110}$$

şeklinde elde edilir. Yumurta kutusu öteleme yüzeyinin şekil operatörü matrisi (4.107) ve

(4.109) eşitlikleri (4.96) denkleminde yerine yazılırsa

$$S=\frac{1}{\left(1+9\cos^2 3u+9\sin^2 3v\right)^{3/2}}\begin{pmatrix} 9\sin 3u+81\sin 3u\sin^2 3v & 81\cos 3u\sin 3v\cos 3v \\ 81\cos 3u\sin 3u\sin 3v & 9\cos 3u+81\cos^2 3u\cos 3v \end{pmatrix} \tag{4.111}$$

şeklinde elde edilir. M^2 öteleme yüzeyinin Gauss eğriliği (4.99) denkleminden

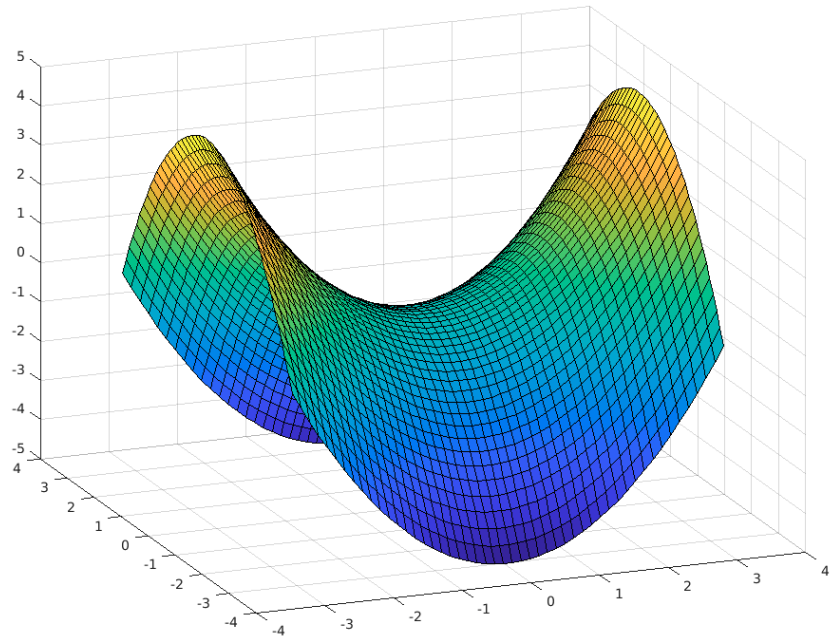
$$K=\frac{81\cos 3v\sin 3u+729\cos^2 3u\sin 3u\cos 3v+729\sin 3u\cos 3v\sin^2 3v}{\left(1+9\cos^2 3u+9\sin^2 3v\right)^{3/2}} \tag{4.112}$$

şeklinde bulunur. Yumurta kutusu öteleme yüzeyinin ortalama eğriliği ise (4.102) denkleminden

$$H=\frac{9\sin 3u+9\cos 3u+81\sin 3u\sin^2 3v+81\cos 3u\cos^2 3v}{2\left(1+9\cos^2 3u+9\sin^2 3v\right)^{3/2}} \tag{4.113}$$

elde edilir.

Örnek 4.2. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\phi(u,v)=\left(u,v,\frac{u^2}{2}-\frac{v^2}{2}\right)$ parametrik denklemiyle verilen hiperbolik paraboloid bir öteleme yüzeyi örneğidir. Burada $\phi(u,v)=\alpha(u)+\beta(v)$ olmak üzere $\alpha(u)=\left(u,0,\frac{u^2}{2}\right)$ ve $\beta(v)=\left(0,v,-\frac{v^2}{2}\right)$ eğrileri hiperbolik paraboloid öteleme yüzeyinin üreteç eğrileridir.



Şekil 4.2 Hiperbolik paraboloid öteleme yüzeyi

$\chi\left(M^2\right)=Sp\{\phi_u,\phi_v\}$ olmak üzere $\phi(u,v)=M^2$ hiperbolik paraboloid öteleme yüzeyinin teğet vektörleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}\phi_u&=\alpha'(u)=(1,0,u),\\ \phi_v&=\beta'(v)=(0,1,v)\end{aligned} \tag{4.114}$$

Buradan bulunan değerler

$$N = \frac{\phi_u \otimes \phi_v}{\|\phi_u \otimes \phi_v\|} \tag{4.115}$$

denkleminde yerine yazılırsa M^2 yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}(-u,-v,1) \tag{4.116}$$

şeklinde elde edilir. M^2 yüzeyinin birinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= \langle \phi_u, \phi_u \rangle = 1+u^2, \\ \phi_{12} &= \langle \phi_u, \phi_v \rangle = uv, \\ \phi_{22} &= \langle \phi_v, \phi_v \rangle = 1+v^2 \end{aligned} \tag{4.117}$$

ve ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} \phi_{uu} &= \alpha''(u) = (0,0,1), \\ \phi_{uv} &= 0, \\ \phi_{vv} &= \beta''(v) = (0,0,1) \end{aligned} \tag{4.118}$$

eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= -\langle \phi_{uu}, N \rangle = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \\ \varphi_{12} &= -\langle \phi_{uv}, N \rangle = 0, \\ \varphi_{22} &= -\langle \phi_{vv}, N \rangle = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \end{aligned} \tag{4.119}$$

şeklinde elde edilir. Buradan M^2 öteleme yüzeyinin birinci ve ikinci temel formları (4.117) ve (4.119) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} I &= \left(1+u^2\right)du^2 - uvdudv + \left(1+v^2\right)dv^2, \\ II &= -\frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}du^2 - \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}dv^2 \end{aligned} \tag{4.120}$$

şeklinde elde edilir. Hiperbolik paraboloid öteleme yüzeyinin şekil operatörü matrisi ise (4.117) ve (4.119) eşitlikleri (4.96) denkleminde yerine yazılırsa

$$S = \frac{1}{(1+u^2+v^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1+v^2 & -uv \\ -uv & 1+u^2 \end{pmatrix} \tag{4.121}$$

şeklinde bulunur.

M^2 öteleme yüzeyinin Gauss eğriliği (4.99) denkleminden aşağıdaki gibi elde edilir:

$$K = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}} \tag{4.122}$$

Hiperbolik paraboloid öteleme yüzeyinin ortalama eğriliği ise (4.102) denkleminden

$$H = \frac{2+u^2+v^2}{2\left(1+u^2+v^2\right)^{3/2}} \tag{4.123}$$

elde edilir.

4.2 $\mathbb{E}^3$ Öklid Uzayında Birim Hızlı, Düzlemsel Olmayan Eğriler Tarafından Üretilen Öteleme Yüzeyleri

4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4 bölümlerinde verilen öteleme hiperyüzeylerinin birim hızlı olan düzlemsel olmayan eğriler tarafından üretilen öteleme hiperyüzeyleri için literatürde karşılığı bulunmamaktadır. 4.1.4 bölümünde verilen öteleme yüzeyinin birim hızlı olan düzlemsel olmayan eğriler tarafından üretilen öteleme yüzeyleri literatürde var olup bu bölümde öteleme yüzeyinin geometrik özellikleri incelenmiştir.

4.2.1 $\mathbb{E}^3$ Öklid Uzayında Öteleme Yüzeyleri

Tanım 4.5. $\mathbb{E}^3$, 3 boyutlu Öklid uzayında $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ ve $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı düzlemsel olmayan üreteç eğrileri olmak üzere

$$\begin{aligned} &\phi : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3 \\ &(u,v) \to \phi(u,v) = \alpha(u) + \beta(v) \\ &\qquad\qquad = \left(\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u)\right) + \left(\beta_1(v), \beta_2(v), \beta_3(v)\right) \\ &\qquad\qquad = \left(\alpha_1(u) + \beta_1(v), \alpha_2(u) + \beta_2(v), \alpha_3(u) + \beta_3(v)\right) \end{aligned} \tag{4.124}$$

şeklinde tanımlanan $\phi(u,v) = M^2$ yüzeyine $\mathbb{E}^3$ uzayında *öteleme yüzeyi* denir [5, 22].

Teorem 4.25. *M^2, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\phi(u,v) = M^2$ parametrik denklemiyle verilen öteleme yüzeyi olsun. M^2 öteleme yüzeyinin birim normal vektör alanı*

$$N = \frac{1}{\sin\sigma}\left(T_\alpha \otimes T_\beta\right) \tag{4.125}$$

şeklindedir. Burada σ, T_α ile T_β arasındaki açıdır [5, 22].

İspat. $\chi\left(M^2\right) = Sp\{\phi(u), \phi(v)\}$ olmak üzere M^2 öteleme yüzeyinin teğet vektörleri

$$\begin{aligned} \phi_u &= \alpha'(u) = T_\alpha, \\ \phi_v &= \beta'(v) = T_\beta \end{aligned} \tag{4.126}$$

şeklindedir.

$\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir yüzeyin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{\phi_u \otimes \phi_v}{\|\phi_u \otimes \phi_v\|} \tag{4.127}$$

şeklinde tanımlandığından ve

$$\left\|T_\alpha \otimes T_\beta\right\| = \left\|T_\alpha\right\| \left\|T_\beta\right\| \sin\sigma = \sin\sigma \tag{4.128}$$

olmak üzere M^2 öteleme yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{1}{\sin\sigma}\left(T_\alpha \otimes T_\beta\right) \tag{4.129}$$

şeklinde elde edilir. ■

Teorem 4.26. *M^2, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\phi(u,v) = M^2$ parametrik denklemiyle verilen öteleme yüzeyi olsun. M^2 öteleme yüzeyinin birinci temel formu*

$$I = du^2 + 2\cos\sigma\, du dv + dv^2 \tag{4.130}$$

şeklindedir [5, 22].

İspat. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir yüzeyin birinci temel formu

$$I = \phi_{11}du^2 + 2\phi_{12}du dv + \phi_{22}dv^2 \tag{4.131}$$

şeklinde tanımlanır. Burada ϕ_{11}, ϕ_{12} ve ϕ_{22} yüzeyin birinci temel form katsayıları olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= \langle \phi_u, \phi_u \rangle = \langle T_\alpha, T_\alpha \rangle = 1, \\ \phi_{12} &= \langle \phi_u, \phi_v \rangle = \left\langle T_\alpha, T_\beta \right\rangle = \|T_\alpha\| \left\|T_\beta\right\| \cos\sigma = \cos\sigma, \\ \phi_{22} &= \langle \phi_v, \phi_v \rangle = \left\langle T_\beta, T_\beta \right\rangle = 1 \end{aligned} \tag{4.132}$$

şeklinde bulunur. O halde (4.132) eşitlikleri yardımıyla M^2 öteleme yüzeyinin birinci temel formu aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$I = du^2 + 2\cos\sigma\, du dv + dv^2 \tag{4.133}$$

■

Teorem 4.27. *M^2, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\phi(u,v) = M^2$ parametrik denklemiyle verilen öteleme yüzeyi olsun. M^2 öteleme yüzeyinin ikinci temel formu aşağıdaki şekilde elde edilir:*

$$II = -k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha du^2 - k_{1\beta}\cos\theta_\beta dv^2 \tag{4.134}$$

Burada θ_α, N ile N_α arasındaki açı ve θ_β, N ile N_β arasındaki açıdır [5, 22].

İspat. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir yüzeyin ikinci temel formu

$$II = \varphi_{11}du^2 + 2\varphi_{12}dudv + \varphi_{22}dv^2 \tag{4.135}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\varphi_{11}, \varphi_{12}$ ve φ_{22} yüzeyin ikinci temel form katsayıları olmak üzere

$$\begin{aligned}
\varphi_{11} &= -\langle N, \phi_{uu}\rangle = -\langle N, k_{1\alpha}N_\alpha\rangle = -k_{1\alpha}\langle N, N_\alpha\rangle = -k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha, \\
\varphi_{12} &= -\langle N, \phi_{uv}\rangle = -\langle N, 0\rangle = 0, \\
\varphi_{22} &= -\langle N, \phi_{vv}\rangle = -\left\langle N, k_{1\beta}N_\beta\right\rangle = -k_{1\beta}\left\langle N, N_\beta\right\rangle = -k_{1\beta}\cos\theta_\beta
\end{aligned} \tag{4.136}$$

şeklinde bulunur. O halde (4.136) eşitlikleri yardımıyla M^2 öteleme yüzeyinin ikinci temel formu aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$II = -k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha du^2 - k_{1\beta}\cos\theta_\beta dv^2 \tag{4.137}$$

■

Teorem 4.28. *M^2, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\phi(u,v) = M^2$ parametrik denklemiyle verilen öteleme yüzeyi olsun. M^2 öteleme yüzeyinin şekil operatörü matrisi*

$$S = \frac{1}{\sin^2\sigma}\begin{pmatrix} -k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha & k_{1\beta}\cos\theta_\beta\cos\varphi \\ k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha\cos\varphi & -k_{1\beta}\cos\theta_\beta \end{pmatrix} \tag{4.138}$$

şeklindedir. Burada θ_α, N ile N_α arasındaki açı ve θ_β, N ile N_β arasındaki açıdır [5, 22].

İspat. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir yüzeyin şekil operatörü matrisi

$$S = \frac{1}{\phi_{11}\phi_{22} - (\phi_{12})^2}\begin{pmatrix} \varphi_{11}\phi_{22} - \varphi_{12}\phi_{12} & \varphi_{12}\phi_{22} - \varphi_{22}\phi_{12} \\ \varphi_{12}\phi_{11} - \varphi_{11}\phi_{12} & \varphi_{22}\phi_{11} - \varphi_{12}\phi_{12} \end{pmatrix} \tag{4.139}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan (4.132) ve (4.136) eşitlikleri (4.139) denkleminde yerine yazılırsa M^2 öteleme yüzeyinin şekil operatörü matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$S = \frac{1}{\sin^2\sigma}\begin{pmatrix} -k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha & k_{1\beta}\cos\theta_\beta\cos\varphi \\ k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha\cos\varphi & -k_{1\beta}\cos\theta_\beta \end{pmatrix} \tag{4.140}$$

■

Teorem 4.29. *M^2, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\phi(u,v) = M^2$ parametrik denklemiyle verilen öteleme yüzeyi olsun. M^2 öteleme yüzeyinin Gauss eğriliği*

$$K = \frac{k_{1\alpha}k_{1\beta}\cos\theta_\alpha\cos\theta_\beta}{\sin^2\sigma} \tag{4.141}$$

şeklindedir [5, 22].

İspat. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir yüzeyin Gauss eğriliği

$$K = \frac{\varphi_{11}\varphi_{22} - (\varphi_{12})^2}{\phi_{11}\phi_{22} - (\phi_{12})^2} \tag{4.142}$$

şeklinde tanımlanır. O halde (4.132) ve (4.136) eşitlikleri yardımıyla M^2 öteleme yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = \frac{k_{1\alpha}k_{1\beta}\cos\theta_\alpha\cos\theta_\beta}{\sin^2\sigma} \tag{4.143}$$

şeklinde elde edilir. ■

Teorem 4.30. *M^2, $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\phi(u,v) = M^2$ parametrik denklemiyle verilen öteleme yüzeyi olsun. M^2 öteleme yüzeyinin ortalama eğriliği*

$$H = \frac{k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha + k_{1\beta}\cos\theta_\beta}{2\sin^2\sigma} \tag{4.144}$$

şeklindedir [5, 22].

İspat. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir yüzeyin ortalama eğriliği

$$H = \frac{\phi_{11}\varphi_{22} - 2\phi_{12}\varphi_{12} + \phi_{22}\varphi_{11}}{2\left(\phi_{11}\phi_{22} - (\phi_{12})^2\right)} \tag{4.145}$$

şeklinde tanımlanır. O halde (4.132) ve (4.136) eşitlikleri yardımıyla M^2 öteleme yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \frac{k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha + k_{1\beta}\cos\theta_\beta}{2\sin^2\sigma} \tag{4.146}$$

şeklinde elde edilir. ■

5
$\mathbb{E}^4$ ÖKLİD UZAYINDA ÖTELEME HİPERYÜZEYLERİ

5.1 $\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayında Birim Hızlı, Düzlemsel Olmayan Eğriler Tarafından Üretilen Öteleme Hiperyüzeyleri

Tezin bu orijinal bölümünde 4 boyutlu Öklid uzayında 3 parametreli öteleme hiperyüzeylerinin geometrik özellikleri incelenmiştir. Öteleme hiperyüzeylerinin birim normal vektör alanı, temel formları, şekil operatörü matrisi, Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği hesaplanmıştır. Bu bölüm [5]'de verilen birim hızlı düzlemsel olmayan eğriler tarafından üretilen öteleme hiperyüzeylerinin 4-boyutlu Öklid uzayında bir genellemesidir.

Tanım 5.1. $\mathbb{E}^4$, 4 boyutlu Öklid uzayında α, β ve γ birim hızlı, düzlemsel olmayan eğriler olmak üzere bu eğriler aşağıdaki şekilde verilsin:

$$\begin{aligned}
&\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4 \\
&\quad u \to \alpha(u) = \big(\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u), \alpha_4(u)\big) \\
&\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4 \\
&\quad v \to \beta(v) = \big(\beta_1(v), \beta_2(v), \beta_3(v), \beta_4(v)\big) \\
&\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4 \\
&\quad w \to \gamma(w) = \big(\gamma_1(w), \gamma_2(w), \gamma_3(w), \gamma_4(w)\big)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

$\{\phi_u, \phi_v, \phi_w\}$ sistemi lineer bağımsız olmak üzere aşağıda parametrik denklemiyle verilen

$$\begin{aligned}
&\phi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^4 \\
&(u,v,w) \to \phi(u,v,w) = \alpha(u) + \beta(v) + \gamma(w) \\
&\qquad = \big(\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u), \alpha_4(u)\big) + \big(\beta_1(v), \beta_2(v), \beta_3(v), \beta_4(v)\big) \\
&\qquad\quad + \big(\gamma_1(w), \gamma_2(w), \gamma_3(w), \gamma_4(w)\big) \\
&\qquad = (\alpha_1(u) + \beta_1(v) + \gamma_1(w), \alpha_2(u) + \beta_2(v) + \gamma_2(w), \\
&\qquad\quad \alpha_3(u) + \beta_3(v) + \gamma_3(w), \alpha_4(u) + \beta_4(v) + \gamma_4(w)) \\
&\qquad = \big(\phi_1(u,v,w), \phi_2(u,v,w), \phi_3(u,v,w), \phi_4(u,v,w)\big)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

şeklinde tanımlı $\phi(u,v,w) = M^3$ yüzeyine $\mathbb{E}^4$ *uzayında öteleme hiperyüzeyi* denir.

Burada $\alpha(u)$, $\beta(v)$ ve $\gamma(w)$ eğrilerine $\phi(u,v,w) = M^3$ öteleme hiperyüzeyinin *üreteç eğrileri* adı verilir.[1]

5.1.1 Birim Normal Vektör Alanı

Teorem 5.1. *M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u,v,w) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme hiperyüzeyi olsun. M^3 öteleme hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı*

$$N = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(T_\alpha \otimes T_\beta \otimes T_\gamma\right) \tag{5.3}$$

şeklindedir. Burada $\Delta = 1 - \cos^2\sigma_{\alpha\beta} - \cos^2\sigma_{\alpha\gamma} - \cos^2\sigma_{\beta\gamma} + 2\cos\sigma_{\alpha\beta}\cos\sigma_{\alpha\gamma}\cos\sigma_{\beta\gamma}$ *olup*

$$\begin{aligned}
&\sigma_{\alpha\beta},\ T_\alpha \text{ ile } T_\beta \text{ arasındaki açı,}\\
&\sigma_{\alpha\gamma},\ T_\alpha \text{ ile } T_\gamma \text{ arasındaki açı,}\\
&\sigma_{\beta\gamma},\ T_\beta \text{ ile } T_\gamma \text{ arasındaki açıdır.}
\end{aligned}$$

İspat. $\chi\left(M^3\right) = Sp\{\phi_u, \phi_v, \phi_w\}$ olmak üzere $\phi(u,v,w) = M^3$ öteleme hiperyüzeyinin teğet vektörleri

$$\begin{aligned}
\phi_u &= \alpha'(u) = T_\alpha,\\
\phi_v &= \beta'(v) = T_\beta,\\
\phi_w &= \gamma'(w) = T_\gamma
\end{aligned} \tag{5.4}$$

şeklinde bulunur. Buradan (5.4) eşitlikleri (5.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$N = \frac{T_\alpha \otimes T_\beta \otimes T_\gamma}{\left\|T_\alpha \otimes T_\beta \otimes T_\gamma\right\|} \tag{5.5}$$

elde edilir. Vektörel çarpımın 4. özelliğinden

$$\begin{aligned}
\Delta = \left\|T_\alpha \otimes T_\beta \otimes T_\gamma\right\|^2 &= \begin{vmatrix} \langle T_\alpha, T_\alpha\rangle & \langle T_\alpha, T_\beta\rangle & \langle T_\alpha, T_\gamma\rangle \\ \langle T_\beta, T_\alpha\rangle & \langle T_\beta, T_\beta\rangle & \langle T_\beta, T_\gamma\rangle \\ \langle T_\gamma, T_\alpha\rangle & \langle T_\gamma, T_\beta\rangle & \langle T_\gamma, T_\gamma\rangle \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} 1 & \cos\sigma_{\alpha\beta} & \cos\sigma_{\alpha\gamma} \\ \cos\sigma_{\alpha\beta} & 1 & \cos\sigma_{\beta\gamma} \\ \cos\sigma_{\alpha\gamma} & \cos\sigma_{\beta\gamma} & 1 \end{vmatrix}\\
&= 1 - \cos^2\sigma_{\alpha\beta} - \cos^2\sigma_{\alpha\gamma} - \cos^2\sigma_{\beta\gamma} + 2\cos\sigma_{\alpha\beta}\cos\sigma_{\alpha\gamma}\cos\sigma_{\beta\gamma}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

bulunur.

[1] [31] numaralı kaynakta sunulmuştur.

O halde M^3 öteleme hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(T_\alpha \otimes T_\beta \otimes T_\gamma\right) \tag{5.7}$$

şeklinde elde edilir. ■

5.1.2 Temel Formlar

Teorem 5.2. *M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u,v,w) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme hiperyüzeyi olsun. M^3 öteleme hiperyüzeyinin I. temel formu*

$$I = du^2 + dv^2 + dw^2 + 2\left(\cos\sigma_{\alpha\beta}dudv + \cos\sigma_{\alpha\gamma}dudw + \cos\sigma_{\beta\gamma}dvdw\right) \tag{5.8}$$

şeklindedir.

İspat. M^3 öteleme hiperyüzeyinin I. temel form katsayıları (3.16) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
&\phi_{11} = \langle \phi_u, \phi_u\rangle = \langle T_\alpha, T_\alpha\rangle = 1,\\
&\phi_{22} = \langle \phi_v, \phi_v\rangle = \left\langle T_\beta, T_\beta\right\rangle = 1,\\
&\phi_{33} = \langle \phi_w, \phi_w\rangle = \left\langle T_\gamma, T_\gamma\right\rangle = 1,\\
&\phi_{12} = \langle \phi_u, \phi_v\rangle = \langle \phi_v, \phi_u\rangle = \phi_{21} = \left\langle T_\alpha, T_\beta\right\rangle = \left\|T_\alpha\right\|\left\|T_\beta\right\|\cos\sigma_{\alpha\beta} = \cos\sigma_{\alpha\beta},\\
&\phi_{13} = \langle \phi_u, \phi_w\rangle = \langle \phi_w, \phi_u\rangle = \phi_{31} = \left\langle T_\alpha, T_\gamma\right\rangle = \left\|T_\alpha\right\|\left\|T_\gamma\right\|\cos\sigma_{\alpha\gamma} = \cos\sigma_{\alpha\gamma},\\
&\phi_{23} = \langle \phi_v, \phi_w\rangle = \langle \phi_w, \phi_v\rangle = \phi_{32} = \left\langle T_\beta, T_\gamma\right\rangle = \left\|T_\beta\right\|\left\|T_\gamma\right\|\cos\sigma_{\beta\gamma} = \cos\sigma_{\beta\gamma}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

şeklinde bulunur. Buradan (5.9) eşitlikleri (3.6) denkleminde yerine yazılırsa M^3 öteleme hiperyüzeyinin I. temel formu

$$I = du^2 + dv^2 + dw^2 + 2\left(\cos\sigma_{\alpha\beta}dudv + \cos\sigma_{\alpha\gamma}dudw + \cos\sigma_{\beta\gamma}dvdw\right) \tag{5.10}$$

şeklinde elde edilir. ■

Teorem 5.3. *M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u,v,w) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme hiperyüzeyi olsun. M^3 öteleme hiperyüzeyinin II. temel formu*

$$II = -k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha du^2 - k_{1\beta}\cos\theta_\beta dv^2 - k_{1\gamma}\cos\theta_\gamma dw^2 \tag{5.11}$$

şeklindedir. Burada

θ_α, *N ile N_α arasındaki açı,*
θ_β, *N ile N_β arasındaki açı ve*
θ_γ, *N ile N_γ arasındaki açıdır.*

İspat. M^3 öteleme hiperyüzeyinin II. temel form katsayıları

$$\begin{aligned}
\varphi_{11} &= -\langle N, \phi_{uu}\rangle = -\langle N, k_{1\alpha}N_\alpha\rangle = -k_{1\alpha}\langle N, N_\alpha\rangle = -k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha,\\
\varphi_{22} &= -\langle N, \phi_{vv}\rangle = -\left\langle N, k_{1\beta}N_\beta\right\rangle = -k_{1\beta}\left\langle N, N_\beta\right\rangle = -k_{1\beta}\cos\theta_\beta,\\
\varphi_{33} &= -\langle N, \phi_{ww}\rangle = -\left\langle N, k_{1\gamma}N_\gamma\right\rangle = -k_{1\gamma}\left\langle N, N_\gamma\right\rangle = -k_{1\gamma}\cos\theta_\gamma,\\
\varphi_{12} &= -\langle N, \phi_{uv}\rangle = -\langle N, 0\rangle = 0,\\
\varphi_{13} &= -\langle N, \phi_{uw}\rangle = -\langle N, 0\rangle = 0,\\
\varphi_{23} &= -\langle N, \phi_{vw}\rangle = -\langle N, 0\rangle = 0
\end{aligned} \tag{5.12}$$

şeklinde bulunur. Buradan (5.12) eşitliklikleri (3.20) denkleminde yerine yazılırsa M^3 öteleme hiperyüzeyinin II. temel formu

$$II = -k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha du^2 - k_{1\beta}\cos\theta_\beta dv^2 - k_{1\gamma}\cos\theta_\gamma dw^2 \tag{5.13}$$

şeklinde elde edilir. ■

5.1.3 Şekil Operatörü

Teorem 5.4. *M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u,v,w) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme hiperyüzeyi olsun.*

$$\begin{aligned}
A &= \cos\sigma_{\alpha\beta} - \cos\sigma_{\alpha\gamma}\cos\sigma_{\beta\gamma},\\
B &= \cos\sigma_{\alpha\beta}\cos\sigma_{\beta\gamma} - \cos\sigma_{\alpha\gamma},\\
C &= \cos\sigma_{\beta\gamma} - \cos\sigma_{\alpha\gamma}\cos\sigma_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

olmak üzere M^3 öteleme hiperyüzeyinin şekil operatörü matrisi

$$S = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} -k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha\sin^2\sigma_{\beta\gamma} & k_{1\beta}\cos\theta_\beta A & -k_{1\gamma}\cos\theta_\gamma B\\ k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha A & -k_{1\beta}\cos\theta_\beta\sin^2\sigma_{\alpha\gamma} & k_{1\gamma}\cos\theta_\gamma C\\ -k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha B & k_{1\beta}\cos\theta_\beta C & -k_{1\gamma}\cos\theta_\gamma\sin^2\sigma_{\alpha\beta}\end{pmatrix} \tag{5.15}$$

şeklindedir.

İspat. M^3 öteleme hiperyüzeyinin I. temel form katsayılarına karşılık gelen matrisi (5.9) eşitlikleri (3.11) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\sigma_{\alpha\beta} & \cos\sigma_{\alpha\gamma}\\ \cos\sigma_{\alpha\beta} & 1 & \cos\sigma_{\beta\gamma}\\ \cos\sigma_{\alpha\gamma} & \cos\sigma_{\beta\gamma} & 1\end{pmatrix} \tag{5.16}$$

şeklinde elde edilir.

Buradan $\mathbf{I}$ matrisinin tersi

$$\mathbf{I}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \sin^2\sigma_{\beta\gamma} & -\cos\sigma_{\alpha\beta}+\cos\sigma_{\alpha\gamma}\cos\sigma_{\beta\gamma} & -\cos\sigma_{\alpha\gamma}+\cos\sigma_{\alpha\beta}\cos\sigma_{\beta\gamma} \\ -\cos\sigma_{\alpha\beta}+\cos\sigma_{\alpha\gamma}\cos\sigma_{\beta\gamma} & \sin^2\sigma_{\alpha\gamma} & -\cos\sigma_{\beta\gamma}+\cos\sigma_{\alpha\beta}\cos\sigma_{\alpha\gamma} \\ -\cos\sigma_{\alpha\gamma}+\cos\sigma_{\alpha\beta}\cos\sigma_{\beta\gamma} & -\cos\sigma_{\beta\gamma}+\cos\sigma_{\alpha\beta}\cos\sigma_{\alpha\gamma} & \sin^2\sigma_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

şeklinde bulunur. (5.14) eşitlikleri (5.17) matrisinde yerine yazılırsa I. temel form katsayılarına karşılık gelen matrisin tersi

$$\mathbf{I}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \sin^2\sigma_{\beta\gamma} & -A & B \\ -A & \sin^2\sigma_{\alpha\gamma} & -C \\ B & -C & \sin^2\sigma_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

şeklinde elde edilir. M^3 öteleme hiperyüzeyinin II. temel form katsayılarına karşılık gelen matrisi ise (5.12) eşitlikleri (3.23) denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{II} = \begin{pmatrix} -k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -k_{1\beta}\cos\theta_\beta & 0 \\ 0 & 0 & -k_{1\gamma}\cos\theta_\gamma \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

şeklinde bulunur. Bulunan değerler (3.26) denkleminde yerine yazılırsa

$$S = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{II} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \sin^2\sigma_{\beta\gamma} & -A & B \\ -A & \sin^2\sigma_{\alpha\gamma} & -C \\ B & -C & \sin^2\sigma_{\alpha\beta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -k_{1\beta}\cos\theta_\beta & 0 \\ 0 & 0 & -k_{1\gamma}\cos\theta_\gamma \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

M^3 öteleme hiperyüzeyinin şekil operatörü matrisi

$$S = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} -k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha\sin^2\sigma_{\beta\gamma} & k_{1\beta}\cos\theta_\beta A & -k_{1\gamma}\cos\theta_\gamma B \\ k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha A & -k_{1\beta}\cos\theta_\beta\sin^2\sigma_{\alpha\gamma} & k_{1\gamma}\cos\theta_\gamma C \\ -k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha B & k_{1\beta}\cos\theta_\beta C & -k_{1\gamma}\cos\theta_\gamma\sin^2\sigma_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

şeklinde elde edilir. ■

5.1.4 Gauss Eğriliği

Teorem 5.5. *M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u,v,w) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme hiperyüzeyi olsun. M^3 öteleme hiperyüzeyinin Gauss eğriliği*

$$K = \frac{1}{\Delta}\left[k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha k_{1\beta}\cos\theta_\beta k_{1\gamma}\cos\theta_\gamma\left(A^2\sin^2\sigma_{\alpha\beta}+B^2\sin^2\sigma_{\alpha\gamma}+C^2\sin^2\sigma_{\beta\gamma}-2ABC-\sin^2\sigma_{\alpha\beta}\sin^2\sigma_{\alpha\gamma}\sin^2\sigma_{\beta\gamma}\right)\right] \quad (5.22)$$

şeklindedir.

İspat. M^3 öteleme hiperyüzeyinin Gauss eğriliği (3.34) denklemi kullanılarak

$$K = \det S = \frac{1}{\Delta^3}\begin{vmatrix} -k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha \sin^2\sigma_{\beta\gamma} & k_{1\beta}\cos\theta_\beta A & -k_{1\gamma}\cos\theta_\gamma B \\ k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha A & -k_{1\beta}\cos\theta_\beta \sin^2\sigma_{\alpha\gamma} & k_{1\gamma}\cos\theta_\gamma C \\ -k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha B & k_{1\beta}\cos\theta_\beta C & -k_{1\gamma}\cos\theta_\gamma \sin^2\sigma_{\alpha\beta} \end{vmatrix} \tag{5.23}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} K =& \frac{1}{\Delta^3}\big[-k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha \sin^2\sigma_{\beta\gamma}\left(k_{1\beta}\cos\theta_\beta \sin^2\sigma_{\alpha\gamma} k_{1\gamma}\cos\theta_\gamma \sin^2\sigma_{\alpha\beta} - C^2 k_{1\beta}\cos\theta_\beta k_{1\gamma}\cos\theta_\gamma\right) \\ & - k_{1\beta}\cos\theta_\beta A\left(-k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha k_{1\gamma}\cos\theta_\gamma \sin^2\sigma_{\alpha\beta} A + k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha k_{1\gamma}\cos\theta_\gamma BC\right) \\ & + k_{1\gamma}\cos\theta_\gamma B\left(k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha k_{1\beta}\cos\theta_\beta AC - k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha k_{1\beta}\cos\theta_\beta \sin^2\sigma_{\alpha\gamma}\right)\big] \\ =& \frac{1}{\Delta^3}\big[k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha k_{1\beta}\cos\theta_\beta k_{1\gamma}\cos\theta_\gamma\left(C^2\sin^2\sigma_{\beta\gamma} - \sin^2\sigma_{\alpha\beta}\sin^2\sigma_{\alpha\gamma}\sin^2\sigma_{\beta\gamma}\right) \\ & + k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha k_{1\beta}\cos\theta_\beta k_{1\gamma}\cos\theta_\gamma\left(A^2\sin^2\sigma_{\alpha\beta} - ABC\right) \\ & + k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha k_{1\beta}\cos\theta_\beta k_{1\gamma}\cos\theta_\gamma\left(-ABC + B^2\sin^2\sigma_{\alpha\gamma}\right)\big] \end{aligned} \tag{5.24}$$

bulunur. O halde M^3 öteleme hiperyüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = \frac{1}{\Delta^3}\left[k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha k_{1\beta}\cos\theta_\beta k_{1\gamma}\cos\theta_\gamma\left(A^2\sin^2\sigma_{\alpha\beta} + B^2\sin^2\sigma_{\alpha\gamma} + C^2\sin^2\sigma_{\beta\gamma} - 2ABC - \sin^2\sigma_{\alpha\beta}\sin^2\sigma_{\alpha\gamma}\sin^2\sigma_{\beta\gamma}\right)\right] \tag{5.25}$$

şeklinde elde edilir. ■

5.1.5 Ortalama Eğrilik

Teorem 5.6. *M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında $\phi(u,v,w) = \phi(U)$ parametrik denklemiyle verilen öteleme hiperyüzeyi olsun. M^3 öteleme hiperyüzeyinin ortalama eğriliği*

$$H = -\frac{1}{3\Delta}\left[k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha \sin^2\sigma_{\beta\gamma} + k_{1\beta}\cos\theta_\beta \sin^2\sigma_{\alpha\gamma} + k_{1\gamma}\cos\theta\gamma \sin^2\sigma_{\alpha\beta}\right] \tag{5.26}$$

şeklindedir.

İspat. M^3 öteleme hiperyüzeyinin ortalama eğriliği (3.36) denkleminden

$$H = \frac{1}{3}\mathrm{iz}S = -\frac{1}{3\Delta}\left[k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha \sin^2\sigma_{\beta\gamma} + k_{1\beta}\cos\theta_\beta \sin^2\sigma_{\alpha\gamma} + k_{1\gamma}\cos\theta\gamma \sin^2\sigma_{\alpha\beta}\right] \tag{5.27}$$

şeklinde bulunur. ■

Teorem 5.7. *M^3, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir öteleme hiperyüzeyi olsun. α, β ve γ birinci eğrilikleri sıfırdan farklı uzay eğrileri olmak üzere bu üç üreteç eğrisinden herhangi ikisi asimptotik çizgi olsun. Üreteç eğrilerinin teğetleri aynı doğrultuda olmasın. Yani T_α ve T_β arasındaki açı $k = 0,1,2,\ldots$ için $\sigma_{\alpha\beta} \neq k\pi$ olsun. O halde öteleme hiperyüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter koşul üçüncü üreteç eğrisinin de asimptotik çizgi olmasıdır.*

İspat. $(\Rightarrow)$: α,β asimptotik çizgi ve M^3 bir minimal öteleme hiperyüzeyi olsun. γ eğrisinin de asimptotik çizgi olduğunu ispatlayalım:
M^3 minimal öteleme hiperyüzeyi olduğundan

$$H=-\frac{1}{3\Delta}\left[k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha\sin^2\sigma_{\beta\gamma}+k_{1\beta}\cos\theta_\beta\sin^2\sigma_{\alpha\gamma}+k_{1\gamma}\cos\theta\gamma\sin^2\sigma_{\alpha\beta}\right]=0 \tag{5.28}$$

yazılabilir. Buradan

$$k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha\sin^2\sigma_{\beta\gamma}+k_{1\beta}\cos\theta_\beta\sin^2\sigma_{\alpha\gamma}+k_{1\gamma}\cos\theta\gamma\sin^2\sigma_{\alpha\beta}=0 \tag{5.29}$$

olur. α, β ve γ birinci eğrilikleri sıfırdan farklı uzay eğrileri ve α ve β asimptotik çizgi olduğundan

$$k_{1\alpha}\neq 0,\quad k_{1\beta}\neq 0,\quad k_{1\gamma}\neq 0 \tag{5.30}$$

ve teorem 3.5 gereğince $\langle\alpha'',N\rangle=0$ ve $\langle\beta'',N\rangle=0$ dır. Buradan

$$\langle\alpha'',N\rangle=\langle T_\alpha^{'},N\rangle=\langle k_{1\alpha}N_\alpha,N\rangle=k_{1\alpha}\langle N_\alpha,N\rangle=k_{1\alpha}\|N_\alpha\|\,\|N\|\cos\theta_\alpha=k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha=0 \tag{5.31}$$

ve $k_{1\alpha}\neq 0$ olduğundan $\cos\theta_\alpha=0$ bulunur. Benzer işlem β eğrisi için de yapılırsa $\cos\theta_\beta=0$ bulunur. Bulunan değerler (5.29) denkleminde yerine yazılırsa $k_{1\gamma}\neq 0$ ve T_α ile T_β arasındaki açı $k=0,1,2,...$ için $\sigma_{\alpha\beta}\neq k\pi$ olduğundan $\cos\theta_\gamma=0$ yani $\langle\gamma'',N\rangle=0$ elde edilir. O halde teorem 3.5 gereğince γ eğrisi hiperyüzey üzerinde bir asimptotik çizgidir.

$(\Leftarrow)$: α,β ve γ asimptotik çizgi olsun. M^3 öteleme hiperyüzeyinin minimal olduğunu ispatlayalım:
α,β ve γ asimptotik çizgi olduğundan teorem 3.5 gereğince

$$\langle\alpha'',N\rangle=\cos\theta_\alpha=0,\quad\langle\beta'',N\rangle=\cos\theta_\beta=0,\quad\langle\gamma'',N\rangle=\cos\theta_\gamma=0 \tag{5.32}$$

yazılabilir. Bulunan değerler (5.26) denkleminde yerine yazılırsa

$$H=-\frac{1}{3\Delta}\left[k_{1\alpha}\cos\theta_\alpha\sin^2\sigma_{\beta\gamma}+k_{1\beta}\cos\theta_\beta\sin^2\sigma_{\alpha\gamma}+k_{1\gamma}\cos\theta\gamma\sin^2\sigma_{\alpha\beta}\right]=0 \tag{5.33}$$

elde edilir. O halde M^3 öteleme hiperyüzeyi minimaldir. ■

Örnek 5.1. $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında

$$\phi(u,v,w)=\left(\frac{\sqrt{6}u}{3}+\cos\frac{v}{2}+\cos\frac{w}{\sqrt{2}}-1,\frac{\sqrt{2}u}{3}+\sin\frac{v}{2}+\sin\frac{w}{\sqrt{2}}+1,\cos\frac{u}{3}+\frac{\sqrt{2}v}{2}+\frac{w}{2}+1,\sin\frac{u}{3}+\frac{v}{2}+\frac{w-1}{2}\right)$$

parametrik denklemiyle verilen yüzey bir öteleme hiperyüzeyi örneğidir. Burada $\phi(u,v,w)=\alpha(u)+\beta(v)+\gamma(w)$ olmak üzere hiperyüzeyin birim hızlı, düzlemsel olmayan üreteç eğrileri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\alpha(u)&=\left(\frac{\sqrt{6}u}{3}-1,\frac{\sqrt{2}u}{3},\cos\frac{u}{3},\sin\frac{u}{3}\right),\\ \beta(v)&=\left(\cos\frac{v}{2},\sin\frac{v}{2},\frac{\sqrt{2}v}{2}+1,\frac{v}{2}\right),\\ \gamma(w)&=\left(\cos\frac{w}{\sqrt{2}},\sin\frac{w}{\sqrt{2}}+1,\frac{w}{2},\frac{w-1}{2}\right).\end{aligned}\tag{5.34}$$

Öteleme hiperyüzeyinin teğet vektörleri

$$\begin{aligned}\phi_u=\alpha'(u)=T_\alpha&=\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{2}}{3},-\frac{1}{3}\sin\frac{u}{3},\frac{1}{3}\cos\frac{u}{3}\right),\\ \phi_v=\beta'(v)=T_\beta&=\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{v}{2},\frac{1}{2}\cos\frac{v}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right),\\ \phi_w=\gamma'(w)=T_\gamma&=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{w}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{w}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\end{aligned}\tag{5.35}$$

şeklinde olup $\left\|\alpha'(u)\right\|=\left\|\beta'(v)\right\|=\left\|\gamma'(w)\right\|=1$ olduğundan üreteç eğrileri birim hızlıdır.

α üreteç eğrisinin u parametresine göre ikinci türevi $\alpha''(u)=\left(0,0,-\frac{1}{9}\cos\frac{u}{3},-\frac{1}{9}\sin\frac{u}{3}\right)$ olmak üzere eğrinin birinci eğriliği $k_{1\alpha}=\frac{1}{9}$ şeklinde elde edilir. Buradan α eğrisinin asli normal vektör alanı (2.9) denklemi yardımıyla $N_\alpha=\left(0,0,-\cos\frac{u}{3},-\sin\frac{u}{3}\right)$ şeklinde bulunur. α eğrisinin u parametresine göre üçüncü türevi $\alpha'''(u)=\left(0,0,\frac{1}{27}\sin\frac{u}{3},-\frac{1}{27}\cos\frac{u}{3}\right)$ olmak üzere eğrinin ikinci binormal vektör alanı ise

$$\begin{aligned}\alpha'\otimes\alpha''\otimes\alpha'''&=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3 & e_4\\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3}\sin\frac{u}{3} & \frac{1}{3}\cos\frac{u}{3}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{9}\cos\frac{u}{3} & -\frac{1}{9}\sin\frac{u}{3}\\ 0 & 0 & \frac{1}{27}\sin\frac{u}{3} & -\frac{1}{27}\cos\frac{u}{3}\end{vmatrix}\\ &=\left(\frac{\sqrt{2}}{729},-\frac{\sqrt{6}}{729},0,0\right)\end{aligned}\tag{5.36}$$

ve

$$\left\|\alpha' \otimes \alpha'' \otimes \alpha'''\right\| = \frac{2\sqrt{2}}{729} \tag{5.37}$$

eşitliklerinden ve (2.9) denkleminden $B_{2\alpha} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right)$ şeklinde elde edilir. α eğrisinin birinci binormal vektör alanı ise (2.9) denkleminden

$$\begin{aligned} B_{1\alpha} &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3}\sin\frac{u}{3} & \frac{1}{3}\cos\frac{u}{3} \\ 0 & 0 & -\cos\frac{u}{3} & -\sin\frac{u}{3} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\left(\sqrt{3}, 1, 4\sqrt{2}\sin\frac{u}{3}, 4\sqrt{2}\cos\frac{u}{3}\right) \end{aligned} \tag{5.38}$$

şeklinde bulunur. Buradan

$$\left\langle B_{1\alpha}, \alpha'''\right\rangle = \frac{2\sqrt{2}}{81}\cos^2\frac{u}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{81}\sin^2\frac{u}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{81} \tag{5.39}$$

elde edilir. Bulunan değerler (2.10) denkleminde yerine yazılırsa α eğrisinin ikinci eğriliği

$$k_{2\alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{81}}{\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{9} \tag{5.40}$$

şeklinde bulunur. O halde $k_{2\alpha} \neq 0$ olduğundan α eğrisi düzlemsel değildir.

β üreteç eğrisinin v parametresine göre ikinci türevi $\beta''(v) = \left(-\frac{1}{4}\cos\frac{v}{2}, -\frac{1}{4}\sin\frac{v}{2}, 0, 0\right)$ olmak üzere eğrinin birinci eğriliği $k_{1\beta} = \frac{1}{4}$ şeklinde elde edilir. Buradan β eğrisinin asli normal vektör alanı (2.9) denklemi yardımıyla $N_\beta = \left(-\cos\frac{v}{2}, -\sin\frac{v}{2}, 0, 0\right)$ şeklinde bulunur. β eğrisinin v parametresine göre üçüncü türevi $\beta'''(v) = \left(\frac{1}{8}\sin\frac{v}{2}, -\frac{1}{8}\cos\frac{v}{2}, 0, 0\right)$ olmak üzere

eğrinin ikinci binormal vektör alanı ise

$$\begin{aligned}\beta' \otimes \beta'' \otimes \beta''' &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{v}{2} & \frac{1}{2}\cos\frac{v}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\cos\frac{v}{2} & -\frac{1}{4}\sin\frac{v}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8}\sin\frac{v}{2} & -\frac{1}{8}\cos\frac{v}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(0, 0, \frac{1}{64}, -\frac{\sqrt{2}}{64}\right)\end{aligned} \tag{5.41}$$

ve

$$\left\|\beta' \otimes \beta'' \otimes \beta'''\right\| = \frac{\sqrt{3}}{64} \tag{5.42}$$

eşitliklerinden ve (2.9) denkleminden $B_{2\beta} = \left(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ şeklinde elde edilir. β eğrisinin birinci binormal vektör alanı ise (2.9) denkleminden

$$\begin{aligned}B_{1\beta} &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{v}{2} & \frac{1}{2}\cos\frac{v}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\cos\frac{v}{2} & -\sin\frac{v}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(3\sin\frac{v}{2}, -3\cos\frac{v}{2}, \sqrt{2}, 1\right)\end{aligned} \tag{5.43}$$

şeklinde bulunur. Buradan

$$\left\langle B_{1\beta}, \beta'''\right\rangle = \frac{3}{16\sqrt{3}}\sin^2\frac{v}{2} + \frac{3}{16\sqrt{3}}\cos^2\frac{v}{2} = \frac{3}{16\sqrt{3}} \tag{5.44}$$

elde edilir. Bulunan değerler (2.10) denkleminde yerine yazılırsa β eğrisinin ikinci eğriliği

$$k_{2\beta} = \frac{\frac{3}{16\sqrt{3}}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt{3}} \tag{5.45}$$

şeklinde bulunur. O halde $k_{2\beta} \neq 0$ olduğundan β eğrisi düzlemsel değildir.

γ üreteç eğrisinin w parametresine göre ikinci türevi $\gamma''(w) = \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{w}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\sin\frac{w}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$ olmak üzere eğrinin birinci eğriliği $k_{1\gamma} = \frac{1}{2}$ şeklinde elde edilir.

Buradan γ eğrisinin asli normal vektör alanı (2.9) denklemi yardımıyla $N_\gamma = \left(-\cos\frac{w}{\sqrt{2}}, -\sin\frac{w}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$ şeklinde bulunur. γ eğrisinin w parametresine göre üçüncü türevi $\gamma'''(w) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\frac{w}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{w}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$ olmak üzere eğrinin ikinci binormal vektör alanı ise

$$\begin{aligned}\gamma' \otimes \gamma'' \otimes \gamma''' &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{w}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{w}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\cos\frac{w}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\sin\frac{w}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\frac{w}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{w}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(0, 0, \frac{1}{8\sqrt{2}}, -\frac{1}{8\sqrt{2}}\right)\end{aligned} \tag{5.46}$$

ve

$$\left\|\gamma' \otimes \gamma'' \otimes \gamma'''\right\| = \frac{1}{8} \tag{5.47}$$

eşitliklerinden ve (2.9) denkleminden $B_{2\gamma} = \left(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ şeklinde elde edilir. γ eğrisinin birinci binormal vektör alanı ise (2.9) denkleminden

$$\begin{aligned}B_{1\gamma} &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{w}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{w}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\cos\frac{w}{\sqrt{2}} & -\sin\frac{w}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\sin\frac{w}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\cos\frac{w}{\sqrt{2}}, 1, 1\right)\end{aligned} \tag{5.48}$$

şeklinde bulunur. Buradan

$$\left\langle B_{1\gamma}, \gamma'''\right\rangle = \frac{1}{4}\sin^2\frac{w}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\cos^2\frac{w}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \tag{5.49}$$

elde edilir. Bulunan değerler (2.10) denkleminde yerine yazılırsa γ eğrisinin ikinci eğriliği

$$k_{2\gamma} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \tag{5.50}$$

şeklinde bulunur. O halde $k_{2\gamma} \neq 0$ olduğundan γ eğrisi düzlemsel değildir.

Lineer bağımsızlık tanımını kullanarak $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $c_1\phi_u + c_2\phi_v + c_3\phi_w = \vec{0}$ iken $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ olduğunu gösterelim:

(5.35) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\frac{\sqrt{6}}{3}c_1 - \left(\frac{1}{2}\sin\frac{v}{2}\right)c_2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{w}{\sqrt{2}}\right)c_3 = 0, \tag{5.51}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}c_1 + \left(\frac{1}{2}\cos\frac{v}{2}\right)c_2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{w}{\sqrt{2}}\right)c_3 = 0, \tag{5.52}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\sin\frac{u}{3}\right)c_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}c_2 + \frac{1}{2}c_3 = 0, \tag{5.53}$$

$$\left(\frac{1}{3}\cos\frac{u}{3}\right)c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_3 = 0. \tag{5.54}$$

Buradan (5.52), (5.53) ve (5.54) denklemlerinin katsayılar matrisinin determinantı hesaplanırsa

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2}\cos\frac{v}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{w}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3}\sin\frac{u}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}\cos\frac{u}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{24}\left[6 - 3\sqrt{2} + 2\cos\frac{v}{2}\left(\cos\frac{u}{3} + \sin\frac{u}{3}\right) - 2\cos\frac{w}{\sqrt{2}}\left(2\cos\frac{u}{3} + \sqrt{2}\sin\frac{u}{3}\right)\right] \tag{5.55}$$

elde edilir. Buradan $\det\Lambda \neq 0$ olduğundan homojen lineer denklem sisteminin çözümü aşikardır ve $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ bulunur. Homojen denklem sisteminin çözümü (5.51) denklemini sağlar. O halde $\{\phi_u, \phi_v, \phi_w\}$ sistemi lineer bağımsız olduğundan $\phi(u,v,w) \subset \mathbb{E}^4$ alt kümesi bir hiperyüzey belirtir.

$\phi(u,v,w) = M^3$ hiperyüzeyinin $P = \phi\left(\frac{9\pi}{2}, \pi, 0\right)$ noktasındaki teğet vektörleri (5.35) denklemlerinden aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} \alpha'\left(\frac{9\pi}{2}\right) &= T_\alpha\big|_P = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}, 0\right), \\ \beta'(\pi) &= T_\beta\big|_P = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ \gamma'(0) &= T_\gamma\big|_P = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \tag{5.56}$$

Buradan

$$\left(T_\alpha \otimes T_\beta \otimes T_\gamma\right)\Big|_P = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \tag{5.57}$$

$$= \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2\sqrt{6}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{12}, \frac{1}{6\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

ve

$$\left\|T_\alpha \otimes T_\beta \otimes T_\gamma\right\|_P = \frac{1}{12}\sqrt{61 - 12\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 6\sqrt{6}} \tag{5.58}$$

elde edilir. O halde bulunan değerler (3.4) denkleminde yerine yazılırsa M^3 hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı

$$N\big|_P = \frac{1}{\sqrt{61 - 12\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 6\sqrt{6}}}\left(2, -1 - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}, \sqrt{2} - 2\sqrt{3}, 2\sqrt{6}\right) \tag{5.59}$$

şeklinde elde edilir. M^3 hiperyüzeyinin birinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} &\phi_{11} = \langle T_\alpha, T_\alpha\rangle = 1, \quad \phi_{12}\big|_P = \left\langle T_\alpha\big|_P, T_\beta\big|_P\right\rangle = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6}, \\ &\phi_{22} = \left\langle T_\beta, T_\beta\right\rangle = 1, \quad \phi_{13}\big|_P = \left\langle T_\alpha\big|_P, T_\gamma\big|_P\right\rangle = \frac{1}{2}, \\ &\phi_{33} = \left\langle T_\gamma, T_\gamma\right\rangle = 1, \quad \phi_{23}\big|_P = \left\langle T_\beta\big|_P, T_\gamma\big|_P\right\rangle = \frac{1 + \sqrt{2}}{4} \end{aligned} \tag{5.60}$$

şeklinde bulunur. Bulunan değerler (3.6) denkleminde yerine yazılırsa M^3 hiperyüzeyinin birinci temel formu

$$I\big|_P = du^2 + dv^2 + dw^2 + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{3}dudv + dudw + \frac{1 + \sqrt{2}}{2}dvdw \tag{5.61}$$

şeklinde elde edilir.

M^3 hiperyüzeyinin birinci temel form katsayılarına karşılık gelen matrisi aşağıdaki şekildedir:

$$\mathbf{I}\big|_P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6} & 1 & \frac{1 + \sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1 + \sqrt{2}}{4} & 1 \end{pmatrix} \tag{5.62}$$

M^3 hiperyüzeyinin ikinci türevleri (5.35) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
\phi_{uu} = \alpha''(u) = T'_\alpha &= \left(0, 0, -\frac{1}{9}\cos\frac{u}{3}, -\frac{1}{9}\sin\frac{u}{3}\right), \\
\phi_{vv} = \beta''(v) = T'_\beta &= \left(-\frac{1}{4}\cos\frac{v}{2}, -\frac{1}{4}\sin\frac{v}{2}, 0, 0\right), \\
\phi_{ww} = \gamma''(w) = T'_\gamma &= \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{w}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\sin\frac{w}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)
\end{aligned} \tag{5.63}$$

şeklinde bulunur. Buradan $P = \phi\left(\frac{9\pi}{2}, \pi, 0\right)$ noktasındaki değeri

$$\begin{aligned}
\phi_{uu}\big|_P = \alpha''\left(\frac{9\pi}{2}\right) = T'_\alpha\big|_P &= \left(0, 0, 0, \frac{1}{9}\right), \\
\phi_{vv}\big|_P = \beta''(\pi) = T'_\beta\big|_P &= \left(0, -\frac{1}{4}, 0, 0\right), \\
\phi_{ww}\big|_P = \gamma''(0) = T'_\gamma\big|_P &= \left(-\frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)
\end{aligned} \tag{5.64}$$

şeklinde elde edilir. Buradan M^3 hiperyüzeyinin ikinci temel form katsayıları $\sqrt{61 - 12\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 6\sqrt{6}} = \lambda$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\varphi_{11} &= -\left\langle N\big|_P, \phi_{uu}\big|_P \right\rangle = \frac{2\sqrt{6}}{9\lambda} & \varphi_{12} &= -\langle N, \phi_{uv}\rangle = 0, \\
\varphi_{22} &= -\left\langle N\big|_P, \phi_{vv}\big|_P \right\rangle = \frac{-1 - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{4\lambda} & \varphi_{13} &= -\langle N, \phi_{uw}\rangle = 0, \\
\varphi_{33} &= -\left\langle N\big|_P, \phi_{ww}\big|_P \right\rangle = \frac{1}{\lambda} & \varphi_{23} &= -\langle N, \phi_{vw}\rangle = 0
\end{aligned} \tag{5.65}$$

şeklinde bulunur. O halde M^3 hiperyüzeyinin ikinci temel formu (3.20) denklemi yardımıyla

$$II\big|_P = \frac{2\sqrt{6}}{9\lambda}du^2 + \frac{-1 - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{4\lambda}dv^2 + \frac{1}{\lambda}dw^2 \tag{5.66}$$

şeklinde elde edilir. M^3 hiperyüzeyinin ikinci temel form katsayılarına karşılık gelen matrisi ise

$$\mathbf{II}\big|_P = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{6}}{9\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1 - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{4\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \tag{5.67}$$

şeklinde bulunur.

M^3 hiperyüzeyinin birinci temel form katsayılar matrisinin tersi

$$\mathbf{I}^{-1}\big|_P = \begin{pmatrix} \frac{9(2\sqrt{2}-13)}{-\lambda^2} & \frac{6(\sqrt{2}-4\sqrt{6}-3)}{-\lambda^2} & \frac{12(5+\sqrt{3}+\sqrt{2-\sqrt{3}})}{-\lambda^2} \\ \frac{6(\sqrt{2}-4\sqrt{6}-3)}{-\lambda^2} & \frac{108}{\lambda^2} & \frac{12(3+2\sqrt{2}+\sqrt{6})}{\lambda^2} \\ \frac{12(5+\sqrt{3}+\sqrt{2-\sqrt{3}})}{-\lambda^2} & \frac{12(3+2\sqrt{2}+\sqrt{6})}{\lambda^2} & \frac{16(7+\sqrt{3})}{\lambda^2} \end{pmatrix} \tag{5.68}$$

şeklinde elde edilir. (3.26) denklemi yardımıyla M^3 hiperyüzeyinin şekil operatörü matrisi

$$\begin{aligned} S\big|_P &= \begin{pmatrix} \frac{9(2\sqrt{2}-13)}{-\lambda^2} & \frac{6(\sqrt{2}-4\sqrt{6}-3)}{-\lambda^2} & \frac{12(5+\sqrt{3}+\sqrt{2-\sqrt{3}})}{-\lambda^2} \\ \frac{6(\sqrt{2}-4\sqrt{6}-3)}{-\lambda^2} & \frac{108}{\lambda^2} & \frac{12(3+2\sqrt{2}+\sqrt{6})}{\lambda^2} \\ \frac{12(5+\sqrt{3}+\sqrt{2-\sqrt{3}})}{-\lambda^2} & \frac{12(3+2\sqrt{2}+\sqrt{6})}{\lambda^2} & \frac{16(7+\sqrt{3})}{\lambda^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{6}}{9\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{26\sqrt{6}-8\sqrt{3}}{\lambda^3} & \frac{3\left(21--23\sqrt{2}-8\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)}{2\lambda^3} & -\frac{12\left(5+\sqrt{3}+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}{\lambda^3} \\ \frac{32-\frac{8}{\sqrt{3}}+4\sqrt{6}}{\lambda^3} & \frac{27(-1-2\sqrt{3}+\sqrt{6})}{\lambda^3} & -\frac{12\left(3+2\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{\lambda^3} \\ \frac{8\sqrt{2}(5+\sqrt{3}+\sqrt{2-\sqrt{2}})}{\sqrt{3}\lambda^3} & \frac{3\left(8\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}-3\right)}{\lambda^3} & \frac{16\left(7+\sqrt{3}\right)}{\lambda^3} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.69}$$

şeklinde bulunur. M^3 hiperyüzeyinin Gauss eğriliği ise (3.34) denkleminden

$$K\big|_P = \frac{8\left(47058-35814\sqrt{2}+14292\sqrt{3}-11557\sqrt{6}+12\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(-492+396\sqrt{2}-210\sqrt{3}+175\sqrt{6}\right)\right)}{\lambda^9} \tag{5.70}$$

şeklinde elde edilir. M^3 hiperyüzeyinin ortalama eğriliği ise (3.36) denklemi yardımıyla

$$H\big|_P = \frac{85-46\sqrt{3}+53\sqrt{6}}{\lambda^3} \tag{5.71}$$

şeklinde bulunur.

6
SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında literatürde var olan $\mathbb{E}^n$, $\mathbb{E}^4$ ve $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında öteleme hiperyüzeyleri birim hızlı ve düzlemsel olma durumlarına göre gruplanarak bir araya getirilmiş ve geometrik özellikleri incelenmiştir.

Tezin orijinal kısmı olan beşinci bölümde ise $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında birim hızlı, düzlemsel olmayan üç uzay eğrisi tarafından üretilen öteleme hiperyüzeyleri tanımlanmıştır. Öteleme hiperyüzeylerinin birim normal vektör alanı, temel formları, şekil operatörü matrisi, Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği incelenmiş ve literatüre kazandırılmıştır. Ayrıca teorem 5.7 ile birlikte üreteç eğrilerinin asimptotik olma durumu incelenmiştir.

KAYNAKÇA

[1] H. F. Scherk, "Bemerkungen ber die kleinste fläche innerhalb gegebener grenzen," vol. 13, pp. 185–208, 1835.

[2] L. Verstraelen, J. Walrave, S. Yaprak, "The minimal translation surfaces in euclidean space," *Soochow J. Math*, vol. 20, no. 1, pp. 77–82, 1994.

[3] F. Dillen, L. Verstraelen, L. Vrancken, G. Zafindratafa, "Classification of polynomial translation hypersurfaces of finite type," *Results in Mathematics*, vol. 27, no. 3, pp. 244–249, 1995.

[4] H. Liu, "Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional spaces," *Journal of Geometry*, vol. 64, no. 1-2, pp. 141–149, 1999.

[5] M. Çetin, Y. Tunçer, N. Ekmekçi, "Translation surfaces in euclidean 3-space," *Int. J. Phys. Math. Sci*, vol. 5, no. 4, pp. 49–56, 2011.

[6] A. T. Ali, H. A. Aziz, A. H. Sorour, "On curvatures and points of the translation surfaces in euclidean 3-space," *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, vol. 23, no. 1, pp. 167–172, 2015.

[7] K. Seo, "Translation hypersurfaces with constant curvature in space forms," *Osaka Journal of Mathematics*, vol. 50, no. 3, pp. 631–641, 2013.

[8] Y. Yuan, H. L. Liu, "Some new translation surfaces in 3-minkowski space," *Journal of Mathematical Res. & Exp*, vol. 31, pp. 1123–1128, 2011.

[9] D. W. Yoon, "Weighted minimal translation surfaces in minkowski 3-space with density," *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, vol. 14, no. 12, p. 1 750 178, 2017.

[10] A. Cakmak, M. K. Karacan, S. Kiziltug, D. W. Yoon, "Translatıon surfaces ın the 3-dımensıonal galılean space satısfyıng $\Delta^{II} x_i = \lambda_i x_i$," *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, vol. 54, no. 4, pp. 1241–1254, 2017.

[11] M. E. Aydin, "A generalization of translation surfaces with constant curvature in the isotropic space," *Journal of Geometry*, vol. 107, no. 3, pp. 603–615, 2016.

[12] M. Çetin, H. Kocayiğit, M. Önder, "Translation surfaces according to frenet frame in minkowski 3-space," *Int. J. Phys. Sci*, vol. 7, no. 47, pp. 6135–6143, 2012.

[13] R. López, Ó. Perdomo, "Minimal translation surfaces in euclidean space," *The Journal of Geometric Analysis*, vol. 27, no. 4, pp. 2926–2937, 2017.

[14] M. I. Munteanu, O. Palmas, G. Ruiz-Hernández, "Minimal translation hypersurfaces in euclidean space," *Mediterranean Journal of Mathematics*, vol. 13, no. 5, pp. 2659–2676, 2016.

[15] B. Senoussi, M. Bekkar, "Affine translation surfaces in 3-dimensional euclidean space satisfying $\Delta r_i = \lambda_i r_i$," *Konuralp Journal of Mathematics*, vol. 5, no. 2, pp. 47–53, 2017.

[16] M. Magid, L. Vrancken, "Affine translation surfaces," *Results in Mathematics*, vol. 35, no. 1, pp. 134–144, 1999.

[17] H. Liu, Y. Yu, "Affine translation surfaces in euclidean 3-space," *Proceedings of the Japan Academy, Ser. A, Mathematical Sciences*, vol. 89, no. 9, pp. 111–113, 2013.

[18] F. Dillen, W. Goemans, I. Van de Woestyne, "Translation surfaces of weingarten type in 3-space," 2008.

[19] D. Yang, "Some classifications of weingarten translation hypersurfaces in euclidean space," *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, vol. 61, no. 1, pp. 107–115, 2018.

[20] H. Liu, S. Dal Jung, "Affine translation surfaces with constant mean curvature in euclidean 3-space," *Journal of Geometry*, vol. 108, no. 2, pp. 423–428, 2017.

[21] S. Büyükkütük, "Öklid uzayında öteleme yüzeylerinin bir karakterizasyonu," Yüksek lisans tezi, Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kocaeli, 2012.

[22] Z. Dölek, "$\mathbb{E}^3$ öklid uzayında bazı öteleme yüzeyler," Yüksek lisans tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, 2013.

[23] M. Moruz, M. I. Munteanu, "Minimal translation hypersurfaces in $\mathbb{E}^4$," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 439, no. 2, pp. 798–812, 2016.

[24] G. A. Şekercı, S. Sevinç, A. Çöken, "On the translation hypersurfaces with gauss map G satisfying $\Delta G = AG$," *Miskolc Mathematical Notes*, vol. 20, no. 2, pp. 1215–1225, 2019.

[25] K. Arslan, B. Bayram, B. Bulca, G. Öztürk, "On translation surfaces in 4-dimensional euclidean space," 2016.

[26] S. Yüce, *Lineer Cebir*. Pegem A Yayıncılık, 2020.

[27] S. Yüce, *Analitik Geometri*. Pegem Akademi Yayıncılık, 2020.

[28] S. Yüce, *Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri*. Pegem A Yayıncılık, 2021.

[29] S. Yüce, "Weingarten map of the hypersurface in euclidean 4-space and its applications," *Hagia Sophia Journal of Geometry*, vol. 1, no. 1, pp. 1–8,

[30] M. Altın, A. Kazan, H. bayram Karadağ, "Monge hypersurfaces in euclidean 4-space with density," *Politeknik Dergisi*, vol. 23, no. 1, pp. 207–214, 2020.

[31] İ. Akkılınç, S. Yüce, *4-boyutlu öklid uzayında öteleme hiperyüzeyleri*, Mart 12-13, 2020.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirisi

1. İ. Akkılınç, S. Yüce, "4-Boyutlu Öklid Uzayında Öteleme Hiperyüzeyleri," 3. International Congress on Statistics Mathematics and Analytical Methods, İstanbul, Türkiye, 12-13 Mart, 2020 sf. 79.