T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL UZAY ÜZERİNDE İÇ ÇARPIM YAPILARI VE E.STUDY DÖNÜŞÜMÜ

Maide KOLAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Prof. Dr. Salim YÜCE

Mart, 2023

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL UZAY ÜZERİNDE İÇ ÇARPIM YAPILARI VE E.STUDY DÖNÜŞÜMÜ

Maide KOLAY tarafından hazırlanan tez çalışması 03.03.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Salim YÜCE
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Salim YÜCE, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Nurten GÜRSES, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU, Üye
İstanbul Gelişim Üniversitesi _____

Danışmanım Prof. Dr. Salim YÜCE sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Dual Uzay Üzerinde İç Çarpım Yapıları ve E.Study Dönüşümü başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Maide KOLAY

İmza

Değerli eşime, Yağmur'a ve Yıldırım'a ithafen

TEŞEKKÜR

Bu çalışma boyunca desteğini esirgemeyen, tezin her aşamasında bilgisini, tecrübesini sabırla benimle paylaşan, titizlikle değerli vaktini harcayan kıymetli hocam Prof. Dr. Salim YÜCE'ye teşekkürlerimi sunarım.

Maide KOLAY

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ viii

KISALTMA LİSTESİ ix

ŞEKİL LİSTESİ x

ÖZET xii

ABSTRACT xiv

1 GİRİŞ 1

1.1 Literatür 1

1.2 Tezin Amacı 2

1.3 Orijinal Katkı 2

2 DUAL SAYILAR 3

2.1 Dual Sayılar Kümesi Üzerinde Cebirsel Yapılar 3

2.2 Dual Sayılarda Eşlenik ve Bölme İşlemi 8

2.3 Dual Sayılarda İç Çarpım ve Norm 11

2.4 Dual Sayılarda Matris Gösterimi 13

2.5 Dual Sayıların Kutupsal Gösterimi 16

2.6 Dual Sayının Mutlak Değeri 18

2.7 Dual Sayılarda Sıralama Bağıntısı 19

3 DUAL UZAYLAR 20

3.1 $\mathbb{D}^n$ Dual Uzay 20

3.1.1 $\mathbb{D}$-Modül ve Dual Vektörler 20

3.1.2 Dual Uzayda Dış İşlem 21

3.1.3 $\mathbb{D}^n$ Uzayının $\mathbb{D}$-Modül Üzerinde İç Çarpım Yapısı 21

3.1.4 $\mathbb{D}^n$ Uzayının $\mathbb{D}$-Modül Üzerinde Normu 25

3.1.5 $\mathbb{D}^3$ Dual Uzay 26

3.1.6 $\mathbb{D}^3$ Uzayının $\mathbb{D}$-Modül Üzerinde E.Study Dönüşümü 27

3.1.7 Plücker Koordinatları 29

3.1.8 Dual Açı 30

3.1.9 $\mathbb{D}$-Modül Üzerinde Vektörel Çarpım ve Karma Çarpım 33
3.2 $\mathbb{D}_1^n$ Dual Lorentz Uzay 36
3.2.1 $\mathbb{D}^n$ Uzayının $\mathbb{D}$-Modül Üzerinde Lorentz İç Çarpımı 36
3.2.2 Dual Vektörlerin Sınıflandırılması 40
3.2.3 $\mathbb{D}_1^n$ Üzerinde Norm 41
3.2.4 $\mathbb{D}_1^3$ Dual Lorentz Uzay Üzerinde E.Study Dönüşümü 43
3.2.5 Dual Hiperbolik Açı 60
3.2.6 $\mathbb{D}_1^3$ Dual Lorentz Uzayında Vektörel Çarpım ve Karma Çarpım . 61

4 DUAL UZAY ÜZERİNDE DİĞER İÇ ÇARPIMLAR 63
4.1 Dual Reel İç Çarpım Uzayı 63
4.1.1 $\mathbb{D}^n$ Uzayının $\mathbb{R}$ Vektör Uzayı Üzerinde İç Çarpımı 63
4.1.2 $\mathbb{D}^n$ Uzayının $\mathbb{R}$ Üzerinde Normu 67
4.1.3 $\mathbb{D}^3$ Uzayının $\mathbb{R}$ Üzerinde E.Study Dönüşümü 67
4.2 Dual Eşlenik İç Çarpım Uzayı 68
4.2.1 $\mathbb{D}^n$ Uzayının $\mathbb{D}$ Modül Üzerindeki Eşlenik İç Çarpımı 68
4.2.2 $\mathbb{D}^n$ Uzayının $\mathbb{D}$ Üzerindeki Normu 72
4.2.3 $\mathbb{D}^3$ Uzayının $\mathbb{D}$ Üzerindeki E.Study Dönüşümü 72
4.3 Dual Galile İç Çarpım Uzayı 73
4.3.1 Dual Galile İç Çarpımı 73
4.3.2 Dual Galile Uzayında Özel İç Çarpım 76
4.3.3 Dual Galile Uzayında Vektörlerin Sınıflandırılması: 79
4.3.4 Dual Galile Uzayında Metrik Özellikler 80
4.3.5 Dual Galile Uzayında Vektörel Çarpım 83
4.3.6 Dual Galile Uzayında İzotropik Vektörlerin Özel Vektörel Çarpımı 87
4.3.7 Dual Galile Uzayında Vektörel Çarpımın Özellikleri 87
4.3.8 $\mathbb{DG}^3$ Uzayının $\mathbb{D}$ Üzerinde E.Study Dönüşümleri 94

5 SONUÇ VE ÖNERİLER 101

KAYNAKÇA 102

A LORENTZ UZAY 104
A.1 Lorentz Uzay 104
A.1.1 $\mathbb{R}_1^n$ Uzayında Vektörlerin Sınıflandırılması 105
A.1.2 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Vektörel Çarpım 105
A.1.3 Vektörel Çarpımın Özellikleri 107
A.1.4 Lorentz Uzayında Diklik 107

B GALİLE UZAY 108
B.1 Galile Uzayı 108

B.1.1 Galile Uzayında Metrik Özellikler 108
B.1.2 Galile Uzayında Analitik Geometri 111
B.1.3 Galile Uzayında Lineer Cebir 111
B.1.4 Galile Uzayında Vektörel Çarpım 112
B.1.5 Galile Uzayında İzotropik Vektörlerin Özel Vektörel Çarpımı . . 112
B.1.6 Galile Uzayında Üç Vektör Üzerine Kurulan Paralel yüzlünün Hacmi 114
B.1.7 Karma Çarpım 115
B.1.8 Üç Vektörün Vektörel Çarpımı 116
B.1.9 $\mathbb{G}^3$ Uzayında Plücker Koordinatları 116

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR **118**

SİMGE LİSTESİ

$\langle , \rangle_{\mathbb{DG}}$	Dual Galile İç Çarpım
$\mathbb{DS}^2_\delta$	Dual Galile İzotropik Birim Küre
$\mathbb{DS}^2$	Dual Galile Non-izotropik Birim Küre
$\| \|_{\mathbb{DG}}$	Dual Galile Norm
$\langle , \rangle_{\mathbb{D}\delta}$	Dual Galile Özel İç Çarpım
$\| \|_{\mathbb{D}\delta}$	Dual Galile Özel Norm
$\mathbb{H}^2_0$	Dual Hiperbolik Birim Küre
$\mathbb{S}^2_1$	Dual Lorentz Birim Küre
$\langle , \rangle_{\mathbb{DL}}$	Dual Lorentz İç Çarpımı
$\langle , \rangle_G$	Galile İç Çarpım
$\mathbb{S}^2_\delta$	Galile İzotropik Birim Küre
$\mathbb{S}^2$	Galile Non-izotropik Birim Küre
$\| \|_{\mathbb{G}}$	Galile Norm
$\langle , \rangle_\delta$	Galile Özel İç Çarpım
$\| \|_\delta$	Galile Özel Norm
Λ^2	Light Koni
$\langle , \rangle_L$	Lorentz İç Çarpımı

KISALTMA LİSTESİ

sp	Spacelike
tl	Timelike

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Dual Düzlem 7
Şekil 2.2 Norm 12
Şekil 2.3 Dual düzlemde birim çember 13
Şekil 3.1 $(\vec{a},\vec{a}^*)$ doğrusu 27
Şekil 3.2 Plücker doğru koordinatları 29
Şekil 3.3 Dual açı 30
Şekil 3.4 Dual açının geometrik yorumu 32
Şekil 3.5 Dual Lorentz uzayında E.Study dönüşümü ($\vec{a}$ spacelike) 43
Şekil 3.6 $(\vec{a},\vec{a}^*)=(sp,sp)$ doğrusu 46
Şekil 3.7 $(\vec{a},\vec{a}^*)=(sp,sp)$ doğrusu 47
Şekil 3.8 $(\vec{a},\vec{a}^*)=(sp,sp)$ doğrusu 47
Şekil 3.9 $(\vec{a},\vec{a}^*)=(sp,sp)$ doğrusu 47
Şekil 3.10 $(\vec{a},\vec{a}^*)=(sp,tl)$ doğrusu 48
Şekil 3.11 $(\vec{a},\vec{a}^*)=(sp,tl)$ doğrusu 49
Şekil 3.12 $(\vec{a},\vec{a}^*)=(sp,tl)$ doğrusu 49
Şekil 3.13 $(\vec{a},\vec{a}^*)=(sp,tl)$ doğrusu 49
Şekil 3.14 $(\vec{a},\vec{a}^*)=(sp,tl)$ doğrusu 50
Şekil 3.15 $(\vec{a},\vec{a}^*)=(sp,null)$ doğrusu 51
Şekil 3.16 $(\vec{a},\vec{a}^*)=(sp,null)$ doğrusu 51
Şekil 3.17 $(\vec{a},\vec{a}^*)=(sp,null)$ doğrusu 51
Şekil 3.18 $(\vec{a},\vec{a}^*)=(sp,null)$ doğrusu 52
Şekil 3.19 Dual Lorentz uzayında E.Study dönüşümü ($\vec{a}$ timelike) 52
Şekil 3.20 $(\vec{a},\vec{a}^*)=(tl,sp)$ doğrusu 55
Şekil 3.21 $(\vec{a},\vec{a}^*)=(tl,sp)$ doğrusu 55
Şekil 3.22 $(\vec{a},\vec{a}^*)=(tl,sp)$ doğrusu 55
Şekil 3.23 $(\vec{a},\vec{a}^*)=(tl,sp)$ doğrusu 56
Şekil 3.24 Dual Lorentz uzayında E.Study dönüşümü ($\vec{a}$ null) 56
Şekil 3.25 $(\vec{a},\vec{a}^*)=(null,sp)$ doğrusu 58
Şekil 3.26 $(\vec{a},\vec{a}^*)=(null,sp)$ doğrusu 59
Şekil 3.27 $(\vec{a},\vec{a}^*)=(null,sp)$ doğrusu 59
Şekil 3.28 $(\vec{a},\vec{a}^*)=(null,sp)$ doğrusu 59

Şekil 3.29 $(\vec{a}, \vec{a^*}) = (null, null)$ doğrusu 60
Şekil 4.1 (a, a^*)=(non-izotropik birim, izotropik), (izotropik birim, non-izotropik) doğru 96
Şekil 4.2 $(\vec{a}, \vec{a^*})$=(izotropik birim, izotropik) doğru 99
Şekil B.1 $\mathbb{G}^3$ uzayında non-izotropik birim küre 110
Şekil B.2 $\mathbb{G}^3$ uzayında izotropik birim küre 110

ÖZET

Dual Uzay Üzerinde İç Çarpım Yapıları ve E.Study Dönüşümü

Maide KOLAY

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Salim YÜCE

Bu çalışmada 4 bölüm yer almaktadır.

İlk bölümde literatür özeti, tezin amacı ve bulgular verilmiştir. İkinci bölümde, literatürde var olan dual sayılar kümesi, dual sayılar kümesi üzerindeki cebirsel yapılar, iç çarpım, kutupsal gösterim, mutlak değer ve dual sayılarda sıralama incelenmiştir. Üçüncü bölümde, Dual uzay ve Dual Lorentz uzay tanımlanmış olup üzerinde tanımlı temel işlemlerle beraber cebirsel yapıları incelenmiştir. Bu uzaylar üzerinde literatürde var olan iç çarpım ve norm kavramları verilmiştir. Ayrıca literatürde var olan Dual uzay ve Dual Lorentz uzayı üzerinde tanımlı iç çarpım yapılarıyla birlikte E.Study dönüşümleri verilmiştir. Bu çalışmalarda, E.Study dönüşümleri sonucunda Dual birim küre üzerindeki bir noktanın $\mathbb{R}^3$ uzayındaki yönlü bir doğruya; Dual Lorentz birim küre üzerindeki bir noktanın $\mathbb{R}^3_1$ uzayındaki spacelike doğruya, Dual Hiperbolik birim küre üzerindeki bir noktanın $\mathbb{R}^3_1$ uzayındaki timelike doğruya ve light konisi üzerindeki bir noktanın $\mathbb{R}^3_1$ uzayındaki null doğruya karşılık geldiği elde edilmiştir. Bu çalışmalarda, bahsi geçen doğruların doğrultman vektörleri ve spacelike doğrunun vektörel momentinin sadece timelike olma durumu incelenmiştir. Fakat vektörel momentin spacelike veya null olma durumları yer almadığından bu çalışmada incelenmiştir. Ayrıca timelike ve null doğruların vektörel momentleri de literatürde yer almadığından bu çalışma ile birlikte literatüre kazandırılmıştır. Dördüncü bölümde, $\mathbb{D}^n$ dual uzayının $\mathbb{R}$ cismi üzerinde yeni bir iç çarpım fonksiyonu tanımlanmıştır. Bu iç çarpım fonksiyonu ile $\mathbb{D}^n$ uzayına 'Dual Reel İç Çarpım Uzayı' adı verilmiştir. $\mathbb{D}^n$ dual uzayının $\mathbb{D}$-Modül üzerinde yeni bir iç çarpım

fonksiyonu tanımlanmıştır. Bu iç çarpım fonksiyonu ile $\mathbb{D}^n$ uzayına ise 'Dual Eşlenik İç Çarpım Uzayı' adı verilmiştir. Galile iç çarpımına benzer olarak $\mathbb{D}^n$ uzayı üzerinde bir iç çarpım fonksiyonu tanımlanmış ve bu iç çarpım fonksiyonu ile beraber $\mathbb{D}^n$ uzayına 'Dual Galile İç Çarpım Uzayı' adı verilmiştir. E.Study dönüşümlerinin bu bölümde tanımlanan iç çarpım uzayları için varlığı araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Dual sayılar, dual uzay, iç çarpım, E.Study dönüşümü, dual Lorentz uzay

ABSTRACT

Inner Product Structures on the Dual Space and E.Study Maps

Maide KOLAY

Department of Mathematics
Master of Science Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Salim YÜCE

This study consists of 4 chapters.

In the first chapter, literature review, the aim of the thesis and the results are given. In the second chapter, the set of dual numbers and its algebraic structures, inner product, polar representation, absolute value and order in dual numbers are studied. In the third chapter, Dual space and Dual Lorentz space are defined and their algebraic structures are examined with respect to basic operations over them. For these spaces, the concepts of inner product and norm are given. In addition, the E.Study maps with inner product structures defined on Dual space and Dual Lorentz space are given. According to the literature, in these studies, as a result of E.Study maps, it is obtained that, the trajectory of a point on the Dual unit sphere corresponds to a directed line in $\mathbb{R}^3$, the trajectory of a point on the Dual Lorentz unit sphere corresponds to a spacelike line in $\mathbb{R}^3_1$, the trajectory of a point on the Dual hyperbolic unit sphere corresponds to a timelike line in $\mathbb{R}^3_1$, the trajectory of a point on the light cone corresponds to a null line in $\mathbb{R}^3_1$. In these studies, direction vectors of the mentioned lines and the vector moment of the spacelike line are only timelike. However, since the vector moment is not spacelike or null, it is investigated in this study. Since the vector moments of the timelike and null lines are not included in the literature, this study brought them to the literature. In the fourth chapter, a new inner product function is defined on the dual space $\mathbb{D}^n$ over the field $\mathbb{R}$. With this inner product function, the space $\mathbb{D}^n$ is called 'Dual Real Inner Product Space'. A new inner product function is defined on the $\mathbb{D}$-module of the dual space $\mathbb{D}^n$. The space $\mathbb{D}^n$ with

this inner product function is called ‘Dual Conjugate Inner Product Space’. Similar to the Galilean dot product, an inner product function is defined on dual space $\mathbb{D}^n$ and the dual space with this dot product is called a ‘Dual Galilean Space’. Since this space is an inner product space, it is also called ‘Dual Galilean Inner Product Space’. The existence of E.Study maps is examined for the inner product spaces defined in this section.

Keywords: Dual numbers, dual space, inner product, E.Study map, dual Lorentz space

1
GİRİŞ

$\mathbb{R}^3$ uzayındaki doğrular ailesinin dual küredeki bir eğriye karşılık geldiği ile ilgili E. Study dönüşümü E. Study tarafından [1] verilmiştir. Ayrıca dual uzay ile ilgili temel kavramlar H. Hacısalihoğlu tarafından [2] incelenmiştir. Buna ek olarak dual Lorentz uzay üzerindeki dual Lorentz iç çarpım yapısı kullanılarak E. Study dönüşümü H. H. Uğurlu tarafından [3] verilmiştir. Hem dual uzay hem de dual Lorentz uzay üzerindeki E. Study dönüşümü için geniş bilgi S. Yüce tarafından [4] verilmiştir. Dual Lorentz uzayı üzerinde E. Study dönüşümü incelenirken $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski uzayında doğruların tüm durumları incelenmemiştir. Bu tezde H. H. Uğurlu tarafından [3] incelenmeyen doğruların durumuna göre literatürdeki eksiklik tamamlanmıştır. Ayrıca dual uzay üzerinde yeni iç çarpım yapılarıyla 'Dual Reel İç Çarpım Uzayı', 'Dual Eşlenik İç Çarpım Uzayı' ve 'Dual Galile İç Çarpım Uzayı' tanımlanmıştır. Bu uzaylarda E. Study dönüşümleri tekrardan incelenerek literatüre kazandırılmıştır.

1.1 Literatür

Dual sayılar sistemi üzerinde temel ve cebirsel işlemler bu sayı sistemi ile tanımlanan iç çarpım yapısıyla birlikte dual uzay ve E.Study dönüşümü literatürde detaylı bir şekilde incelenmiştir [1, 2].

Ayrıca Lorentz uzay ile birlikte metrik yapılar, Lorentz uzayındaki vektörlerin sınıflandırılması, Lorentz uzayında vektörel çarpım ve bu vektörel çarpım sonucu elde edilen vektörlerin tipleri ile Lorentz uzayında diklik kavramları literatüre kazandırılmıştır [5–10]. Buna ek olarak dual Lorentz uzayındaki kavramlar ve E.Study dönüşümü H.H.Uğurlu ve E.Study tarafından [1, 3] incelenmiştir. Yine Galile uzayında iç çarpım ve vektörel çarpımın yapısı ile birlikte iç çarpımın ve vektörel çarpımın geometrik yorumu, metrik özellikleri, küre ve açı kavramı, doğru denklemi literatüre kazandırılmıştır [9, 11–13].

1.2 Tezin Amacı

Literatürde dual uzay üzerinde tanımlanan iç çarpım yapısı ve E.Study dönüşümü H.Hilmi Hacısalihoğlu ve S. Yüce tarafından [2, 4] geniş bir şekilde ele alınmıştır. Ayrıca dual Lorentz iç çarpım yapısı kullanılarak E.Study dönüşümü H.H. Uğurlu tarafından [3] incelenmiştir. Ancak bu çalışmada dual Lorentz uzayındaki doğruların doğrultman vektörlerinin spacelike ve timelike vektörleri araştırılmış, bu vektörlere karşılık gelen vektörel momentlerin tiplerinden bahsedilmemiştir. Böylelikle dual Lorentz uzayında bazı doğrular ihmal edilmiştir. Bu tez çalışmasında ihmal edilen bu yapılar tekrardan ele alınarak E.Study dönüşümünü genişletmek amaçlanmıştır. Ayrıca dual uzay üzerinde yeni iç çarpım yapıları da eklenerek bu iç çarpım yapılarındaki E.Study dönüşümü karşılıklarının literatüre kazandırılması amaçlanmıştır.

1.3 Orijinal Katkı

H.H. Uğurlu tarafından E.Study dönüşümü için Minkowski uzayındaki doğruların doğrultman vektörünün spacelike ve timelike durumu [3] incelenmiş olup bu doğrultman vektörlere karşılık gelen vektörel momentin tipleri incelenmemiştir. Bu çalışmada Minkowski uzayındaki doğruların doğrultman vektörlerinin spacelike olması durumunda vektörel momentin spacelike, timelike, null vektör olma durumları incelenmiştir. Buna ek olarak bu doğruların doğrultman vektörlerinin timelike olması durumunda vektörel momentin spacelike olması gerekliliği incelenmiş olup timelike ve null vektör olamama durumu gösterilmiştir. Ayrıca doğrunun doğrultman vektörünün null vektör olması durumunda vektörel moment tiplerinin spacelike ve null vektör olma durumları incelenip timelike vektör olamama durumu araştırılmıştır. Bununla birlikte doğru üzerinde seçilen temsili noktaların konum vektörlerinin durumları da detaylı olarak incelenmiştir. Bu tez çalışması ile birlikte, doğruların doğrultman vektörlerinin spacelike, timelike ve null vektör olması durumunda, doğrultman vektörlere karşılık gelen vektörel momentin tipleri detaylıca incelenerek literatüre kazandırılmıştır. Buna ek olarak tanımlamış olduğumuz yeni iç çarpım yapılarıyla birlikte oluşturulan ‘Dual Reel İç Çarpım Uzayı’, ‘Dual Eşlenik İç Çarpım Uzayı’ ve ‘Dual Galile İç Çarpım Uzayı’ üzerindeki E.Study dönüşümleri literatüre kazandırılmıştır.

2
DUAL SAYILAR

2.1 Dual Sayılar Kümesi Üzerinde Cebirsel Yapılar

Bu bölümde [2, 4] kaynaklarından yararlanılmıştır.

$\mathbb{D} = \{d = (x, x^*) : x, x^* \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesini ve bu küme üzerinde aşağıdaki işlemler tanımlansın:
$\forall d_1 = (x_1, x_1^*), d_2 = (x_2, x_2^*) \in \mathbb{D}$ için

- **Toplama:** $d_1 + d_2 = (x_1, x_1^*) + (x_2, x_2^*) = (x_1 + x_2, x_1^* + x_2^*)$ şeklinde tanımlanır ve $+ : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ şeklinde bir iç işlemdir.
- **Çarpma:** $d_1.d_2 = (x_1, x_1^*).(x_2, x_2^*) = (x_1x_2, x_1x_2^* + x_1^*x_2)$ şeklinde tanımlanır ve $. : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ olduğu görülür.
- **Eşitlik:** $d_1 = (x_1, x_1^*) = d_2 = (x_2, x_2^*)$ olması için gerek ve yeter koşul $x_1 = x_2$ ve $x_1^* = x_2^*$ olmasıdır.

Tanım 2.1. $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri ile birlikte $\mathbb{D}$ kümesine dual sayılar kümesi, her bir elemanına dual sayı denir.

Teorem 2.1. *$\mathbb{D}$, Dual sayılar kümesi üzerinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte birimli ve değişmeli bir halkadır.*

İspat. $d_1 = (x_1, x_1^*), d_2 = (x_2, x_2^*), d_3 = (x_3, x_3^*) \in \mathbb{D}$ olmak üzere;

Kapalılık Özelliği:

$$d_1 + d_2 = (x_1, x_1^*) + (x_2, x_2^*) = (x_1 + x_2, x_1^* + x_2^*) \in \mathbb{D} \tag{2.1}$$

olduğundan $\mathbb{D}$ kümesi $+ : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ işlemine göre kapalıdır.

Birleşme Özelliği:

$$\begin{aligned}(d_1+d_2)+d_3 =&[(x_1,x_1^*)+(x_2,x_2^*)]+(x_3,x_3^*)\\ =&(x_1+x_2,x_1^*+x_2^*)+(x_3,x_3^*)\\ =&[(x_1+x_2)+x_3,(x_1^*+x_2^*)+x_3^*]\\ =&[x_1+(x_2+x_3),x_1^*+(x_2^*+x_3^*)]\\ =&(x_1,x_1^*)+(x_2+x_3,x_2^*+x_3^*)\\ =&(x_1,x_1^*)+[(x_2,x_2^*)+(x_3,x_3^*)]\\ =&d_1+(d_2+d_3)\end{aligned}$$

olduğundan $+$ işlemine göre birleşme özelliği vardır.

Birim eleman: $\forall d=(x,x^*)\in\mathbb{D}$ için $d+0=0+d=d$ olacak şekilde $0=(0,0)\in\mathbb{D}$ birim elemanı vardır. Çünkü

$$d+0=(x,x^*)+(0,0)=(0,0)+(x,x^*)=(x,x^*)=0+d$$

sağlanır.

Ters eleman: $\forall d=(x,x^*)\in\mathbb{D}$ için $d+d^{'}=d^{'}+d=0$ olacak şekilde $d^{'}=-d=(-x,-x^*)\in\mathbb{D}$ ters elemanı mevcuttur. Çünkü

$$d+d^{'}=(x,x^*)+(-x,-x^*)=(-x,-x^*)+(x,x^*)=d^{'}+d=(0,0)$$

sağlanır.

Değişme Özelliği: $\forall d_1=(x,x^*),d_2=(x_2,x_2^*)\in\mathbb{D}$

$$\begin{aligned}d_1+d_2=(x_1,x_1^*)+(x_2,x_2^*) =&(x_1+x_2,x_1^*+x_2^*)\\ =&(x_2+x_1,x_2^*+x_1^*)\\ =&(x_2,x_2^*)+(x_1,x_1^*)\\ =&d_2+d_1\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 2.1. $(\mathbb{D},+)$ *ikilisi bir Abel grubudur.*

Kapalılık Özelliği: $d_1 = (x_1, x_1^*), d_2 = (x_2, x_2^*) \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$d_1.d_2 = (x_1, x_1^*).(x_2, x_2^*) = (x_1.x_2, x_1x_2^* + x_1^*x_2) \in \mathbb{D} \tag{2.2}$$

olduğundan $\mathbb{D}$ kümesi "." işlemi üzerinde kapalıdır.

Birleşme Özelliği: $d_1 = (x_1, x_1^*), d_2 = (x_2, x_2^*), d_3 = (x_3, x_3^*) \in \mathbb{D}$ için

$$(d_1.d_2).d_3 = d_1(d_2.d_3) \tag{2.3}$$

olduğundan $\mathbb{D}$ kümesi "." işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

Dağılma Özelliği:

$$(d_1 + d_2).d_3 = d_1.d_3 + d_2.d_3 \text{ ve } d_1.(d_2 + d_3) = d_1.d_2 + d_1.d_3 \tag{2.4}$$

sağlanır.

Değişme Özelliği: $\forall d_1 = (x, x^*), d_2 = (x_2, x_2^*) \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} d_1.d_2 = (x_1, x_1^*).(x_2, x_2^*) &= (x_1x_2, x_1x_2^* + x_1^*x_2) \\ &= (x_2x_1, x_2x_1^* + x_2^*x_1) \\ &= (x_2, x_2^*).(x_1, x_1^*) \\ &= d_2.d_1 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Birim Eleman:$\forall d = (x, x^*) \in \mathbb{D}$ ve $(1,0) \in \mathbb{D}$ için $d(1,0) = (x, x^*)(1,0) = (x, x^*) = d$ elde edilir. O halde $(1,0) \in \mathbb{D}$ çarpma işlemine göre birim elemandır. ■

Sonuç 2.2. $(\mathbb{D}, +, .)$ *üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır.*

Teorem 2.2. $(\mathbb{D}, +, .)$ *üçlüsü bir cisim değildir.*

İspat. $(\mathbb{D}, +, .)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır. Bu üçlünün cisim olabilmesi için $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} - \{0\}$ için $(\mathbb{D}^*, +)$ ikilisinin abel grubu olması gerekir. Fakat $d = (x, x^*) \in \mathbb{D}$ için $d.d^{-1} = d^{-1}.d = (1,0)$ olacak şekilde $d^{-1} = (y, y^*) \in \mathbb{D}$ yoktur.
$d.d^{-1} = (x, x^*).(y, y^*) = (1,0)$ olsun. Buradan $(xy, xy^* + x^*y) = (1,0)$ bulunur. Eşitlik tanımından $xy = 1$ ve $xy^*, x^*y = 0$ veya $y = \dfrac{1}{x}$, $y^* = -\dfrac{x^*}{x^2}$ elde edilir. Dikkat edilirse $0 \neq d = (0, x^*) \in \mathbb{D}^*$ elemanının tersi yoktur. O halde $(\mathbb{D}, +, .)$ üçlüsü bir cisim değildir. ■

Tanım 2.2. $\forall d = (x, x^*) \in \mathbb{D}$ olmak üzere x ve x^* reel sayılarına, sırasıyla, d dual sayısının reel ve dual kısımları denir. $Re(d) = x$ ve $Du(d) = x^*$ şeklinde gösterilir. $\forall d = (x, x^*) \in \mathbb{D}$ olmak üzere $Re(d) = 0$ ise d dual sayısına pure dual sayı denir.

Teorem 2.3. $\widetilde{\mathbb{D}} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{D}$ *alt uzayı* $\mathbb{R}$ *uzayına izomorftur.*

İspat. $\forall x, \lambda \in \mathbb{R}$ ve $d = (x, 0) \in \widetilde{\mathbb{D}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f :& \widetilde{\mathbb{D}} \to \mathbb{R} \\ & d \mapsto f(d) = f(x, 0) = x \end{aligned}$$

dönüşümü bir izomorfizmdir.

- $\forall d_1 = (x, 0), d_2 = (y, 0) \in \widetilde{\mathbb{D}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f(d_1 + d_2) &= f(x + y, 0) \\ &= x + y \\ &= f(x, 0) + f(y, 0) \\ &= f(d_1) + f(d_2) \end{aligned}$$

  ve

$$\begin{aligned} f(\lambda d_1) &= f(\lambda x, 0) \\ &= \lambda x \\ &= \lambda f(x, 0) \\ &= \lambda f(d_1) \end{aligned}$$

  olup f dönüşümü lineerdir.

- $d_1 = (x, 0) \neq d_2 = (y, 0)$ için $f(d_1) \neq f(d_2)$ olduğundan f 1-1'dir.

- $\forall \in \mathbb{R}$ reel sayısı için $f(x, 0) = x$ olacak şekilde bir tek $(x, 0) \in \widetilde{\mathbb{D}}$ dual sayısı mevcuttur. Dolayısıyla f örten bir fonksiyondur. Sonuç olarak f bir izomorfizmdir ve $\widetilde{\mathbb{D}} \cong \mathbb{R}$ elde edilir.

■

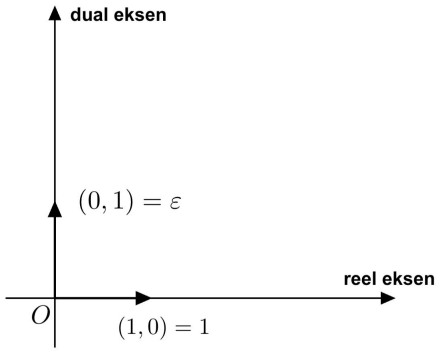
Tanım 2.3. $\mathbb{D}$ dual sayılar kümesi üzerindeki çarpma işleminin birim elemanı $(1,0) = 1 \in \mathbb{D}$ olup dual sayılar kümesindeki reel birim olarak adlandırılır. Ayrıca $(0,1) = \varepsilon \in \mathbb{D}$ dual sayısı için

$$\varepsilon^2 = \varepsilon.\varepsilon = (0,1).(0,1) = (0.0,\ 0.1 + 1.0) = (0,0) = 0 \in \mathbb{D} \tag{2.5}$$

olup $\varepsilon = (0,1) \in \mathbb{D}$ sayısına dual birim denir. Kısaca $\varepsilon \neq 0$ olmak üzere

$$0.\varepsilon = \varepsilon.0 = 0,\ 1.\varepsilon = \varepsilon.1 = 1 \text{ ve } \varepsilon^2 = \varepsilon^3 = ... = \varepsilon^n = 0 \tag{2.6}$$

şeklindedir.



Şekil 2.1 Dual Düzlem

Teorem 2.4. *$\forall d = (x, x^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısı $d = x + \varepsilon x^*$ şeklinde yazılabilir [4].*

İspat. $\forall d = (x, x^*) \in \mathbb{D}$ için $d = (x, x^*) = (x, 0) + (0, x^*)$ veya
$d = (x, x^*) = (x, 0) + [(0,1).(x^*, 0)]$ yazılabilir. Böylece $d = (x, x^*) = x + \varepsilon x^*$ elde edilir. ■

Sonuç 2.3. *Dual sayılar kümesi $\mathbb{D} = \{d = x + \varepsilon x^* : \varepsilon^2 = 0, \varepsilon \neq 0, x, x^* \in \mathbb{R}\}$ şeklinde tanımlanabilir.*

Not: Dual sayılar kümesi üzerinde daha önce tanımladığımız toplama ve çarpma işlemi tekrar aşağıdaki gibi tanımlanabilir: $\forall d_1 = x + \varepsilon x^*, d_2 = y + \varepsilon y^* \in \mathbb{D}$ için

- **Toplama:**

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 =& (x + \varepsilon x^*) + (y + \varepsilon y^*) \\ =& (x + y) + \varepsilon(x^* + y^*) \end{aligned}$$

- **Çarpma:**

$$\begin{aligned} d_1.d_2 =& (x+\varepsilon x^*).(y+\varepsilon y^*) \\ =& xy+\varepsilon(xy^*+x^*y) \end{aligned}$$

- **Eşitlik:** $d_1 = d_2$ olması için gerek ve yeter koşul $x = y$ ve $x^* = y^*$ olmasıdır.

Teorem 2.5. *$\mathbb{D}$ kümesi $\mathbb{D}$ üzerinde bir modüldür.*

Teorem 2.6. *$\mathbb{D}$ kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayıdır [4].*

İspat. $(\mathbb{D},+)$ ikilisi Abel grubu olmak üzere bir reel sayı ile bir dual sayının çarpımı $\forall d=(x,x^*)\in\mathbb{D}$ ve $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} .:&\mathbb{R}\times\mathbb{D}\to\mathbb{D} \\ &(\lambda, x+\varepsilon x^*)\mapsto \lambda x+\varepsilon(\lambda x^*) \end{aligned}$$

dış işlemini tanımlayalım. Bu dış işlem $\forall d = x+\varepsilon x^* \in \mathbb{D}$ için $d=(x,x^*)\in\mathbb{D}$ yazıldığından

$$\begin{aligned} \lambda.d=(\lambda,0).(x,x^*) =& (\lambda x, \lambda x^*+0x) \\ =& (\lambda x,\lambda x^*) \\ =& (\lambda x,0)+(0,\lambda x^*) \\ =& (\lambda x,0)+[(0,1).(\lambda x^*,0)] \\ =& \lambda x+\varepsilon(\lambda x^*) \end{aligned}$$

şeklinde de tanımlanabilir. Bu dış işlem vektör uzayı aksiyomlarını sağlar. ■

Sonuç 2.4. *$\forall d = x+\varepsilon x^* \in \mathbb{D}$ için*

$$d = x+\varepsilon x^* = x.1+x^*\varepsilon$$

yazılabildiğinden $\mathbb{D}$ vektör uzayının bir bazı $\mathrm{Sp}\{1,\varepsilon\}$ veya $\mathrm{Sp}\{(1,0),(0,1)\}$ olup $\mathrm{boy}\,\mathbb{D}=2$ dir. Bu vektör uzayına dual vektör uzayı veya dual düzlem denir [4].

2.2 Dual Sayılarda Eşlenik ve Bölme İşlemi

Tanım 2.4. $d=x+\varepsilon x^*\in\mathbb{D}$ dual sayısının eşleniği $\overline{d}$ ile gösterilir ve $\overline{d}=x-\varepsilon x^*\in\mathbb{D}$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.7. *(**Eşlenik İşleminin Özellikleri**)* $\forall d_1, d_2 \in \mathbb{D}$ *olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır:*

1) $\overline{(\overline{d_1})} = d_1$,

2) $\overline{d_1 + d_2} = \overline{d_1} + \overline{d_2}$,

3) $\overline{d_1.d_2} = \overline{d_1}.\overline{d_2}$,

4) $d = x + \varepsilon x^*$ *olmak üzere* $d.\overline{d} = x^2$,

5) $d = \overline{d}$ *ise* $d \in \mathbb{R}$.

İspat. $\forall d_1 = (x, x_1^*),\ d_2 = (x_2, x_2^*) \in \mathbb{D}$ olsun.

1) $\overline{(\overline{d_1})} = \overline{x_1 - x_1^*} = x_1 + x_1^* = d_1$ elde edilir.

2) $d_1 + d_2 = x_1 + x_2 + \varepsilon(x_1^* + x_2^*)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\overline{d_1 + d_2} =& \overline{x_1 + x_2 + \varepsilon(x_1^* + x_2^*)} \\ =& x_1 + x_2 - \varepsilon(x_1^* + x_2^*) \\ =& (x_1 - \varepsilon x_1^*) + (x_2 - \varepsilon x_2^*) = \overline{d_1} + \overline{d_2}\end{aligned}$$

elde edilir.

3) $d_1.d_2 = x_1x_2 + \varepsilon(x_1x_2^* + x_1^*x_2)$ olduğundan

$$\overline{d_1.d_2} = \overline{x_1x_2 + \varepsilon(x_1x_2^* + x_1^*x_2)} = x_1x_2 - \varepsilon(x_1x_2^* + x_1^*x_2)$$

elde edilir. Ayrıca $\overline{d_1} = x_1 - \varepsilon x_1^*$ ve $\overline{d_2} = x_2 - \varepsilon x_2^*$ olduğundan

$$\overline{d_1}.\overline{d_2} = x_1x_2 - \varepsilon(x_1x_2^* + x_1^*x_2)$$

elde edilir. Böylece $\overline{d_1.d_2} = \overline{d_1}.\overline{d_2}$ sağlanır.

4) $d.\overline{d} = (x + \varepsilon x^*)(x - \varepsilon x^*)$ olduğundan

$$d.\overline{d} = x^2 - \varepsilon x x^* + \varepsilon x^* x - \varepsilon^2 x^{*2} = x^2$$

elde edilir.

5) $d = x + \varepsilon x^* = x - \varepsilon x^* = \overline{d}$ olur, buradan $x = x$ ve $x^* = -x^*$ eşitliği yalnızca $x^* = 0$ durumunda geçerli olacağından $d = x + \varepsilon x^* = x + \varepsilon 0 \in \mathbb{R}$ sağlanır.

■

Tanım 2.5. $\forall d = x + \varepsilon x^* \in \mathbb{D}$ dual sayısı için

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{x+\varepsilon x^*} = \frac{x-\varepsilon x^*}{(x+\varepsilon x^*)(x-\varepsilon x^*)} = \frac{1}{x} - \varepsilon\frac{x^*}{x^2} \tag{2.7}$$

şeklinde bulunur. Fakat bu işlemin tanımlı olması için $x \neq 0$ olmalıdır. Böylece $d_1 = x_1 + \varepsilon x_1^*, d_2 = x_2 + \varepsilon x_2^* \in \mathbb{D}, x_2 \neq 0$ dual sayıları için bölme işlemi

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{x_1+\varepsilon x_1^*}{x_2+\varepsilon x_2^*} = \frac{(x_1+\varepsilon x_1^*)(x_2-\varepsilon x_2^*)}{(x_2+\varepsilon x_2^*)(x_2-\varepsilon x_2^*)} = \frac{x_1}{x_2} + \varepsilon\frac{x_1^*x_2 - x_1x_2^*}{x_2^2} \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $d_1, d_2 \in \mathbb{D}$ ve $d_2 \neq (0, x_2^*)$ için $\overline{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)} = \frac{\overline{d_1}}{\overline{d_2}}$ özelliği sağlanır.

Not: Burada ε dual birimi i kompleks birimine benzer olarak kendisi sıfır olmayıp karesi sıfır olmaktadır. Buna ek olarak, kompleks sayılarda $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$ yazılabilir. Fakat $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon}{0}$ olduğundan yazılamaz. ε dual birim için $\frac{1}{\varepsilon} = \omega$ ve $\frac{1}{0} = \infty$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

1) $\frac{1}{\varepsilon x^*} = \frac{1}{x^*}\omega, x^* \neq 0,$

2) $\frac{y^*\omega}{x+\varepsilon x^*} = \frac{y^*\frac{1}{\varepsilon}}{x+\varepsilon x^*} = \frac{y^*}{\varepsilon(x+\varepsilon x^*)},$

3) $\frac{x+\varepsilon x^*}{y^*\omega} = \frac{x+\varepsilon x^*}{y^*\frac{1}{\omega}} = \frac{\varepsilon(x+\varepsilon x^*)}{y^*} = \frac{x}{y^*}\varepsilon,$

4) $z\omega.t\omega = \infty,\ z\varepsilon.t\varepsilon = (zt)\varepsilon^2 = 0,$

5) $\overline{z\omega} = -z\omega, \overline{\infty} = \infty,$

6) $(z\omega \pm t\omega) = (z \pm t)\omega,$

7) $(x+\varepsilon x^*)(y^*\omega) = (xy^*)\omega + x^*y^*,$

8) $(x+\varepsilon x^*) + (y^*\omega) = y^*\omega, (x+\varepsilon x^*) - (y^*\omega) = -y^*\omega,$

9) $((x+\varepsilon x^*)\frac{y^*}{\omega} = xy^*\frac{1}{\omega}) + x^*y^*\varepsilon^2 = xy^*\varepsilon$ [4].

2.3 Dual Sayılarda İç Çarpım ve Norm

Tanım 2.6. $\mathbb{D}$ kümesi, $\mathbb{D}$ üzerinde bir modül olmak üzere $\forall d_1 = x_1 + \varepsilon x_1^*$, $d_2 = x_2 + \varepsilon x_2^* \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathbb{D} \times \mathbb{D} &\to \mathbb{D} \\ (d_1, d_2) &\mapsto \langle d_1, d_2 \rangle = d_1 \overline{d_2} \end{aligned}$$

ile tanımlanan fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur.

Tanım 2.7. $\mathbb{D}$ kümesi, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere $\forall d_1 = x_1 + \varepsilon x_1^*$, $d_2 = x_2 + \varepsilon x_2^* \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathbb{D} \times \mathbb{D} &\to \mathbb{R} \\ (d_1, d_2) &\mapsto \langle d_1, d_2 \rangle = \frac{1}{2}(d_1 \overline{d_2} + \overline{d_1} d_2) = x_1 x_2 \end{aligned}$$

ile tanımlanan fonksiyon aşağıdaki özellikleri sağladığından bir iç çarpım fonksiyonudur [4].

- **Simetri Özelliği:** $\forall d_1 = x_1 + \varepsilon x_1^*, d_2 = x_2 + \varepsilon x_2^*$ için

$$\langle d_1, d_2 \rangle = x_1 . x_2 = x_2 . x_1 = \langle d_2, d_1 \rangle \tag{2.9}$$

  sağlanır.

- **Bilineerlik Özelliği:** $\forall d_1 = x_1 + \varepsilon x_1^*, d_2 = x_2 + \varepsilon x_2^*, d_3 = x_3 + \varepsilon x_3^* \in \mathbb{D}$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için

  1) $\langle \lambda d_1, d_2 \rangle = \lambda \langle d_1, d_2 \rangle$,

  2) $\langle d_1, \lambda d_2 \rangle = \lambda \langle d_1, d_2 \rangle$,

  3) $\langle d_1 + d_2, d_3 \rangle = \langle \lambda d_1, d_3 \rangle + \langle \lambda d_2, d_3 \rangle$,

  4) $\langle d_1, d_2 + d_3 \rangle = \langle \lambda d_1, d_2 \rangle + \langle \lambda d_1, d_3 \rangle$

  sağlanır.

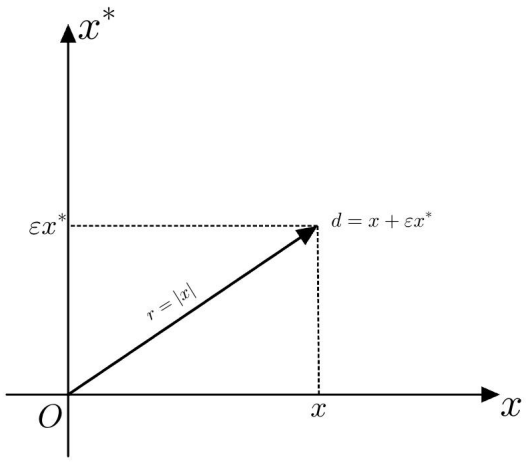
- **Pozitif Tanımlılık Özelliği:** $\forall d = x + \varepsilon x^* \in \mathbb{D}$ için $\langle d, d \rangle = x^2 \geq 0$, $\langle d, d \rangle = x^2 = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x = 0$ olmasıdır. Böylece $x^* \neq 0$ için de $\langle d, d \rangle = 0$ olduğundan $\langle d, d \rangle = 0$ için $d = 0 + \varepsilon x^* \neq 0$ bulunur.

Böylece bu iç çarpımlar kullanılarak dual düzlemde alınan bir dual vektörün boyu (normu) aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Tanım 2.8. $\forall d = x + \varepsilon x^* \in \mathbb{D}$ dual sayısının başlangıç noktasına olan uzaklığı

$$\|d\| = \sqrt{\langle d, d\rangle} = \sqrt{x^2} = |x| \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlandığı görülür.



Şekil 2.2 Norm

Teorem 2.8. ***(Normun Özellikleri)*** *$\forall d_1, d_2 \in \mathbb{D}$ dual sayılar için aşağıdaki özellikler sağlanır [4].*

1) $\|d_1.d_2\| = \|d_1\|\|d_2\|$,

2) $\|d_1 + d_2\| \leq \|d_1\| + \|d_2\|$ *(üçgen eşitsizliği)*

İspat. $d_1 = x_1 + \varepsilon x_1^*, d_2 = x_2 + \varepsilon x_2^* \in \mathbb{D}$ olsun.

1) $d_1.d_2 = (x_1 + \varepsilon x_1^*).(x_2 + \varepsilon x_2^*) = x_1x_2 + \varepsilon(x_1x_2^* + x_1^*x_2)$ sağlanır. O halde $\|d_1.d_2\| = |x_1x_2| = |x|.|y| = \|d_1\|.\|d_2\|$ elde edilir.

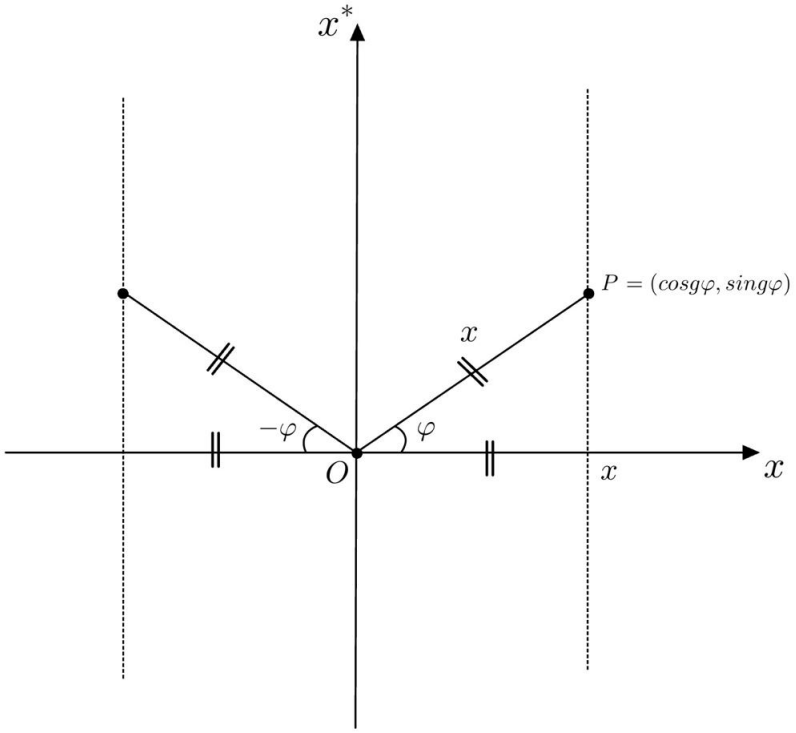
2) $d_1 + d_2 = (x_1 + \varepsilon x_1^*) + (x_2 + \varepsilon x_2^*) = (x_1 + x_2) + \varepsilon(x_1^* + x_2^*)$ olmak üzere $\|d_1 + d_2\| = |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| = \|d_1\| + \|d_2\|$ yazılabilir.

■

Tanım 2.9. (**Dual Düzlemde İki Nokta Arasındaki Uzaklık**) Dual düzlemde alınan iki nokta P ve Q olsun. Bu noktaların dual sayılardaki ifadeleri sırası ile d_1 ve d_2 olmak üzere P ve Q arasındaki uzaklık aşağıdaki gibi tanımlanır [4]:

$$d(P,Q) = \|d_2 - d_1\| = \|(x_2 - x_1) + \varepsilon(x_2^* - x_1^*)\| = |x_2 - x_1| \tag{2.11}$$

Tanım 2.10. Dual düzlemde O merkezli r yarıçaplı çemberlerin denklemleri $\|d\| = |x + \varepsilon x^*| = r = |x|$ olup $x = \pm r$ ile verilir. $x = \pm 1$ denklemi dual düzlemde orijin merkezli birim çember belirtir [4].



Şekil 2.3 Dual düzlemde birim çember

Tanım 2.11. d_0 merkezli ve r yarıçaplı çemberin denklemi

$$(d - d_0)(\overline{d} - \overline{d_0}) = r^2 \tag{2.12}$$

şeklindedir. O halde Öklid anlamında paralel iki doğruya (d_0 noktasından eşit uzaklıktaki) dual çember denir [4].

2.4 Dual Sayılarda Matris Gösterimi

Bu bölüm [4] kaynağından yararlanılarak yazılmıştır.
$\mathbb{D} = \{d = x + \varepsilon x^* : \varepsilon^2 = 0, \varepsilon \neq 0 \; x, x^* \in \mathbb{R}\}$ dual sayılar kümesinin $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde $\{1, \varepsilon\}$ bazına sahip bir vektör uzayıdır. Şimdi $d = x + \varepsilon x^*$ dual sayısına karşılık gelen matrisi, $\mathbb{D}$ kümesinin vektör uzayı yapısı ile ele alalım:

$$\begin{aligned} f_d : \mathbb{D} &\to \mathbb{D} \\ \omega &\mapsto f_d(\omega) = \omega d = d\omega \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm aşağıdaki özellikleri sağlayabileceğinden lineer olduğu görülür:

- $f_d(\omega_1+\omega_2)=f_d(\omega_1)+f_d(\omega_2)$,
- $f_d(\lambda\omega)=\lambda f_d(\omega)$, $\lambda\in\mathbb{R}$

O halde her lineer dönüşüme bir matris karşılık geldiğinden $\mathbb{D}=Sp\{1,\varepsilon\}$ için

$$\begin{aligned} f_d(1) &= d.1 = d = x.1 + x^*.\varepsilon \\ f_d(\varepsilon) &= d.\varepsilon = (x+\varepsilon x^*).\varepsilon = x\varepsilon = 0.1 + x\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece f_d lineer dönüşümüne 2×2 tipinde $\begin{bmatrix} x & 0 \\ x^* & x \end{bmatrix}$ matrisi karşılık gelir.

Not: $\forall d=x+\varepsilon x^*\in\mathbb{D}$ dual sayısına $f_d=\begin{bmatrix} x & 0 \\ x^* & x \end{bmatrix}$ matrisi karşılık gelir.

Sonuç 2.5. *$f_d(\omega)=d\omega=\begin{bmatrix} x & 0 \\ x^* & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ şeklinde yazılabilir. Böylece iki dual sayıyı çarpmak demek, birinin 2×2 matris temsili ile diğerinin katsayılarından oluşan 2×1 sütun matrisini çarpmak demektir.*

Sonuç 2.6. *Özel olarak,*

1) *$d=1=1+0\varepsilon$ alınırsa $f_d=f_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,*

2) *$d=\varepsilon=0+1\varepsilon$ alınırsa $f_d=f_\varepsilon=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ elde edilir. Dikkat edilirse*

$$f_\varepsilon^2=f_\varepsilon f_\varepsilon=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=0$$

bulunur.

"ε" **Dual Sayısının Geometrisi:** d ve εd dual sayıları karşılaştırıldığında birbirlerine dual anlamda dik, yani $\langle d,\varepsilon d\rangle=0$ olduğu görülür. Çünkü $d=x\varepsilon x^*$ olmak üzere

$$\varepsilon d=(0+\varepsilon 1)(x+\varepsilon x^*)=\varepsilon x \tag{2.13}$$

olup

$$\langle d,\varepsilon d\rangle=\langle x+\varepsilon x^*,\varepsilon x\rangle=0 \tag{2.14}$$

bulunur. Bir d dual sayısını ε ile çarpmak demek d dual sayısına dik olan yeni bir dual sayı elde etmek demektir.

Not: Dual sayılara karşılık gelen matris gösterimi yardımıyla aşağıdaki özellikler sağlanır:

1) $f_{d_1}.f_{d_2} = f_{d_2}.f_{d_1}$ olup çarpma işlemi değişmelidir.

2) $d = x + \varepsilon x^*$ dual sayısının tersinin olması için gerek ve yeter şart f_d matrisinin regüler olması, yani $\det(f_d) \neq 0$ olmasıdır. Eğer $\det(f_d) = x^2 = 0$ ise $x = 0$ olup $d = \varepsilon x^*$ dual sayısının tersi mevcut değildir.

Teorem 2.9. *$d_1 = x_1 + \varepsilon x_1^*, d_2 = x_2 + \varepsilon x_2^* \in \mathbb{D}$ ve $\lambda, x, x^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\begin{bmatrix} x & 0 \\ x^* & x \end{bmatrix}$ formundaki matrislerin kümesi ile $\mathbb{D}$ dual sayılar kümesi birbirine izomorftur [4].*

İspat. $\tilde{G} = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ x^* & x \end{bmatrix} : x, x^* \in \mathbb{R} \right\}$ kümesini tanımlayalım.

$$f : \mathbb{D} \longrightarrow \tilde{G}$$
$$x + \varepsilon x^* \longrightarrow f(x + \varepsilon x^*) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ x^* & x \end{bmatrix}$$

fonksiyonunun bir izomorfizm olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} f(d_1 + d_2) &= f((x_1 + x_2) + \varepsilon(x_1^* + x_2^*)) \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & 0 \\ x_1^* + x_2^* & x_1 + x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_1^* & x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ x_2^* & x_2 \end{bmatrix} = f(d_1) + f(d_2) \end{aligned}$$

ve

$$f(\lambda d) = f(\lambda x + \varepsilon \lambda x^*) = \begin{bmatrix} \lambda x & 0 \\ \lambda x^* & \lambda x \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x & 0 \\ x^* & x \end{bmatrix} = \lambda f(d)$$

olup f lineerdir. Aşağıdaki özellikler ile birlikte $\mathbb{D}$ kümesinin $\tilde{G}$ kümesine izomorftur.

- $d_1 \neq d_2$ ise $x_1 \neq x_2$ veya $x_1^* \neq x_2^*$ şeklindedir. Dolayısıyla $f(d_1) = f(d_2)$ bulunur. Böylece f 1-1 fonksiyondur.
- $\tilde{G}$ kümesindeki her $\begin{bmatrix} x & 0 \\ x^* & x \end{bmatrix}$ matrisi için $f(d) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_1^* & x_1 \end{bmatrix}$ olacak şekilde bir tek $d = (x, x^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısı vardır. Böylece f örtendir.

■

2.5 Dual Sayıların Kutupsal Gösterimi

Tanım 2.12 (**Dual Düzlemde Trigonometrik Fonksiyonlar**)**.** Öklid düzlemindeki kosinüs ve sinüs fonksiyonları tanımlarına benzer olarak dual düzlemde birim çember üzerinde alınan bir $P = (x, x^*)$ noktasının apsisine $\operatorname{cosg}\varphi$ ve ordinatına $\operatorname{sing}\varphi$ denir. Bu durumda

$$P = (x, x^*) = (\operatorname{cosg}\varphi, \operatorname{sing}\varphi) \tag{2.15}$$

yazılabilir. O halde Şekil (2.3) gereğince her φ reel sayısı için $\operatorname{cosg}\varphi = 1$ ve $\operatorname{sing}\varphi = \dfrac{x^*}{x} = \varphi$ elde edilir [4].

Tanım 2.13 (**Dual Sayıların Kutupsal Gösterimi**)**.** $\|d\| = \|x + \varepsilon x^*\| = |x| \neq 0$ olacak şekilde $d = x + \varepsilon x^*$ dual sayısı için

$$d = x + \varepsilon x^* = x(1 + \frac{x^*}{x}\varepsilon) = r(1 + \varepsilon\varphi) \tag{2.16}$$

yazılabilir. Burada $r = x$ ifadesine $d = x + \varepsilon x^*$ dual sayısının modülü ve $\dfrac{x^*}{x} = \varphi$ oranına ise $d = x + \varepsilon x^*$ dual sayısının argümenti denir ve $\arg d = \varphi$ ile gösterilir [4]. Burada r, herhangi sıfırdan farklı reel sayı ve φ açısı da herhangi bir reel sayı olabilir.

$$\operatorname{cosg}\varphi = \frac{x}{x} = 1 \text{ ve } \operatorname{sing}\varphi = \frac{x^*}{x} = \varphi \tag{2.17}$$

elde edilir. Ayrıca herhangi bir dual sayı

$$d = x + \varepsilon x^* = x(\operatorname{cosg}\varphi + \varepsilon \operatorname{sing}\varphi) \tag{2.18}$$

olarak da ifade edilebilir. Bu ifade kompleks sayılardaki $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ kutupsal gösterime benzerdir [4].

Teorem 2.10. *$d, d_1, d_2 \in \mathbb{D}$ ve $n, r \in \mathbb{Z}^+$ aşağıdaki özellikler sağlanır:*

1) $\arg\overline{d} = -\varphi$,

2) $\arg(d_1 d_2) = \arg(d_1) + \arg(d_2)$,

3) $\arg(\frac{d_1}{d_2}) = \arg(d_1) - \arg(d_2)$,

4) $\arg d^n = n \arg d$,

5) $\arg d^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}\arg d$.

İspat. **1)** $d = x + \varepsilon x^*$ dual sayısının eşleniği olan $\overline{d} = x - \varepsilon x^*$ dual sayısının argümenti

$$\arg \overline{d} = -\varphi \tag{2.19}$$

şeklindedir.

2) $d_1, d_2 \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d_1 d_2 =& r_1(1+\varepsilon\varphi_1) r_2(1+\varepsilon\varphi_2) \\ =& r_1 r_2(1+\varepsilon\varphi_1+\varepsilon\varphi_2+\varepsilon^2\varphi_1\varphi_2) \\ =& r_1 r_2(1+\varepsilon(\varphi_1+\varphi_2)) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\arg(d_1 d_2) = \arg(d_1) + \arg(d_2) \tag{2.20}$$

sağlanır.

3) $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ olmak üzere

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{r_1(1+\varepsilon\varphi_1)}{r_2(1+\varepsilon\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(1+\varepsilon(\varphi_1-\varphi_2))$$

olduğundan

$$\arg(\frac{d_1}{d_2}) = \arg(d_1) - \arg(d_2) \tag{2.21}$$

elde edilir.

4) $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ olmak üzere

$$[r(1+\varepsilon\varphi)]^n = r^n(1+\varepsilon n\varphi), \arg d^n = n \arg d$$

elde edilir.

5) $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ olmak üzere

$$[r(1+\varepsilon\varphi)]^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(1+\varepsilon\frac{\varphi}{n}\right), \arg d^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\arg d$$

elde edilir.

■

2.6 Dual Sayının Mutlak Değeri

Dual sayının mutlak değerini tanımlamak için bir dual sayının karekökü tanımlanmalıdır. Literatürde dual sayıların karekökü Taylor seri açılımından faydalanarak verilmiştir [4]:

Teorem 2.11 (**Taylor Açılımı**). *$f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ dual fonksiyonu*

$$f(x+\varepsilon x^*) = f(x) + \varepsilon x^* f'(x) \tag{2.22}$$

eşitliğini sağlar [4].

Örnek: Teorem 2.11 ile verilen ifadede f fonksiyonu için örnekler aşağıdaki şekildedir:

- $\sqrt{x+\varepsilon x^*} = \sqrt{x} + \varepsilon x^* \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$,
- $\cos(x+\varepsilon x^*) = \cos x - \varepsilon x^* \sin x$,
- $\sin(x+\varepsilon x^*) = \sin x + \varepsilon x^* \cos x$,
- $\sinh(x+\varepsilon x^*) = \sinh x + \varepsilon x^* \cosh x$,
- $\cosh(x+\varepsilon x^*) = \sinh x + \varepsilon x^* \sinh x$.

Tanım 2.14. $x+\varepsilon x^* \in \mathbb{D}$ dual sayısının mutlak değeri $|x+\varepsilon x^*| = \sqrt{(x+\varepsilon x^*)^2}$ şeklinde tanımlanır [4].

Sonuç 2.7. *$x+\varepsilon x^* \in \mathbb{D}$ dual sayısının mutlak değeri*

$$|x+\varepsilon x^*| = \sqrt{(x+\varepsilon x^*)^2} = \sqrt{x^2+2\varepsilon x x^*} = \sqrt{x^2} + \varepsilon \frac{2x}{2\sqrt{x^2}} x^*,\ x \neq 0 \tag{2.23}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$|x+\varepsilon x^*| = |x| + \varepsilon \frac{x}{|x|} x^* \tag{2.24}$$

elde edilir. O halde dual mutlak değer

$$|x+\varepsilon x^*| = \begin{cases} x+\varepsilon x^*, & x > 0 \\ -x-\varepsilon x^*, & x < 0 \end{cases} \tag{2.25}$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca $x+\varepsilon x^* = 0$ olması için gerek ve yeter şart $|x+\varepsilon x^*| = 0$ olmasıdır [4].

2.7 Dual Sayılarda Sıralama Bağıntısı

Tanım 2.15. Dual sayıların pozitif (negatif) olması ve birbirine göre durumları aşağıdaki şekilde tanımlanabilir [4]:

1) Eğer $x > 0$ ise

$$x + \varepsilon x^* > 0. \tag{2.26}$$

Eğer $x < 0$ ise

$$x + \varepsilon x^* < 0. \tag{2.27}$$

2) Eğer $x_1 > x_2$ ise $x_1 + \varepsilon x^* > x_2 + \varepsilon x^*$ (veya $x_1 < x_2$ ise $x_1 + \varepsilon x^* < x_2 + \varepsilon x^*$),

3) Eğer $x_1 = x_2$ ise

a) $x_1^* > x_2^*$ ise $x_1 + \varepsilon x_1^* > x_2 + \varepsilon x_2^*$,

b) $x_1^* = x_2^*$ ise $x_1 + \varepsilon x_1^* = x_2 + \varepsilon x_2^*$,

c) $x_1^* < x_2^*$ ise $x_1 + \varepsilon x_1^* < x_2 + \varepsilon x_2^*$

şeklindedir.

3
DUAL UZAYLAR

3.1 $\mathbb{D}^n$ Dual Uzay

3.1.1 $\mathbb{D}$-Modül ve Dual Vektörler

$\mathbb{D}^n = \mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \ldots \times \mathbb{D} = \{\vec{A} = (A_1, \ldots, A_n) \ : \ A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{D}\}$ kümesini tanımlayalım. $\mathbb{D}^n$ kümesinin elemanları, bileşenleri birer dual sayı olan sıralı n-liler olup $A_i = a_i + \varepsilon a_i^* \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$\vec{A} = (A_1, \ldots, A_n) = (a_1 + \varepsilon a_1^*, \ldots, a_n + \varepsilon a_n^*) = (a_1, \ldots, a_n) + \varepsilon(a_1^*, \ldots, a_n^*) = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*} \quad (3.1)$$

yazılabilir. Burada $\vec{a}, \vec{a^*} \in \mathbb{R}^n$ şeklindedir.

Tanım 3.1. $\forall \vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{D}^n$ için

$$\begin{aligned} + : \mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n &\to \mathbb{D}^n \\ (\vec{A}, \vec{B}) &\mapsto \vec{A} + \vec{B} \end{aligned}$$

ile tanımlı iç işlem aşağıdaki özellikleri sağlar:

- **Değişme**: $\forall \vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{D}^n$ için $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$.
- **Birleşme**: $\forall \vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathbb{D}^n$ için $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$.
- **Etkisiz eleman**: $\forall \vec{A} \in \mathbb{D}^n$ vektörü için $\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$ olacak şekilde bir $\vec{0} \in \mathbb{D}^n$ vektörü vardır.
- **Ters eleman**: $\forall \vec{A} \in \mathbb{D}^n$ vektörü için $\vec{A} + \vec{A'} = \vec{0}$ şeklinde bir $\vec{A'} \in \mathbb{D}^n$ vektörü vardır.

Sonuç 3.1. $(\mathbb{D}^n, +)$ *ikilisi bir Abel grubudur.*

3.1.2 Dual Uzayda Dış İşlem

Tanım 3.2. Dual uzay $(\mathbb{D},+,.)$ modülü ile birlikte $(\mathbb{D}^n,+)$ Abel grubu üzerinde $\forall \vec{A}=(A_1,\ldots,A_n)\in\mathbb{D}^n$ ve $\forall d_1,d_2\in\mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned}\odot : \mathbb{D}\times\mathbb{D}^n &\to \mathbb{D}^n\\ (d_1,\vec{A}) &\mapsto d_1\odot\vec{A}\end{aligned}$$

ile tanımlı dış işlem aşağıdaki özellikleri sağlar:

- $\forall \vec{A}\in\mathbb{D}^n$ ve $d_1,d_2\in\mathbb{D}$ için $d_1\odot(d_2\odot\vec{A})=(d_1d_2)\odot\vec{A}$,
- $\forall \vec{A}\in\mathbb{D}^n$ ve $d_1,d_2\in\mathbb{D}$ için $(d_1+d_2)\odot\vec{A}=d_1\odot\vec{A}+d_2\odot\vec{A}$,
- $\forall \vec{A},\vec{B}\in\mathbb{D}^n$ ve $d_1\in\mathbb{D}$ için $d_1\odot(\vec{A}+\vec{B})=d_1\odot\vec{A}+d_1\odot\vec{B}$,
- $\forall \vec{A}\in\mathbb{D}^n$ için $1\odot\vec{A}=\vec{A}$.

Sonuç 3.2. $\{\mathbb{D}^n,+,\mathbb{D},+,.,\odot\}$ *altılısı bir modüldür. Bu kümeye dual uzay ve bu kümenin elemanlarına, yani dual sayı katsayılı sıralı n-lilere dual vektör denir. [4].*

Sonuç 3.3. $\forall \vec{A}\in\mathbb{D}^n$ *için* $\forall \vec{A}=(A_1,\ldots,A_n)=A_1e_1+\ldots+A_ne_n$ *yazılabildiğinden* $\mathbb{D}^n=\mathrm{Sp}\{e_1,\ldots,e_n\}$ *olup boy*$\mathbb{D}^n=n$ *bulunur. Burada* $e_j=\{\delta_{j1},\ldots,\delta_{jn}\}$ *dır.*

Sonuç 3.4. $\{\mathbb{D}^n,+,\mathbb{R},+,.,\odot\}$ *altılısı bir vektör uzayıdır [4].*

Sonuç 3.5. $\vec{A}=(A_1,\ldots,A_n)=(a_1+\varepsilon a_1^*,\ldots,a_n+\varepsilon a_n^*)\in\mathbb{D}^n$ *için*

$$\begin{aligned}\vec{A}=(A_1,\ldots,A_n) &=(a_1+\varepsilon a_1^*,\ldots,a_n+\varepsilon a_n^*)\\ &=a_1e_1+a_2e_2+\ldots+a_ne_n+a_1^*(\varepsilon e_1)+a_2^*(\varepsilon e_2)+\ldots+a_n^*(\varepsilon e_n)\end{aligned}$$

olduğundan $\mathbb{D}^n=Sp\{e_1,\ldots,e_n,\varepsilon e_1,\ldots,\varepsilon e_n\}$ *olup boy*$\mathbb{D}^n=2n$ *bulunur.*

3.1.3 $\mathbb{D}^n$ Uzayının $\mathbb{D}$-Modül Üzerinde İç Çarpım Yapısı

Tanım 3.3. $\forall \vec{A}=(A_1,A_2,\ldots,A_n)=\vec{a}+\varepsilon\vec{a^*},\vec{B}=(B_1,B_2,\ldots,B_n)=\vec{b}+\varepsilon\vec{b^*}\in\mathbb{D}^n$ olup

$$\begin{aligned}\langle,\rangle : \mathbb{D}^n\times\mathbb{D}^n &\to \mathbb{D}\\ (\vec{A},\vec{B}) &\mapsto \langle\vec{A},\vec{B}\rangle=\sum_{i=1}^{n}A_iB_i\end{aligned}$$

işlemini tanımlayalım. $A_i,B_i\in\mathbb{D}$ için $A_iB_i\in\mathbb{D}$ olduğu açıktır. Bu fonksiyon için

$\forall \vec{A},\vec{B},\vec{C}\in\mathbb{D}^n$ ve $\forall d_1,d_2,d_3,d_4\in\mathbb{D}$ olmak üzere

• $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \sum_{i=1}^{n} A_i B_i = \sum_{i=1}^{n} B_i A_i = \langle \vec{B}, \vec{A} \rangle$

olduğundan $\langle , \rangle$ fonksiyonu simetri özelliğini sağlar.

• $$\begin{aligned}\langle d_1\vec{A} + d_2\vec{B}, \vec{C} \rangle &= \sum_{i=1}^{n} (d_1 A_i + d_2 B_i) C_i \\ &= d_1 \sum_{i=1}^{n} A_i C_i + d_2 \sum_{i=1}^{n} B_i C_i \\ &= d_1 \langle A, C \rangle + d_2 \langle B, C \rangle\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\langle A, d_3\vec{B} + d_4\vec{C} \rangle &= \sum_{i=1}^{n} A_i (d_3 B_i + d_4 C_i) \\ &= d_3 \sum_{i=1}^{n} A_i B_i + d_4 \sum_{i=1}^{n} A_i C_i \\ &= d_3 \langle A, B \rangle + d_4 \langle A, C \rangle\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\langle , \rangle$ fonksiyonu bilineerdir.

• $\forall \vec{A} = (A_i) \in \mathbb{D}^n$ için $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (A_i)^2 \in \mathbb{D}$ bulunur. $A_i = a_i + a_i^* \varepsilon$ için

$$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (A_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 + 2\varepsilon a_i a_i^*)$$

bulunur. $(a_i)^2 \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} (a_i)^2 \geq 0$ olup (2.26) özelliği gereğince $(A_i)^2 \geq 0$ veya $\sum_{i=1}^{n} (A_i)^2$ olup $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle \geq 0$ elde edilir.

$\forall \vec{A} = \vec{0}$ iken $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = 0$ bulunur. Tersine $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = 0$ iken $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (A_i)^2 = 0$ olup $(A_i)^2 = a_i^2 + 2\varepsilon a_i a_i^* = 0 + \varepsilon 0$ elde edilir. Buradan $a_i = 0$ bulunur ancak $a_i^* = 0$ olmak zorunda değildir. Böylece $\vec{A} \neq \vec{0}$ olabilir.

Sonuç 3.6.

$$\begin{aligned}\langle , \rangle : \mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n &\to \mathbb{D} \\ (\vec{A}, \vec{B}) &\mapsto \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \sum_{i=1}^{n} A_i B_i\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon pozitif tanımlı olmayan bir iç çarpım fonksiyonudur [4].

Sonuç 3.7. $\forall \vec{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n) = \vec{a} + \varepsilon\vec{a}^*, \vec{B} = (B_1, B_2, \ldots, B_n) = \vec{b} + \varepsilon\vec{b}^* \in \mathbb{D}^n$ *için* $\mathbb{D}^n$ *uzayının* $\mathbb{D}$ *üzerinde tanımlanan*

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n &\to \mathbb{D} \\ (\vec{A}, \vec{B}) &\mapsto \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \sum_{i=1}^{n} A_i B_i \end{aligned}$$

pozitif tanımlı olmayan iç çarpım fonksiyonu

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon \left(\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle \right)$$

olarak da tanımlanabilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki iç çarpımlar $\mathbb{R}^n$ *üzerindeki Öklid iç çarpımlarıdır [2, 4].*

İspat. $A_i = a_i + a_i^*, B_i = b_i + b_i^* \in \mathbb{D}$ olmak üzere $A_i B_i = a_i b_i + \varepsilon(a_i b_i^* + a_i^* b_i)$ olduğundan

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \sum_{i=1}^{n} A_i B_i = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \varepsilon \left(a_i b_i^* + a_i^* b_i \right)$$

yazılabilir. Buradan $\mathbb{R}^n$ üzerindeki iç çarpım yapısı yardımıyla

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \left(a_i b_i^* + a_i^* b_i \right)$$

veya

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle)$$

eşitliği elde edilir. ■

Ayrıca bu özellik sayesinde iç çarpım fonksiyonu olması için gerekli özellikler kolaylıkla görülebilir:

- **Simetri:** $\forall \vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{D}^n$ için ve $\mathbb{R}^n$ uzayındaki Öklid iç çarpımının simetri özelliği yardımıyla aşağıda simetri özelliğinin sağlandığı görülür.

$$\begin{aligned} \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle &= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon[\langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle] \\ &= \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle + \varepsilon[\langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle] \\ &= \langle \vec{B}, \vec{A} \rangle. \end{aligned}$$

- **Bilineerlik:** $\forall \vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*}, \vec{B} = \vec{b} + \varepsilon\vec{b^*}, \vec{C} = \vec{c} + \varepsilon\vec{c^*} \in \mathbb{D}^n$ ve $d_1 = \lambda_1 + \varepsilon\lambda_1^*, d_2 = \lambda_2 + \varepsilon\lambda_2^*, d_3 = \mu_1 + \varepsilon\mu_1^*, d_4 = \mu_2 + \varepsilon\mu_2^* \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} d_1\vec{A} + d_2\vec{B} =& (\lambda_1 + \varepsilon\lambda_1^*)(\vec{a} + \varepsilon\vec{a^*}) + (\lambda_2 + \varepsilon\lambda_2^*)(\vec{b} + \varepsilon\vec{b^*}) \\ =& (\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b}) + \varepsilon[(\lambda_1\vec{a^*} + \lambda_1^*\vec{a}) + (\lambda_2\vec{b^*} + \lambda_2^*\vec{b})] \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\langle d_1\vec{A} + d_2\vec{B}, \vec{C}\rangle = \langle(\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b}) + \varepsilon[(\lambda_1\vec{a^*} + \lambda_1^*\vec{a}) + (\lambda_2\vec{b^*} + \lambda_2^*\vec{b})], (\vec{c} + \varepsilon\vec{c^*})\rangle$$

$$\begin{aligned} =& \langle(\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b}), \vec{c}\rangle \\ &+ \varepsilon\left(\langle(\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b}), \vec{c^*}\rangle + \langle(\lambda_1\vec{a^*} + \lambda_1^*\vec{a} + \lambda_2\vec{b^*} + \lambda_2^*\vec{b}), \vec{c}\rangle\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} =& \lambda_1\langle\vec{a}, \vec{c}\rangle + \lambda_2\langle\vec{b}, \vec{c}\rangle + \varepsilon\left(\lambda_1\langle\vec{a}, \vec{c^*}\rangle + \lambda_2\langle\vec{b}, \vec{c^*}\rangle + \lambda_1\langle\vec{a^*}, \vec{c}\rangle + \lambda_1^*\langle\vec{a}, \vec{c}\rangle\right. \\ &\left. + \lambda_2\langle\vec{b^*}, \vec{c}\rangle + \lambda_2^*\langle\vec{b}, \vec{c}\rangle\right) \\ &+ \varepsilon^2\left(\lambda_1^*\langle\vec{a}, \vec{c^*}\rangle + \lambda_1^*\langle\vec{a^*}, \vec{c}\rangle + \lambda_2^*\langle\vec{b}, \vec{c^*}\rangle + \lambda_2^*\langle\vec{b^*}, \vec{c}\rangle\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} =& \lambda_1\left(\langle\vec{a}, \vec{c}\rangle + \varepsilon(\langle\vec{a}, \vec{c^*}\rangle + \langle\vec{a^*}, \vec{c}\rangle)\right) + \varepsilon\lambda_1^*\left(\langle\vec{a}, \vec{c}\rangle + \varepsilon(\langle\vec{a}, \vec{c^*}\rangle + \langle\vec{a^*}, \vec{c}\rangle)\right) \\ &+ \lambda_2\left(\langle\vec{b}, \vec{c}\rangle + \varepsilon(\langle\vec{b}, \vec{c^*}\rangle + \langle\vec{b^*}, \vec{c}\rangle)\right) + \varepsilon\lambda_2^*\left(\langle\vec{b}, \vec{c}\rangle + \varepsilon(\langle\vec{b}, \vec{c^*}\rangle + \langle\vec{b^*}, \vec{c}\rangle)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} =& (\lambda_1 + \varepsilon\lambda_1^*)\left(\langle\vec{a}, \vec{c}\rangle + \varepsilon(\langle\vec{a}, \vec{c^*}\rangle + \langle\vec{a^*}, \vec{c}\rangle)\right) \\ &+ (\lambda_2 + \varepsilon\lambda_2^*)\left(\langle\vec{b}, \vec{c}\rangle + \varepsilon(\langle\vec{b}, \vec{c^*}\rangle + \langle\vec{b^*}, \vec{c}\rangle)\right) = d_1\langle\vec{A}, \vec{C}\rangle + d_2\langle\vec{B}, \vec{C}\rangle \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} d_3\vec{B} + d_4\vec{C} =& (\mu_1 + \varepsilon\mu_1^*)(\vec{b} + \varepsilon\vec{b^*}) + (\mu_2 + \varepsilon\mu_2^*)(\vec{c} + \varepsilon\vec{c^*}) \\ =& (\mu_1\vec{b} + \mu_2\vec{c}) + \varepsilon[(\mu_1\vec{b^*} + \mu_1^*\vec{b}) + (\mu_2\vec{c^*} + \mu_2^*\vec{c})], \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\langle \vec{A}, d_3\vec{B} + d_4\vec{C}\rangle =& \langle \vec{a}, \mu_1\vec{b} + \mu_2\vec{c}\rangle + \varepsilon\left(\langle \vec{a}(\mu_1\vec{b^*} + \mu_1^*\vec{b} + \mu_2\vec{c^*} + \mu_2^*\vec{c})\rangle\right.\\ &\left.+ \langle \vec{a^*}, (\mu_1\vec{b} + \mu_2\vec{c})\rangle\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&\mu_1\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle + \mu_2\langle \vec{a}, \vec{c}\rangle + \varepsilon\big(\mu_1\langle \vec{a}, \vec{b^*}\rangle + \mu_1^*\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle + \mu_2\langle \vec{a}\vec{c^*}\rangle + \mu_2^*\langle \vec{a}, \vec{c}\rangle\\ &+\mu_1\langle \vec{a^*}, \vec{b}\rangle + \mu_2\langle \vec{a^*}, \vec{c}\rangle\big) + \varepsilon^2\left(\mu_1^*\langle \vec{a}, \vec{b^*}\rangle + \mu_1^*\langle \vec{a^*}, \vec{b}\rangle + \mu_2^*\langle \vec{a}, \vec{c^*}\rangle\right.\\ &\left.+ \mu_2^*\langle \vec{a^*}, \vec{c}\rangle\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&\mu_1\left(\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle + \varepsilon[\langle \vec{a}, \vec{b^*}\rangle + \langle \vec{a^*}, \vec{b}\rangle]\right) + \varepsilon\mu_1^*\left(\langle \vec{a}, \vec{b^*}\rangle + \langle \vec{a^*}, \vec{b}\rangle\right)\\ &+\mu_2\left(\langle \vec{a}, \vec{c}\rangle + \varepsilon\left(\langle \vec{a}, \vec{c^*}\rangle + \langle \vec{a^*}, \vec{c}\rangle\right)\right) + \varepsilon\mu_2^*\left(\langle \vec{a}, \vec{c^*}\rangle + \langle \vec{a^*}, \vec{c}\rangle\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&(\mu_1 + \varepsilon\mu_1^*)\left(\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle + \varepsilon\left(\langle \vec{a}, \vec{b^*}\rangle + \langle \vec{a^*}, \vec{b}\rangle\right)\right)\\ &+(\mu_2 + \varepsilon\mu_2^*)\left(\langle \vec{a}, \vec{c}\rangle + \varepsilon\left(\langle \vec{a}, \vec{c^*}\rangle + \langle \vec{a^*}, \vec{c}\rangle\right)\right) = d_3\langle \vec{A}, \vec{B}\rangle + d_4\langle \vec{A}, \vec{C}\rangle\end{aligned}$$

elde edilir.

- **Pozitif Tanımlılık:** $\forall \vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*} \in \mathbb{D}^n$ olup $\langle \vec{A}, \vec{A}\rangle = \langle \vec{a}, \vec{a}\rangle + 2\varepsilon\langle \vec{a}, \vec{a^*}\rangle$ yazılabildiği görülür. Buradan $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^n$ için $\langle \vec{a}, \vec{a}\rangle \geq 0$ olduğundan (2.26) özelliği gereğince $\langle \vec{A}, \vec{A}\rangle \geq 0$ bulunur. Ayrıca,

$$\langle \vec{A}, \vec{A}\rangle = \langle \vec{a}, \vec{a}\rangle + 2\varepsilon\langle \vec{a}, \vec{a^*}\rangle = 0$$

için $\langle \vec{a}, \vec{a}\rangle = 0$ ve $\langle \vec{a}, \vec{a^*}\rangle = 0$ elde edilir. Buradan $\mathbb{R}^n$ uzayındaki Öklid iç çarpımı pozitif tanımlı olduğundan $\vec{a} = 0$ olup $\langle \vec{a}, \vec{a^*}\rangle = 0$ için $\vec{a^*} = 0$ olmak zorunda değildir. Böylece $\vec{A} = \vec{0} + \varepsilon\vec{a^*}$ vektör olup $\vec{A} \neq \vec{0} \in \mathbb{D}^n$ elde edilir.

3.1.4 $\mathbb{D}^n$ Uzayının $\mathbb{D}$-Modül Üzerinde Normu

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*} \in \mathbb{D}^n$ dual vektörünün normu

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A}\rangle}$$

olarak tanımlanır [4]. Böylece $\langle \vec{A}, \vec{A}\rangle = \langle \vec{a}, \vec{a^*}\rangle + 2\varepsilon\langle \vec{a}, \vec{a^*}\rangle$ olduğundan

$$\|\vec{A}| = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A}\rangle} = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a}\rangle + 2\varepsilon\langle \vec{a}, \vec{a^*}\rangle}$$

olup $\sqrt{x + \varepsilon x^*} = \sqrt{x} + \varepsilon x^*\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$ eşitliği kullanılırsa norm

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle}{\sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}} = \|\vec{a}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle}{\|\vec{a}\|}$$

şeklinde tanımlanır [4].

Tanım 3.4. $\|\vec{A}\| = 1 + \varepsilon.0$ eşitliğini sağlayan vektörlere birim dual vektör adı verilir [4].

Sonuç 3.8. *$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*} \in \mathbb{D}^n$ olmak üzere $\|\vec{A}\| = 1$ olması için gerek ve yeter koşul $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1$ ve $\langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle = 0$ olmasıdır.*

Tanım 3.5. Dual uzayda $S_{\mathbb{D}}^{n-1} = \{\vec{A} \in \mathbb{D}^n : \|\vec{A}\| = 1\}$ kümesine $\mathbb{D}^n$ uzayında hiperküre denir [4].

Teorem 3.1. *$\vec{A} \neq \vec{0} + \varepsilon\vec{a^*} \in \mathbb{D}^n$ dual vektörü için $\vec{U} = \dfrac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$ normlanmış vektörü birim vektördür[2, 4].*

3.1.5 $\mathbb{D}^3$ Dual Uzay

$\mathbb{D}^3 = \mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D} = \{\vec{A} = (A_1, A_2, A_3) = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*} : A_i = a_i + \varepsilon a_i^* \in \mathbb{D}, \vec{a}, \vec{a^*} \in \mathbb{R}^3\}$ kümesi üzerinde geometri ve kinematik alanında önemli yer alan aşağıdaki tanım ve teoremler verilecektir. Öncelikle, $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*}$ olduğundan $\mathbb{D}^3 = \mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D} \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ yazılabilir. Buradan $\mathbb{D}^3 = Sp\{e_1, e_2, e_3, \varepsilon e_1, \varepsilon e_2, \varepsilon e_3\}$ olduğundan $\mathbb{D}^3$ uzayı reel sayılar cismi üzerinde 6-boyutludur.

Teorem 3.2. *$\mathbb{D}$-Modülün $\vec{a} + \varepsilon\vec{0}$ şeklinde elemanlara sahip bir alt kümesi ile $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı izomorftur [2].*

İspat. $\mathbb{D} = \{\vec{a} + \varepsilon\vec{0} : \vec{a} \in \mathbb{R}^3\}$ kümesini ve $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(\vec{a} + \varepsilon\vec{0}) = \vec{a}$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon aşağıdaki ilk iki özelliği sağladığından lineerdir.
$\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{D}, \lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

- $f(\vec{A} + \vec{B}) = f(\vec{A}) + f(\vec{B})$,
- $f(\lambda\vec{A}) = \lambda f(\vec{A})$,
- $\vec{A} = (\vec{a}, 0) \neq \vec{B} = (\vec{b}, 0) \in \mathbb{D}$ için $\vec{a} \neq \vec{b}$ olduğundan $f(A) \neq f(B)$ yazılır. O halde f, 1-1 fonksiyondur,
- $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3$ reel vektörü için $f(\vec{a}, \vec{0}) = \vec{a}$ olacak şekilde bir tek $\vec{a} + \varepsilon\vec{0} \in \mathbb{D}$ dual vektörü vardır. O halde f örtendir.

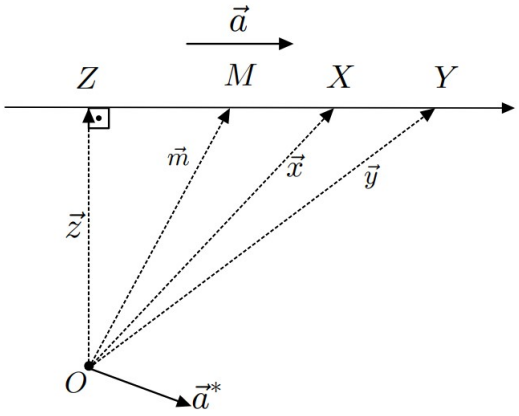
O halde $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı ile $\mathbb{D}$-modülün $\vec{a} + \varepsilon\vec{0}$ elemanlara sahip $\mathbb{D}$ alt kümesine izomorftur. ■

Tanım 3.6. $(\vec{0}, \vec{0}) \in \mathbb{D}$-Modül dual vektörüne sıfır dual vektörü denir ve izomorf olduğu vektör $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$ reel vektörüdür [4].

Not: $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1$ olacak şekilde her $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ reel birim vektörü için $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{0} \in \mathbb{D}^3$ olup $\vec{A} = \vec{a}$ bir birim reel vektördür. O halde reel birim küre dual birim kürenin bir alt kümesidir.

3.1.6 $\mathbb{D}^3$ Uzayının $\mathbb{D}$-Modül Üzerinde E.Study Dönüşümü

Teorem 3.3. *$\mathbb{D}^3$ uzayındaki birim kürenin noktaları ile $\mathbb{R}^3$ uzayının yönlü doğruları ile 1-1 eşlenir. Yani $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*} \in \mathbb{D}$, $\|\vec{A}\| = 1$ dual vektörü $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yönlü doğruya karşılık gelir. Tersine, $\mathbb{R}^3$ uzayında her yönlü doğru, hiperkürenin bir noktası ile eşlenir [1, 2, 4]*



Şekil 3.1 $(\vec{a}, \vec{a^*})$ doğrusu

İspat. ■

$\mathbb{R}^3$ uzayındaki bir doğru başlangıç noktasına göre üzerinde alınan bir nokta ve bu doğrunun yönünü gösteren bir vektör ile tanımlanabilir. Buradan doğrunun vektörel denklemi $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MX} = \overrightarrow{OM} + \lambda\vec{a} \text{ veya } \vec{x} = \vec{m} + \lambda\vec{a}$$

yazılabilir. Böylece $(\vec{x} - \vec{m}) \times \vec{a} = \vec{0}$ elde edilir.

Buradan $\vec{a}$ yerine $\lambda\vec{a}$ alınırsa eşitlik aynı doğruyu belirtmiş olacağından $\vec{a}$ birim vektör alınabilir. Buradan

$$\vec{x}\times\vec{a}=\vec{m}\times\vec{a}=\vec{a^*} \tag{3.2}$$

elde edilir. $\vec{a^*}$ vektörüne $\vec{a}$ birim vektörünün başlangıç noktasına göre vektörel momenti denir. Şimdi $\vec{a^*}$ vektörünün geometrik özelliklerini verelim:

1) $\vec{a^*}$ vektörü doğru üzerindeki noktaların seçilişinden bağımsızdır: Doğru üzerinde X noktasından başka bir Y noktası alınırsa $(\vec{y}-\vec{m})\times\vec{a}=\vec{0}$

yazılabilir. Bundan dolayı

$$\vec{y}\times\vec{a}=\vec{x}\times\vec{a}=\vec{m}\times\vec{a}=\vec{a^*} \tag{3.3}$$

elde edilir.

2) $\vec{a}$ ve $\vec{a^*}$ vektörleri birbirlerine diktir.
$(\vec{a}\perp\vec{a^*}):\langle\vec{a},\vec{a^*}\rangle=\langle\vec{a},\vec{m}\times\vec{a}\rangle=\det(\vec{a},\vec{m},\vec{a})=0.$

3) $\vec{a^*}$ vektörel momentinin normu başlangıç noktasının doğruya olan uzaklığına eşittir: $\vec{a^*}$ vektörü doğru üzerinde seçilen bir X noktasından bağımsız olduğundan dolayı Z noktası başlangıç noktasından doğruya inilen dikmenin ayağı olmak üzere
$\vec{z}\times\vec{a}=\vec{y}\times\vec{a}=\vec{x}\times\vec{a}=\vec{m}\times\vec{a}=\vec{a^*}$ yazılabilir. Ayrıca $\vec{a}\perp\vec{a^*}$, $\vec{z}\perp\vec{a^*}$ ve $\vec{z}\perp\vec{a}$ elde edilir. O halde $\|\vec{a^*}\|=\|\vec{z}\times\vec{a}\|=\|\vec{z}\|\|\vec{a}\|\sin\frac{\pi}{2}=\|\vec{z}\|$ olduğu görülür.

4) $\vec{a}\times\vec{a^*}=\vec{a}\times(\vec{z}\times\vec{a})=\langle\vec{a},\vec{a}\rangle\vec{z}-\langle\vec{z},\vec{a}\rangle\vec{a}=\vec{z}$ elde edilir [14].

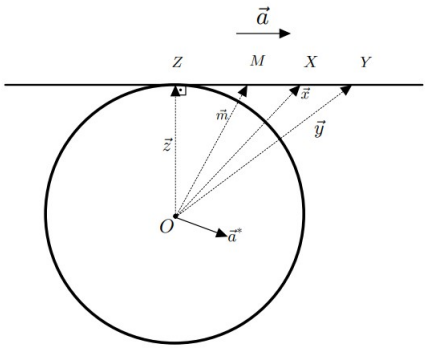
Sonuç 3.9.

- *$\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\vec{a^*}$ birim dual vektörü verilirse $\vec{a}$; doğrunun doğrultman vektörü ve $\vec{a}\times\vec{a^*}$ ise doğrunun geçtiği noktayı verir.*
- *$\vec{x}=\vec{m}+\lambda\vec{a}$ doğrusu verilirse $\vec{a}$ birim ise bu vektör $\vec{A}$ dual vektörünün reel kısmı; değilse $\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}=\vec{a_0}$ birim vektörü $\vec{A}$ 'nın reel kısmı olur. Ayrıca $\vec{a^*}=\vec{m}\times\vec{a_0}$ olmak üzere $\langle\vec{a_0},\vec{a_0}\rangle=1$ ve $\langle\vec{a_0},\vec{a^*}\rangle=0$ olduğundan $\vec{A}=\vec{a_0}+\varepsilon\vec{a^*}$ birim dual vektörü elde edilir.*

Not: $\vec{a^*}=\vec{m}\times\vec{a}$ olmak üzere $\vec{a^*}=\vec{0}$ ise doğru orjinden geçer.

3.1.7 Plücker Koordinatları

Eğer $(\vec{a}, \vec{a^*})$ vektör çifti verilirse $\mathbb{R}^3$ uzayındaki doğru tek olarak bellidir. Başlangıç noktasından geçen ve $\vec{a^*}$ vektörüne dik olan düzlem içinde O merkezli ve δ yarıçaplı çember çizilirse O noktasından $\vec{a}$ vektörüne çizilen dik doğru, çemberi iki noktada keser. Bu noktalardan çembere çizilen teğetler $(\vec{a}, \vec{a^*})$ ve $(\vec{a}, -\vec{a^*})$ vektör çiftlerine



Şekil 3.2 Plücker doğru koordinatları

karşılık gelen yönlü doğrulardır. Moment pozitiftir, böylece; $(\vec{a}, \vec{a^*})$ vektör çiftine karşılık gelen doğru, bir tanedir. Buradan $\mathbb{R}^3$ uzayındaki doğrularla $(\vec{a}, \vec{a^*})$ vektör çiftleri eşleşmektedir. $(\vec{a}, \vec{a^*})$ vektör çifti; $\vec{a}, \vec{a^*} \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1$ ve $\langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle = 0$ özelliklerini sağlar. O halde $\mathbb{R}^3$ uzayındaki standart baza göre

$$\vec{a} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, \quad \vec{a^*} = a_1^* e_1 + a_2^* e_2 + a_3^* e_3$$

yazılabilir. O halde $(\vec{a}, \vec{a^*})$ vektör çiftinin

$$(\vec{a}, \vec{a^*}) = (a_1, a_2, a_3; a_1^*, a_2^*, a_3^*)$$

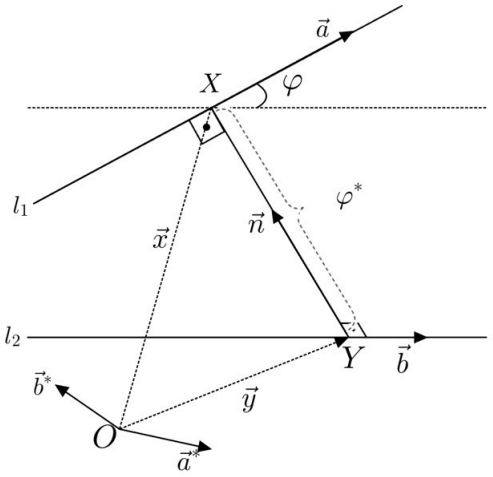
altılı bileşenine normlanmış homojen olmayan Plücker koordinatları denir. $(\vec{a}, \vec{a^*}) = (a_1, a_2, a_3; a_1^*, a_2^*, a_3^*)$ şeklindeki normlanmış homojen olmayan Plücker doğru koordinatları $\mathbb{R}^6$ uzayının bir elemanı olarak düşünülebilir. Buna ek olarak $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1$ ve $\langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle = 0$ olduğundan $\mathbb{R}^3$ uzayında bütün doğruların kümesi $\mathbb{R}^6$ uzayının 4-boyutlu bir alt uzayıdır. Yani; $\mathbb{R}^3$ uzayındaki bütün doğruların kümesi $\mathbb{R}^6$ uzayında yatan 4-boyutlu bir alt uzay oluşturur.

3.1.8 Dual Açı

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*}, \vec{B} = \vec{b} + \varepsilon\vec{b^*} \in \mathbb{D}^3$ birim dual vektörü için yapılan E.Study dönüşümüne göre $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörlerine $\mathbb{R}^3$ uzayında l_1, l_2 doğruları sırasıyla karşılık gelir. l_1 doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{a}$, vektörel momenti $\vec{a^*}$ olup; l_2 doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{b}$, vektörel momenti $\vec{b^*}$ olsun.
Buradan, $\langle\vec{a},\vec{a}\rangle = 1, \langle\vec{a},\vec{a^*}\rangle = 0$ ve $\langle\vec{b},\vec{b}\rangle = 1, \langle\vec{b},\vec{b^*}\rangle = 0$ olduğu görülür. Buna ek olarak,

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\cos\varphi = \cos\varphi, \;\; 0 \leq \varphi \leq \pi, \;\; \varphi \in \mathbb{R}$$

yazılabilir. Böylece φ açısı $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ arasındaki açıdır.



Şekil 3.3 Dual açı

Ayrıca, $\langle\vec{A},\vec{B}\rangle = \langle\vec{a},\vec{b}\rangle + \varepsilon\left\{\langle\vec{a},\vec{b^*}\rangle) + \langle\vec{a^*},\vec{b}\rangle\right\}$ eşitliğinden,

1) $\langle\vec{A},\vec{B}\rangle$ dual sayısının reel kısmının $\cos\varphi$ olduğu görülür.

2) $\langle\vec{A},\vec{B}\rangle$ dual sayısının dual kısmında yer alan $\langle\vec{a},\vec{b^*}\rangle + \langle\vec{a^*},\vec{b}\rangle$ ifadesinin geometrik yorumunu aşağıda gösterelim:

$\vec{a}, \vec{a^*}$ vektörler sırasıyla, l_1, l_2 doğruları üzerindeki noktalardan bağımsız olduğundan, özel olarak l_1, l_2 doğrularının orta dikmesinin doğruları kestiği noktalar olan X ve Y noktaları alınabilir. Yani $\vec{a^*} = \vec{x} \times \vec{a}$ ve $\vec{b^*} = \vec{y} \times \vec{b}$ yazılabilir. l_1 doğrusunun ve l_2 doğrusunun orta dikmesindeki birim vektör $\vec{n}$ olup;

$$\vec{n} = \pm\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}$$

şeklindedir. Burada X ve Y noktaları arasındaki uzaklık φ^* olup,

$$\vec{x}-\vec{y}=\pm\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}\varphi^*$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca burada

$$\langle\vec{a},\vec{b^*}\rangle=\langle\vec{a},\vec{y}\times\vec{b}\rangle=-\langle\vec{y},\vec{a}\times\vec{b}\rangle$$

ve

$$\langle\vec{a^*},\vec{b}\rangle=\langle\vec{x}\times\vec{a},\vec{b}\rangle=\langle\vec{x},\vec{a}\times\vec{b}\rangle$$

eşitlikleri taraf tarafa toplandığında

$$\langle\vec{a},\vec{b^*}\rangle+\langle\vec{a^*},\vec{b}\rangle=\langle\vec{x},\vec{a}\times\vec{b}\rangle-\langle\vec{y},\vec{a}\times\vec{b}\rangle$$

bulunur. Böylece iç çarpımın bilineerlik özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\langle\vec{a},\vec{b^*}\rangle+\langle\vec{a^*},\vec{b}\rangle&=\langle\vec{x}-\vec{y},\vec{a}\times\vec{b}\rangle\\&=\langle\pm\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}\varphi^*,\vec{a}\times\vec{b}\rangle\\&=\pm\frac{\varphi^*}{\|\vec{a}\times\vec{b}\|}\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}\rangle\\&=\pm\,\varphi^*\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\varphi\\&=\pm\,\varphi^*\sin\varphi\end{aligned}$$

olur. O halde $\langle\vec{A},\vec{B}\rangle=\cos\varphi\pm\varepsilon\varphi^*\sin\varphi$ elde edildiği görülür [2, 4].

Not: 2.11 eşitliği gereğince

$$\cos(x+\varepsilon y)=\cos x+\varepsilon y(-\sin x)=\cos x-\varepsilon y\sin x$$

olduğuna dikkat ediniz.

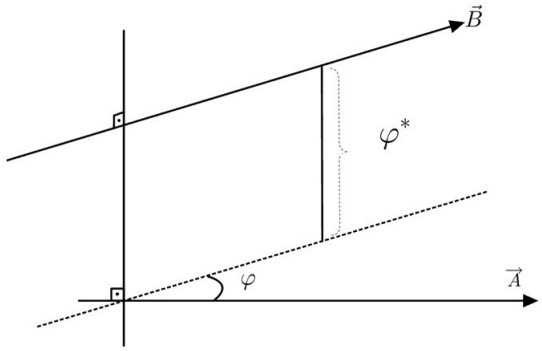
Tanım 3.7. $\vec{A},\vec{B}\in\mathbb{D}$ birim dual vektörleri için

$$\langle\vec{A},\vec{B}\rangle=\cos\varphi-\varepsilon\varphi^*\sin\varphi=\cos(\varphi+\varepsilon\varphi^*)=\cos\phi$$

şeklinde olabilir. Burada kullanılan ϕ dual açısına $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörleri arasındaki açıya dual açı denir. $\phi=\varphi+\varepsilon\varphi^*$, böylece ϕ'nin reel kısmı φ olup $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin arasındaki dual açıyı, ϕ açısının dual kısmı da φ^* olup $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörlerine karşılık gelen $\mathbb{R}$ uzayındaki doğruların ortak dikme uzunluğu belirtir.

Burada;

- ϕ dual açının reel kısmı olan φ açısı; $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ doğrularının izdüşüm açısıdır.



Şekil 3.4 Dual açının geometrik yorumu

- ϕ dual açının dual kısmı olan φ^* açısı ise; $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ doğruları arasındaki en kısa uzaklıktır.

3.1.8.1 Yönlü Doğruların Birbirine Göre Dual Açıya Bağlı Durumları

1) $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos(\varphi + \varepsilon\varphi^*) = \cos\varphi - \varepsilon\varphi^* \sin\varphi$ eşitliğinden $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$ pure dual sayı ise $\cos\varphi = 0$ şeklindedir. O halde $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ bulunur. Ayrıca $\varphi^* \neq 0$ ise $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ doğruları birbirine dik olan aykırı doğrulardır.

2) $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos(\varphi + \varepsilon\varphi^*) = \cos\varphi - \varepsilon\varphi^* \sin\varphi$ eşitliğinden $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$ reel ise $\varphi^* \sin\varphi = 0$ olmalıdır. O halde

a) $\varphi^* = 0$ ise $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ doğruları aynı düzlemde ve kesişen doğrulardır. Dolayısıyla $\langle \vec{a}, \vec{b^*} \rangle + \langle \vec{a^*}, \vec{b} \rangle = \pm\varphi^* \sin\varphi$ olduğundan iki doğrunun kesişme şartı $\langle \vec{a}, \vec{b^*} \rangle + \langle \vec{a^*}, \vec{b} \rangle = 0$ olmasıdır,

b) $\sin\varphi = 0$ ise $\varphi = 0$ olup doğrular paralel veya çakışıktır.

3) $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos\varphi - \varepsilon\varphi^* \sin\varphi = 0 + \varepsilon 0$ ise $\cos\varphi = 0$ ve $\varphi^* \sin\varphi = 0$ olmalıdır. $\cos\varphi = 0$ ifadesinden $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ ve $\varphi^* \sin\varphi = 0$ ifadesinden de $\varphi^* = 0$ elde edilir. Böylece $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörlerine karşılık gelen $\mathbb{R}$ uzayındaki doğrular düzlemsel olup dik kesişirler.

4) $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos\varphi - \varepsilon\varphi^* \sin\varphi = 1 = 1 + \varepsilon 0$ ise $\cos\varphi = 1$ ve $\varphi^* \sin\varphi = 0$ şeklindedir. $\cos\varphi = 1$ ifadesinden $\varphi = 0$ ve $\varphi^* \sin\varphi = 0$ ifadesinden de $\varphi^* = 0$ veya $\varphi = 0$ elde edilir.

a) Böylece $\varphi = 0$ ve $\varphi^* = 0$ ise doğrular çakışıktır,

b) $\varphi = 0$ ve $\varphi^* \neq 0$ ise doğrular aynı doğrultuda olup paraleldir.

5) $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \cos\varphi - \varepsilon\varphi^* \sin\varphi = -1 = -1 + \varepsilon 0$ ise $\cos\varphi = -1$ ve $\varphi^* \sin\varphi = 0$ bulunur. Bu durumda

a) $\varphi = -\pi$ ve $\varphi^* = 0$ ise doğrular çakışık ve zıt yönlüdür,

b) $\varphi = -\pi$ ve $\varphi^* \neq 0$ ise doğrular zıt doğrultuda olup paraleldir [4].

3.1.8.2 Dual açının özellikleri

$\phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ dual açısı için

- $\sin\phi = \sin\varphi + \varepsilon\varphi^* \cos\varphi$,
- $\cos\phi = \cos\varphi - \varepsilon\varphi^* \sin\varphi$,
- $\tan\phi = \tan\varphi + \varepsilon\varphi^* \sec^2\varphi$

olduğunu biliyoruz. Dual açı bunların yanında aşağıdaki özelliklere de sahiptir [4]:

- $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1 + \varepsilon 0$,
- $\sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi$,
- $\cos 2\phi = \cos^2\phi - \sin^2\phi$,
- $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1-\cos\phi}{\sin\phi}$.

3.1.9 $\mathbb{D}$-Modül Üzerinde Vektörel Çarpım ve Karma Çarpım

3.1.9.1 $\mathbb{D}$-Modül Üzerinde Vektörel Çarpım

$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3) = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*}, \vec{B} = (B_1, B_2, B_3) = \vec{b} + \varepsilon\vec{b^*} \in \mathbb{D}^3$ dual vektörlerinin dual vektörel çarpımı

$$\times : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \to \mathbb{D}^3$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = (A_2B_3 - A_3B_2, A_3B_1 - A_1B_3, A_1B_2 - A_2B_1)$$

şeklinde tanımlanır [4]. Ayrıca bu son ifadede $1 \leq i \leq 3$ iken $A_i = a_i + \varepsilon a_i^*$, $B_i = b_i + \varepsilon b_i^* \in \mathbb{D}$ yazılırsa $\vec{a}, \vec{a^*}, \vec{b}, \vec{b^*} \in \mathbb{R}^3$ reel vektörlerinin vektörel çarpımları yardımıyla vektörel çarpım aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (a_i + \varepsilon a_i^*) \times (b_i + \varepsilon b_i^*) = (\vec{a_i} \times \vec{b_i}) + \varepsilon[(\vec{a_i} \times \vec{b_i^*}) + (\vec{a_i^*} \times \vec{b_i})].$$

3.1.9.2 Vektörel Çarpımın Özellikleri

$\vec{A},\vec{B},\vec{C} \in \mathbb{D}$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır [4]:

1) $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$,

2) $\vec{A}\times\vec{A} = \vec{0} \in \mathbb{D}^3$,

3) $\langle\vec{A},\vec{B}\times\vec{C}\rangle = \det(\vec{A},\vec{B},\vec{C})$,

4) $\langle\vec{B},\vec{B}\times\vec{C}\rangle = 0$ ve $\langle\vec{C},\vec{B}\times\vec{C}\rangle = 0$,

5) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \langle\vec{A},\vec{C}\rangle\vec{B} - \langle\vec{A},\vec{B}\rangle\vec{C}$,

6) $\langle\vec{A}\times\vec{B},\vec{C}\times\vec{D}\rangle = \begin{vmatrix}\langle\vec{A},\vec{C}\rangle & \langle\vec{A},\vec{B}\rangle\\ \langle\vec{B},\vec{C}\rangle & \langle\vec{B},\vec{D}\rangle\end{vmatrix}$.

3.1.9.3 $\mathbb{D}$-Modül Üzerinde Karma Çarpım

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*}$, $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon\vec{b^*}$, $\vec{C} = \vec{c} + \varepsilon\vec{c^*} \in \mathbb{D}^3$ dual vektörlerinin karma çarpımı

$$\langle\vec{A}\times\vec{B},\vec{C}\rangle = \det(\vec{A},\vec{B},\vec{C})$$

olarak tanımlanır [4]. Burada dual vektörlerin bileşenleri cinsinden tekrar düzenlenirse karma çarpım aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\langle\vec{A}\times\vec{B},\vec{C}\rangle = \langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\rangle + \varepsilon[\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{c^*}\rangle + \langle\vec{a}\times\vec{b^*},\vec{c}\rangle + \langle\vec{a^*}\times\vec{b},\vec{c}\rangle].$$

$\mathbb{D}^3$ Modülünde $\langle\tilde{\mathbf{A}}\times\tilde{\mathbf{B}},\tilde{\mathbf{C}}\rangle = \mathbf{0} \in \mathbb{D}$ Olmasının Geometrik Yorumu: $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ dual vektörlerine E.Study dönüşümü gereğince $\mathbb{R}^3$ uzayında üç tane eksen karşılık gelir [4].

I.Hal: $\vec{a} = \lambda_1$, $\vec{b} = \lambda_2$, $\vec{c}$ ve $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$ ($\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ikişer lineer bağımlı) ise bu üç doğru paraleldir. Yani $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a} = \vec{0}$ ise $\langle\vec{A}\times\vec{B},\vec{C}\rangle = 0 \in \mathbb{D}$ bulunur.

II. Hal: $\langle\vec{A}\times\vec{B},\vec{C}\rangle = \langle\vec{A}\times\vec{B},\vec{A}\rangle = \langle\vec{A}\times\vec{B},\vec{B}\rangle = 0$. Yani; $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ has dual vektörlerinin eksenleri ortak bir normale sahip ise $\vec{A}\times\vec{B}$ eksenleri $\vec{C}$ vektörünün eksenine diktir. O halde $\langle\vec{A}\times\vec{B},\vec{C}\rangle = 0$ elde edilir.

3.1.9.4 Karma Çarpımın Özellikleri

$\vec{A},\vec{B},\vec{C},\vec{D} \in \mathbb{D}^3$ dual vektörleri verilsin. Aşağıdaki özellikler sağlanır [4] :

1) $\langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{C} \rangle = \langle \vec{B} \times \vec{C}, \vec{A} \rangle = \langle \vec{C} \times \vec{A}, \vec{B} \rangle$,

2) $\langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{C} \rangle = \langle \vec{A}, \vec{B} \times \vec{C} \rangle$,

3) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$,

4) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{0}$,

5) $\langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{C} \times \vec{D} \rangle = \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle + \langle \vec{B}, \vec{D} \rangle - \langle \vec{A}, \vec{D} \rangle + \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle$,

6) $\langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \rangle = \langle \vec{A} \times \vec{B}, \vec{B} \rangle = 0$.

3.2 $\mathbb{D}_1^n$ Dual Lorentz Uzay

3.2.1 $\mathbb{D}^n$ Uzayının $\mathbb{D}$-Modül Üzerinde Lorentz İç Çarpımı

Tanım 3.8. $\forall \vec{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n) = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*}, \vec{B} = (B_1, B_2, \ldots, B_n) = \vec{b} + \varepsilon \vec{b^*} \in \mathbb{D}^n$ olmak üzere

$$\langle , \rangle_{\mathbb{DL}} : \mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$$
$$(\vec{A}, \vec{B}) \to \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_{\mathbb{DL}} = \sum_{i=1}^{n-1} A_i B_i - A_n B_n$$

işlemini tanımlayalım. $A_i, B_i \in \mathbb{D}$ için $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_{\mathbb{DL}} \in \mathbb{D}$ olduğu açıktır. Bu fonksiyon

Simetri: $\forall \vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{D}^n$ için

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_{\mathbb{DL}} = \sum_{i=1}^{n-1} A_i B_i - A_n B_n = \sum_{i=1}^{n} B_i A_i - B_n A_n = \langle \vec{B}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}}$$

özelliğini sağlar.
Bilineerlik: $\forall \vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathbb{D}^n$ ve $\forall d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{D}$ için

- $\langle d_1 \vec{A} + d_2 \vec{B}, \vec{C} \rangle_{\mathbb{DL}} = d_1 \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle_{\mathbb{DL}} + d_2 \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle_{\mathbb{DL}}$

$$\begin{aligned}\langle d_1 \vec{A} + d_2 \vec{B}, \vec{C} \rangle_{\mathbb{DL}} &= \sum_{i=1}^{n-1} [(d_1 A_i + d_2 B_i) C_i - (d_1 A_n + d_2 B_n) C_n] \\ &= d_1 \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} A_i C_i - A_n C_n \right\} + d_2 \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} B_i C_i - B_n C_n \right\} \\ &= d_1 \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle_{\mathbb{DL}} + d_2 \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle_{\mathbb{DL}}\end{aligned}$$

- $\langle \vec{A}, d_3 \vec{B} + d_4 \vec{C} \rangle_{\mathbb{DL}} = d_3 \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_{\mathbb{DL}} + d_4 \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle_{\mathbb{DL}}$

$$\begin{aligned}\langle \vec{A}, d_3 \vec{B} + d_4 \vec{C} \rangle_{\mathbb{DL}} &= \sum_{i=1}^{n-1} [A_i (d_3 B_i + d_4 C_i) - A_n (d_3 B_n + d_4 C_n)] \\ &= d_3 \sum_{i=1}^{n-1} A_i B_i - A_n B_n + d_4 \sum_{i=1}^{n-1} A_i C_i - A_n C_n \\ &= d_3 \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_{\mathbb{DL}} + d_4 \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle_{\mathbb{DL}}\end{aligned}$$

özelliklerini sağlar.

Pozitif Tanımlılık: $\forall \vec{A} = (A_i) \in \mathbb{D}^n$ için

$$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}} = \sum_{i=1}^{n-1} (A_i)^2 - (A_n)^2$$

bulunur. $A_i = a_i + \varepsilon a_i^*$ için $(A_i)^2 = (a_i)^2 + 2\varepsilon a_i a_i^*$ ve $(A_n)^2 = (a_n)^2 + 2\varepsilon a_n a_n^*$ olduğundan

$$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}} = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (a_i)^2 - (a_n)^2 \right\} + 2\varepsilon \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_i^* - a_n a_n^* \right\}$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{i=1}^{n-1} (a_i)^2 - (a_n)^2 > 0, \ \sum_{i=1}^{n-1} (a_i)^2 - (a_n)^2 < 0, \ \sum_{i=1}^{n-1} (a_i)^2 - (a_n)^2 = 0$$

olacağından (2.26) özelliği gereğince $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}} > 0$, $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}} < 0$, $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}} = 0$ olabilir.

Sonuç 3.10.

$$\langle , \rangle_L : \mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$$
$$(\vec{A}, \vec{B}) \to \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_{\mathbb{DL}} = \sum_{i=1}^{n-1} A_i B_i - A_n B_n$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon için pozitif tanımlı olmayan bir iç çarpım fonksiyonudur denir. Bu iç çarpıma dual Lorentz iç çarpım fonksiyonu denir. Bu durumda $\mathbb{D}^n$ uzayına dual Lorentz uzayı denir ve $\mathbb{D}_1^n$ ile gösterilir [4].

Sonuç 3.11. *$\forall \vec{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n) = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*}, \vec{B} = (B_1, B_2, \ldots, B_n) = \vec{b} + \varepsilon \vec{b^*} \in \mathbb{D}_1^n$ için $\mathbb{D}^n$ uzayının $\mathbb{D}$-Modül üzerinde tanımlanan*

$$\langle , \rangle_{\mathbb{DL}} : \mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$$
$$(\vec{A}, \vec{B}) \to \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_{\mathbb{DL}} = \sum_{i=1}^{n-1} A_i B_i - A_n B_n$$

pozitif tanımlı olmayan iç çarpım fonksiyonu

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_{\mathbb{DL}} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_L + \varepsilon [\langle \vec{a}, \vec{b^*} \rangle_L + \langle \vec{a^*}, \vec{b} \rangle_L]$$

şeklinde de tanımlanabilir. Burada eşitliğin sağ tarafındaki iç çarpımlar $\mathbb{R}_1^n$ Lorentz uzayı üzerindeki iç çarpımlarıdır [3, 4]:

$$\langle x, y \rangle_L = \langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \rangle_L = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n.$$

İspat. $A_i = a_i + \varepsilon a_i^*, B_i = b_i + \varepsilon b_i^*$ olmak üere $A_iB_i = a_ib_i + \varepsilon(a_ib_i^* + a_i^*b_i)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_{\mathbb{D}L} &= \sum_{i=1}^{n-1} A_iB_i - A_{n-1}B_{n-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} [a_ib_i + \varepsilon(a_ib_i^* + a_i^*b_i)] - [a_nb_n + \varepsilon(a_nb_n^* + a_n^*b_n)]\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_{\mathbb{DL}} = \sum_{i=1}^{n-1} (a_ib_i - a_nb_n) + \varepsilon \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_ib_i^* - a_nb_n^* + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^*b_i - a_n^*b_n \right]$$

olmak üzere $\mathbb{R}_1^n$ Lorentz uzayı üzerindeki Lorentz iç çarpım ile eşitlik sağlanır. ■

Ayrıca bu özellik sayesinde iç çarpım fonksiyonu olması için gerekli özellikler kolaylıkla görülebilir.

Simetri: $\forall \vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{D}_1^n$ için simetri özelliği sağlanır.

$$\begin{aligned}\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_{\mathbb{DL}} &= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_L + \varepsilon[\langle \vec{a}, \vec{b^*} \rangle_L + \langle \vec{a^*}, \vec{b} \rangle_L] \\ &= \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle_L + \varepsilon[\langle \vec{a^*}, \vec{b} \rangle_L + \langle \vec{a}, \vec{b^*} \rangle_L] \\ &= \langle \vec{B}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}}.\end{aligned}$$

Bilineerlik: $\forall \vec{A},\vec{B},\vec{C} \in \mathbb{D}_1^n$ ve $\forall d_1=(\lambda_1+\varepsilon\lambda_1^*), d_2=(\lambda_2+\varepsilon\lambda_2^*), d_3=(\mu_1+\varepsilon\mu_1^*)$, $d_4=(\mu_2+\varepsilon\mu_2^*)\in\mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned}\langle d_1\vec{A}+d_2\vec{B},\vec{C}\rangle_{\mathbb{DL}} =&\langle(\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}),\vec{c}\rangle_L\\ &+\varepsilon[\langle(\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}),\vec{c^*}\rangle_L+\langle(\lambda_1\vec{a^*}+\lambda_1^*\vec{a}+\lambda_2\vec{b^*}+\lambda_2^*\vec{b}),\vec{c}\rangle_L]\\ \\ &=\lambda_1\langle\vec{a},\vec{c}\rangle_L+\lambda_2\langle\vec{b},\vec{c}\rangle_L\\ &+\varepsilon[\lambda_1\langle\vec{a},\vec{c^*}\rangle_L+\lambda_2\langle\vec{b},\vec{c^*}\rangle_L+\lambda_1\langle\vec{a^*},\vec{c}\rangle_L+\lambda_1^*\langle\vec{a},\vec{c}\rangle_L+\lambda_2\langle\vec{b^*},\vec{c}\rangle_L+\lambda_2^*\langle\vec{b},\vec{c}\rangle_L]\\ &+\varepsilon^2(\lambda_1^*\langle\vec{a},\vec{c^*}\rangle_L+\lambda_1^*\langle\vec{a^*},\vec{c}\rangle_L)+\varepsilon^2(\lambda_2^*\langle\vec{b},\vec{c^*}\rangle_L)+\lambda_2^*\langle\vec{b^*},\vec{c}\rangle_L)\\ \\ &=\lambda_1[\langle\vec{a},\vec{c}\rangle_L+\varepsilon(\langle\vec{a},\vec{c^*}\rangle_L+\langle\vec{a^*},\vec{c}\rangle_L)]+\varepsilon\lambda_1^*[\langle\vec{a},\vec{c}\rangle_L+\varepsilon(\langle\vec{a},\vec{c^*}\rangle_L+\langle\vec{a^*},\vec{c}\rangle_L)]\\ &+\lambda_2[\langle\vec{b},\vec{c}\rangle_L+\varepsilon(\langle\vec{b},\vec{c^*}\rangle_L+\langle\vec{b^*},\vec{c}\rangle_L)]+\varepsilon\lambda_2^*[\langle\vec{b},\vec{c}\rangle_L+\varepsilon(\langle\vec{b},\vec{c^*}\rangle_L+\langle\vec{b^*},\vec{c}\rangle_L)]\\ \\ &=(\lambda_1+\varepsilon\lambda_1^*)(\langle\vec{a},\vec{c}\rangle_L+\varepsilon(\langle\vec{a},\vec{c^*}\rangle_L+\langle\vec{a^*},\vec{c}\rangle_L))\\ &+(\lambda_2+\varepsilon\lambda_2^*)(\langle\vec{b},\vec{c}\rangle_L+\varepsilon(\langle\vec{b},\vec{c^*}\rangle_L+\langle\vec{b^*},\vec{c}\rangle_L))\\ \\ &=d_1\langle\vec{A},\vec{C}\rangle_{\mathbb{DL}}+d_2\langle\vec{B},\vec{C}\rangle_{\mathbb{DL}}\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\langle\vec{A},d_3\vec{B}+d_4\vec{C}\rangle_{\mathbb{DL}} =&\langle\vec{a},\mu_1\vec{b}+\mu_2\vec{c}\rangle_L+\varepsilon[\langle\vec{a},(\mu_1\vec{b^*}+\mu_1^*\vec{b}+\mu_2\vec{c^*}+\mu_2^*\vec{c})\rangle_L+\langle\vec{a^*},\mu_1\vec{b}+\mu_2\vec{c}\rangle_L]\\ \\ &=\mu_1\langle\vec{a},\vec{b}\rangle_L+\mu_2\langle\vec{a},\vec{c}\rangle_L\\ &+\varepsilon[\mu_1\langle\vec{a},\vec{b^*}\rangle_L+\mu_1^*\langle\vec{a},\vec{b}\rangle_L+\mu_2\langle\vec{a},\vec{c^*}\rangle_L+\mu_2^*\langle\vec{a},\vec{c}\rangle_L+\mu_1\langle\vec{a^*},\vec{b}\rangle_L+\mu_2\langle\vec{a^*},\vec{c}\rangle_L]\\ &+\varepsilon^2[\mu_1^*\langle\vec{a},\vec{b^*}\rangle_L+\mu_1^*\langle\vec{a^*},\vec{b}\rangle_L+\mu_2^*\langle\vec{a},\vec{c^*}\rangle_L+\mu_2^*\langle\vec{a^*},\vec{c}\rangle_L]\\ \\ &=\mu_1[\langle\vec{a},\vec{b}\rangle_L+\varepsilon(\langle\vec{a},\vec{b^*}\rangle_L+\langle\vec{a^*},\vec{b}\rangle_L]+\varepsilon\mu_1^*[\langle\vec{a},\vec{b}\rangle_L+\varepsilon(\langle\vec{a},\vec{b^*}\rangle_L+\langle\vec{a^*},\vec{b}\rangle_L)]\\ &+\mu_2[\langle\vec{a},\vec{c}\rangle_L+\varepsilon(\langle\vec{a},\vec{c^*}\rangle_L+\langle\vec{a^*},\vec{c}\rangle_L]+\varepsilon\mu_2^*[\langle\vec{a},\vec{c}\rangle_L+\varepsilon(\langle\vec{a},\vec{c^*}\rangle_L+\langle\vec{a^*},\vec{c}\rangle_L)\\ \\ &=(\mu_1+\varepsilon\mu_1^*)[\langle\vec{a},\vec{b}\rangle_L+\varepsilon(\langle\vec{a},\vec{b^*}\rangle_L+\langle\vec{a^*},\vec{b}\rangle_L)]\\ &+(\mu_2+\varepsilon\mu_2^*)[\langle\vec{a},\vec{c}\rangle_L+\varepsilon(\langle\vec{a},\vec{c^*}\rangle_L+\langle\vec{a^*},\vec{c}\rangle_L)]=d_3\langle\vec{A},\vec{B}\rangle_{\mathbb{DL}}+d_4\langle\vec{A},\vec{C}\rangle_{\mathbb{DL}}\end{aligned}$$

elde edilir.

Pozitif Tanımlılık: $\forall \vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*} \in \mathbb{D}_1^n$ için

$$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}} = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L + \varepsilon 2 \langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle_L$$

yazılabilir. Buradan $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}_1^n$ için

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L > 0,\ \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L < 0, \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L = 0$$

olduğundan

$$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}} > 0,\ \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}} < 0,\ \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}} = 0$$

bulunur. Ayrıca

$$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}} = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L + \varepsilon 2 \langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle_L = 0$$

için

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L = 0, \langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle_L = 0$$

bulunur. Burada $\mathbb{R}_1^n$ Lorentz uzayındaki iç çarpım fonksiyonunun özelliklerinden $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L = 0$ olması için $\vec{a} = 0$ olmak zorunda değildir. Böylece $\vec{A} \neq \vec{0} \in \mathbb{D}_1^n$ elde edilir.

NOT: Bir $x + \varepsilon x^*$ dual sayısı için $x > 0$ için $x + \varepsilon x^* > 0$ ve $x < 0$ için $x + \varepsilon x^* < 0$ olduğunu biliyoruz. Bundan dolayı $\vec{A}$ dual vektörü için $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}} = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L + \varepsilon 2 \langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle_L$ bir dual sayı olduğundan $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}} > 0$ veya $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}} < 0$ veya $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}} = 0$ durumları (2.26) özelliği gereğince olabilir. Bu sınıflandırma $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}}$ iç çarpımının reel kısmı olan $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L$ ifadesi ile Lorentz uzay üzerindeki vektör sınıflandırmasına bağlıdır.

3.2.2 Dual Vektörlerin Sınıflandırılması

Tanım 3.9. Herhangi bir $\forall \vec{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n) = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*} = (a, a^*) \in \mathbb{D}_1^n$ dual vektörü için

$$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}} = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L + \varepsilon 2 \langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle_L$$

yazılabilir. O halde Tanım(A.2) gereğince aşağıdaki adlandırmalar yapılır [3, 4]:

1) $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}} > 0$ veya $\vec{A} = \vec{0}$ ise $\vec{A}$ vektörüne spacelike dual vektör denir.

2) $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}} < 0$ ise $\vec{A}$ vektörüne timelike dual vektör denir.

3) $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}} = 0$ ise $\vec{A}$ vektörüne null dual vektör denir.

Buradan itibaren spacelike için sp, timelike için tl ifadesi kısaltma olarak kullanılacaktır. Buna göre aşağıdaki tanımlar verilebilir:

Sonuç 3.12. *$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*} \in \mathbb{D}_1^n$ olsun. Dual sayıların sıralama bağıntısı özelliğinden aşağıdaki özellikler söylenebilir [4]:*

1) *$\vec{A}$ vektörünün sp dual vektör olması için gerek ve yeter şart $\vec{a} \in \mathbb{R}_1^n$ vektörünün sp olmasıdır.*

2) *$\vec{A}$ vektörünün tl dual vektör olması için gerek ve yeter şart $\vec{a} \in \mathbb{R}_1^n$ vektörünün tl olmasıdır.*

3) *$\vec{A}$ vektörü $null$ dual vektör ise $\vec{a}$ vektörü de $null$ vektördür.*

Not: Ayrıca $\vec{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n) = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*} = (a, a^*) \in \mathbb{D}_1^n$ tl dual vektörünün future pointing (veya past pointing) olması için gerek ve yeter şart $\vec{a}$ vektörünün $\mathbb{R}_1^n$ Lorentz uzayında future pointing (veya past pointing) olmasıdır.

3.2.3 $\mathbb{D}_1^n$ Üzerinde Norm

$\vec{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n) = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*} = (a, a^*) \in \mathbb{D}_1^n$ için $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}} = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L + \varepsilon 2 \langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle_L$ olduğunu biliyoruz. O halde $\vec{A} \in \mathbb{D}_1^n$ non-$null$ dual vektörünün normu

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{|\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}}|}$$

ile tanımlanır [3, 4]. $d = x + \varepsilon x^* \in \mathbb{D}$ dual sayısının karekökü ve mutlak değeri sırasıyla

$$\sqrt{x + \varepsilon x^*} = \sqrt{x} + \varepsilon x^* \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ve} \quad |x + \varepsilon x^*| = \begin{cases} x + \varepsilon x^*, & x > 0 \\ -x - \varepsilon x^*, & x < 0, \end{cases}$$

şeklinde tanımlandığından

$$\|\vec{A}| = \sqrt{|\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}}|} = \sqrt{|\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L + 2\varepsilon \langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle_L|}$$

normu

- $\vec{a}$ sp dual vektör ise $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L > 0$ olduğundan

$$|\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L + 2\varepsilon \langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle_L| = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L + 2\varepsilon \langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle_L \tag{3.4}$$

yazılır. O halde norm

$$\|\vec{A}\| = \|\vec{a}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle}{\|\vec{a}\|} \tag{3.5}$$

şeklinde bulunur.

- $\vec{a}$ tl dual vektör ise $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L < 0$ olduğundan

$$|\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L + 2\varepsilon \langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle_L| = -\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L - 2\varepsilon \langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle_L \tag{3.6}$$

yazılır. O halde norm

$$\|\vec{A}\| = \|\vec{a}\| - \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle}{\|\vec{a}\|} \tag{3.7}$$

şeklinde bulunur.

Dikkat edilecek olursa, $a = \|\vec{a}\|$, $b = \dfrac{\langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle}{\|\vec{a}\|} \in \mathbb{R}$ olduğundan bir dual vektörün normu bir dual sayıdır. Yani $\|\vec{A}\| = \|\vec{a}\| \pm \varepsilon \dfrac{\langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle}{\|\vec{a}\|} \in \mathbb{D}$ dir.

Tanım 3.10. $\vec{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n) = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*} \in \mathbb{D}_1^n$ dual Lorentz vektörü verilsin.

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L = +1, \langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle_L = 0$$

ise vektörüne dual sp birim vektör denir [4].

Tanım 3.11. $\vec{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n) = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*} \in \mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz vektörünü alalım.

- $S_1^2 = \{\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*} : \|\vec{A}\| = (1,0), \vec{a}, \vec{a^*} \in \mathbb{R}_1^3; \vec{a}$ sp vektör$\}$ kümesine $\mathbb{D}_1^3$ modülünde dual Lorentz birim küre denir. Yani dual Lorentz birim küre üzerindeki $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1$, $\langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle = 0$ özelliğine sahip $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*}$ noktaları $(\vec{a}, \vec{a^*})$=$(sp, sp) = (sp, tl) = (sp, null)$ şeklinde olmalıdır [4].

- $H_0^2 = \{\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*} : \|\vec{A}\| = (-1,0), \vec{a}, \vec{a^*} \in \mathbb{R}_1^3; \vec{a}$ tl vektör$\}$ kümesine $\mathbb{D}_1^3$ modülünde dual Hiperbolik birim küre denir. Yani dual hiperbolik birim küre üzerindeki $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = -1$, $\langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle = 0$ özelliğine sahip $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*}$ noktaları $(\vec{a}, \vec{a^*})$=(tl, sp) şeklinde olmalıdır [4].

H_0^2 dual hiperbolik kürenin iki bileşeni vardır. H_0^2 uzayının, sırası ile (0,0,1) ve (0,0,-1) noktalarından geçen kollarına future pointing dual hiperbolik birim küre ve past pointing dual hiperbolik birim küre denir ve H_0^{2+} ve H_0^{2-} ile gösterilir.

$$H_0^{2+} = \{\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*} \in H_0^2 : \vec{a}; \text{future pointing } tl \text{ vektör}\}$$

ve

$$H_0^{2-} = \{\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*} \in H_0^2 : \vec{a}; \text{past pointing } tl \text{ vektör}\}$$

şeklinde tanımlanır.

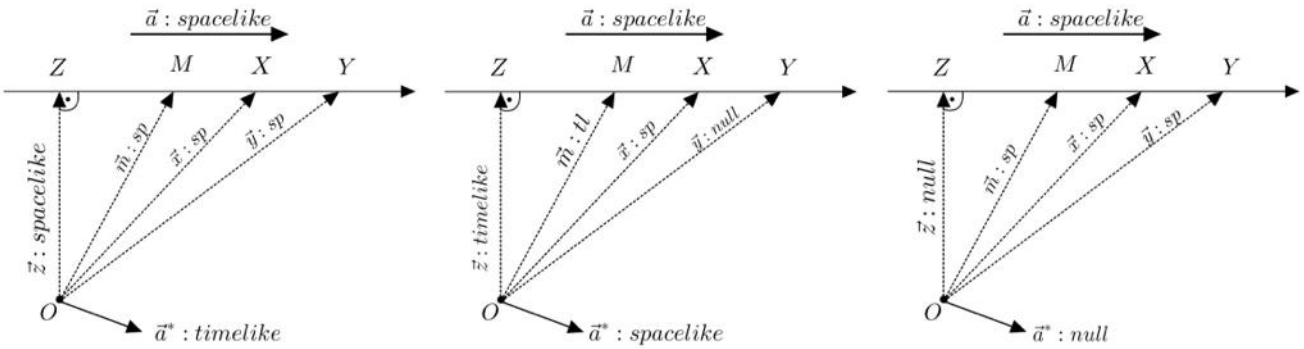
- $\Lambda^2 = \{\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*} : \|\vec{A}\| = 0 + \varepsilon 0; \vec{a}, \vec{a^*} \in \mathbb{R}_1^3; \vec{a}\ null \text{ vektör}\}$ kümesine $\mathbb{D}_1^3$ modülünde light konisi denir [3]. Yani light koni üzerindeki $\langle\vec{a}, \vec{a}\rangle = 0$, $\langle\vec{a}, \vec{a^*}\rangle = 0$ özelliğine sahip $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*}$ noktaları $(\vec{a}, \vec{a^*}) = (null, sp)$, $= (null, null)$ şeklinde olmalıdır.

3.2.4 $\mathbb{D}_1^3$ Dual Lorentz Uzay Üzerinde E.Study Dönüşümü

Teorem 3.4. *$\mathbb{D}_1^3$ Dual Lorentz uzayında dual Lorentz birim küre üzerindeki noktalar ile*

$$\langle\vec{a}, \vec{a}\rangle_L = +1 \text{ ve } \langle\vec{a}, \vec{a^*}\rangle_L = 0 \tag{3.8}$$

olacak şekildeki $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında $(\vec{a}, \vec{a^*}) = (sp, tl), = (sp, sp), = (sp, null)$ doğruları arasında 1-1 eşleme vardır. Yani; dual Lorentz birim kürenin noktaları ile $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında sp doğruları birbirine karşılık gelir [4].



Şekil 3.5 Dual Lorentz uzayında E.Study dönüşümü ($\vec{a}$ spacelike)

İspat. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $\vec{a}$ sp doğrultman vektörüne sahip sp doğrunun parametrik denklemi $\vec{x} = \vec{m} + \lambda\vec{a}$ şeklindedir. Böylece $\vec{a^*} = \vec{m} \times_L \vec{a} = \vec{x} \times_L \vec{a}$ olup $\vec{a^*}$ vektörüne O orijin noktasına göre vektörel momenti denir.
Doğruyu sp doğrusu seçelim. Dolayısıyla doğrunun doğrultman vektörü olan $\vec{a}$ sp vektördür. Doğrunun üzerindeki temsili nokta M olmak üzere Teorem (A.6) özelliği

gereğince M nin konum vektörü olan $\vec{m}$ vektörünün sp, tl, $null$ vektör olması durumuna göre $\vec{a^*}$ vektörünün tipi belirlenir.

Şimdi $\vec{a^*}$ vektörünün geometrik özelliklerini verelim:

1) $\vec{a}$ sp olmak üzere doğrunun üzerindeki temsili noktanın sınıfına göre $\vec{a^*}$ vektörel moment sınıflandırılır ve $\vec{m}\times_L\vec{a}=\vec{a^*}$ olmak üzere aşağıdaki denklemler sağlanır:

- $|\langle\vec{m},\vec{a}\rangle|<\|\vec{m}\|\|\vec{a}\|$ olup $sp\times sp=tl$ (Teorem A.6 / A.6 özellik) (3.9)
- $tl\times sp=sp$ (Teorem A.6 / A.6.özellik) (3.10)
- $|\langle\vec{m},\vec{a}\rangle|=0$ olup $null\times sp=null$ (Teorem A.6 / A.6.özellik) (3.11)

Böylece doğru üzerindeki noktaların konum vektörleri yukarıda belirtilen şartlar dahilinde sp, tl ve $null$ vektör olabilir.

2) $\vec{a}$ doğrultman vektörünün sp vektör olduğu bilinerek, seçilen $\vec{a^*}$ vektörü sp, tl ve null vektörü olma durumu ele alındığında Teorem(A.9) gereğince sp vektörlerin tüm vektörlere dik olduğu bilindiğinden $\vec{a},\vec{a^*}$ vektörleri Lorentz anlamında ortogonaldir ($\vec{a}\perp\vec{a^*}$).

$$\langle\vec{a},\vec{a^*}\rangle=\langle\vec{a},\vec{m}\times_L\vec{a}\rangle=\det(\vec{a},\vec{m},\vec{a})=0. \tag{3.12}$$

3) Lorentz uzayında üç vektörün vektörel çapımının özelliğinden, [7]

$$\vec{a^*}\times_L\vec{a}=(\vec{z}\times_L\vec{a})\times_L\vec{a}=-\langle\vec{z},\vec{a}\rangle\vec{a}+\langle\vec{a},\vec{a}\rangle\vec{z}=\vec{z} \tag{3.13}$$

elde edilir.

4) Başlangıç noktasından doğrunun üzerine inilen dikmenin ayağına Z noktası denilirse buradaki Z noktası için $\vec{z}=\vec{a^*}\times_L\vec{a}$ olduğundan $\vec{z}\perp\vec{a}$ ve $\vec{z}\perp\vec{a^*}$ söylenebilir. Ayrıca Z noktasının konum vektörü olan $\vec{z}$ vektörünün sınıflandırılması hakkında şunlar söylenebilir:

- $|\langle\vec{a},\vec{a^*}\rangle|<\|\vec{a}\|\|\vec{a^*}\|$ olmak üzere $sp\times sp=tl$,
- $tl\times sp=sp$,
- $|\langle\vec{a},\vec{a^*}\rangle|=0$ olmak üzere $null\times sp=null$.

Böylece dikmenin ayağı olan Z noktasının konum vektörü olan $\vec{z}$, seçilen $\vec{a^*}$ vektörel momentin tipine bağlıdır. $\vec{a}$ vektörü sp olmak üzere; $\vec{a^*}$ vektörü sp ise $\vec{z}$ vektörü tl; $\vec{a^*}$ vektörü tl ise $\vec{z}$ vektörü sp; $\vec{a^*}$ vektörü $null$ ise $\vec{z}$ vektörü Teorem(A.9) gereğince $null$ vektörü olduğu görülür.

5) $\vec{a^*}$ vektörünün uzunluğu: $\vec{a^*}$ vektörel momenti ve Z noktası başlangıç noktasından doğruya inilen dikmenin ayağı olmak üzere $\vec{z} \times \vec{a} = \vec{a^*}$ şeklindedir. Böylece $\vec{z} = \vec{a^*} \times \vec{a}$ olduğundan $\vec{z} \perp \vec{a}$ dır ve $\vec{a}$ birim vektör seçildiğinden $\|\vec{a}\| = 1$ dir. Buradan θ açısı $\vec{a}$ ile $\vec{a^*}$ vektörleri arasındaki açı olmak üzere

- $(\vec{a}, \vec{a^*}) = (sp, tl)$ ve $\vec{z}$ sp ise Teorem (A.4) gereğince $\|\vec{z}\| = \|\vec{a^*} \times \vec{a}\| = \|\vec{a^*}\|.\|\vec{a}\| \cosh\theta$ olup $\|\vec{a}\| = 1$ olduğundan $\|\vec{z}\| = \|\vec{a^*}\| \cosh\theta$ olduğu görülür [6].
- $(\vec{a}, \vec{a^*}) = (sp, sp)$ ve $\vec{z}$ tl ise Teorem (A.2) gereğince $\|\vec{z}\| = \|\vec{a^*} \times \vec{a}\| = \|\vec{a^*}\|.\|\vec{a}\| \sin\frac{\pi}{2} = \|\vec{a^*}\|$ olduğu görülür. $\|\vec{a}\| = 1$ olduğundan böylece $\|\vec{z}\| = \|\vec{a^*}\|$ şeklindedir.
- $(\vec{a}, \vec{a^*}) = (sp, null)$ ve $\vec{z}$ $null$ ise $\|\vec{a^*}\|$ ile ilgili yorum yapılamaz [7].

Sonuç olarak $\vec{a}$ spacelike vektör, $\vec{a^*}$ vektörel moment vektörü olmak üzere $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L = +1$ ve $\langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle_L = 0$ özellikleri sağlanır. $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski uzayının yönlendirilmiş sp doğruları ile bütün dual sp birim vektörleri (yani dual Lorentz küresi üzerindeki noktaları) arasında 1-1 eşleme vardır.

Örnekler:

S1) $\vec{a} = (3, 4, 2\sqrt{6})$ sp birim vektör, $\vec{a^*} = (4, 3, 2\sqrt{6})$ sp vektör olmak üzere

$$\vec{z} = \vec{a^*} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ 4 & 3 & 2\sqrt{6} \\ 3 & 4 & 2\sqrt{6} \end{vmatrix} = (-2\sqrt{6}, -2\sqrt{6}, -7)$$

olup $\vec{z}$ tl vektördür. Buradan

$$\langle \vec{z}, \vec{a} \rangle = 0 \text{ olup } \vec{z} \perp \vec{a}$$

ve

$$\langle \vec{z}, \vec{a^*} \rangle = 0 \text{ olup } \vec{z} \perp \vec{a^*} \text{ olduğu görülür.}$$

Buradan doğru denklemini

$$\frac{x + 2\sqrt{6}}{3} = \frac{y + \sqrt{6}}{2} = \frac{z + 7}{\sqrt{6}} = \lambda \tag{3.14}$$

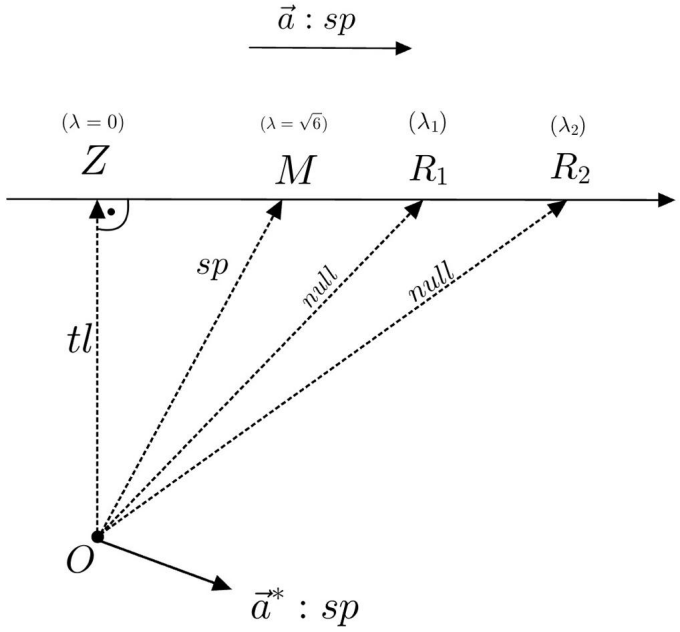
şeklinde ifade edilebilir. Buradan

- $\lambda = 0$ için $Z = (-2\sqrt{6}, -2\sqrt{6}, -7)$ olup $\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle < 0$ olup tl vektör,

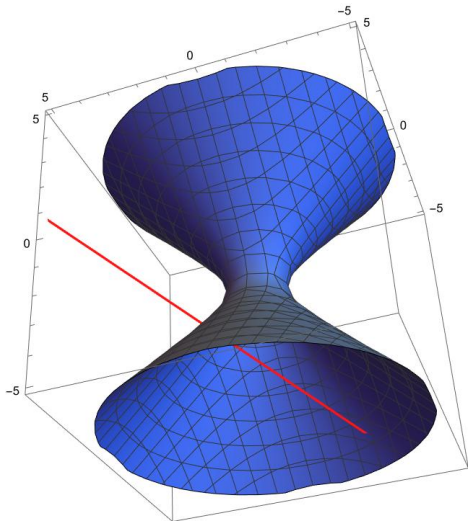
- $\lambda = \sqrt{6}$ için $M = (\sqrt{6}, 2\sqrt{6}, 5)$ olup $\langle \vec{m}, \vec{m} \rangle > 0$ olup sp vektör elde edilir.
- $R = (3\lambda - 2\sqrt{6}, 4\lambda - 2\sqrt{6}, 2\sqrt{6}\lambda - 7)$ noktası alınırsa $\langle \vec{r}, \vec{r} \rangle = 0$ için genel olarak

$$\begin{aligned}\langle \vec{r}, \vec{r} \rangle =& 9\lambda^2 - 12\sqrt{6}\lambda + 24 + 16\lambda^2 - 16\sqrt{6}\lambda + 24 + 24\lambda^2 - 28\sqrt{6}\lambda + 49 \\ =& \lambda^2 - 56\sqrt{6}\lambda + 97\end{aligned}$$

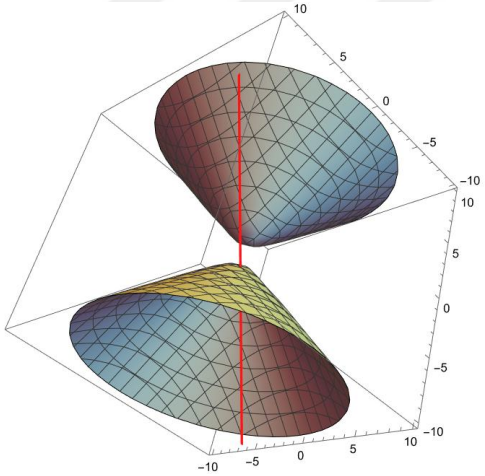
olup $\langle \vec{r}, \vec{r} \rangle = \lambda^2 - 56\sqrt{6}\lambda + 97 = 0$ için $\Delta = 56^2.6 - 4.1.97 = 18420 > 0$ olduğundan iki reel kök vardır. Yani λ_1, λ_2 için iki tane *null* vektör vardır.



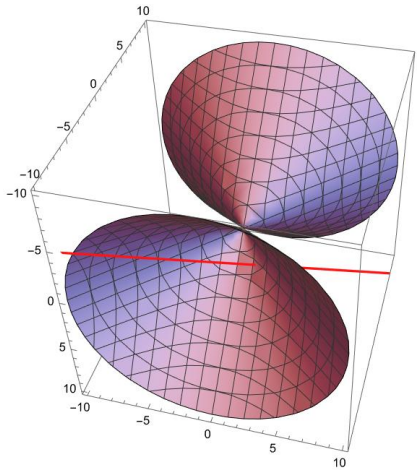
Şekil 3.6 $(\vec{a}, \vec{a}^*) = (sp, sp)$ doğrusu



Şekil 3.7 $(\vec{a},\vec{a^*}) = (sp,sp)$ doğrusu



Şekil 3.8 $(\vec{a},\vec{a^*}) = (sp,sp)$ doğrusu



Şekil 3.9 $(\vec{a},\vec{a^*}) = (sp,sp)$ doğrusu

S2) $\vec{a} = (2,3,2\sqrt{3})$ sp birim vektör, $\vec{a^*} = (1,2,\frac{4\sqrt{3}}{3})$ tl vektör olmak üzere

$$\vec{z} = \vec{a^*} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ 2 & 3 & 2\sqrt{3} \\ 1 & 2 & \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix} = (0, \frac{-2\sqrt{3}}{3}, -1)$$

olup $\vec{z}$ sp vektördür. Buradan

$\langle \vec{z}, \vec{a} \rangle = 0$ olup $\vec{z} \perp \vec{a}$ ve$\langle \vec{z}, \vec{a^*} \rangle = 0$ olup $\vec{z} \perp \vec{a^*}$ olduğu görülür. Böylece

$$\frac{x}{2} = \frac{y + \frac{2\sqrt{3}}{3}}{3} = \frac{z+1}{2\sqrt{3}} = \lambda \tag{3.15}$$

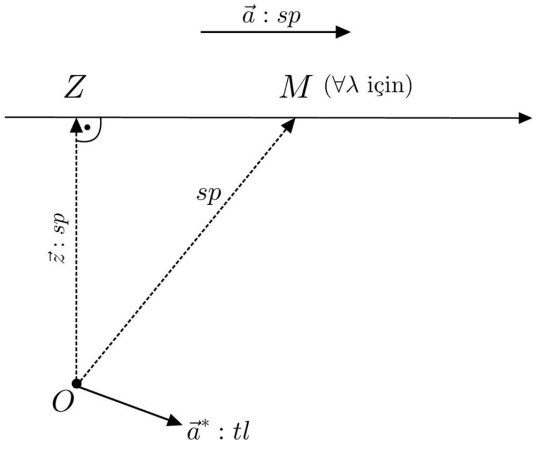
doğru denklemi bulunur. Buradan doğru üzerinde temsili nokta

$$M = (2\lambda, 3\lambda - \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\sqrt{3}\lambda - 1)$$

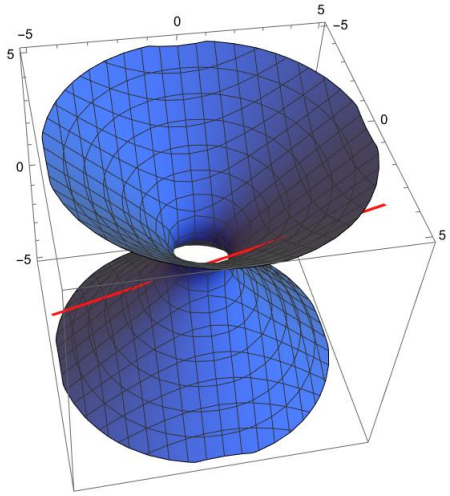
alınırsa

$$\langle \vec{m}, \vec{m} \rangle = 4\lambda^2 + 9\lambda^2 - 4\sqrt{3}\lambda + \frac{4}{3} - 12\lambda^2 + 4\sqrt{3}\lambda - 1 = \lambda^2 + \frac{1}{3} \geq 0$$

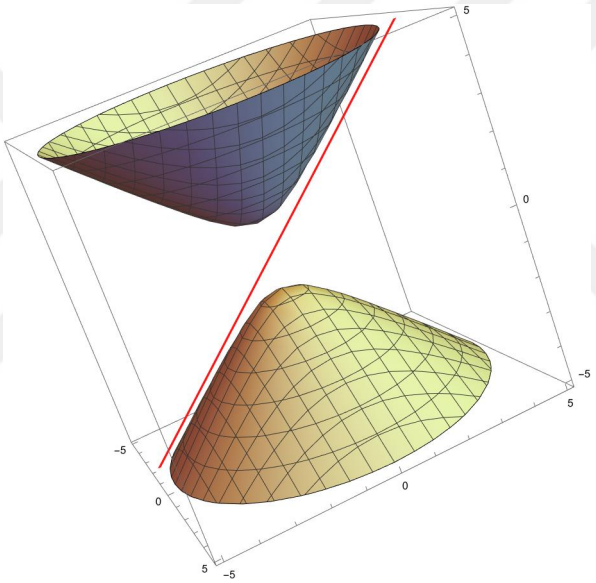
bulunur. Böylece doğru üzerinde alınan her noktanın konum vektörlerinin sp olduğu görülür.



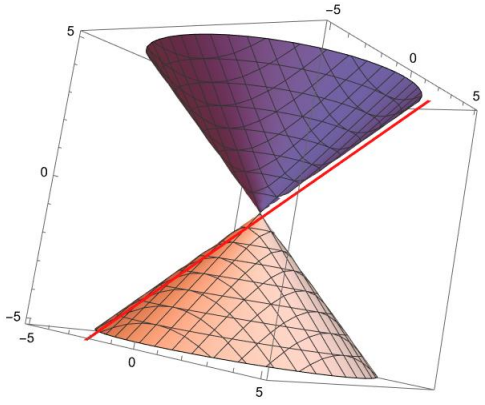
Şekil 3.10 $(\vec{a}, \vec{a^*}) = (sp, tl)$ doğrusu



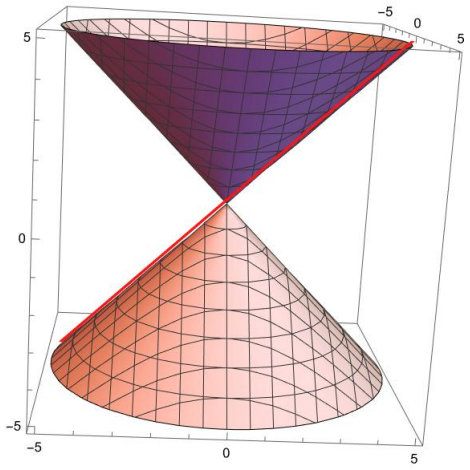
Şekil 3.11 $(\vec{a}, \vec{a^*}) = (sp, tl)$ doğrusu



Şekil 3.12 $(\vec{a}, \vec{a^*}) = (sp, tl)$ doğrusu



Şekil 3.13 $(\vec{a}, \vec{a^*}) = (sp, tl)$ doğrusu



Şekil 3.14 $(\vec{a},\vec{a^*})=(sp,tl)$ doğrusu

S3) $\vec{a}=(1,2,2)$ sp birim vektör, $\vec{a^*}=(1,\frac{3}{4},\frac{5}{4})$ $null$ vektör olmak üzere

$$\vec{z}=\vec{a^*}\times\vec{a}=\begin{vmatrix} i & j & -k \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=(-1,-\frac{3}{4},-\frac{5}{4})$$

olup $\vec{z}$ $null$ vektördür. Buradan

$$\langle\vec{z},\vec{a}\rangle=0 \text{ olup } \vec{z}\perp\vec{a} \text{ ve} \langle\vec{z},\vec{a^*}\rangle=0 \text{ olup } \vec{z}\perp\vec{a^*} \text{ olduğu görülür.}$$

Buradan doğru denklemi

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y+\frac{3}{4}}{2}=\frac{z+\frac{5}{4}}{2}=\lambda \tag{3.16}$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece doğru üzerinde alınan

$$M=(\lambda-1,2\lambda-\frac{3}{4},2\lambda-\frac{5}{4})$$

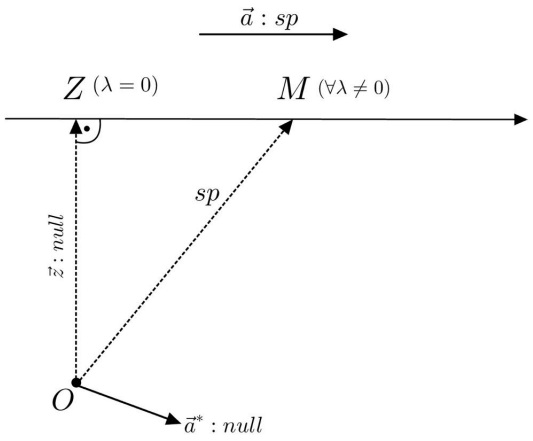
temsili noktası için

$$\langle\vec{m},\vec{m}\rangle=\lambda^2-2\lambda^2+1+4\lambda^2+-3\lambda+\frac{9}{16}-4\lambda^2+5\lambda-\frac{25}{16}=\lambda^2\geq 0$$

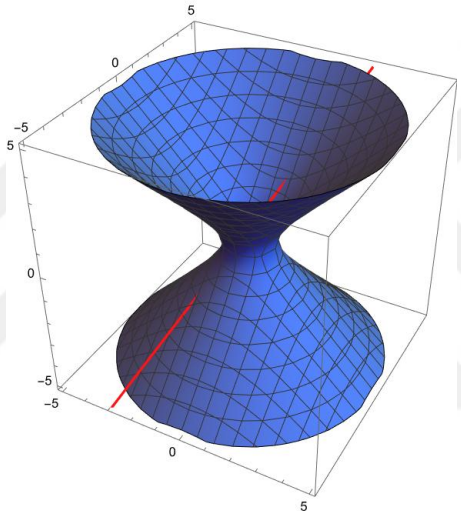
bulunur. Böylece

- $\lambda=0$ için $\vec{z}$ ve $\|\vec{z}\|=0$ olduğunda $\vec{z}$ $null$ vektör,
- $\forall\lambda\neq 0$ için konum vektörleri sp vektörlerdir.

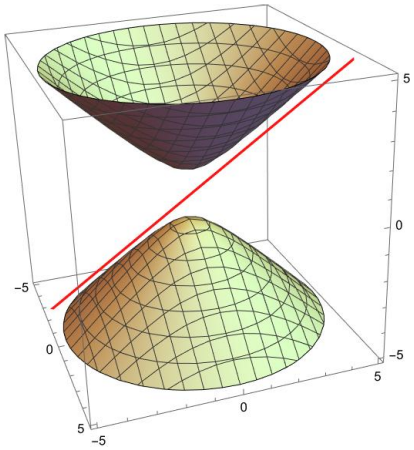
■



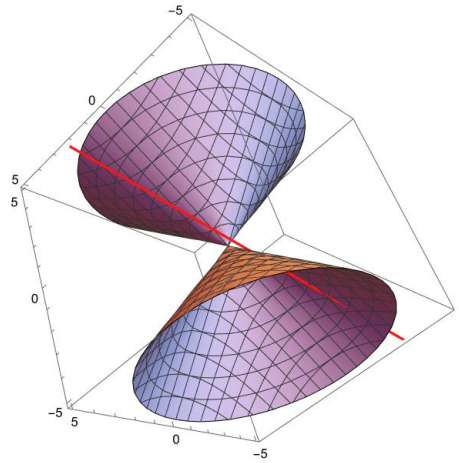
Şekil 3.15 $(\vec{a}, \vec{a^*}) = (sp, null)$ doğrusu



Şekil 3.16 $(\vec{a}, \vec{a^*}) = (sp, null)$ doğrusu



Şekil 3.17 $(\vec{a}, \vec{a^*}) = (sp, null)$ doğrusu

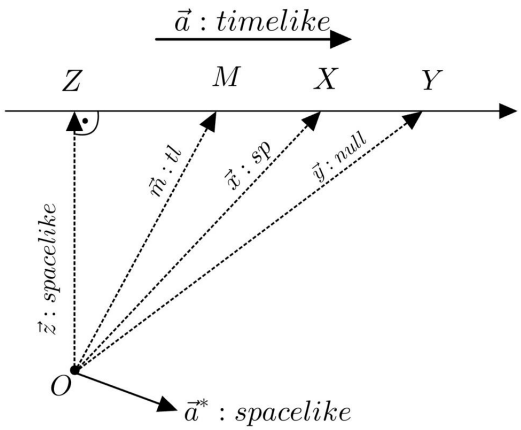


Şekil 3.18 $(\vec{a},\vec{a^*}) = (sp, null)$ doğrusu

Teorem 3.5. $\mathbb{D}_1^3$ *Dual Lorentz uzayında dual hiperbolik birim kürenin noktaları ile*

$$\langle \vec{a},\vec{a}\rangle_L = -1 \; ve \; \langle \vec{a},\vec{a^*}\rangle_L = 0 \tag{3.17}$$

olacak şekilde $\mathbb{R}_1^3$ *Minkowski uzayında* $(\vec{a},\vec{a^*}) = (tl, sp)$ *doğruları arasında 1-1 eşleme vardır. Yani; dual hiperbolik birim kürenin noktaları ile* $\mathbb{R}_1^3$ *Minkowski uzayında* tl *doğruları birbirine karşılık gelir [3, 4].*



Şekil 3.19 Dual Lorentz uzayında E.Study dönüşümü ($\vec{a}$ timelike)

İspat. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $\vec{a}$ tl doğrultman vektörüne sahip tl doğrunun parametrik denklemi $\vec{x} = \vec{m} + \lambda\vec{a}$ şeklindedir. Böylece $\vec{a^*} = \vec{m} \times_L \vec{a} = \vec{z} \times_L \vec{a}$ vektörüne O orijin noktasına göre vektörel momenti denir.

Doğrunun üzerindeki temsili nokta M olmak üzere (A.6) özelliği gereğince M noktasının konum vektörü olan $\vec{m}$ vektörünün sp, tl, $null$ vektör olması durumuna göre $\vec{a^*}$ vektörü sp olup tipi değişmemektedir.

Şimdi $\vec{a^*}$ vektörünün geometrik özelliklerini verelim:

1) $\vec{a^*}$ vektörü X noktasının doğru üzerindeki seçilişinden bağımsızdır: Doğru üzerinde X noktasından başka bir Y alınırsa $(\vec{y}-\vec{m})\times_L \vec{a} = \vec{0}$ yazılabilir. Bundan dolayı

$$\vec{y} \times_L \vec{a} = \vec{x} \times_L \vec{a} = \vec{m} \times_L \vec{a} = \vec{a^*} \tag{3.18}$$

elde edilir. Böylece $\vec{m} \times_L \vec{a} = \vec{a^*}$ olmak üzere

$$tl \times tl = sp \text{ (Teorem A.7 / A.7. özellik gereğince)}$$
$$sp \times tl = sp \text{ (Teorem A.7 / A.7. özellik gereğince)}$$
$$null \times tl = sp \text{ (Teorem A.7 / A.7. özellik gereğince)}$$

durumları söz konusudur. Burada doğru üzerindeki noktaların konum vektörleri yukarıda belirtilen şartlar dahilinde sp, tl ve $null$ vektör olabilir. Fakat $\vec{a^*}$ vektörünün her zaman sp vektör olduğu görülür.

2) $\vec{a}$ doğrultman vektörünün tl vektör olduğu bilinerek seçilen $\vec{a^*}$ vektörü Teorem (A.9) gereğince sp olup, sp ile tl vektörleri birbirine dik olacağından $\vec{a}, \vec{a^*}$ vektörleri Lorentz anlamında ortogonal olduğu söylenir ve $\vec{a} \perp \vec{a^*}$ ile gösterilir. Yani

$$\langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{m} \times_L \vec{a} \rangle = \det(\vec{a}, \vec{m}, \vec{a}) = 0 \tag{3.19}$$

şeklindedir.

3) Lorentz uzayında üç vektörün vektörel çapımının özelliğinden, [7]

$$\vec{a^*} \times_L \vec{a} = (\vec{z} \times_L \vec{a}) \times_L \vec{a} = -\langle \vec{z}, \vec{a} \rangle \vec{a} + \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \vec{z} = \vec{z} \tag{3.20}$$

elde edilir.

4) Başlangıç noktasından doğruya inilen dikmenin ayağı olan Z noktası için $\vec{z} = \vec{a^*} \times_L \vec{a}$ olduğundan $\vec{z} \perp \vec{a}$ ve $\vec{z} \perp \vec{a^*}$ söylenebilir. O halde $\vec{a^*} \times_L \vec{a} = \vec{z}$ olmak üzere

$$sp \times tl = sp \text{ (Teorem A.7 / A.7. özellik gereğince)}$$

şeklindedir. Böylece dikmenin ayağı olan Z noktasının konum vektörü olan $\vec{z}$ vektörü sp vektördür, tl vektör sp vektöre Teorem (A.9) gereğince diktir.

5) $\vec{a^*}$ vektörünün uzunluğu başlangıç noktasının doğruya olan uzaklığına eşittir: $\vec{a^*}$ vektörü vektörel moment ve Z noktası O orjin noktasından doğruya inilen dikmenin ayağı olmak üzere $\vec{z} \times \vec{a} = \vec{a^*}$ yazılabilir. Ayrıca $\vec{z} = \vec{a^*} \times \vec{a}$ olduğundan

$\vec{z} \perp \vec{a}$ dır ve $\vec{a}$ birim vektör seçildiğinden $\|\vec{a}\| = 1$ dir. Buradan θ açısı $\vec{a}$ ile $\vec{a^*}$ vektörleri arasındaki açı olmak üzere

- $(\vec{a}, \vec{a^*}) = (tl, sp)$ ve $\vec{z}$ sp ise Teorem(A.4) gereğince
  $\|\vec{z}\| = \|\vec{a^*} \times \vec{a}\| = \|\vec{a^*}\|.\|\vec{a}\| \cosh\theta$ olup $\|\vec{a}\| = 1$ olduğundan
  $\|\vec{z}\| = \|\vec{a^*}\| \cosh\theta$ olduğu görülür [6].

Sonuç olarak $\vec{a}$ timelike vektör, $\vec{a^*}$ vektörel moment vektörü olmak üzere $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L = -1$ ve $\langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle_L = 0$ özellikleri sağlanır. $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski uzayının yönlendirilmiş tl doğruları ile bütün dual tl birim vektörleri (yani dual Lorentz küresi üzerindeki noktaları) arasında 1-1 eşleme vardır. ■

Örnek

T1) $\vec{a} = (1,1,3)$ tl birim vektör, $\vec{a^*} = (1,2,1)$ sp vektör olmak üzere

$$\vec{z} = \vec{a^*} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (5,-2,1)$$

olup $\vec{z}$ sp vektördür. Buradan $\langle \vec{z}, \vec{a} \rangle = 0$ olup $\vec{z} \perp \vec{a}$ ve $\langle \vec{z}, \vec{a^*} \rangle = 0$ olup $\vec{z} \perp \vec{a^*}$ olduğu görülür. Buradan doğru denklemi

$$\frac{x-5}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{3} = \lambda \tag{3.21}$$

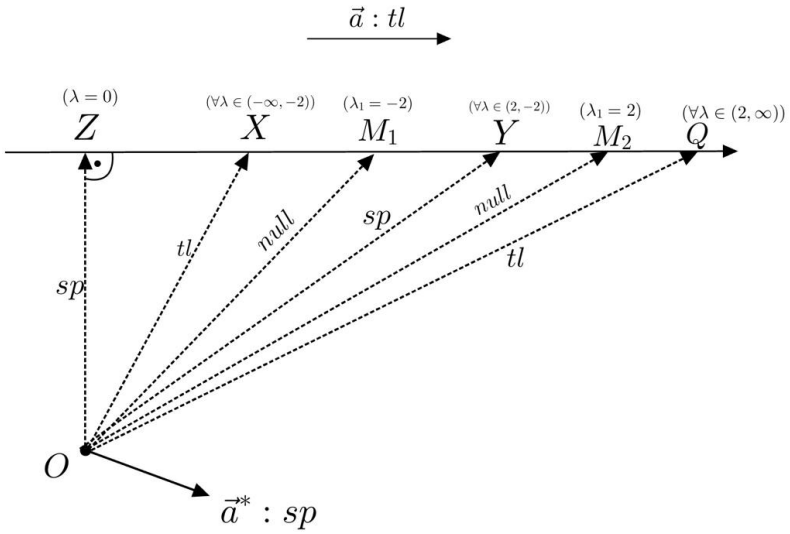
şeklinde ifade edilebilir. Böylece $M = (\lambda+5, \lambda-2, 3\lambda+1)$ temsili noktası için

$$\begin{aligned} \langle \vec{m}, \vec{m} \rangle &= \lambda^2 + 10\lambda + 25 + \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 9\lambda^2 - 6\lambda - 1 \\ &= -7\lambda^2 + 28 = -7(\lambda^2 - 4) \end{aligned}$$

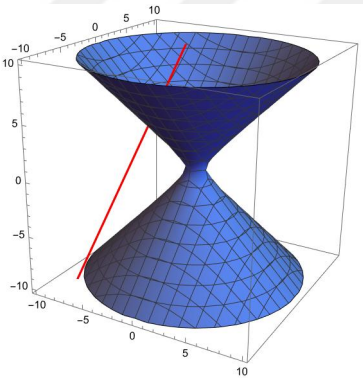
elde edilir. O halde

- $\lambda = 0$ için $\vec{z} = (5,-2,1)$ olup sp vektör,
- $\lambda = -2$ için $\vec{m_1} = (3,-4,-5)$ olup $null$ vektör,
- $\lambda = 2$ için $\vec{m_2} = (7,0,7)$ olup $null$ vektör

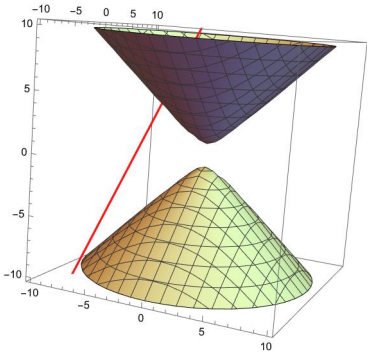
olduğu görülür. O halde konum vektörleri $(-\infty,-2)$ aralığında tl, $(-2,2)$ aralığında sp, $(+2,+\infty)$ aralığında tl dir.



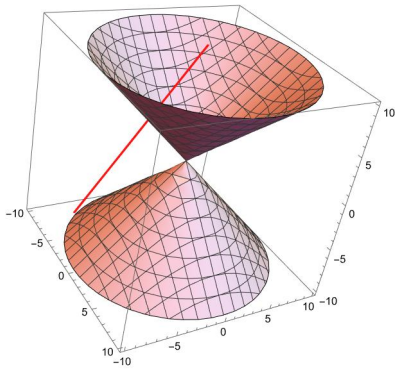
Şekil 3.20 $(\vec{a}, \vec{a^*}) = (tl, sp)$ doğrusu



Şekil 3.21 $(\vec{a}, \vec{a^*}) = (tl, sp)$ doğrusu



Şekil 3.22 $(\vec{a}, \vec{a^*}) = (tl, sp)$ doğrusu

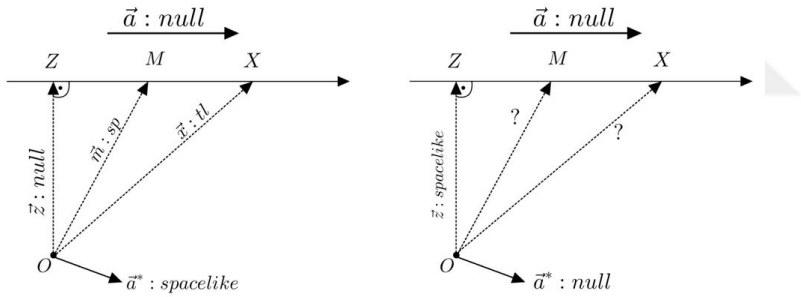


Şekil 3.23 $(\vec{a},\vec{a^*})=(tl,sp)$ doğrusu

Teorem 3.6. $\mathbb{D}_1^3$ *Dual Lorentz uzayındaki light konisi ile*

$$\langle\vec{a},\vec{a}\rangle_L=0 \;\; ve \;\; \langle\vec{a},\vec{a^*}\rangle_L=0 \tag{3.22}$$

olacak şekilde $\mathbb{R}_1^3$ *Minkowski uzayında* $(\vec{a},\vec{a^*})=(null,sp),=(null,null)$ *doğruları arasında 1-1 eşleme vardır. Yani; light koninin noktaları ile* $\mathbb{R}_1^3$ *Minkowski uzayında null doğruları birbirine karşılık gelir [15].*



Şekil 3.24 Dual Lorentz uzayında E.Study dönüşümü ($\vec{a}$ null)

İspat. $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $\vec{a}$ *null* doğrultman vektörüne sahip *null* doğrunun parametrik denklemi
$\vec{x}=\vec{m}+\lambda\vec{a}$ dır. Böylece $\vec{a^*}=\vec{m}\times_L\vec{a}=\vec{z}\times_L\vec{a}$ vektörüne O orijin noktasına göre vektörel momenti denir.

1) $\vec{m}\times_L\vec{a}=\vec{a^*}$ olmak üzere

$$sp\times null = null \;\; (\langle\vec{m},\vec{a}\rangle=0) \text{ (Teorem A.8 / A.8. özellik gereğince)}$$
$$tl\times null = sp \text{ (Teorem A.8 / A.8. özellik gereğince)}$$
$$null\times null = sp \text{ (Teorem A.8 / A.8. özellik gereğince)}$$

durumları geçerlidir. Böylece doğru üzerindeki noktaların konum vektörleri yukarıda belirtilen şartlar dahilinde sp, tl ve $null$ vektör olabilir. $\vec{a}^*$ sp vektörü olma durumunda konum vektörleri $sp, null, tl$ iken $\vec{a}^*$ $null$ vektör olma durumunda orijinden inilen dikmenin ayağı $\vec{z}$ sp vektör olup diğer konum vektörleri hakkında yorum yapılamamaktadır.

2) $\vec{a}$ doğrultman vektörünün $null$ vektör olduğu bilinerek, seçilen $\vec{a}^*$ vektörü sp ve $null$ vektörü olma durumu ele alındığında, $null$ vektörlerin sp ve $null$ vektörlerine dik olduğu Teorem (A.9) gereğince bilindiğinden $\vec{a}$ $null$ iken $\vec{a}^*$ sp veya $null$ ise $\vec{a}, \vec{a}^*$ vektörleri Lorentz anlamında ortogonaldir ($\vec{a} \perp \vec{a}^*$). Buradan

$$\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = \langle \vec{a}, \vec{m} \times_L \vec{a} \rangle = \det(\vec{a}, \vec{m}, \vec{a}) = 0 \tag{3.23}$$

şeklindedir.

3) Lorentz uzayında üç vektörün vektörel çapımının özelliğinden, [7]

$$\vec{a}^* \times_L \vec{a} = (\vec{z} \times_L \vec{a}) \times_L \vec{a} = -\langle \vec{z}, \vec{a} \rangle \vec{a} + \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \vec{z} = \vec{z} \tag{3.24}$$

elde edilir.

4) Başlangıç noktasından doğruya inilen dikmenin ayağı olan Z noktası için $\vec{z} = \vec{a} \times_L \vec{a}^*$ olduğundan $\vec{z} \perp \vec{a}$ ve $\vec{z} \perp \vec{a}^*$ söylenebilir. $\vec{a} \times_L \vec{a}^* = \vec{z}$ olmak üzere

$$null \times sp = null \ \ (\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0)$$
$$null \times null = sp$$

durumları söz konusudur. Böylece dikmenin ayağı olan Z noktasının konum vektörü olan $\vec{z}$, seçilen $\vec{a}^*$ vektörel momentin tipine bağlıdır. $\vec{a}$ vektörü $null$ olmak üzere; $\vec{a}^*$ vektörü sp ise $\vec{z}$ vektörü $null$; $\vec{a}^*$ vektörü $null$ ise $\vec{z}$ vektörü sp vektörü olduğu Teorem (A.9) gereğince görülür.

Sonuç olarak; $\vec{a}$ null vektör, $\vec{a}^*$ vektörel moment vektörü olmak üzere $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L = 0$ ve $\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle_L = 0$ özellikleri sağlanır. $\mathbb{R}^3_1$ Minkowski uzayının yönlendirilmiş $null$ doğruları ile bütün dual $null$ birim vektörleri yani light koni üzerindeki noktalar arasında 1-1 eşleme vardır. ■

Örnekler:

N1) $\vec{a}=(3,4,5)$ $null$, $\vec{a^*}=(2,1,2)$ sp vektör olmak üzere

$$\vec{z}=\vec{a^*}\times\vec{a}=\begin{vmatrix} i & j & -k \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}=(-3,-4,-5)$$

olup $\vec{z}$ $null$ vektördür. Buradan $\langle\vec{z},\vec{a}\rangle=0$ olup ve $\vec{z}\perp\vec{a}$ olduğu görülür ve $\langle\vec{z},\vec{a^*}\rangle=0$ olup $\vec{z}\perp\vec{a^*}$ olduğu görülür. Buradan doğru denklemi

$$\frac{x+3}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+5}{5}=\lambda \tag{3.25}$$

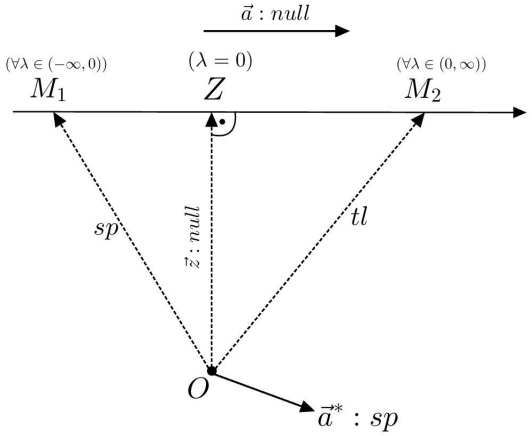
şeklinde ifade edilebilir. Böylece $M=(3\lambda-3,4\lambda-4,5\lambda-5)$ temsili noktalar için

$$\begin{aligned}\langle\vec{m},\vec{m}\rangle =&9\lambda^2-18\lambda+9+16\lambda^2-32\lambda+16-25\lambda^2+25\lambda-25\\ =&-25\lambda\end{aligned}$$

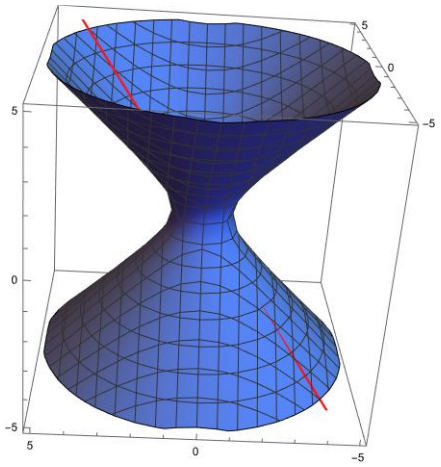
bulunur. O halde

- $\lambda=0$ için $\vec{z}=(-3,-4,-5)$ olup $null$ vektör,
- $\lambda\in(-\infty,0)$ için konum vektörleri sp vektör,
- $\lambda\in(0,+\infty)$ için konum vektörleri tl vektör

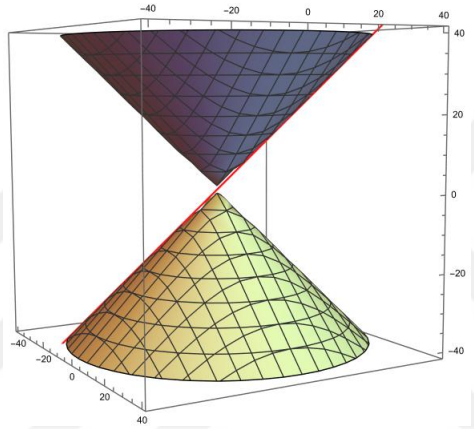
elde edilir. Böylece konum vektörleri $(-\infty,0)$ aralığında sp, $(0,+\infty)$ aralığında tl dir.



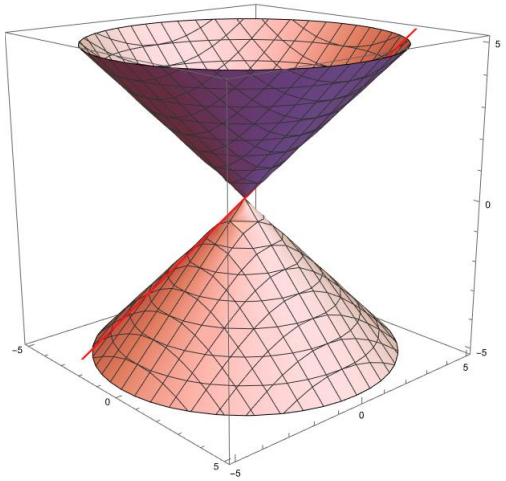
Şekil 3.25 $(\vec{a},\vec{a^*})=(null,sp)$ doğrusu



Şekil 3.26 $(\vec{a}, \vec{a^*}) = (null, sp)$ doğrusu



Şekil 3.27 $(\vec{a}, \vec{a^*}) = (null, sp)$ doğrusu

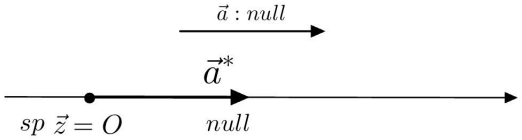


Şekil 3.28 $(\vec{a}, \vec{a^*}) = (null, sp)$ doğrusu

N2) $\vec{a} = (3,4,5)$ ile $\vec{a^*} = (6,8,10)$ *null* vektör ve birbirlerine lineer bağımlı olmak üzere;

$$\vec{z} = \vec{a^*} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ 6 & 8 & 10 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

olup $\vec{z}$ *sp* vektördür. Buradan $\langle \vec{z}, \vec{a} \rangle = 0$ olup $\vec{z} \perp \vec{a}$ olup ve $\langle \vec{z}, \vec{a^*} \rangle = 0$ olup $\vec{z} \perp \vec{a^*}$ olduğu görülür.



Şekil 3.29 $(\vec{a}, \vec{a^*}) = (null, null)$ doğrusu

3.2.5 Dual Hiperbolik Açı

Teorem 3.7. *$\vec{A}, \vec{B} \in H_0^{2+}$ olmak üzere $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_{\mathbb{DL}} = -\cosh\phi$'dır. Burada*

$$\cosh\phi = \cosh(\varphi + \varepsilon\varphi^*) = \cosh\varphi + \varepsilon\varphi^* \sinh\varphi \tag{3.26}$$

şeklindedir [3, 4].

Teorem 3.8. *$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ sp dual vektör olmak üzere $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_{\mathbb{DL}} = \cosh\phi = \cos(\varphi + \varepsilon\varphi^*)$ eşitliği geçerlidir.*

Tanım 3.12. $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{D}_{\mathbb{1}}$ birim dual vektörleri için $\cos\phi = \cos(\varphi + \varepsilon\varphi^*)$ dual açısına $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörlerinin oluşturduğu açıya dual açı denir. Burada ϕ açısının reel kısmı φ ve dual kısmı φ^* olmak üzere $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ reel vektörleri arasındaki açı ϕ ve φ^* olup burada birim dual vektörlere karşılık gelen ${\mathbb{R}_{\mathbb{1}}}^3$ uzayındaki doğruların ortak dikme uzunluğunu belirtir.

3.2.5.1 Özel Durumlar:

- $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_{\mathbb{DL}} \neq 0$ durumunda $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ doğruları ortogonal değildir.
- $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_{\mathbb{DL}} =$ pure reel $(\varphi^* = 0)$ ise $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ doğruları kesişir.
- $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle_{\mathbb{DL}} = \pm 1$ $(\varphi = 0, \varphi^* = 0)$ ise $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ doğruları çakışıktır.

Teorem 3.9. *$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*}, \vec{B} = \vec{b} + \varepsilon\vec{b^*} \in \mathbb{H}^+$ olmak üzere $\vec{A} \times_L \vec{B} = \sinh\phi\vec{N}$ 'dır.*

3.2.6 $\mathbb{D}_1^3$ Dual Lorentz Uzayında Vektörel Çarpım ve Karma Çarpım

3.2.6.1 $\mathbb{D}_1^3$ Dual Lorentz Uzayında Vektörel Çarpım

Tanım 3.13. $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3) = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*}$ ve $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3) = \vec{b} + \varepsilon\vec{b^*} \in \mathbb{D}_1^3$ dual vektörlerin Lorentz anlamında vektörel çarpımı

- $\vec{A} \times_{\mathbb{DL}} \vec{B} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$

ile tanımlanır [3, 4]. Bu determinant değeri hesaplanırsa

$$\vec{A} \times_{\mathbb{DL}} \vec{B} = (A_2B_3, A_3B_2)e_1 + (A_3B_1 - A_1B_3)e_2 + (-A_1B_2 + A_2B_1)e_3 \tag{3.27}$$

elde edilir. Buradan $A_i = a_i + \varepsilon a_i^*$, $B_i = b_i + \varepsilon b_i^* \in \mathbb{D}$ $(1 \leq i \leq 3)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \vec{A} \times_{\mathbb{DL}} \vec{B} =& [(a_2 + \varepsilon a_2^*)(b_3 + \varepsilon b_3^*) - (a_3 + \varepsilon a_3^*)(b_2 + \varepsilon b_2^*)]e_1 \\ &+ [(a_3 + \varepsilon a_3^*)(b_1 + \varepsilon b_1^*) - (a_1 + \varepsilon a_1^*)(b_3 + \varepsilon b_3^*)]e_2 \\ &+ [-(a_1 + \varepsilon a_1^*)(b_2 + \varepsilon b_2^*) + (a_2 + \varepsilon a_2^*)(b_1 + \varepsilon b_1^*)]e_3 \end{aligned}$$

bulunur. Burada dual sayılarda çarpma işlemi kullanılırsa gerekli düzenlemelerden sonra

$$\begin{aligned} \vec{A} \times_{\mathbb{DL}} \vec{B} =& [(a_2b_3 - a_3b_2) + \varepsilon(a_2b_3^* + a_2^*b_3 - a_3b_2^* - a_3^*b_2))]e_1 \\ &+ [(a_3b_1 - a_1b_3) + \varepsilon(a_3b_1^* + a_3^*b_1 - a_1b_3^* - a_1^*b_3)]e_2 \\ &+ [(-a_1b_2 + a_2b_1) + \varepsilon(-a_1^*b_2 + a_1b_2^* + a_2b_1^* + a_2^*b_1)]e_3 \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \vec{A} \times_{\mathbb{DL}} \vec{B} =& [(a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (-a_1b_2 + a_2b_1)e_3] \\ &+ \varepsilon[(a_2b_3^* - a_3b_2^*)e_1 + (a_3b_1^* - a_1b_3^*)e_2 + (-a_1^*b_2 + a_2b_1^*)e_3] \\ &+ \varepsilon[(a_2^*b_3 - a_3^*b_2)e_1(a_3^*b_1 - a_1^*b_3)e_2 + (-a_1b_2^* + a_2^*b_1)e_3] \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz uzayındaki vektörel çarpım gereğince

$$\vec{A} \times_{\mathbb{DL}} \vec{B} = \vec{a} \times_L \vec{b} + \varepsilon[\vec{a} \times_L \vec{b^*} + \vec{a^*} \times \vec{b}]$$

elde edilir.

3.2.6.2 $\mathbb{D}_1^3$ Dual Lorentz Uzayında Karma Çarpım

Tanım 3.14. $\vec{A},\vec{B},\vec{C} \in \mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz vektörlerinin dual Lorentz karma çarpımı

$$\langle \vec{A} \times_{\mathbb{DL}} \vec{B}, \vec{C} \rangle_{\mathbb{DL}} = -\det(\vec{A},\vec{B},\vec{C})$$

ile tanımlanır.

$\vec{A},\vec{B},\vec{C},\vec{D} \in \mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz vektörleri için aşağıdaki özellikler sağlanır:

- $\vec{A} \times_{\mathbb{DL}} \vec{B} = -\vec{B} \times_{\mathbb{DL}} \vec{A}$,
- $\vec{A} \times_{\mathbb{DL}} \vec{A} = \vec{0}$,
- $(\vec{A} \times_{\mathbb{DL}} \vec{B}) \times_{\mathbb{DL}} \vec{C} = -\langle \vec{A},\vec{C} \rangle_{\mathbb{DL}} \vec{B} + \langle \vec{B},\vec{C} \rangle_{\mathbb{DL}} \vec{A}$,
- $\langle \vec{A} \times_{\mathbb{DL}} \vec{B}, \vec{C} \times_{\mathbb{DL}} \vec{D} \rangle_L = -\langle \vec{A},\vec{C} \rangle_{\mathbb{DL}} \langle \vec{B},\vec{D} \rangle_{\mathbb{DL}} + \langle \vec{A},\vec{D} \rangle_{\mathbb{DL}} \langle \vec{B},\vec{C} \rangle_{\mathbb{DL}}$,
- $\langle \vec{A} \times_{\mathbb{DL}} \vec{B}, \vec{A} \times_{\mathbb{DL}} \vec{B} \rangle_{\mathbb{DL}} = -\langle \vec{A},\vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}} \langle \vec{B},\vec{B} \rangle_{\mathbb{DL}} + (\langle \vec{A},\vec{B} \rangle_{\mathbb{DL}})^2$,
- $\langle \vec{A} \times_{\mathbb{DL}} \vec{B}, \vec{A} \rangle_{\mathbb{DL}} = 0$ ve $\langle \vec{A} \times_{\mathbb{DL}} \vec{B}, \vec{B} \rangle_{\mathbb{DL}} = 0$,
- $(\vec{A} \times_{\mathbb{DL}} \vec{B}) \times_{\mathbb{DL}} \vec{C} + (\vec{B} \times_{\mathbb{DL}} \vec{C}) \times_{\mathbb{DL}} \vec{A} + (\vec{C} \times_{\mathbb{DL}} \vec{A}) \times_{\mathbb{DL}} \vec{B} = \vec{0}$.

4
DUAL UZAY ÜZERİNDE DİĞER İÇ ÇARPIMLAR

4.1 Dual Reel İç Çarpım Uzayı

4.1.1 $\mathbb{D}^n$ Uzayının $\mathbb{R}$ Vektör Uzayı Üzerinde İç Çarpımı

Tanım 4.1. $\forall \vec{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n) = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*,\ \vec{B} = (B_1, B_2, \ldots, B_n) = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^* \in \mathbb{D}^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n &\to \mathbb{R} \\ (\vec{A}, \vec{B}) &\to \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (A_i \overline{B_i} + \overline{A_i} B_i) \end{aligned}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Ayrıca bu fonksiyon iyi tanımlıdır:

$$\begin{aligned} A_i &= a_i + \varepsilon a_i^* \\ B_i &= b_i + \varepsilon b_i^* \end{aligned}$$

için

$$\begin{aligned} A_i \overline{B_i} &= (a_i + \varepsilon a_i^*)(b_i - \varepsilon b_i^*) = a_i b_i + \varepsilon (a_i^* b_i - a_i b_i^*) \\ \overline{A_i} B_i &= (a_i - \varepsilon a_i^*)(b_i + \varepsilon b_i^*) = a_i b_i + \varepsilon (a_i b_i^* - a_i^* b_i) \end{aligned}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$A_i \overline{B_i} + \overline{A_i} B_i = 2 a_i b_i \tag{4.1}$$

olduğundan

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (A_i \overline{B_i} + \overline{A_i} B_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyon için

- **Simetri:** $\forall \vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{D}^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle =& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (A_i \overline{B_i} + \overline{A_i} B_i) \\ =& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (\overline{A_i} B_i) + (A_i \overline{B_i}) \\ =& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (B_i \overline{A_i} + \overline{B_i} A_i) \\ =& \langle \vec{B}, \vec{A} \rangle\end{aligned}$$

  olup simetri özelliği sağlanır.

- **Bilineerlik:** $\forall \vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathbb{D}^n$ ve $\forall \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ için

  ⋆ $\langle \lambda_1 \vec{A} + \lambda_2 \vec{B}, \vec{C} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [(\lambda_1 A_i + \lambda_2 B_i) \overline{C_i} + (\overline{\lambda_1 A_i + \lambda_2 B_i}) C_i]$

  olduğundan

$$\begin{aligned}\langle \lambda_1 \vec{A} + \lambda_2 \vec{B}, \vec{C} \rangle =& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [\lambda_1 A_i \overline{C_i} + \lambda_2 B_i \overline{C_i} + \lambda_1 \overline{A_i} C_i + \lambda_2 \overline{B_i} C_i] \\ =& \lambda_1 \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} A_i \overline{C_i} + \overline{A_i} C_i \right\} + \lambda_2 \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} B_i \overline{C_i} + \overline{B_i} C_i \right\} \\ =& \lambda_1 \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle + \lambda_2 \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle\end{aligned}$$

  bulunur.

  ⋆ $\langle \vec{A}, \mu_1 \vec{B} + \mu_2 \vec{C} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} A_i (\overline{\mu_1 B_i + \mu_2 C_i}) + \overline{A_i} (\mu_1 B_i + \mu_2 C_i)$

  olduğundan

$$\begin{aligned}\langle \vec{A}, \mu_1 \vec{B} + \mu_2 \vec{C} \rangle =& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [\mu_1 A_i \overline{B_i} + \mu_2 A_i \overline{C_i} + \mu_1 \overline{A_i} B_i + \mu_2 \overline{A_i} C_i] \\ =& \mu_1 \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} A_i \overline{B_i} + \overline{A_i} B_i \right\} + \mu_2 \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} A_i \overline{C_i} + \overline{A_i} C_i \right\} \\ =& \mu_1 \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle + \mu_2 \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle\end{aligned}$$

  elde edilir. Böylelikle bilineerlik özelliği sağlanır.

- **Pozitif Tanımlılık:** $\forall \vec{A} = (A_i) \in \mathbb{D}^n$ için

$$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (A_i \overline{A_i} + \overline{A_i} A_i) = \sum_{i=1}^{n} A_i \overline{A_i}$$

bulunur. Burada $A_i \overline{A_i} = (a_i + \varepsilon a_i^*)(a_i - \varepsilon a_i^*) = a_i^2 \geq 0$ olduğundan,

$$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = \sum_{i=1}^{n} A_i \overline{A_i} = \sum_{i=1}^{n} (a_i^2) \geq 0$$

elde edilir.

  - $\vec{A} = 0$ iken $A = 0 + \varepsilon 0^* \in \mathbb{D}$ için

$$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} 0.\overline{0} + \overline{0}.0 = 0$$

olduğu görülür.

  - $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = 0$ için $\sum_{i=1}^{n} A_i \overline{A_i} = \sum_{i=1}^{n} (a_i)^2 = 0$ olup buradan $a_i^2 = 0$ ve $a_i = 0$ elde edilir. Ancak $a_i^* = 0$ olmak zorunda değildir. Böylece $\vec{A} \neq \vec{0}$ olabilir.

Tanım 4.2.

$$\langle , \rangle : \mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}$$
$$(\vec{A}, \vec{B}) \to \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (A_i \overline{B_i} + \overline{A_i} B_i)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon, pozitif tanımlı olmayan bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpım ile birlikte $\mathbb{D}^n$ uzayına dual reel iç çarpım uzayı adı verilir.

Sonuç 4.1.

$$\langle , \rangle : \mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}$$
$$(\vec{A}, \vec{B}) \to \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (A_i \overline{B_i} + \overline{A_i} B_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

pozitif tanımlı olmayan iç çarpım fonksiyonu

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

şeklinde de tanımlanabilir. Burada eşitliğin sağ tarafındaki iç çarpım $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Öklid iç çarpımıdır. $\mathbb{D}^n$ üzerinde tanımlanan bu fonksiyonun, pozitif tanımlı olmayan bir iç çarpım fonksiyonu olduğu $\mathbb{R}^n$ üzerindeki iç çarpımı yardımıyla da gösterilebilir.

İspat. • **Simetri:** $\forall \vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{D}^n$ için

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{B}, \vec{A} \rangle \tag{4.2}$$

olup simetri özelliği sağlanır.

- **Bilineerlik:** $\forall \vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*}, \vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b^*}, \vec{C} = \vec{c} + \varepsilon \vec{c^*} \in \mathbb{D}^n$ ve $\forall \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 \vec{A} + \lambda_2 \vec{B}, \vec{C} \rangle &= \langle \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}, \vec{c} \rangle \\ &= \langle \lambda_1 \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \lambda_2 \vec{b}, \vec{c} \rangle \\ &= \lambda_1 \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \lambda_2 \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \\ &= \lambda_1 \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle + \lambda_2 \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \langle \vec{A}\,,\ \mu_1 \vec{B} + \mu_2 \vec{C} \rangle &= \langle \vec{a}\,,\ \mu_1 \vec{b} + \mu_2 \vec{c} \rangle \\ &= \langle \vec{a}, \mu_1 \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \mu_2 \vec{C} \rangle \\ &= \mu_1 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \mu_2 \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \\ &= \mu_1 \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle + \mu_2 \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle \end{aligned}$$

olup bilineerlik özelliğinin sağlandığı görülür.

- **Pozitif Tanımlılık:** $= A_i = a_i + \varepsilon a_i^* \in \mathbb{D}$ olmak üzere $\forall \vec{A} = (A_i) = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*} \in \mathbb{D}^n$ için

$$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$$

olup $\mathbb{R}^n$ deki iç çarpım pozitif tanımlı olduğundan $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \geq 0$ olup $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle \geq 0$ elde edilir. Ayrıca $\vec{A} = \vec{0} + \varepsilon \vec{0}$ için $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = \langle \vec{0}, \vec{0} \rangle = 0$ bulunur. $\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$ iken $\mathbb{R}^n$ deki iç çarpım fonksiyonu pozitif tanımlılık özelliğinden $\vec{a} = \vec{0}$ bulunur. Ancak $\vec{a^*} = \vec{0}$ olmak sorunda değildir. Böylece $\vec{A} \neq 0$ elde edilir.

■

4.1.2 $\mathbb{D}^n$ Uzayının $\mathbb{R}$ Üzerinde Normu

Tanım 4.3. $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*} \in \mathbb{D}^n$ dual vektörünün normu

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle} \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan

$$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$$

olduğundan

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle} = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = \|\vec{a}\|$$

elde edilir.

4.1.3 $\mathbb{D}^3$ Uzayının $\mathbb{R}$ Üzerinde E.Study Dönüşümü

$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3), \vec{B} = (B_1, B_2, B_3) \in \mathbb{D}^3$ için

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} (A_i \overline{B_i} + \overline{A_i} B_i) = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

olup

$$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} (A_i \overline{A_i} + \overline{A_i} A_i) = \sum_{i=1}^{3} (a_i)^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$$

olduğu görülür. O halde

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle} = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = \|\vec{a}\| = 1$$

için $\mathbb{D}^3$ uzayındaki küre üzerinde $\|\vec{A}\| = 1$ olduğunda sağlanan tek özellik
$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1$ olması durumundan doğru üzerinde nokta belirlenememektedir. Böylece $\vec{a}$ vektörünü doğrultman kabul eden sonsuz doğru bulunur. O halde dual kürenin üzerindeki her noktanın reel kürenin üzerinde o noktanın hareketini yaptığı görülür.

4.2 Dual Eşlenik İç Çarpım Uzayı

4.2.1 $\mathbb{D}^n$ Uzayının $\mathbb{D}$ Modül Üzerindeki Eşlenik İç Çarpımı

Tanım 4.4. $\forall \vec{A} = (A_1, \ldots, A_n) = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*}, \vec{B} = (B_1, \ldots, B_n) = \vec{b} + \varepsilon \vec{b^*} \in \mathbb{D}^n$ için

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : &\mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n \to \mathbb{D} \\ &(\vec{A}, \vec{B}) \to \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \sum_{i=1}^{n} A_i \overline{B_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \varepsilon (a_i^* b_i - a_i b_i^*) \end{aligned}$$

işlemini tanımlayalım. Bu fonksiyon iyi tanımlıdır: $A_i = a_i + \varepsilon a_i^*, B_i = b_i + \varepsilon b_i^*$ olmak üzere $\overline{B_i} = b_i - \varepsilon b_i^*$ için

$$A_i \overline{B_i} = (a_i + \varepsilon a_i^*)(b_i - \varepsilon b_i^*) = a_i b_i + \varepsilon (a_i^* b_i - a_i b_i^*) \in \mathbb{D} \tag{4.4}$$

elde edilir. O halde $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \sum_{i=1}^{n} A_i \overline{B_i} \in \mathbb{D}$ elde edilir.

Ayrıca bu fonksiyon;

- **Eşlenik Simetri:** $\forall \vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{D}^n$ için $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \sum_{i=1}^{n} A_i \overline{B_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{B_i} A_i = \overline{\langle \vec{B}, \vec{A} \rangle}$ özelliğini sağlar.
- **Bilineerlik:** $\forall \vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathbb{D}^n$ ve $\forall d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{D}$ için

  $$d_1 \vec{A} + d_2 \vec{B} = (d_1 A_1 + d_2 B_1, \ldots, d_1 A_n + d_2 B_n)$$

  olduğundan

  $$\begin{aligned} \langle d_1 \vec{A} + d_2 \vec{B}, \vec{C} \rangle &= \sum_{i=1}^{n} (d_1 A_i + d_2 B_i) \overline{C_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (d_1 A_i \overline{C_i} + d_2 B_i \overline{C_i}) \\ &= d_1 \sum_{i=1}^{n} A_i \overline{C_i} + d_2 \sum_{i=1}^{n} B_i \overline{C_i} \\ &= d_1 \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle + d_2 \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle \end{aligned}$$

  bulunur. Ayrıca

  $$d_3 \vec{B} + d_4 \vec{C} = (d_3 B_1 + d_4 C_1, \ldots, d_3 B_n + d_4 C_n)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\langle \vec{A}, d_3\vec{B} + d_4\vec{C}\rangle &= \sum_{i=1}^{n} A_i(\overline{d_3B_i + d_4C_i}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_i(\overline{d_3B_i} + \overline{d_4C_i}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{d_3}A_i\overline{B_i} + \overline{d_4}A_i\overline{C_i} \\ &= \overline{d_3}\sum_{i=1}^{n} A_i\overline{B_i} + \overline{d_4}\sum_{i=1}^{n} A_i\overline{C_i} \\ &= \overline{d_3}\langle \vec{A}, \vec{B}\rangle + \overline{d_4}\langle \vec{A}, \vec{C}\rangle\end{aligned}$$

özelliklerini sağlar.

- **Pozitif Tanımlılık:** $\forall \vec{A} \in \mathbb{D}^n$ için $A_i = a_i + \varepsilon a_i^*$ ve $a_i, a_i^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\langle \vec{A}, \vec{A}\rangle = \sum_{i=1}^{n} A_i\overline{A_i} = \sum_{i=1}^{n} (a_i + \varepsilon a_i^*)(a_i - \varepsilon a_i^*) = \sum_{i=1}^{n} (a_i)^2$$

bulunur. Buradan $(a_i)^2 \geq 0$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 \geq 0$ olduğundan $\langle \vec{A}, \vec{A}\rangle \geq 0$ elde edilir. Ayrıca;

  - $\vec{A} = \vec{0}$ için $\langle \vec{A}, \vec{A}\rangle = 0$ olduğu açıktır.
  - $\langle \vec{A}, \vec{A}\rangle = 0$ için $\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 = 0$ bulunur. Buradan $(a_i)^2 = 0$ ve $a_i = 0$ bulunur ancak $a_i^* = 0$ olmak zorunda değildir. Yani $\vec{A} \neq \vec{0}$ bulunur.

Tanım 4.5.

$$\begin{aligned}\langle , \rangle : \mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n &\to \mathbb{D} \\ (\vec{A}, \vec{B}) &\to \langle \vec{A}, \vec{B}\rangle = \sum_{i=1}^{n} A_i\overline{B_i}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon, pozitif tanımlı olmayan bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpım fonksiyonu ile birlikte $\mathbb{D}^n$ uzayına dual eşlenik iç çarpım uzayı adı verilir.

Sonuç 4.2. *$\forall \vec{A} = (A_1, \ldots, A_n) = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*}, \vec{B} = (B_1, \ldots, B_n) = \vec{b} + \varepsilon\vec{b^*} \in \mathbb{D}^n$ olmak üzere*

$$\begin{aligned}\langle \vec{A}, \vec{B}\rangle &= \sum_{i=1}^{n} A_i\overline{B_i} = (a_i + \varepsilon a_i^*)(b_i - \varepsilon b_i^*) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (a_i^* b_i - a_i b_i^*)\end{aligned}$$

pozitif tanımlı olmayan iç çarpım fonksiyonu

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{a^*}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b^*} \rangle)$$

şeklinde de tanımlanabilir. Burada eşitliğin sağ tarafındaki iç çarpımlar $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Öklid iç çarpımlarıdır. Bu iç çarpım fonksiyonu yardımıyla ispatı tekrar yapabiliriz:

İspat. $\forall \vec{A} = (A_1, \ldots, A_n) = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*}, \vec{B} = (B_1, \ldots, B_n) = \vec{b} + \varepsilon\vec{b^*} \in \mathbb{D}^n$ olmak üzere iç çarpım fonksiyonu olması için gerekli özellikler kolaylıkla gösterilebilir.

- **Eşlenik Simetri:**

$$\begin{aligned}
\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle =& \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{a^*}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b^*} \rangle \\
=& \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle - \varepsilon(\langle \vec{a}, \vec{b^*} \rangle - \langle \vec{a^*}, \vec{b} \rangle \\
=& \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle - \varepsilon(\langle \vec{b^*}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{a^*} \rangle \\
=& \overline{\langle \vec{B}, \vec{A} \rangle}
\end{aligned}$$

  olup eşlenik simetri özelliği sağlanır.

- **Bilineerlik:** $\forall \vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathbb{D}^n$ ve $\forall d_1 = (\lambda_1 + \varepsilon\lambda_1^*), d_2 = (\lambda_2 + \varepsilon\lambda_2^*)$, $d_3 = (\mu_1 + \varepsilon\mu_1^*), d_4 = \mu_2 + \varepsilon\mu_2^* \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned}
d_1\vec{A} + d_2\vec{B} =& d_1(\vec{a} + \varepsilon\vec{a^*}) + d_2(\vec{b} + \varepsilon\vec{b^*}) = (\lambda_1 + \varepsilon\lambda_1^*)(\vec{a} + \varepsilon\vec{a^*}) + (\lambda_2 + \varepsilon\lambda_2^*)(\vec{b} + \varepsilon\vec{b^*}) \\
=& (\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b}) + \varepsilon[(\lambda_1\vec{a^*} + \lambda_1^*\vec{a}) + (\lambda_2\vec{b^*} + \lambda_2^*\vec{b})]
\end{aligned}$$

  olmak üzere

$$\begin{aligned}
\langle d_1\vec{A} + d_2\vec{B}, \vec{C} \rangle =& \langle \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b}, \vec{c} \rangle \\
&+\varepsilon\left(\langle (\lambda_1\vec{a^*} + \lambda_1^*\vec{a} + \lambda_2\vec{b^*} + \lambda_2^*\vec{b}), \vec{c} \rangle - \langle (\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b}), \vec{c^*} \rangle\right) \\
&=\lambda_1\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \lambda_2\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \\
&+\varepsilon[\lambda_1\langle \vec{a^*}, \vec{c} \rangle + \lambda_1^*\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \lambda_2\langle \vec{b^*}, \vec{c} \rangle + \lambda_2^*\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle - (\lambda_1\langle \vec{a}, \vec{c^*} \rangle + \lambda_2\langle \vec{b}, \vec{c^*} \rangle)] \\
&+\varepsilon^2(\lambda_1^*\langle \vec{a^*}, \vec{c} \rangle - \lambda_1^*\langle \vec{a}, \vec{c^*} \rangle) + \varepsilon^2(\lambda_2^*\langle \vec{b^*}, \vec{c} \rangle) - \lambda_2^*\langle \vec{b}, \vec{c^*} \rangle) \\
&=\lambda_1[\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{a^*}, \vec{c} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{c^*} \rangle)] + \varepsilon\lambda_1^*[\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{a^*}, \vec{c} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{c^*} \rangle)] \\
&+\lambda_2[\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{b^*}, \vec{c} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{c^*} \rangle)] + \varepsilon\lambda_2^*[\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{b^*}, \vec{c} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{c^*} \rangle)] \\
&=(\lambda_1 + \varepsilon\lambda_1^*)(\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{a^*}, \vec{c} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{c^*} \rangle)) \\
&+(\lambda_2 + \varepsilon\lambda_2^*)(\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{b^*}, \vec{c} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{c^*} \rangle)) \\
&=d_1\langle \vec{A}, \vec{C} \rangle + d_2\langle \vec{B}, \vec{C} \rangle
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} d_3\vec{B} + d_4\vec{C} =& \mu_1(\vec{b} + \varepsilon\vec{b^*}) + \mu_2(\vec{c} + \varepsilon\vec{c^*}) = (\mu_1 + \varepsilon\mu_1^*)(\vec{b} + \varepsilon\vec{b^*}) + (\mu_2 + \varepsilon\mu_2^*)(\vec{c} + \varepsilon\vec{c^*}) \\ =& (\mu_1\vec{b} + \mu_2\vec{c}) + \varepsilon[(\mu_1\vec{b^*} + \mu_1^*\vec{b}) + \mu_2\vec{c^*} + \mu_2^*\vec{c}) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \vec{A}, d_3\vec{B} + d_4\vec{C}\rangle =& \langle \vec{a}, (\mu_1\vec{b} + \mu_2\vec{c})\rangle \\ &+\varepsilon\left\{\langle \vec{a^*}, (\mu_1\vec{b} + \mu_2\vec{c})\rangle - \langle \vec{a}, (\mu_1\vec{b^*} + \mu_1^*\vec{b} + \mu_2\vec{c^*} + \mu_2^*\vec{c}\rangle_{(}\mathbb{R}^n)\right\} \\ &=\mu_1\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle + \mu_2\vec{a}, \vec{c}\rangle \\ &+\varepsilon\left\{\mu_1\langle \vec{a^*}, \vec{b}\rangle + \mu_2\langle \vec{a^*}, \vec{c}\rangle - [\mu_1\langle \vec{a}, \vec{b^*}\rangle + \mu_1^*\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle + \mu_2\vec{a}, \vec{c^*}\rangle + \mu_2^*\langle \vec{a}, \vec{c}\rangle]\right\} \\ &-\varepsilon^2\left\{\mu_1^*\langle \vec{a^*}, \vec{b}\rangle + \mu_2^*\langle \vec{a^*}, \vec{c}\rangle - \mu_1^*\langle \vec{a}, \vec{b^*}\rangle - \mu_2^*\langle \vec{a}, \vec{c^*}\rangle\right\} \\ &=\mu_1\left\{\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle + \varepsilon\langle \vec{a^*}, \vec{b}\rangle - \langle \vec{a}, \vec{b^*}\rangle\right\} - \varepsilon\mu_1^*\left\{\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle + \varepsilon\langle \vec{a^*}, \vec{b}\rangle - \langle \vec{a}, \vec{b^*}\rangle\right\} \\ &+\mu_2\left\{\langle \vec{a}, \vec{c}\rangle + \varepsilon\langle \vec{a^*}, \vec{c}\rangle - \langle \vec{a}, \vec{c^*}\rangle\right\} - \varepsilon\mu_2^*\left\{\langle \vec{a}, \vec{c}\rangle + \varepsilon\langle \vec{a^*}, \vec{c}\rangle - \langle \vec{a}, \vec{c^*}\rangle\right\} \\ &=(\mu_1 - \varepsilon\mu_1^*)[\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle + \varepsilon(\langle \vec{a^*}, \vec{b}\rangle - \langle \vec{a}, \vec{b^*}\rangle])] \\ &+(\mu_2 - \varepsilon\mu_2^*)[\langle \vec{a}, \vec{c}\rangle + \varepsilon(\langle \vec{a^*}, \vec{c}\rangle - \langle \vec{a}, \vec{c^*}\rangle])] \\ &=\overline{d_3}\langle \vec{A}, \vec{B}\rangle + \overline{d_4}\langle \vec{A}, \vec{C}\rangle \end{aligned}$$

eşitliklerinden bilineerlik özelliğinin sağlandığı görülür.

- **Pozitif Tanımlılık:** $\forall \vec{A} = (A_i) \in \mathbb{D}^n$ için $A_i = a_i + \varepsilon a_i^*$ ve $a_i, a_i^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\langle \vec{A}, \vec{A}\rangle = \langle \vec{a}, \vec{a}\rangle + \varepsilon(\langle \vec{a^*}, \vec{a}\rangle - \langle \vec{a}, \vec{a^*}\rangle)$$

olduğu görülür. Buradan $\mathbb{R}^n$ üzerindeki iç çarpım simetri özelliğinden $\langle \vec{a^*}, \vec{a}\rangle - \langle \vec{a}, \vec{a^*}\rangle = 0$ eşitliği elde edilir. Böylece

$$\langle \vec{A}, \vec{A}\rangle = \langle \vec{a}, \vec{a}\rangle \tag{4.5}$$

olduğu görülür. O halde

  - $\mathbb{R}^n$ deki iç çarpım fonksiyonu pozitif tanımlı olduğundan $\langle \vec{a}, \vec{a}\rangle \geq 0$ olup $\langle \vec{A}, \vec{A}\rangle \geq 0$ bulunur.
  - $\langle \vec{A}, \vec{A}\rangle = 0$ için $\langle \vec{a}, \vec{a}\rangle = 0$ dır. $\mathbb{R}^n$ de iç çarpım fonksiyonu pozitif tanımlı olduğundan $\vec{a} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ dir. Ancak $\vec{A} = \vec{0} \in \mathbb{D}^n$ olmak zorunda değildir.
  - $\vec{A} = \vec{0} + \varepsilon\vec{0}$ için $\langle \vec{A}, \vec{A}\rangle = 0$ olduğu açıktır.

■

4.2.2 $\mathbb{D}^n$ Uzayının $\mathbb{D}$ Üzerindeki Normu

Tanım 4.6. $\forall \vec{A} = (A_i) \in \mathbb{D}^n$ için $A_i = a_i + \varepsilon a_i^*$ ve $a_i, a_i^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} A_i \overline{A_i}} = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = \|\vec{a}\|$$

elde edilir.

4.2.3 $\mathbb{D}^3$ Uzayının $\mathbb{D}$ Üzerindeki E.Study Dönüşümü

$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3), \vec{B} = (B_1, B_2, B_3) \in \mathbb{D}^3$ için $\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{a^*}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b^*} \rangle)$ olup

$$\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{a^*}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle) = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$$

olduğu görülür. O halde

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle} = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = \|\vec{a}\| = 1$$

için $\mathbb{D}^3$ uzayındaki küre üzerinde $\|\vec{A}\| = 1$ olduğunda sağlanan tek özellik $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1$ olması durumundan doğru üzerinde nokta belirlenememektedir. Böylece $\vec{a}$ vektörünü doğrultman kabul eden sonsuz doğru bulunur.

4.3 Dual Galile İç Çarpım Uzayı

4.3.1 Dual Galile İç Çarpımı

Tanım 4.7. $X_1 \neq 0$ iken $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ ve $Y_1 \neq 0$ iken $\vec{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n) \in \mathbb{D}^n$ olmak üzere dual Galile iç çarpımı $\langle , \rangle_{\mathbb{DG}}$ ile gösterilir. $\langle X, Y \rangle_{\mathbb{DG}} = X_1 Y_1$ olarak tanımlanır.

4.3.1.1 Dual Galile İç Çarpımının Özellikleri

- **Simetri:** $\forall \vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{D}^n$ vektörü için $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_{\mathbb{DG}} = X_1 Y_1 = Y_1 X_1 = \langle \vec{Y}, \vec{X} \rangle_{\mathbb{DG}}$ elde edilir.
- **Bilineerlik:** $\forall \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in \mathbb{D}^n$ vektörü ve $\forall d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{D}$ sayıları için

$$\begin{aligned}\langle \vec{X}, d_3\vec{Y} + d_4\vec{Z} \rangle_{\mathbb{DG}} =& \langle (X_1, \ldots, X_n), d_3(Y_1, \ldots, Y_n) + d_4(Z_1, \ldots, Z_n) \rangle_{\mathbb{DG}} \\ =& X_1(d_3 Y_1 + d_4 Z_1) \\ =& d_3 X_1 Y_1 + d_4 X_1 Z_1 \\ =& d_3 \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_{\mathbb{DG}} + d_4 \langle \vec{X}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{DG}},\end{aligned}$$

  ve

$$\begin{aligned}\langle d_1\vec{X} + d_2\vec{Y}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{DG}} =& \langle d_1(X_1 \ldots X_n) + d_2(Y_1 \ldots Y_n), (Z_1 \ldots, Z_n) \rangle_{\mathbb{DG}} \\ =& (d_1 X_1 + d_2 Y_1) Z_1 \\ =& d_1 X_1 Z_1 + d_2 Y_1 Z_1 \\ =& d_1 \langle \vec{X}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{DG}} + d_2 \langle \vec{Y}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{DG}}\end{aligned}$$

  bilineerlik özelliğinin sağlandığı görülür.

- **Pozitif tanımlılık:** $\forall \vec{X} \in \mathbb{D}^n$ için $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_{\mathbb{DG}} = X_1^2 = x_1^2 + 2\varepsilon x_1 x_1^*$ elde edilir. Burada $x_1^2 \geq 0$ olduğundan $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_{\mathbb{DG}} \geq 0$ bulunur. Eğer $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_{\mathbb{DG}} = 0$ ise $X_1 = 0$ olup $\vec{X} \neq 0$ olabilir.

Tanım 4.8.

$$\begin{aligned}\langle , \rangle_{\mathbb{DG}} : \mathbb{D}^n \times \mathbb{D}^n &\to \mathbb{D} \\ (\vec{X}, \vec{Y}) &\mapsto \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_{\mathbb{DG}} = X_1 Y_1\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon pozitif tanımlı olmayan bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpım ile birlikte $\mathbb{D}^n$ uzayına dual Galile uzayı adı verilir ve $\mathbb{DG}^n$ ile gösterilir.

Sonuç 4.3. *$\vec{x}, \vec{x^*}, \vec{y}, \vec{y^*} \in \mathbb{G}^n$ ve $\forall \vec{X} = (X_1, \ldots, X_n) = \vec{x} + \varepsilon\vec{x^*} \in \mathbb{DG}^n$ için $X_i = x_i + \varepsilon x_i^* \in \mathbb{D}$ ve $\vec{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n) = \vec{y} + \varepsilon\vec{y^*} \in \mathbb{DG}^n$ için $Y_i = y_i + \varepsilon y_i^* \in \mathbb{D}$ olmak üzere*

- $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n) = (x_1, \ldots, x_n) + \varepsilon(x_1^* + \ldots + x_n^*) = \vec{x} + \varepsilon\vec{x^*}$
- $\vec{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n) = (y_1, \ldots, y_n) + \varepsilon(y_1^* + \ldots + y_n^*) = \vec{y} + \varepsilon\vec{y^*}$

yazılabilir. Buradan $X_1 \neq 0$ *yani* $x_1 + \varepsilon x_1^* \neq 0$ *veya* $Y_1 \neq 0$ *yani* $y_1 + \varepsilon y_1^* \neq 0$ *olup*

$$\begin{aligned} \langle , \rangle_{\mathbb{DG}} : \mathbb{DG}^n \times \mathbb{DG}^n &\to \mathbb{DG} \\ (\vec{X}, \vec{Y}) &\mapsto \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_{\mathbb{DG}} = X_1 Y_1 \end{aligned}$$

pozitif tanımlı olmayan iç çarpım fonksiyonu

$$\begin{aligned} \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_{\mathbb{DG}} = X_1 Y_1 &= x_1 y_1 + \varepsilon(x_1 y_1^* + x_1^* y_1) \\ &= \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{G}} + \varepsilon(\langle \vec{x}, \vec{y^*} \rangle_{\mathbb{G}} + \langle \vec{x^*}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{G}}) \end{aligned}$$

şeklinde de tanımlanabilir.

Bu iç çarpım fonksiyonunun özelliklerini tekrar inceleyelim:

• **Simetri:** $\forall \vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{DG}^n$ için

$$\begin{aligned} \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_{\mathbb{DG}} &= \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{G}} + \varepsilon(\langle \vec{x}, \vec{y^*} \rangle_{\mathbb{G}} + \langle \vec{x^*}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{G}} \\ &= \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle_{\mathbb{G}} + \varepsilon(\langle \vec{y}, \vec{x^*} \rangle_{\mathbb{G}} + \langle \vec{y^*}, \vec{x} \rangle_{\mathbb{G}} \\ &= \langle \vec{Y}, \vec{X} \rangle_{\mathbb{DG}} \end{aligned}$$

simetri özelliğinin sağlandığı görülür.

• **Bilineerlik:** $\forall \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in \mathbb{DG}^n, \forall d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} d_1\vec{X} + d_2\vec{Y} =& d_1(\vec{x} + \varepsilon\vec{x}^*) + d_2(\vec{y} + \varepsilon\vec{y}^*) \\ =& (\lambda_1 + \varepsilon\lambda_1^*)(\vec{x} + \varepsilon\vec{x^*}) + (\lambda_2 + \varepsilon\lambda_2^*)(\vec{y} + \varepsilon\vec{y}^*) \\ =& (\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y}) + \varepsilon[(\lambda_1\vec{x}^*)(\lambda_1^*\vec{x}) + (\lambda_2\vec{y}^*)(\lambda_2^*\vec{y})] \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} & \langle d_1\vec{X} + d_2\vec{Y}, \vec{Z}\rangle_{\mathbb{DG}} \\ =& \langle(\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y}), \vec{z}\rangle + \varepsilon[\langle(\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y}), \vec{z^*}\rangle + \langle(\lambda_1\vec{x^*} + \lambda_1^*\vec{x} + \lambda_2\vec{y^*} + \lambda_2^*\vec{y}), \vec{z}\rangle] \\ =& \lambda_1\langle\vec{x}, \vec{z}\rangle + \lambda_2\langle\vec{y}, \vec{z}\rangle \\ +& \varepsilon[\lambda_1\langle\vec{x}, \vec{z^*} + \lambda_2\langle\vec{y}, \vec{z^*} + \lambda_1\langle\vec{x^*}, \vec{z} + \lambda_1^*\langle\vec{x}, \vec{z} + \lambda_2\langle\vec{y^*}, \vec{z} + \lambda_2^*\langle\vec{y}, \vec{z}] \\ =& \lambda_1[\langle\vec{x}, \vec{z}\rangle + \varepsilon(\langle\vec{x}, \vec{z^*}\rangle + \langle\vec{x^*}, \vec{z}\rangle)] + \varepsilon\lambda_1^*(\langle\vec{x}, \vec{z}\rangle) + \varepsilon^2[\lambda_1 * (\langle\vec{x}, \vec{z^*}\rangle + \langle\vec{x^*}, \vec{z}\rangle)] \\ +& \lambda_2[\langle\vec{y}, \vec{z}\rangle + \varepsilon(\langle\vec{y}, \vec{z^*}\rangle + \langle\vec{y^*}, \vec{z}\rangle)] + \varepsilon\lambda_2^*(\langle\vec{y}, \vec{z}\rangle) + \varepsilon^2[\lambda_2 * (\langle\vec{y}, \vec{z^*}\rangle + \langle\vec{y^*}, \vec{z}\rangle)] \\ =& (\lambda_1 + \varepsilon\lambda_1^*)[\langle\vec{x}, \vec{z}\rangle + \varepsilon(\langle\vec{x}, \vec{z^*}\rangle + \langle\vec{x^*}, \vec{z}\rangle] \\ +& (\lambda_2 + \varepsilon\lambda_2^*)[\langle\vec{y}, \vec{z}\rangle + \varepsilon(\langle\vec{y}, \vec{z^*}\rangle + \langle\vec{y^*}, \vec{z}\rangle] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d_3\vec{Y} + d_4\vec{Z} =& (\mu_1 + \varepsilon\mu_1^*)(\vec{y} + \varepsilon\vec{y^*}) + (\mu_2 + \varepsilon\mu_2^*)(\vec{z} + \varepsilon\vec{z^*}) \\ =& \mu_1\vec{y} + \mu_2\vec{z} + \varepsilon[\mu_1\vec{y^*} + \mu_1^* + \vec{y} + \mu_2\vec{z^*} + \mu_2^*\vec{z}] \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} & \langle\vec{X}, d_3\vec{Y} + d_4\vec{Z}\rangle_{\mathbb{DG}} \\ =& \langle\vec{x}, (\mu_1\vec{y}, d_4\vec{Z}\rangle_{\mathbb{DG}} + \varepsilon(\langle\vec{x}, (\mu_1\vec{y^*} + \mu_1^*\vec{y} + \mu_2\vec{z^*} + \mu_2^*\vec{z})\rangle_{\mathbb{DG}} + \langle\vec{x^*}, (\mu_1\vec{y} + \mu_2\vec{z})\rangle_{\mathbb{DG}} \\ =& \mu_1[\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle + \varepsilon(\langle\vec{x}, \vec{y^*}\rangle + \langle\vec{x^*}, \vec{y}\rangle)] + \varepsilon\mu_1^*(\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle) + \varepsilon^2[\mu_1^*(\langle\vec{x}, \vec{y^*}\rangle + \langle\vec{x^*}, \vec{y}\rangle)] \\ +& \mu_2[\langle\vec{x}, \vec{z}\rangle + \varepsilon(\langle\vec{x}, \vec{z^*}\rangle + \langle\vec{x^*}, \vec{z}\rangle)] + \varepsilon\mu_2^*(\langle\vec{x}, \vec{z}\rangle) + \varepsilon^2[\mu_2^*(\langle\vec{x}, \vec{z^*}\rangle + \langle\vec{x^*}, \vec{z}\rangle)] \\ =& (\mu_1 + \varepsilon\mu_1^*)[\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle + \varepsilon(\langle\vec{x}, \vec{y^*}\rangle + \langle\vec{x^*}, \vec{y}\rangle] \\ +& (\mu_2 + \varepsilon\mu_2^*)[\langle\vec{x}, \vec{z}\rangle + \varepsilon(\langle\vec{x}, \vec{z^*}\rangle + \langle\vec{x^*}, \vec{z}\rangle] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece bilineerlik özelliğinin sağlandığı görülür.

• **Pozitif Tanımlılık:** $\forall \vec{X} \in \mathbb{DG}^n$ için

$$\langle\vec{X}, \vec{X}\rangle_{\mathbb{DG}} = \langle\vec{x}, \vec{x}\rangle_{\mathbb{G}} + 2\varepsilon\langle\vec{x}, \vec{x^*}\rangle_{\mathbb{G}} \in \mathbb{D}$$

dual sayısı için (2.26) özelliği gereğince $\langle\vec{x}, \vec{x}\rangle_{\mathbb{G}} \geq 0$ olduğundan $\langle\vec{X}, \vec{X}\rangle_{\mathbb{DG}}$ bulunur.

Ayrıca; $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_{\mathbb{DG}} = 0$ ise $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_{\mathbb{G}} = 0$ ve $\langle \vec{x}, \vec{x^*} \rangle_{\mathbb{G}} = 0$ bulunur. Buradan $x_1^2 = 0$ olup $\vec{x} = 0$ olmak zorunda değildir. Yani $\vec{X} \neq \vec{0}$ olmak zorunda değildir.

O halde fonksiyonun pozitif tanımlı olmadığı görülür.

Tanım 4.9. $\mathbb{DG}^n$ Dual Galile uzayında $\vec{X} = (0, X_2, \ldots, X_n)$ olan vektörlere izotropik vektör denir. İzotropik olmayan vektörlere ise non-izotropik vektör denir.

4.3.2 Dual Galile Uzayında Özel İç Çarpım

Tanım 4.10. $\mathbb{DG}^n$ Dual Galile uzayında $\vec{X} = (0, X_2, \ldots, X_n)$, $\vec{Y} = (0, Y_2, \ldots, Y_n) \in \mathbb{DG}^n$ izotropik vektörlerinin Galile iç çarpımı $\langle , \rangle_{\mathbb{D}\delta}$ ile gösterilir ve

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_{\mathbb{D}\delta} = X_2 Y_2 + \ldots + X_n Y_n$$

olarak tanımlanır.

4.3.2.1 Dual Galile Uzayında Özel İç Çarpım Özellikleri

- **Simetri:** $\forall \vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{DG}^n$ izotropik vektörler için

  $$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_{\mathbb{D}\delta} = X_2 Y_2 + \ldots + X_n Y_n = Y_2 X_2 + \ldots + Y_n X_n = \langle \vec{Y}, \vec{X} \rangle_{\mathbb{D}\delta}$$

  sağlanır.

- **Bilineerlik:** $\forall \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in \mathbb{DG}^n$ izotropik vektörler için ve $\forall d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{D}$ sayısı için

  $$\begin{aligned} \langle d_1\vec{X} + d_2\vec{Y}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{D}\delta} =& (d_1 X_2 + d_2 Y_2) Z_2 + (d_1 X_3 + Y_3) Z_3 + \ldots + (d_1 X_n + d_2 Y_n) Z_n \\ =& (d_1 X_2 Z_2 + d_2 Y_2 Z_2) + (d_1 X_3 Z_3 + d_2 Y_3 Z_3) + \ldots + (d_1 X_n Z_n + d_2 Y_n Z_n) \\ =& d_1 (X_2 Z_2 + X_3 Z_3 + \ldots + X_n Z_n) + d_2 (Y_2 Z_2 + Y_3 Z_3 + \ldots + Y_n Z_n) \\ =& d_1 \langle \vec{X}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{D}\delta} + d_2 \langle \vec{Y}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{D}\delta} \end{aligned}$$

  ve

  $$\begin{aligned} \langle \vec{X}, d_3\vec{Y} + d_4\vec{Z} \rangle_{\mathbb{D}\delta} =& X_2 (d_3 Y_2 + d_4 Z_2) + X_3 (d_3 Y_3 + d_4 Z_3) + \ldots + X_n (d_3 Y_n + d_4 Z_n) \\ =& d_3 X_2 Y_2 + d_4 X_2 Z_2 + d_3 X_3 Y_3 + d_4 X_3 Z_3 + \ldots + d_3 X_n Y_n + d_4 X_n Z_n \\ =& d_3 (X_2 Y_2 + X_3 Y_3 + \ldots + X_n Y_n) + d_4 (X_2 Z_2 + X_3 Z_3 + \ldots + X_n Z_n) \\ =& d_3 \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_{\mathbb{D}\delta} + d_4 \langle \vec{X}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{D}\delta} \end{aligned}$$

  özellikleri sağlanır.

- **Pozitif tanımlılık:** $\forall \vec{X} \in \mathbb{DG}^n$ izotropik vektör için

$$\begin{aligned}\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_{\mathbb{D}\delta} =& X_2^2 + \ldots + X_n^2 \\ =& (x_2^2 + 2\varepsilon x_2 x_2^*) + \ldots + (x_n^2 + 2\varepsilon x_n x_n^*) \\ =& (x_2^2 + \ldots + x_n^2) + 2\varepsilon(x_2 x_2^* + \ldots + x_n x_n^*)\end{aligned}$$

  elde edilir. (2.26) gereğince $x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq 0$ olduğundan $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_{\mathbb{D}\delta} \geq 0$ dır.

  - $\vec{X} = 0$ ise $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_{\mathbb{D}\delta} = 0$ olduğu açıktır.
  - Eğer $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_{\mathbb{D}\delta} = 0$ ise $x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0$ ve $x_2 x_2^* + \ldots + x_n x_n^* = 0$ elde edilir. Buradan $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ olup $x_2^* = 0, \ldots, x_n^* = 0$ olmak zorunda değildir. Dolayısıyla $\vec{X} \neq 0$ olabilir.

Sonuç 4.4. *$\forall \vec{X} = (0, X_2, \ldots, X_n), \vec{Y} = (0, Y_2, \ldots, Y_n) \in \mathbb{DG}^n$ olmak üzere*

$$\begin{aligned}\langle , \rangle_{\mathbb{D}\delta} : \mathbb{DG}^n \times \mathbb{DG}^n &\to \mathbb{DG} \\ (\vec{X}, \vec{Y}) &\mapsto \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_{\mathbb{D}\delta} = X_2 Y_2 + \ldots + X_n Y_n\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon, pozitif tanımlı olmayan bir iç çarpım fonksiyonudur.

Sonuç 4.5. *$\forall \vec{X} = (0, X_2, \ldots, X_n), \vec{Y} = (0, Y_2, \ldots, Y_n) \in \mathbb{DG}^n$ olmak üzere*

$$\begin{aligned}\langle , \rangle_{\mathbb{D}\delta} : \mathbb{DG}^n \times \mathbb{DG}^n &\to \mathbb{DG} \\ (\vec{X}, \vec{Y}) &\mapsto \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_{\mathbb{D}\delta} = X_2 Y_2 + \ldots + X_n Y_n\end{aligned}$$

pozitif tanımlı olmayan iç çarpım fonksiyonu

$$\begin{aligned}\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_{\mathbb{D}\delta} =& X_2 Y_2 + \ldots + X_n Y_n \\ =& x_2 y_2 + \varepsilon(x_2 y_2^* + x_2^* y_2) + \ldots + x_n y_n + \varepsilon(x_n y_n^* + x_n^* y_n) \\ =& \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_\delta + \varepsilon(\langle \vec{x}, \vec{y^*} \rangle_\delta + \langle \vec{x^*}, \vec{y} \rangle_\delta)\end{aligned}$$

şeklinde de tanımlanabilir. Burada $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_\delta$, $\mathbb{G}^n$ Galile özel iç çarpım fonksiyonudur.

İspat. $X_i = x_i + \varepsilon x_i^*$, $Y_i = y_i + \varepsilon y_i^* \in \mathbb{D}$ ve $\vec{x}, \vec{x^*}, \vec{y}, \vec{y^*} \in \mathbb{G}^n$ olmak üzere

- $\vec{X} = (0, X_2 \ldots, X_n) = (0, x_2 \ldots, x_n) + \varepsilon(0, x_2^* \ldots, x_n^*)$
- $\vec{Y} = (0, Y_2 \ldots, Y_n) = (0, y_2 \ldots, y_n) + \varepsilon(0, y_2^* \ldots, y_n^*)$

yazılabilir. Buradan $X_1 = 0$ yani $x_1 + \varepsilon x_1^* = 0 + \varepsilon 0$ veya $Y_1 = 0$ yani $y_1 + \varepsilon y_1^* = 0 + \varepsilon 0$ olup

$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_{\mathbb{D}_\delta}$ iç çarpım fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

- **Simetri:** $\forall \vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{DG}^n$ izotropik vektörler için simetri özelliği vardır:

$$\begin{aligned}\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_{\mathbb{D}_\delta} &= \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_\delta + \varepsilon(\langle \vec{x}, \vec{y^*} \rangle_\delta + \langle \vec{x^*}, \vec{y} \rangle_\delta \\ &= \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle_\delta + \varepsilon(\langle \vec{y}, \vec{x^*} \rangle_\delta + \langle \vec{y^*}, \vec{x} \rangle_\delta \\ &= \langle \vec{Y}, \vec{X} \rangle_{\mathbb{D}_\delta}.\end{aligned}$$

- **Bilineerlik:** $\forall \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in \mathbb{DG}^n$ izotropik vektörler için ve $\forall d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{D}$ dual sayıları için bilineerlik özelliği vardır:

$$d_1\vec{X} + d_2\vec{Y} = (\lambda_1\vec{X} + \lambda_2\vec{Y}) + \varepsilon[(\lambda_1\vec{x^*} + \lambda_1^*\vec{x}) + (\lambda_2\vec{y^*} + \lambda_2^*\vec{y})]$$

olduğundan
$\langle d_1\vec{X} + d_2\vec{Y}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{D}_\delta} = \langle (\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y}), \vec{z} \rangle + \varepsilon[\langle (\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y}), \vec{z^*} \rangle +$
$\langle (\lambda_1\vec{x^*} + \lambda_1^*\vec{x} + \lambda_2\vec{y^*} + \lambda_2^*\vec{y}), \vec{z} \rangle]$
$= \lambda_1\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \lambda_2\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$
$+ \varepsilon[\lambda_1\langle \vec{x}, \vec{z^*} + \lambda_2\langle \vec{y}, \vec{z^*} + \lambda_1\langle \vec{x^*}, \vec{z} + \lambda_1^*\langle \vec{x}, \vec{z} + \lambda_2\langle \vec{y^*}, \vec{z} + \lambda_2^*\langle \vec{y}, \vec{z}]$
$= \lambda_1[\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{x}, \vec{z^*} \rangle + \langle \vec{x^*}, \vec{z} \rangle)] + \varepsilon\lambda_1^*(\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle) + \varepsilon^2[\lambda_1 * (\langle \vec{x}, \vec{z^*} \rangle + \langle \vec{x^*}, \vec{z} \rangle)]$
$+ \lambda_2[\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{y}, \vec{z^*} \rangle + \langle \vec{y^*}, \vec{z} \rangle)] + \varepsilon\lambda_2^*(\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle) + \varepsilon^2[\lambda_2 * (\langle \vec{y}, \vec{z^*} \rangle + \langle \vec{y^*}, \vec{z} \rangle)]$
$= (\lambda_1 + \varepsilon\lambda_1^*)[\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{x}, \vec{z^*} \rangle + \langle \vec{x^*}, \vec{z} \rangle]$
$+ (\lambda_2 + \varepsilon\lambda_2^*)[\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{y}, \vec{z^*} \rangle + \langle \vec{y^*}, \vec{z} \rangle]$
$= d_1\langle \vec{X}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{D}_\delta} + d_2\langle \vec{Y}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{D}_\delta}$
ve
$\langle \vec{X}, d_3\vec{Y} + d_4\vec{Z} \rangle_{\mathbb{D}_\delta} = \langle \vec{x}, \mu_1\vec{y} + \mu_2\vec{z} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{x}, (\mu_1\vec{y^*} + \mu_1^*\vec{y} + \mu_2\vec{z^*} + \mu_2^*\vec{z}) \rangle$
$+ \langle \vec{x^*}, (\mu_1\vec{y} + \mu_2\vec{z}) \rangle$
$= \mu_1[\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{x}, \vec{y^*} \rangle + \langle \vec{x^*}, \vec{y} \rangle)] + \varepsilon\mu_1^*(\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle) + \varepsilon^2[\mu_1^*(\langle \vec{x}, \vec{y^*} \rangle + \langle \vec{x^*}, \vec{y} \rangle)]$
$+ \mu_2[\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{x}, \vec{z^*} \rangle + \langle \vec{x^*}, \vec{z} \rangle)] + \varepsilon\mu_2^*(\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle) + \varepsilon^2[\mu_2^*(\langle \vec{x}, \vec{z^*} \rangle + \langle \vec{x^*}, \vec{z} \rangle)]$
$= (\mu_1 + \varepsilon\mu_1^*)[\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{x}, \vec{y^*} \rangle + \langle \vec{x^*}, \vec{y} \rangle]$
$+ (\mu_2 + \varepsilon\mu_2^*)[\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{x}, \vec{z^*} \rangle + \langle \vec{x^*}, \vec{z} \rangle]$
$= d_3\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_{\mathbb{D}_\delta} + d_4\langle \vec{X}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{D}_\delta}$
elde edilir.

- **Pozitif Tanımlılık:** $\forall \vec{X} \in \mathbb{DG}^n$ izotropik vektörü için
$\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_{\mathbb{D}_\delta} = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_\delta + 2\varepsilon\langle \vec{x}, \vec{x^*} \rangle_\delta$ olmak üzere (2.26) özelliğinden $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_\delta \geq 0$ olduğundan $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_{\mathbb{D}_\delta} \geq 0$ elde edilir.

  - Eğer $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_{\mathbb{DG}} = 0$ ise $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_\delta = 0$ ve $\langle \vec{x}, \vec{x^*} \rangle_\delta = 0$ olup $\vec{X} = \vec{0}$ bulunur. Ayrıca $\vec{x^*} = 0$ olmak zorunda değildir. Dolayısıyla $\vec{X} \neq \vec{0}$ olabilir.

■

4.3.3 Dual Galile Uzayında Vektörlerin Sınıflandırılması:

$\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n) = (x_1 + \varepsilon x_1^*, \ldots, x_n + \varepsilon x_n^*) = \vec{x} + \varepsilon \vec{x^*} \in \mathbb{DG}^n$ olmak üzere

- $\vec{X}$ **izotropik vektör olsun:**
  O halde $X_1 = x_1 + \varepsilon x_1^* = 0$ olup $x_1 = 0$ ve $x_1^* = 0$ bulunur. Böylece
  $\vec{x} = (0, x_2 \ldots, x_n), \vec{x^*} = (0, x_2^*, \ldots, x_3^*) \in \mathbb{G}^n$ vektörleri izotropik vektörlerdir. Tersine $\vec{x}$ ve $\vec{x^*}$ izotropik vektör ise

$$\vec{X} = (0, x_2, \ldots, x_n) + \varepsilon(0, x_2^*, \ldots, x_n^*) = (0, x_2 + \varepsilon x_2^*, \ldots, x_n + \varepsilon x_n^*) \tag{4.6}$$

  yazılabildiğinden $\vec{X}$ vektörünün izotropik vektör olduğu görülür.

- $\vec{X}$ **non-izotropik vektör olsun:**
  O halde $X_1 = x_1 + \varepsilon x_1^* \neq 0$ olsun. Yani $x_1 \neq 0$ veya $x_1^* \neq 0$ demektir. Yani $\vec{x}$ veya $\vec{x^*}$ vektörü non-izotropik vektördür. Tersine

  i) $\vec{x} = (0, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{G}^n$ vektörü izotropik $\vec{x^*} = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in \mathbb{G}^n$ vektörü non-izotropik vektör ise

$$\vec{X} = (0, x_2, \ldots, x_n) + \varepsilon(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = (0 + \varepsilon x_1^*, x_2 + \varepsilon x_2^*, x_3 + \varepsilon x_3^*) \tag{4.7}$$

  yazılır. Dolayısıyla $\vec{X}$ vektörü non-izotropik vektördür.

  ii) $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{G}^n$ vektörü non-izotropik, $\vec{x^*} = (0, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in \mathbb{G}^n$ vektörü izotropik ise

$$\vec{X} = (x_1, \ldots, x_n) + \varepsilon(0, x_2^*, \ldots, x_n^*) = (x_1 + \varepsilon 0, x_2 + \varepsilon x_2^*, \ldots, x_n + \varepsilon x_n^*) \tag{4.8}$$

  olup $\vec{X}$ vektörü non-izotropik vektördür.

  iii) $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ve $\vec{x^*} = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in \mathbb{G}^n$ vektörleri non-izotropik ise

$$\vec{X} = (x_1, \ldots, x_n) + \varepsilon(x_1^*, \ldots, x_n^*) = (x_1 + \varepsilon x_1^*, \ldots, x_n + \varepsilon x_n^*) \tag{4.9}$$

  olup $\vec{X}$ vektörü non-izotropik vektördür.

4.3.4 Dual Galile Uzayında Metrik Özellikler

4.3.4.1 Dual Galile Uzayında Norm

Tanım 4.11. $\mathbb{DG}^n$ uzayında

$$\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n) = (x_1 + \varepsilon x_1^*, \ldots, x_n + \varepsilon x_n^*) = \vec{x} + \varepsilon \vec{x^*} \in \mathbb{DG}^n$$

non-izotropik vektörü için

i) $\vec{X}$ vektörünün normu $\|\vec{X}\|_{\mathbb{DG}}$ ile gösterilir ve

$$\|\vec{X}\|_{\mathbb{DG}} = \sqrt{\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_{\mathbb{DG}}} \tag{4.10}$$

şeklinde tanımlanır. $\|\vec{X}\|_{\mathbb{DG}} = 1$ ise $\vec{X}$ vektörüne birim vektör denir. Burada

$$\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_{\mathbb{DG}} = (X_1)^2 = (x_1 + \varepsilon x_1^*)(x_1 + \varepsilon x_1^*) = x_1^2 + 2\varepsilon x_1 x_1^* = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_{\mathbb{G}} + 2\varepsilon \langle \vec{x}, \vec{x^*} \rangle_{\mathbb{G}} \tag{4.11}$$

olup norm $\vec{x}$ non-izotropik vektör ($\vec{x}^*$ izotropik de olabilir non-izotropik de olabilir) olmak üzere (2.6) özelliği gereğince

$$\begin{aligned} \|\vec{X}\|_{\mathbb{DG}} = \sqrt{\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_{\mathbb{DG}}} &= \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_{\mathbb{G}} + 2\varepsilon \langle \vec{x}, \vec{x^*} \rangle_{\mathbb{G}}} \\ &= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_{\mathbb{G}} + \varepsilon \langle \vec{x}, \vec{x^*} \rangle_{\mathbb{G}} \frac{1}{\sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_{\mathbb{G}}}} \\ &= \|\vec{x}\|_{\mathbb{G}} + \varepsilon \frac{\langle \vec{x}, \vec{x^*} \rangle_{\mathbb{G}}}{\|\vec{x}\|_{\mathbb{G}}} \end{aligned}$$

şeklinde de gösterilebilir.

ii) Eğer $\vec{x}$ izotropik ($\vec{x}^*$ non-izotropik olmalıdır) ise $\vec{X}$ vektörünün normu $\|\vec{X}\|_{\mathbb{DG}}$

$$\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_{\mathbb{DG}} = (X_1)^2 = (0 + \varepsilon x_1^*)(0 + \varepsilon x_1^*) = 0 \tag{4.12}$$

olduğundan $\|\vec{X}\|_{\mathbb{DG}} = \sqrt{\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_{\mathbb{DG}}} = 0$ olduğu görülür.

Tanım 4.12. $\|\vec{X}\|_{\mathbb{DG}} = 1$ ise $\vec{X}$ vektörüne birim vektör denir. Burada

$$\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_{\mathbb{DG}} = (X_1)^2 = x_1^2 + 2\varepsilon x_1 x_1^* = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_{\mathbb{G}} + 2\varepsilon \langle \vec{x}, \vec{x^*} \rangle_{\mathbb{G}} = 1 \tag{4.13}$$

için $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_{\mathbb{G}} = x_1^2 = 1$ ve $\langle \vec{x}, \vec{x^*} \rangle_{\mathbb{G}} = x_1 x_1^* = 0$ bulunur. Sonuç olarak $x_1 = \pm 1$ ve $x_1^* = 0$ bulunur. $X = (\pm 1, X_2, \ldots, X_n)$ yani birim dual Galile vektör şeklinde ifade edilebilir.

4.3.4.2 Dual Galile Uzayında Özel Norm

Tanım 4.13. Dual Galile uzayında $\vec{X}$ izotropik vektör olsun. Böylece
$\forall \vec{X} = (0, X_2, \ldots, X_n) = (0, x_2 \ldots, x_n) + \varepsilon(0, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in \mathbb{DG}^n$ vektörü için
$\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon\vec{x^*}$ olup $\vec{x}, \vec{x^*}$ vektörleri izotropik olduğundan $\vec{X}$ vektörünün özel normu $\|\vec{X}\|_{\mathbb{D}\delta}$ ile gösterilir ve

$$\|\vec{X}\|_{\mathbb{D}\delta} = \sqrt{(X_2)^2 + (X_3)^2 + \ldots + (X_n)^2} \tag{4.14}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada

$$\begin{aligned}
\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_{\mathbb{D}\delta} =& (X_2)^2 + \ldots + (X_n)^2 \\
=& (x_2 + \varepsilon x_2^*)^2 + \ldots + (x_n + \varepsilon x_n^*)^2 \\
=& (x_2^2 + 2\varepsilon x_2 x_2^*) + \ldots + (x_n^2 + 2\varepsilon x_n x_n^*) \\
=& (x_2)^2 + \ldots + (x_n)^2 + 2\varepsilon(x_2 x_2^* + \ldots + x_n x_n^*) \\
=& \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_\delta + 2\varepsilon \langle \vec{x}, \vec{x^*} \rangle_\delta
\end{aligned}$$

olmak üzere özel norm

$$\begin{aligned}
\|\vec{X}\|_{\mathbb{D}\delta} =& \sqrt{\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_{\mathbb{D}\delta}} \\
=& \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_\delta + 2\varepsilon \langle \vec{x}, \vec{x^*} \rangle_\delta} \\
=& \|\vec{x}\|_\delta + \varepsilon \frac{\langle \vec{x}, \vec{x^*} \rangle_\delta}{\|\vec{x}\|_\delta}
\end{aligned}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

4.3.4.3 Dual Galile Uzayında İki Nokta Arasındaki Uzaklık

Tanım 4.14. $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ve $Y = (Y_1, \ldots, Y_n) \in \mathbb{D}^n$ noktaları arasındaki uzaklık d_{XY} ile gösterilir ve

$$d_{XY} = \|\overrightarrow{XY}\|_{\mathbb{DG}} = \sqrt{\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XY} \rangle_{\mathbb{DG}}} \tag{4.15}$$

şeklinde tanımlanır. $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} = (Y_1 - X_1, \ldots Y_n - X_n)$ ve $y_1 \neq x_1$ olmak üzere uzaklık aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$\begin{aligned}
d_{XY} = |Y_1 - X_1| =& |(y_1 - x_1) + \varepsilon(y_1^* - x_1^*)| \\
=& |y_1 - x_1| + \varepsilon \frac{|y_1^* - x_1^*|}{|y_1 - x_1|}
\end{aligned}$$

4.3.4.4 Dual Galile Uzayında İki Nokta Arasındaki Özel Uzaklık

X ve Y noktaları arasındaki uzaklık için $\overrightarrow{XY}$ vektörü izotropik vektör ise, yani $X_1 = Y_1$ için özel uzaklık; $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} = (0, Y_2 - X_2, \dots Y_n - X_n)$ olmak üzere

$$d_{XY} = \sqrt{\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XY} \rangle_{\mathbb{D}\delta}} = \sqrt{(Y_2 - X_2)^2 + \ldots + (Y_n - X_n)^2} \tag{4.16}$$

ile tanımlanır.

4.3.4.5 Dual Galile Uzayında Diklik

Tanım 4.15. Dual Galile uzayında $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n) = (x_1 + \varepsilon x_1^*, \dots, x_n + \varepsilon x_n^*)$, $\vec{Y} = (Y_1, \dots, Y_n) = (y_1 + \varepsilon y_1^*, \dots, y_n + \varepsilon y_n^*) \in \mathbb{DG}^n$ vektörleri için

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_{\mathbb{DG}} = 0 \tag{4.17}$$

olması $\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle_{\mathbb{DG}} \neq 0$ için $\vec{Y} = (0, Y_2, \dots, Y_n)$ olduğunda sağlanır. Yani iki dual vektörün dik olması için bu vektörlerden birinin izotropik olması gerekir. Bu durumda $\vec{Y}$ vektörüne $\vec{X}$ vektörünün diki denir ve $\vec{Y} \perp \vec{X}$ ile gösterilir. Bir diğer ifadeyle

$$\begin{aligned} \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_{\mathbb{DG}} &= X_1 Y_1 \\ &= (x_1 + \varepsilon x_1^*)(y_1 + \varepsilon y_1^*) \\ &= x_1 y_1 + \varepsilon (x_1 y_1^* + x_1^* y_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olması için $x_1 y_1 = 0$ ise $x_1 y_1^* + x_1^* y_1 = 0$ olmalıdır. Buradan $x_1 \neq 0$ ise $(y_1 = 0)$ $(x_1 y_1^* + x_1^* y_1 = 0)$ için $x_1 y_1^* = 0, (x_1 \neq 0)$ olup $y_1^* = 0$ elde edilir. Buradan $Y_1 = 0 + \varepsilon 0$ olduğu görülür. Sonuç olarak $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = (0, Y_2, \dots, Y_n)$ olup $\vec{Y}$ vektörünün izotropik vektör olduğu görülür.

Not: İzotropik vektör, her non-izotropik vektöre diktir.

4.3.4.6 Dual Galile Uzayında Özel Diklik

Tanım 4.16. Dual Galile uzayında $\vec{X} = (0, \dots, X_n)$, $\vec{Y} = (0, \dots, Y_n) \in \mathbb{DG}^n$ izotropik vektörler için $\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle_\delta = 0$ ise $\vec{Y}$ vektörüne $\vec{X}$ vektörünün diki denir ve $\vec{X} \perp_\delta \vec{Y}$ ile gösterilir.

4.3.5 Dual Galile Uzayında Vektörel Çarpım

Tanım 4.17. $\vec{X},\vec{Y} \in \mathbb{DG}^3$ vektörlerinden en az birinin non-izotropik olması durumunda vektörel çarpım
• $\vec{X}=(X_1,X_2,X_3),\vec{Y}=(Y_1,Y_2,Y_3)$ vektörleri non-izotropik iken

i) $\vec{x},\vec{x^*},\vec{y},\vec{y^*}$ non-izotropik vektör ise

$$\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\vec{Y}=\begin{vmatrix}0 & e_2 & e_3\\ X_1 & X_2 & X_3\\ Y_1 & Y_2 & Y_3\end{vmatrix}=(0,X_3Y_1-X_1Y_3,X_1Y_2-X_2Y_1)$$

şeklinde tanımlandığından $\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\vec{Y}=(0,(x_3+\varepsilon x_3^*)(y_1+\varepsilon y_1^*)-(x_1+\varepsilon x_1^*)(y_3+\varepsilon y_3^*),(x_1+\varepsilon x_1^*)(y_2+\varepsilon y_2^*)-(x_2+\varepsilon x_2^*)(y_1+\varepsilon y_1^*)$
$=(0,x_3y_1-x_1y_3+\varepsilon(x_3y_1^*+x_3^*y_1-x_1y_3^*-x_1^*y_3),x_1y_2-x_2y_1+\varepsilon(x_1y_2^*+x_1^*y_2-x_2y_1^*-x_2^*y_1))$
$=\vec{x}\times_{\mathbb{G}}\vec{y}+\varepsilon[(\vec{x}\times_{\mathbb{G}}\vec{y^*})+(\vec{x^*}\times_{\mathbb{G}}\vec{y})]$ şeklinde de ifade edilebilir.

ii) $\vec{x}$ non-izotropik, $\vec{x^*}$ izotropik, $\vec{y},\vec{y^*}$ non-izotropik vektör:

$$\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\vec{Y}=\begin{vmatrix}0 & e_2 & e_3\\ X_1 & X_2 & X_3\\ Y_1 & Y_2 & Y_3\end{vmatrix}=(0,X_3Y_1-X_1Y_3,X_1Y_2-X_2Y_1)$$

şeklinde tanımlandığından

$$\begin{aligned}\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\vec{Y}=&(0,(x_3+\varepsilon x_3^*)(y_1+\varepsilon y_1^*)-x_1(y_3+\varepsilon y_3^*),x_1(y_2+\varepsilon y_2^*)-(x_2+\varepsilon x_2^*)(y_1+\varepsilon y_1^*)\\ =&(0,x_3y_1-x_1y_3+\varepsilon(x_3y_1^*+x_3^*y_1-x_1y_3^*),x_1y_2-x_2y_1+\varepsilon(x_1y_2^*-x_2y_1^*-x_2^*y_1))\\ =&\vec{x}\times_{\mathbb{G}}\vec{y}+\varepsilon[(\vec{x}\times_{\mathbb{G}}\vec{y^*})+(\vec{x^*}\times_{\mathbb{G}}\vec{y})]\end{aligned}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

iii) $\vec{x}$ izotropik, $\vec{x^*},\vec{y},\vec{y^*}$ non-izotropik vektör:

$$\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\vec{Y}=\begin{vmatrix}0 & e_2 & e_3\\ X_1 & X_2 & X_3\\ Y_1 & Y_2 & Y_3\end{vmatrix}=(0,X_3Y_1-X_1Y_3,X_1Y_2-X_2Y_1)$$

şeklinde tanımlandığından

$$\begin{aligned}\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\vec{Y}=&(0,(x_3+\varepsilon x_3^*)(y_1+\varepsilon y_1^*)-\varepsilon x_1^*(y_3+\varepsilon y_3^*),\varepsilon x_1^*(y_2+\varepsilon y_2^*)-(x_2+\varepsilon x_2^*)(y_1+\varepsilon y_1^*)\\=&(0,x_3y_1+\varepsilon(x_3y_1^*+x_3^*y_1-x_1^*y_3),-x_2y_1+\varepsilon(x_1^*y_2-x_2y_1^*-x_2^*y_1))\\=&\vec{x}\times_{\mathbb{G}}\vec{y}+\varepsilon[(\vec{x}\times_{\mathbb{G}}\vec{y^*})+(\vec{x^*}\times_{\mathbb{G}}\vec{y})]\end{aligned}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

iv) $\vec{x}$ non-izotropik, $\vec{x^*}$ izotropik, $\vec{y}$ non-izotropik, $\vec{y^*}$ izotropik vektör:

$$\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\vec{Y}=\begin{vmatrix}0&e_2&e_3\\X_1&X_2&X_3\\Y_1&Y_2&Y_3\end{vmatrix}=(0,X_3Y_1-X_1Y_3,X_1Y_2-X_2Y_1)$$

şeklinde tanımlandığından

$$\begin{aligned}\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\vec{Y}=&(0,(x_3+\varepsilon x_3^*)y_1-x_1+(y_3+\varepsilon y_3^*),x_1(y_2+\varepsilon y_2^*)-(x_2+\varepsilon x_2^*)y_1\\=&(0,x_3y_1-x_1y_3+\varepsilon(x_3^*y_1-x_1y_3^*),x_1y_2-x_2y_1+\varepsilon(x_1y_2^*-x_2^*y_1))\\=&\vec{x}\times_{\mathbb{G}}\vec{y}+\varepsilon[(\vec{x}\times_{\mathbb{G}}\vec{y^*})+(\vec{x^*}\times_{\mathbb{G}}\vec{y})]\end{aligned}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

v) $\vec{x}$ non-izotropik, $\vec{x^*}$ izotropik, $\vec{y}$ izotropik, $\vec{y^*}$ non-izotropik vektör:

$$\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\vec{Y}=\begin{vmatrix}0&e_2&e_3\\X_1&X_2&X_3\\Y_1&Y_2&Y_3\end{vmatrix}=(0,X_3Y_1-X_1Y_3,X_1Y_2-X_2Y_1)$$

şeklinde tanımlandığından

$$\begin{aligned}\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\vec{Y}=&(0,(x_3+\varepsilon x_3^*)\varepsilon y_1^*-x_1(y_3+\varepsilon y_3^*),x_1(y_2+\varepsilon y_2^*)-(x_2+\varepsilon x_2^*)\varepsilon y_1^*\\=&(0,-x_1y_3+\varepsilon(x_3y_1^*-x_1y_3^*),x_1y_2+\varepsilon(x_1y_2^*-x_2y_1^*))\\=&\vec{x}\times_{\mathbb{G}}\vec{y}+\varepsilon(\vec{x}\times_{\mathbb{G}}\vec{y^*})\end{aligned}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

vi) $\vec{x}$ izotropik, $\vec{x}^*$ non-izotropik, $\vec{y}$ non-izotropik, $\vec{y}^*$ izotropik vektör:

$$\vec{X} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Y} = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix} = (0, X_3Y_1 - X_1Y_3, X_1Y_2 - X_2Y_1)$$

şeklinde tanımlandığından

$$\begin{aligned} \vec{X} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Y} =& (0, (x_3 + \varepsilon x_3^*)y_1 - (\varepsilon x_1^*)(y_3 + \varepsilon y_3^*), (\varepsilon x_1^*)(y_2 + \varepsilon y_2^*) - (x_2 + \varepsilon x_2^*)y_1 \\ =& (0, x_3y_1 + \varepsilon(x_3^*y_1 - x_1^*y_3), -x_2y_1 + \varepsilon(x_1^*y_2 - x_2^*y_1)) \\ =& \vec{x} \times_{\mathbb{G}} \vec{y} + \varepsilon(\vec{x^*} \times_{\mathbb{G}} \vec{y}) \end{aligned}$$

şeklinde de yazılabilir.

vii) $\vec{x}$ izotropik, $\vec{x}^*$ non-izotropik, $\vec{y}$ izotropik, $\vec{y}^*$ non-izotropik vektör:

$$\vec{X} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Y} = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix} = (0, X_3Y_1 - X_1Y_3, X_1Y_2 - X_2Y_1)$$

şeklinde tanımlandığından

$$\begin{aligned} \vec{X} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Y} =& (0, (x_3 + \varepsilon x_3^*)(\varepsilon y_1^*) - (\varepsilon x_1^*)(y_3 + \varepsilon y_3^*), (\varepsilon x_1^*)(y_2 + \varepsilon y_2^*) - (x_2 + \varepsilon x_2^*)(\varepsilon y_1^*) \\ =& (0, \varepsilon(x_3y_1^* - x_1^*y_3), \varepsilon(x_1^*y_2 - x_2y_1^*)) \\ =& \varepsilon[(\vec{x} \times_{\mathbb{G}} \vec{y^*}) + (\vec{x^*} \times_{\mathbb{G}} \vec{y})] \end{aligned}$$

şeklinde de yazılabilir.

• $\vec{X}=(X_1,X_2,X_3)$ vektörü non-izotropik, $\vec{Y}=(0,Y_2,Y_3)$ vektörü izotropik iken

i) $\vec{x},\vec{x^*}$ non-izotropik, $\vec{y},\vec{y^*}$ izotropik vektör:

$$\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\vec{Y}=\begin{vmatrix}0 & e_2 & e_3\\ X_1 & X_2 & X_3\\ 0 & Y_2 & Y_3\end{vmatrix}=(0,-X_1Y_3,X_1Y_2)$$

şeklinde tanımlandığından

$$\begin{aligned}\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\vec{Y}=&(0,(-x_1-\varepsilon x_1^*)(y_3+\varepsilon y_3^*),(x_1+\varepsilon x_1^*)(y_2+\varepsilon y_2^*))\\ =&(0,-x_1y_3-\varepsilon(x_1y_3^*+x_1^*y_3),x_1y_2+\varepsilon(x_1y_2^*+x_1^*y_2))\\ =&(0,-x_1y_3,x_1y_2)+\varepsilon[(0,-x_1y_3^*,x_1y_2^*)+(0,-x_1^*y_3,x_1^*y_2)]\\ =&\vec{x}\times_{\mathbb{G}}\vec{y}+\varepsilon[(\vec{x}\times_{\mathbb{G}}\vec{y^*})+(\vec{x^*}\times_{\mathbb{G}}\vec{y})]\end{aligned}$$

şeklinde de yazılabilir.

ii) $\vec{x}$ non-izotropik, $\vec{x^*},\vec{y},\vec{y^*}$ izotropik vektör:

$$\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\vec{Y}=\begin{vmatrix}0 & e_2 & e_3\\ X_1 & X_2 & X_3\\ 0 & Y_2 & Y_3\end{vmatrix}=(0,-X_1Y_3,X_1Y_2)$$

şeklinde tanımlandığından

$$\begin{aligned}\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\vec{Y}=&(0,-x_1(y_3+\varepsilon y_3^*),x_1(y_2+\varepsilon y_2^*))\\ =&(0,-x_1y_3-\varepsilon(x_1y_3^*),x_1y_2+\varepsilon(x_1y_2^*))\\ =&(0,-x_1y_3,x_1y_2)+\varepsilon(0,-x_1y_3^*,x_1y_2^*)\\ =&\vec{x}\times_{\mathbb{G}}\vec{y}+\varepsilon(\vec{x}\times_{\mathbb{G}}\vec{y^*})\end{aligned}$$

şeklinde de yazılabilir.

iii) $\vec{x}$ izotropik, $\vec{x^*}$ non-izotropik, $\vec{y},\vec{y^*}$ izotropik vektör:

$$\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\vec{Y}=\begin{vmatrix}0 & e_2 & e_3\\ X_1 & X_2 & X_3\\ 0 & Y_2 & Y_3\end{vmatrix}=(0,-X_1Y_3,X_1Y_2)$$

şeklinde tanımlandığından

$$\begin{aligned}\vec{X} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Y} =& (0, -\varepsilon x_1^*(y_3 + \varepsilon y_3^*), \varepsilon x_1^*(y_2 + \varepsilon y_2^*)) \\ =& (0, -\varepsilon(x_1^* y_3), \varepsilon(x_1^* y_2)) \\ =& \varepsilon[(0, -x_1^* y_3, x_1^* y_2)] \\ =& \varepsilon(\vec{x^*} \times_{\mathbb{G}} \vec{y})\end{aligned}$$

şeklinde de yazılabilir.

Not: Her iki durum için vektörel çarpımın sonucu izotropik vektör olduğuna dikkat edelim.

4.3.6 Dual Galile Uzayında İzotropik Vektörlerin Özel Vektörel Çarpımı

Tanım 4.18. $\mathbb{DG}^3$ uzayında $\vec{X} = (0, X_2, X_3), \vec{Y} = (0, Y_2, Y_3) \in \mathbb{DG}^3$ izotropik vektörler için vektörel çarpım aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned}\vec{X} \times_{\mathbb{D}\delta} \vec{Y} =& \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & X_2 & X_3 \\ 0 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix} = (X_2 Y_3 - X_3 Y_2, 0, 0) \\ =& ((x_2 + \varepsilon x_2^*)(y_3 + \varepsilon y_3^*) - (x_3 + \varepsilon x_3^*)(y_2 + \varepsilon y_2^*), 0, 0) \\ =& (x_2 y_3 + \varepsilon(x_2 y_3^* + x_2^* y_3) - x_3 y_2 - \varepsilon(x_3 y_2^* + x_3^* y_2), 0, 0) \\ =& ((x_2 y_3 - x_3 y_2) + \varepsilon((x_2 y_3^* - x_3 y_2^*) + (x_2^* y_3 - x_3^* y_2), 0, 0) \\ =& (x_2 y_3 - x_3 y_2, 0, 0) + \varepsilon[(x_2 y_3^* - x_3 y_2^*, 0, 0) + (x_2^* y_3 - x_3^* y_2, 0, 0)] \\ =& \vec{x} \times_{\delta} \vec{y} + \varepsilon[(\vec{x} \times_{\delta} \vec{y^*}) + (\vec{x^*} \times_{\delta} \vec{y})].\end{aligned}$$

4.3.7 Dual Galile Uzayında Vektörel Çarpımın Özellikleri

Teorem 4.1. $\forall \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in \mathbb{DG}^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *için bu vektörlerin izotropik veya non-izotropik olma durumuna göre vektörel çarpım özellikleri aşağıda incelenmiştir:*

1) ***i)*** $\vec{X} \times_{\mathbb{DG}} \vec{X} = \vec{0}$

ii) $\vec{X} \times_{\mathbb{D}\delta} \vec{X} = \vec{0}$,

2) ***i)*** $\vec{X} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Y} = -\vec{Y} \times \vec{X}$

ii) $\vec{X} \times_{\mathbb{D}\delta} \vec{Y} = -\vec{Y} \times \vec{X}$,

3) ***i)*** $\vec{Z} \times_{\mathbb{DG}} (\vec{X} + \vec{Y}) = (\vec{Z} \times_{\mathbb{DG}} \vec{X}) + (\vec{Z} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Y})$

ii) $\vec{Z} \times_{\mathbb{D}\delta} (\vec{X} + \vec{Y}) = (\vec{Z} \times_{\mathbb{D}\delta} \vec{X}) + (\vec{Z} \times_{\mathbb{D}\delta} \vec{Y})$,

4) ***i)*** $(\vec{X}+\vec{Y})\times_{\mathbb{DG}}\vec{Z}=(\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\vec{Z})+(\vec{Y}\times_{\mathbb{DG}}\vec{Z})$

ii) $(\vec{X}+\vec{Y})\times_{\mathbb{D}_\delta}\vec{Z}=(\vec{X}\times_{\mathbb{D}_\delta}\vec{Z})+(\vec{Y}\times_{\mathbb{D}_\delta}\vec{Z})$,

5) ***i)*** $\lambda\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\vec{Y}=\lambda(\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\vec{Y})=(\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\lambda\vec{Y})$

ii) $\lambda\vec{X}\times_{\mathbb{D}_\delta}\vec{Y}=\lambda(\vec{X}\times_{\mathbb{D}_\delta}\vec{Y})=(\vec{X}\times_{\mathbb{D}_\delta}\lambda\vec{Y})$,

6) *$\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ lineer bağımlı ise*

i) $\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\vec{Y}=\vec{0}$

ii) $\vec{X}\times_{\mathbb{D}_\delta}\vec{Y}=\vec{0}$,

7) ***i)*** $(\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\vec{Y})\times_{\mathbb{DG}}\vec{Z}=\langle\vec{X},\vec{Z}\rangle_{\mathbb{DG}}\vec{Y}-\langle\vec{Y},\vec{Z}\rangle_{\mathbb{DG}}\vec{X}$

ii) $\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}(\vec{Y}\times_{\mathbb{DG}}\vec{Z})=\langle\vec{X},\vec{Z}\rangle_{\mathbb{DG}}\vec{Y}-\langle\vec{Y},\vec{Z}\rangle_{\mathbb{DG}}\vec{X}$

özellikleri sağlanır.

İspat. $\vec{X}=(X_1,X_2,X_3),\vec{Y}=(Y_1,Y_2,Y_3),\vec{Z}=(Z_1,Z_2,Z_3)\in\mathbb{DG}^3$ olmak üzere

1) **i)** $\vec{X}=(X_1,X_2,X_3)$ vektörü non-izotropik vektör iken

$$\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\vec{X}=\begin{vmatrix}0 & e_2 & e_3\\ X_1 & X_2 & X_3\\ X_1 & X_2 & X_3\end{vmatrix}=(0,X_3X_1-X_1X_3,X_1X_2-X_2X_1)=(0,0,0)$$

olduğu görülür.

ii) $\vec{X}=(0,X_2,X_3)$ vektörü izotropik vektör iken

$$\vec{X}\times_{\mathbb{D}_\delta}\vec{X}=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ 0 & X_2 & X_3\\ 0 & X_2 & X_3\end{vmatrix}=(X_2X_3-X_3X_2,0,0)=(0,0,0)$$

olduğu görülür.

2) **i)** $\vec{X}=(X_1,X_2,X_3),\vec{Y}=(Y_1,Y_2,Y_3)$ vektörlerinden en az biri non-izotropik

vektör iken

$$\vec{X} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Y} = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = -\vec{Y} \times_{\mathbb{DG}} \vec{X}$$

olduğu görülür.

ii) $\vec{X} = (0, X_2, X_3), \vec{Y} = (0, Y_2, Y_3)$ vektörleri izotropik vektör iken

$$\vec{X} \times_{\mathbb{D}\delta} \vec{Y} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & X_2 & X_3 \\ 0 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & Y_2 & Y_3 \\ 0 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = -\vec{Y} \times_{\mathbb{D}\delta} \vec{X}$$

şeklinde olduğu görülür.

3) **i)** $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3), \vec{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3), \vec{Z} = (Z_1, Z_2, Z_3)$ ve $\overrightarrow{X+Y} = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, X_3 + Y_3)$ olmak üzere bu vektörlerden en az biri non-izotropik vektör iken

$$\begin{aligned} \vec{Z} \times_{\mathbb{DG}} (\overrightarrow{X+Y}) &= \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ X_1 + Y_1 & X_2 + Y_2 & X_3 + Y_3 \end{vmatrix} \\ &= (0, Z_3(X_1 + Y_1) - Z_1(X_3 + Y_3), Z_1(X_2 + Y_2) - Z_2(X_1 + Y_1)) \\ &= (0, Z_3X_1 - Z_1X_3, Z_1X_2 - Z_2X_1) + (0, Z_3Y_1 - Z_1Y_3, Z_1Y_2 - Z_2Y_1) \\ &= \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix} \\ &= \vec{Z} \times_{\mathbb{DG}} \vec{X} + \vec{Z} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Y} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

ii) $\vec{X} = (0, X_2, X_3), \vec{Y} = (0, Y_2, Y_3), \vec{Z} = (0, Z_2, Z_3)$ vektörleri izotropik vektör iken $\overrightarrow{X+Y} = (0, X_2+Y_2, X_3+Y_3)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\vec{Z} \times_{\mathbb{D}_\delta} (\overrightarrow{X+Y}) &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & Z_2 & Z_3 \\ 0 & X_2+Y_2 & X_3+Y_3 \end{vmatrix} \\
&= (Z_2(X_3+Y_3) - Z_3(X_2+Y_2), 0, 0) \\
&= (Z_2X_3 - Z_3X_2, 0, 0) + (Z_2Y_3 - Z_3Y_2), 0, 0) \\
&= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & Z_2 & Z_3 \\ 0 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & Z_2 & Z_3 \\ 0 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix} \\
&= \vec{Z} \times_{\mathbb{D}_\delta} \vec{X} + \vec{Z} \times_{\mathbb{D}_\delta} \vec{Y}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

4) 3.özelliğe benzer olarak ispatı yapılabilir.

5) **i)** $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3), \vec{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ vektörlerinden en az biri non-izotropik vektör iken $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda\vec{X} = (\lambda X_1, \lambda X_2, \lambda X_3), \lambda\vec{Y} = (\lambda Y_1, \lambda Y_2, \lambda Y_3)$ olup

$$\begin{aligned}
\lambda\vec{X} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Y} &= \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ \lambda X_1 & \lambda X_2 & \lambda X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ \lambda Y_1 & \lambda Y_2 & \lambda Y_3 \end{vmatrix} \\
&= \vec{X} \times_{\mathbb{DG}} \lambda\vec{Y}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca

ii) $\vec{X}=(0,X_2,X_3),\vec{Y}=(0,Y_2,Y_3)$ vektörleri izotropik vektör iken $\lambda\in\mathbb{R}$ için $\lambda\vec{X}=(0,\lambda X_2,\lambda X_3),\lambda\vec{Y}=(0,\lambda Y_2,\lambda Y_3)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\lambda\vec{X}\times_{\mathbb{D}\delta}\vec{Y}&=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ 0 & \lambda X_2 & \lambda X_3\\ 0 & Y_2 & Y_3\end{vmatrix}\\ &=\lambda\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ 0 & X_2 & X_3\\ 0 & Y_2 & Y_3\end{vmatrix}\\ &=\lambda(\vec{X}\times_{\mathbb{D}\delta}\vec{Y})\\ &=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ 0 & X_2 & X_3\\ 0 & \lambda Y_2 & \lambda Y_3\end{vmatrix}\\ &=\vec{X}\times_{\mathbb{D}\delta}\lambda\vec{Y}\end{aligned}$$

olduğu görülür.

6) **i)** $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ vektörlerinden en az biri non-izotropik vektör olup lineer bağımlı ise $\vec{Y}=\beta\vec{X}$ olmak üzere $\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\vec{Y}=\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\beta\vec{X}$ eşitliği 1. ve 5.özellikten $\beta(\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\vec{X})=0$ şeklinde yazılabileceği görülür. Ayrıca

ii) $\vec{X}$ ve $\vec{Y}$ izotropik vektörleri lineer bağımlı ise $\vec{Y}=\beta\vec{X}$ olmak üzere $\vec{X}\times_{\mathbb{D}\delta}\vec{Y}=\vec{X}\times_{\mathbb{D}\delta}$ olup 1. ve 5.özellik gereğince $\beta\vec{X}=\beta(\vec{X}\times_{\mathbb{D}\delta}\vec{X})=0$

şeklinde olduğu görülür.

7) $\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}\in\mathbb{DG}^3$ olmak üzere

• $\vec{X}=(X_1,X_2,X_3),\vec{Y}=(Y_1,Y_2,Y_3),\vec{Z}=(Z_1,Z_2,Z_3)$ non-izotropik vektör olmak üzere:

i) $\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\vec{Y}=\begin{vmatrix}0 & e_2 & e_3\\ X_1 & X_2 & X_3\\ Y_1 & Y_2 & Y_3\end{vmatrix}=(0,X_3Y_1-X_1Y_3,X_1Y_2-X_2Y_1)$ olduğu görülür.

Buradan

$$(\vec{X}\times_{\mathbb{DG}}\vec{Y})\times_{\mathbb{DG}}\vec{Z}=\begin{vmatrix}0 & e_2 & e_3\\ 0 & X_3Y_1-X_1Y_3 & X_1Y_2-X_2Y_1\\ Z_1 & Z_2 & Z_3\end{vmatrix}$$

$$=(0,Z_1(X_1Y_2-X_2Y_1),-Z_1(X_3Y_1-X_1Y_3))$$

$$=(0,X_1Z_1Y_2-X_2Z_1Y_1),-X_3Z_1Y_1+X_1Z_1Y_3))$$

$$=(0,X_1Z_1Y_2,(X_1Z_1Y_3))-(0,X_2Z_1Y_1,X_3Z_1Y_1)$$

olup bu eşitlik

$(\vec{X} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Y}) \times_{\mathbb{DG}} \vec{Z} = (X_1Y_1Z_1, X_1Z_1Y_2, X_1Z_1Y_3) - (X_1Y_1Z_1, X_2Z_1Y_1, X_3Z_1Y_1)$
şeklinde de yazılabilir. Buradan

$$(\vec{X} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Y}) \times_{\mathbb{DG}} \vec{Z} = \langle \vec{X}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{DG}} \vec{Y} - \langle \vec{Y}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{DG}} \vec{X}$$

eşitliği elde edilir.

ii) $\vec{Y} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Z} = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = (0, Y_3Z_1 - Y_1Z_3, Y_1Z_2 - Y_2Z_1)$ olduğu görülür.
Buradan

$$\vec{X} \times_{\mathbb{DG}} (\vec{Y} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Z}) = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ 0 & Y_3Z_1 - Y_1Z_3 & Y_1Z_2 - Y_2Z_1 \end{vmatrix}$$

$= (0, -X_1(Y_1Z_2 - Y_2Z_1), X_1(Y_3Z_1 - Y_1Z_3))$
$= (0, -X_1Y_1Z_2 + X_1Y_2Z_1, -X_1Y_3Z_1 - X_1Y_1Z_3))$
$= (0, X_1Z_1Y_2, (X_1Z_1Y_3)) - (0, X_1Y_1Z_2, X_1Y_1Z_3)$
olup bu eşitlik
$\vec{X} \times_{\mathbb{DG}} (\vec{Y} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Z}) = (X_1Y_1Z_1, X_1Z_1Y_2, X_1Z_1Y_3) - (X_1Y_1Z_1, X_2Z_1Y_1, X_3Z_1Y_1)$
şeklinde de yazılabilir. Buradan

$$\vec{X} \times_{\mathbb{DG}} (\vec{Y} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Z}) = \langle \vec{X}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{DG}} \vec{Y} - \langle \vec{Y}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{DG}} \vec{X}$$

eşitliği elde edilir.

• $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3), \vec{Z} = (Z_1, Z_2, Z_3)$ non-izotropik vektör, $\vec{Y} = (0, Y_2, Y_3)$ izotropik vektör olmak üzere:

i) $\vec{X} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Y} = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ 0 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix} = (0, -X_1Y_3, X_1Y_2)$ olduğu görülür. Buradan

$$(\vec{X} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Y}) \times_{\mathbb{DG}} \vec{Z} = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ 0 & -X_1Y_3 & X_1Y_2 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}$$

$$= (0, X_1Y_2Z_1, X_1Y_3Z_1)$$

ve $X_1Y_1 = 0$ olduğundan bu eşitlik
$(\vec{X} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Y}) \times_{\mathbb{DG}} \vec{Z} = (X_1Y_1Z_1, X_1Y_2Z_1, X_1Y_3Z_1) = \langle \vec{X}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{DG}} \vec{Y}$
şeklinde de yazılabilir. Ayrıca $\langle \vec{Y}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{DG}} = 0$ olduğundan
$(\vec{X} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Y}) \times_{\mathbb{DG}} \vec{Z} = \langle \vec{X}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{DG}} \vec{Y} - \langle \vec{Y}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{DG}} \vec{X}$ eşitliği elde edilir.

ii) $\vec{Y} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Z} = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ 0 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = (0, Y_3Z_1, -Y_2Z_1)$ olduğu görülür. Buradan

$$\vec{X} \times_{\mathbb{DG}} (\vec{Y} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Z}) = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ 0 & Y_3Z_1 & -Y_2Z_1 \end{vmatrix}$$
$$= (0, X_1Y_2Z_1, X_1Y_3Z_1)$$

ve $X_1Z_1 = 0$ olduğundan bu eşitlik
$\vec{X} \times_{\mathbb{DG}} (\vec{Y} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Z}) = (X_1Y_1Z_1, X_1Y_2Z_1, X_1Y_3Z_1) = \langle \vec{X}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{DG}} \vec{Y}$ şeklinde de yazılabilir. Ayrıca $\langle \vec{Y}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{DG}} = 0$ olduğundan
$\vec{X} \times_{\mathbb{DG}} (\vec{Y} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Z}) = \langle \vec{X}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{DG}} \vec{Y} - \langle \vec{Y}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{DG}} \vec{X}$ eşitliği elde edilir.

• $\vec{X} = (0, X_2, X_3)$ izotropik vektör, $\vec{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3), \vec{Z} = (Z_1, Z_2, Z_3)$ non-izotropik vektör olmak üzere:

i) $\vec{X} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Y} = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ 0 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix} = (0, X_3Y_1, -X_2Y_1)$ olduğu görülür. Buradan

$$(\vec{X} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Y}) \times_{\mathbb{DG}} \vec{Z} = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ 0 & X_3Y_1 & -X_2Y_1 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}$$
$$= (0, -X_2Y_1Z_1, -X_3Y_1Z_1)$$

ve $\langle \vec{X}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{DG}} = 0$ olduğundan bu eşitlik
$(\vec{X} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Y}) \times_{\mathbb{DG}} \vec{Z} = (-X_1Y_1Z_1, -X_2Y_1Z_1, -X_3Y_1Z_1)$ şeklinde de yazılabilir. Buradan $(\vec{X} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Y}) \times_{\mathbb{DG}} \vec{Z} = -\langle \vec{Y}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{DG}} \vec{X}$ olup ve $\langle \vec{X}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{DG}} = \vec{0}$ olduğundan
$(\vec{X} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Y}) \times_{\mathbb{DG}} \vec{Z} = \langle \vec{X}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{DG}} \vec{Y} - \langle \vec{Y}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{DG}} \vec{X}$ eşitliği elde edilir.

ii) Bu özellikte $\vec{X} \times_{\mathbb{D}\delta} (\vec{Y} \times_{\mathbb{DG}} \vec{Z}) = \langle \vec{X}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{DG}} \vec{Y} - \langle \vec{Y}, \vec{Z} \rangle_{\mathbb{DG}} \vec{X}$ eşitliği sağlanamaz.

Burada $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ vektörlerinin diğer izotropik ve non-izotropik olma durumları için eşitlik sağlanamadığından gösterilmemiştir.

■

Tanım 4.19. Bir d doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{u}$ izotropik vektör ise d doğrusuna izotropik doğru denir. Eğer d doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{u}$ izotropik vektör değil ise d doğrusuna non-izotropik doğru denir [11].

Tanım 4.20. $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3) = \vec{x} + \varepsilon\vec{x^*} \in \mathbb{DG}^3$ dual Galile vektörünü alalım.

- $\mathbb{DS}^2 = \{\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon\vec{x^*} \in \mathbb{DG}^3$ non-izotropik vektör: $\|\vec{X}\|_{\mathbb{DG}} = 1\}$ kümesine dual Galile non-izotropik birim küre denir.
  Bir diğer ifadeyle
  $\mathbb{DS}^2 = \{\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon\vec{x^*} \in \mathbb{DG}^3 : \langle\vec{x}, \vec{x}\rangle_{\mathbb{G},\delta} = 1$ ve $\langle\vec{x}, \vec{x^*}\rangle_{\mathbb{G}} = 0\}$ şeklinde de ifade edilebilir. Yani dual Galile non-izotropik birim küre üzerindeki noktalar:

  – $\vec{x}$ non-izotropik ve $\langle\vec{x}, \vec{x^*}\rangle_{\mathbb{G}} = 0$ iken $\vec{x^*}$ izotropik;

  – $\vec{x}$ izotropik ve $\langle\vec{x}, \vec{x^*}\rangle_{\mathbb{G}} = 0$ iken $\vec{x^*}$ non-izotropik

  vektör olmak zorunda olduğundan
  $(\vec{x}, \vec{x^*})$=(non-izotropik, izotropik)=(izotropik, non-izotropik) vektör çiftleri ile ifade edilebilir.

  – $\vec{x}$ non-izotropik ve $\langle\vec{x}, \vec{x^*}\rangle_{\mathbb{G}} = 0$ için $\vec{x^*}$ non-izotropik vektör olamayacağından (non-izotropik, non-izotropik) vektör çifti $\mathbb{DS}^2$ küresi üzerinde mevcut değildir.

- $\mathbb{DS}^2_\delta = \{\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon\vec{x^*} \in \mathbb{DG}^3$ izotropik vektör , $\|\vec{X}\|_{\mathbb{D}\delta} = 1\}$ kümesine dual Galile izotropik birim küre adı verilir. Bir diğer ifadeyle
  $\mathbb{DS}^2_\delta = \{\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon\vec{x^*} \in \mathbb{DG}^3 : \langle\vec{x}, \vec{x}\rangle_\delta = 1, \langle\vec{x}, \vec{x^*}\rangle_\delta = 0\}$ şeklinde de ifade edilebilir. Yani dual Galile izotropik birim küre üzerindeki noktalar $(\vec{x}, \vec{x^*})$=(izotropik, izotropik) vektör çiftleri ile ifade edilebilir.

Not: Dual Galile non-izotropik birim küre, Galile non-izotropik birim küreyi kapsar. Dual Galile izotropik birim küre ise izotropik birim küreyi kapsar.

4.3.8 $\mathbb{DG}^3$ Uzayının $\mathbb{D}$ Üzerinde E.Study Dönüşümleri

Tanım (B.13) gereğince; aşağıdaki durumları inceleyelim:

I) $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a^*}$ dual Galile non-izotropik birim vektör için; $\langle\vec{a}, \vec{a}\rangle_{\mathbb{G},\delta} = 1$, $\langle\vec{a}, \vec{a^*}\rangle_{\mathbb{G}} = 0$ olsun.

I-i $\langle\vec{a}, \vec{a}\rangle_{\mathbb{G}} = 1$ ve $\langle\vec{a}, \vec{a^*}\rangle_{\mathbb{G}} = 0$ olsun. Buradan $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ non-izotropik vektör olmak üzere $\vec{a^*} = (0, y_2, z_2)$ izotropik vektör olmalıdır. O halde Tanım (4.17) gereğince $\vec{z} = \vec{a} \times_{\mathbb{G}} \vec{a^*}$ izotropik vektördür.

$\vec{x} = \vec{m} + \lambda\vec{a}$ doğru dekleminin $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{m} \times \vec{a} = \vec{a^*}$ için vektörel çarpım tanımlarından doğru üzerindeki noktaların konum vektörleri izotropik veya non-izotropik vektör olabilir.

I-ii $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_\delta = 1$ ve $\langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle_{\mathbb{G}} = 0$ olsun. Buradan $\vec{a} = (0, y_1, z_1)$ ve $y_1^2 + z_1^2 = 1$ olup izotropik vektör olmak üzere $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*}$ non-izotropik vektör olması için $\vec{a^*} = (x_2, y_2, z_2)$ non-izotropik vektör olmalıdır. O halde Tanım (4.17) gereğince $\vec{z} = \vec{a} \times_{\mathbb{G}} \vec{a^*}$ izotropik vektördür.

$\vec{x} = \vec{m} + \lambda \vec{a}$ vektörel dekleminin $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{m} \times \vec{a} = \vec{a^*}$ için vektörel çarpım tanımlarından doğru üzerindeki noktaların konum vektörleri (izotropik $\times_\delta$ izotropik=non-izotropik olduğundan) hep izotropik vektör olmalıdır.

II) $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*}$ dual Galile izotropik birim vektör için; $\vec{a}$ ve $\vec{a^*}$ vektörleri izotropik vektör olmalıdır.$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_\delta = 1$ ve $\langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle_\delta = 0$ olsun.

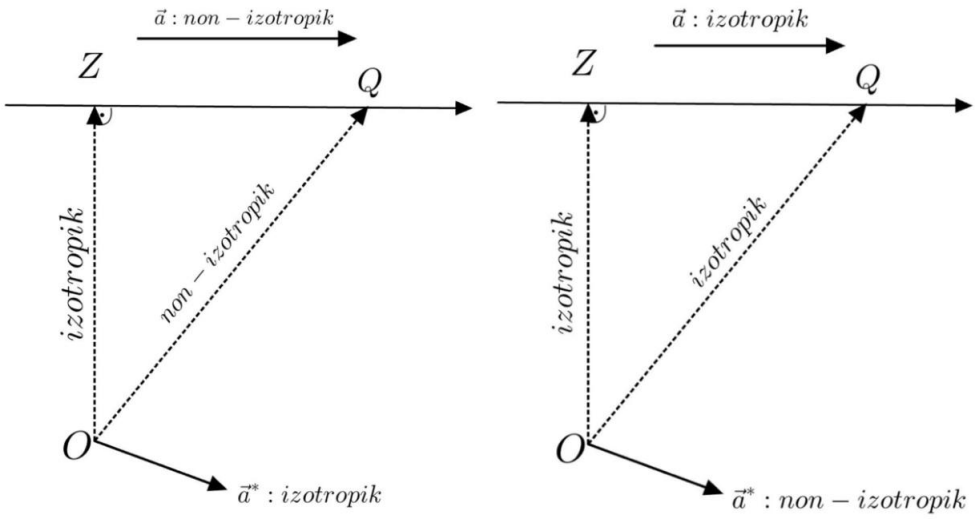
II-i $\vec{a} = (0, y_1, z_1)$ izotropik vektör $(y_1^2 + z_1^2 = 1)$ ve $\vec{a^*} = (0, y_2, z_2)$ izotropik vektör olmalıdır. O halde Tanım (4.17) gereğince $\vec{z} = \vec{a} \times_\delta \vec{a^*}$ non-izotropik vektördür.

$\vec{x} = \vec{m} + \lambda \vec{a}$ doğru dekleminin $\vec{x} \times_\delta \vec{a} = \vec{m} \times_\delta \vec{a} = \vec{a^*}$ için ($\vec{x}$ $\times$ izotropik=izotropik olması için $\vec{x}$ non-izotropik olmalıdır.) O halde doğru üzerindeki noktaların konum vektörleri non-izotropik vektör olmalıdır.

E.Study dönüşümü şartlarını sağlayan $I-i$ ve $I-ii$. maddeleri aşağıda incelenmiştir:

Teorem 4.2. $\mathbb{DS}^2$ *Dual Galile non-izotropik birim küre üzerindeki her noktaya;* $\mathbb{G}^3$ *Galile uzayında* $(\vec{a}, \vec{a^*})$ *=(non-izotropik birim, izotropik), (izotropik birim, non-izotropik) vektör çifti ile ifade edilen bir doğru karşılık gelir. Tersine her* $(\vec{a}, \vec{a^*})$ *=(non-izotropik birim, izotropik), (izotropik birim, non-izotropik) vektör çifti ile ifade edilen* $\mathbb{G}^3$ *uzayındaki her doğruya* $\mathbb{DS}^2$ *Dual Galile non-izotropik birim küre üzerinde bir nokta karşılık gelir.*

İspat. (non-izotropik birim, izotropik), (izotropik birim, non-izotropik) vektör çiftlerinin ifade ettiği doğruları ele alalım. Her izotropik vektör, non-izotropik vektöre dik olduğundan dolayı $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_{\mathbb{G}} = 1, \langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle_{\mathbb{G}} = 0$ dır. Dolayısıyla bu doğrular için $\mathbb{DG}^3$ uzayında bir $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*}$ birim vektörü elde edilmiş olur. Bu vektör $\mathbb{DS}^2$ üzerinde bir noktaya karşılık gelir. Tersine $\mathbb{DS}^2$ üzerinde $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*}$ birim vektörünü ele alalım. Bu durumda $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_{\mathbb{G}} = 1, \langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle_{\mathbb{G}} = 0$ eşitlikleri geçerlidir. O zaman $\vec{a}$ birim vektörünü doğrunun doğrultman vektörü kabul edelim. Bu durumda $\mathbb{G}^3$ uzayında $\vec{a}$ birim doğrultman vektörüne sahip doğrunun parametrik denklemi $\vec{x} = \vec{m} + \lambda \vec{a}$ dır. Böylece $\vec{a^*} = \vec{m} \times_{\mathbb{G}} \vec{a} = \vec{z} \times_{\mathbb{G}} \vec{a}$ vektörüne O orijin noktasına göre vektörel momenti denir.
Doğrultman vektörü $\vec{a}$, vektörel momenti $\vec{a^*}$ olan bir doğru için $\vec{a^*}$ vektörünün geometrik özelliklerine bakalım. Bu durumda



Şekil 4.1 (a, a^*)=(non-izotropik birim, izotropik), (izotropik birim, non-izotropik) doğru

1) **i)** $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ non-izotropik birim $(x_1 = \pm 1)$ ve $\vec{a^*} = (0, y_2, z_2)$ izotropik vektör olduğundan ortogonaldir.

$$\langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle_{\mathbb{G}} = 0.x_1 = 0 \tag{4.18}$$

olup $(\vec{a} \perp \vec{a^*})$ olduğu söylenebilir.

ii) $\vec{a} = (0, y_1, z_1)$ izotropik birim $(y_1^2 + z_1^2 = 1)$ ve $\vec{a^*} = (x_2, y_2, z_2)$ non-izotropik vektör olduğundan ortogonaldir.

$$\langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle_{\mathbb{G}} = 0.x_2 = 0 \tag{4.19}$$

olup $(\vec{a} \perp \vec{a^*})$ olduğu söylenebilir.

2) **i)** (B.17) denklemi gereğince
$\vec{a} \times_{\mathbb{G}} \vec{a^*} = \vec{a} \times_{\mathbb{G}} (\vec{z} \times_{\mathbb{G}} \vec{a}) = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_{\mathbb{G}} \vec{z} - \langle \vec{z}, \vec{a} \rangle_{\mathbb{G}} \vec{a}$ eşitliğinden
$\vec{z} = \vec{a} \times_{\mathbb{G}} \vec{a^*}$ elde edilir. $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ non-izotropik $\vec{a^*} = (0, y_2, z_2)$ izotropik vektör $\vec{z} = \vec{a} \times_{\mathbb{G}} \vec{a^*}$ ise

$$\vec{z} = \vec{a} \times_{\mathbb{G}} \vec{a^*} = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (0, x_1 z_2, x_1 y_2)$$

olup burada seçilen Z noktasının konum vektörü olan $\vec{z} = (0, x_1 z_2, x_1 y_2)$ izotropik vektör olduğu görülür.

ii) (B.17) denklemi gereğince
$\vec{a} \times_{\mathbb{G}} \vec{a^*} = \vec{a} \times_{\mathbb{G}} (\vec{z} \times_{\delta} \vec{a}) = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_{\delta} \vec{z} - \langle \vec{z}, \vec{a} \rangle_{\delta} \vec{a}$ eşitliğinden

$\vec{z} = \vec{a} \times_{\mathbb{G}} \vec{a^*}$ elde edilir. $\vec{a} = (0, y_1, z_1), \vec{a^*} = (x_2, y_2, z_2)$ için $\vec{z} = \vec{a} \times_{\mathbb{G}} \vec{a^*}$ ise

$$\vec{z} = \vec{a} \times_{\mathbb{G}} \vec{a^*} = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ 0 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (0, z_1 x_2, -y_1 x_2)$$

olup burada seçilen Z noktasının konum vektörü olan $\vec{z} = (0, z_1 x_2, -y_1 x_2)$ izotropik vektör olduğu görülür.

3) **i)** $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ non-izotropik birim, $\vec{a^*} = (0, y_2, z_2)$ izotropik, $\vec{z} = \vec{a} \times_{\mathbb{G}} \vec{a^*} = (0, x_1 z_2, x_1 y_2)$ izotropik vektör için

$$\|\vec{z}\|_\delta = \|\vec{a} \times_{\mathbb{G}} \vec{a^*}\|_\delta = \sqrt{(x_1 z_2)^2 + (x_1 y_2)^2} \tag{4.20}$$

ve

$$\|\vec{a^*}\|_\delta = \sqrt{y_2^2 + z_2^2}$$
$$\|\vec{a}\|_{\mathbb{G}} = \sqrt{x_1^2} = |x_1|$$

olup

$$\|\vec{a}\|_{\mathbb{G}} \|\vec{a^*}\|_\delta = \sqrt{x_1^2 (y_2^2 + z_2^2)}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece

$$\|\vec{z}\|_\delta = \|\vec{a} \times_{\mathbb{G}} \vec{a^*}\|_\delta = \|\vec{a}\|_{\mathbb{G}} \|\vec{a^*}\|_\delta = \|\vec{a^*}\|_\delta$$

eşitliği görülür.

ii) $\vec{a} = (0, y_1, z_1)$ izotropik birim, $\vec{a^*} = (x_2, y_2, z_2)$ non-izotropik, $\vec{z} = \vec{a} \times_{\mathbb{G}} \vec{a^*} = (0, z_1 x_2, -y_1 x_2)$ izotropik vektör için

$$\|\vec{z}\|_\delta = \|\vec{a} \times_{\mathbb{G}} \vec{a^*}\|_\delta = \sqrt{(z_1 x_2)^2 + (y_1 x_2)^2} \tag{4.21}$$

ve

$$\|\vec{a}\|_\delta = \sqrt{y_1^2 + z_1^2}$$
$$\|\vec{a^*}\|_{\mathbb{G}} = \sqrt{x_2^2} = |x_2|$$

olup

$$\|\vec{a}\|_\delta \|\vec{a^*}\|_{\mathbb{G}} = \sqrt{x_2^2 (y_1^2 + z_1^2)}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece

$$\|\vec{z}\|_\delta = \|\vec{a} \times_{\mathbb{G}} \vec{a^*}\|_\delta = \|\vec{a}\|_\delta \|\vec{a^*}\|_{\mathbb{G}} = \|\vec{a^*}\|_{\mathbb{G}}$$

eşitliği görülür.

■

Örnek I-i: $\vec{a} = (1,1,2)$ non-izotropik birim, $\vec{a^*} = (0,1,3)$ izotropik vektör olmak üzere

$$\vec{z} = \vec{a} \times_{\mathbb{G}} \vec{a^*} = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (0,-3,1)$$

izotropik vektör elde edilir. Buradan $\langle \vec{z}, \vec{a} \rangle_{\mathbb{G}} = 0$ olduğundan $\vec{z} \perp \vec{a}$ olup ve $\langle \vec{z}, \vec{a^*} \rangle_\delta = 0$ olduğundan $\vec{z} \perp \vec{a^*}$ olduğu görülür. Buradan doğru denklemi

$$\frac{x}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{2} = \lambda \tag{4.22}$$

şeklindedir. Böylece doğru üzerindeki temsili $Q = (\lambda, \lambda - 3, 2\lambda + 1)$ noktasını ele alalım. Buradan

- $\lambda = 0$ için $\vec{z}$ izotropik vektörü elde edilir.
- $\lambda \neq 0$ için tüm konum vektörleri non-izotropik vektördür.

Örnek I-ii: $\vec{a} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ izotropik birim, $\vec{a^*} = (1,2,1)$ non-izotropik vektör olmak üzere

$$\vec{z} = \vec{a} \times_{\mathbb{G}} \vec{a^*} = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

olduğundan $\vec{z}$ izotropik vektörü elde edilir. Buradan $\langle \vec{z}, \vec{a} \rangle_\delta = 0$ olduğundan $\vec{z} \perp \vec{a}$ ve $\langle \vec{z}, \vec{a^*} \rangle_{\mathbb{G}} = 0$ olduğundan $\vec{z} \perp \vec{a^*}$ olduğu görülür. Buradan doğru denklemi

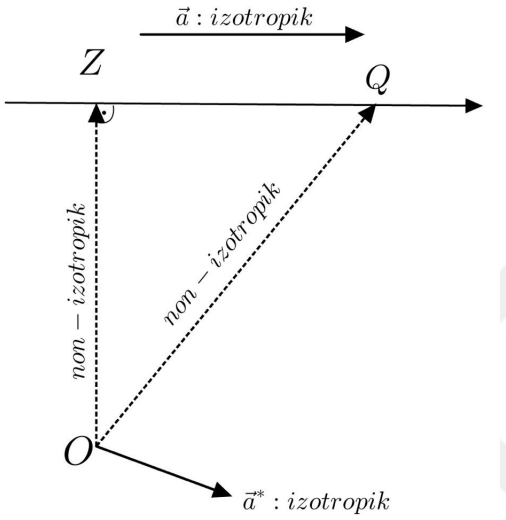
$$\frac{x}{0} = \frac{y - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{z + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \lambda \tag{4.23}$$

şeklindedir. Böylece doğru üzerindeki temsili

$$Q = (0, \frac{\lambda+1}{\sqrt{2}}, \frac{\lambda-1}{\sqrt{2}})$$

noktası elde edilir. O halde doğru üzerinde seçilen tüm noktaların konum vektörleri izotropiktir.

Teorem 4.3. $\mathbb{DS}^2_\delta$ *Dual Galile izotropik birim küre üzerindeki her nokta için* $\mathbb{G}^3$ *Galile uzayında* $(\vec{a},\vec{a^*})$ *=(izotropik birim, izotropik) vektör çifti ile ifade edilen doğru karşılık gelir. Tersine her* $(\vec{a},\vec{a^*})$ *=(izotropik birim, izotropik) vektör çifti ile ifade edilen doğrulara* $\mathbb{DS}^2_\delta$ *Dual Galile izotropik birim küre üzerinde bir nokta karşılık gelir.*



Şekil 4.2 $(\vec{a},\vec{a^*})$=(izotropik birim, izotropik) doğru

İspat. $\mathbb{G}^3$ uzayında $\vec{a}$ birim doğrultman vektörüne sahip doğrunun parametrik denklemi $\vec{x}=\vec{m}+\lambda\vec{a}$ dır. Doğrultman vektörü ve vektörel momenti izotropik olan bir doğruyu seçelim. O halde $\vec{a^*}$ vektörünün aşağıdaki geometrik özellikleri elde edilir:

1) $\vec{a}=(0,y_1,z_1)$ izotropik birim $y_1^2+z_1^2=1$ ve $\vec{a^*}=(0,y_2,z_2)$ izotropik vektör olduğundan

$$\langle\vec{a},\vec{a^*}\rangle_\delta = y_1y_2+z_1z_2=0 \tag{4.24}$$

eşitliği elde edilir. Buradan $\vec{a}$ ve $\vec{a^*}$ ortogonaldir.

2) (B.16) denklemi gereğince $\vec{a}\times_\delta\vec{a^*}=\vec{a}\times_\delta(\vec{z}\times_{\mathbb{G}}\vec{a})=\langle\vec{a},\vec{a}\rangle_\delta\vec{z}-\langle\vec{z},\vec{a}\rangle_{\mathbb{G}}\vec{a}=\vec{z}$ eşitliğinden $\vec{z}=\vec{a}\times_\delta\vec{a^*}$ elde edilir. $\vec{a}=(0,y_1,z_1)$, $\vec{a^*}=(0,y_2,z_2)$ için $\vec{z}=\vec{a}\times_\delta\vec{a^*}$ ise

$$\vec{z}=\vec{a}\times_\delta\vec{a^*}=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 0 & y_1 & z_1\\ 0 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=(y_1z_2-z_1y_2,0,0)$$

olup burada seçilen Z noktasının konum vektörü olan $\vec{z}=(y_1z_2-z_1y_2,0,0)$ non-izotropik vektördür.

3) O orijin noktasından doğruya inilen dikmenin ayağı Z noktası seçilip ve $\vec{a}^*$ vektörel moment $\vec{a}^* = \vec{z} \times_{\mathbb{G}} \vec{a}$ olmak üzere

$$\vec{z} = \vec{a} \times_{\delta} \vec{a}^* \tag{4.25}$$

yazılabilir. Böylece $\vec{z} \perp \vec{a}$ olduğu görülür.

Örnek II-i: $\vec{a} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ izotropik birim, $\vec{a}^* = (0,3,4)$ izotropik vektör olmak üzere

$$\vec{z} = \vec{a} \times_{\delta} \vec{a}^* = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$$

olduğundan $\vec{z}$ non-izotropik vektör elde edilir. Buradan $\langle \vec{z}, \vec{a} \rangle_{\mathbb{G}} = 0$ olduğundan $\vec{z} \perp \vec{a}$ ve $\langle \vec{z}, \vec{a}^* \rangle_{\mathbb{G}} = 0$ olduğundan $\vec{z} \perp \vec{a}^*$ olduğu görülür. Buradan doğru denklemi

$$\frac{x - \frac{1}{\sqrt{2}}}{0} = \frac{y}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{z}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \lambda \tag{4.26}$$

şeklindedir. Böylece doğru üzerinde alınan temsili bir nokta

$$Q = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\lambda\sqrt{2}}{2}, \frac{\lambda\sqrt{2}}{2})$$

olmak üzere doğru üzerinde seçilen tüm noktaların konum vektörlerinin non-izotropik vektör olduğu görülür. ■

5
SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezin orijinal kısmı üçüncü bölüm ve sonrasında yer almaktadır. Dual Lorentz uzayda E.Study dönüşümleri için dual Lorentz uzayındaki doğruların doğrultman vektörlerinin spacelike, timelike ve null vektör olma durumuna karşın vektörel momentlerinin olası durumları literatüre kazandırılmıştır. Tezin dördüncü bölümünde dual uzayın reel sayılar cismi ve $\mathbb{D}$-Modül üzerinde yeni iç çarpım yapıları tanımlanıp, bu iç çarpım uzayları literatüre kazandırılmıştır. Ayrıca $\mathbb{D}^n$ uzayı üzerinde Galile iç çarpımını kullanarak yeni iç çarpım uzayı elde edilmiştir. Bununla birlikte E.Study dönüşümlerinin tanımlanan bu iç çarpım uzayları için varlığı araştırılmıştır.

KAYNAKÇA

[1] E. Study, *Geometrie der dynamen*, 1903.

[2] H. Hacısalihoğlu, G. Ü. F.-E. Fakültesi, *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi* (Gazi Üniversitesi yayınları). Gazi Üniversitesi, 1983. [Online]. Available: `https://books.google.com.tr/books?id=r9EKPwAACAAJ`.

[3] H. H. Uğurlu, A. Çalışkan, "The study mapping for directed space-like and time-like in Minkowski 3-space," *Mathematical and Computational Applications v. 1, n. 2, ss. 142-148*, 1996.

[4] S. Yüce, *Sayılar ve Geometri*. Pegem Akademi Yayıncılık, 2020.

[5] B. O'neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic Press, 1983.

[6] S. Yüce, S. (Şenocak) Çoruh, "*A Comprehensive Insight into Lorentzian Geometry*", *In the printing process.* 2023.

[7] J. G. Ratcliffe, "Hyperbolic n-manifolds (second edition)," *Foundations of Hyperbolic Manifolds, ss. 508-599*, 2006.

[8] R. López, "Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space," *International Electronic Journal of Geometry, v. 7, n. 1, ss. 44-107*, 2014.

[9] I. M. Yaglom, *A simple non-Euclidean geometry and its physical basis: An elementary account of Galilean geometry and the Galilean principle of relativity*. Springer Science & Business Media, 1979.

[10] A. Turgut, "3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike ve timelike regle yüzeyler," Ankara Üniversitesi, Doktora Tezi, Ankara, 1995.

[11] I. Kamenarovic, "Existence theorems for ruled surfaces in the Galilean space G^3," *Rad HAZU Math, v. 456, n. 10, ss. 183-196*, 1991.

[12] Ž. Šipuš, "Ruled Weingarten surfaces in the Galilean space," *Periodica Mathematica Hungarica, v. 56, n. 2, ss. 213-225*, 2008.

[13] O. Röschel, "Die geometrie des Galileischen raumes," University of Leoben, PhD Thesis, Austria, 1984.

[14] S. Yüce, *Analitik Geometri*. Pegem Akademi Yayıncılık, Baskı:7, 2022. DOI: 10.14527/9786053188117.

[15] N. N. Yakut, "Reel ve dual uzaylarda açı kavramı," Celal Bayar Üniversitesi, Doktora Tezi, Manisa, 2012.

[16] G. Laptev, *Differential geometry of imbedded manifolds, ss. 275-382*. 1953.

[17] M. Akbıyık, "3-boyutlu Galile uzayında kinematik," Yıldız Teknik Üniversitesi, Doktora Tezi, İstanbul, 2018.

[18] A. T. Ali, “Position vectors of curves in the Galilean space G^3,” *Matematički Vesnik, v. 64, n. 249, ss. 200-210*, 2012.

A
LORENTZ UZAY

A.1 Lorentz Uzay

Tanım A.1. $\mathbb{R}^n$ uzayına, üzerindeki $\vec{x} = (x_i), \vec{y} = (y_i) \in \mathbb{R}^n$ vektörleri ve $1 \leq i \leq n$ için

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{\nu-n} x_i y_i - \sum_{i=n-\nu+1}^{n} x_i y_i \tag{A.1}$$

ile tanımlı skaler çarpım fonksiyonu ile birlikte $\nu-$ indeksli yarı Öklidyen uzay adı verilir ve $\mathbb{R}^n_\nu$ ile gösterilir. Bu durumda $\langle , \rangle$ $\nu-$ indeksli skaler çarpım fonksiyonu olup $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n_\nu \times \mathbb{R}^n_\nu \to \mathbb{R}$ şeklinde ifade edilebilir. Kısaca $\mathbb{R}^n_\nu = (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_\nu)$ ile gösterilir [5, 6].

Örnek: $\vec{X} = (x_i)$,$\vec{Y} = (y_i) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (\vec{X}, \vec{Y}) &\mapsto \langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n \end{aligned}$$

skaler çarpımı ile birlikte bir Lorentz uzayıdır ve $\mathbb{L}^n$ veya $\mathbb{R}^n_1$ ile gösterilir. $\langle , \rangle$ fonksiyonuna da Lorentz iç çarpımı ya da Minkowski metriği adı verilir [5, 6].

Tanım A.2. $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n_1$ için,

- $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ veya $\vec{v} = 0$ ise $\vec{v}$ vektörüne spacelike,
- $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$ ise $\vec{v}$ vektörüne timelike,
- $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ ve $\vec{v} \neq 0$ ise $\vec{v}$ vektörüne null vektör

denir [5, 6].

A.1.1 $\mathbb{R}_1^n$ Uzayında Vektörlerin Sınıflandırılması

$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n) \in \mathbb{R}_1^n$ ve
$\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \tilde{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ olmak üzere
iç çarpım fonksiyonu

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \tilde{x}.\tilde{y} - x_n y_n \tag{A.2}$$

olup

$$\|\vec{x}\| = |\tilde{x}|^2 - x_n^2 \tag{A.3}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada $\tilde{x}.\tilde{y}$ ifadesi Öklid iç çarpımı ve $|x|$ Öklid normu ifade etmektedir [6, 7].

Sonuç A.1. *$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}_1^n$ ve $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ olmak üzere*

1. *$|\tilde{x}| > |x_n|$ ise $\vec{x}$ spacelike vektör,*
2. *$|\tilde{x}| < |x_n|$ ise timelike vektör,*
3. *$|\tilde{x}| = |x_n|$ ise null vektör*

olur [7].

A.1.2 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Vektörel Çarpım

Bu bölümde $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$ iç çarpımı ile birlikte $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında vektörel çarpım konusu ele alınmıştır.

Tanım A.3. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}_1^3$ olmak üzere

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_2 y_1 - x_1 y_2) \tag{A.4}$$

fonksiyonuna vektörel çarpım fonksiyonu $\vec{x} \times \vec{y}$ vektörüne de $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerinin Lorentz vektörel çarpımı denir. Bu tanım kullanılarak

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

olmak üzere $e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}),\ i = 1, 2, 3$ ve

$$\vec{e_1} = (1, 0, 0), \vec{e_2} = (0, 1, 0), \vec{e_3} = (0, 0, 1) \tag{A.5}$$

için $\langle e_2, e_3 \rangle = -1$ olup $\vec{e_3}$ vektörü timelike vektördür. O halde

$$\vec{e_1} \times \vec{e_2} = -e_3, \vec{e_2} \times \vec{e_3} = e_1, \vec{e_3} \times \vec{e_1} = e_2 \tag{A.6}$$

elde edilir [6–8, 10].

Teorem A.1. *$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}_1^3$ vektörleri lineer bağımsız timelike vektörler ve aralarındaki açı θ olmak üzere $\vec{x} \times \vec{y}$ spacelike olup*

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \sinh \theta$$

eşitliği sağlanır [6, 7].

Teorem A.2. *$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}_1^3$ spacelike vektörler ve aralarındaki açı θ olmak üzere eğer $\vec{x} \times \vec{y}$ timelike vektör ise*

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \sin \theta$$

eşitliği sağlanır [6, 7].

Teorem A.3. *$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}_1^3$ vektörleri spacelike vektörler ve aralarındaki açı θ olmak üzere eğer $\vec{x} \times \vec{y}$ spacelike ise*

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \sinh \theta$$

eşitliği sağlanır [6, 7].

Teorem A.4. *$\vec{x}$ spacelike ,$\vec{y}$ timelike $\in \mathbb{R}_1^3$ vektörleri ve aralarındaki açı θ olmak üzere eğer $\vec{x} \times \vec{y}$ spacelike ise*

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \cosh \theta$$

eşitliği sağlanır [6].

Teorem A.5. *$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}_1^3$ olmak üzere*

1) *$\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri spacelike vektör olmak üzere*

- ***i.*** *Spacelike alt vektör uzayı geren spacelike vektörler ise $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| < \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ olması için gerek ve yeter şart $\vec{x} \times \vec{y}$ timelike vektördür.*
- ***ii.*** *$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ olması için gerek ve yeter şart $\vec{x} \times \vec{y}$ null vektördür.*
- ***iii.*** *Timelike alt vektör uzayı geren spacelike vektörler ise $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| > \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ olması için gerek ve yeter şart $\vec{x} \times \vec{y}$ spacelike vektördür.*

2) *$\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri timelike vektör ise $\vec{x} \times \vec{y}$ spacelike vektördür.*

3) *$\vec{x}$ spacelike (timelike) vektör ve $\vec{y}$ timelike (spacelike) vektör ise $\vec{x} \times \vec{y}$ spacelike vektördür.*

4) *$\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri null vektör ise $\vec{x} \times \vec{y}$ spacelike vektördür.*

5) *$\vec{x}$ timelike vektör ve $\vec{y}$ null vektör ise $\vec{x} \times \vec{y}$ spacelike vektördür.*

6) *$\vec{x}$ spacelike vektör ve $\vec{y}$ null vektör olmak üzere $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ ise $\vec{x} \times \vec{y}$ null vektör, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \neq 0$ ise $\vec{x} \times \vec{y}$ spacelike vektördür [6–8, 10].*

A.1.3 Vektörel Çarpımın Özellikleri

Teorem A.6. *$\vec{a}, \vec{a^*}, \vec{x} \in \mathbb{R}_1^3$ vektörleri olmak üzere ve $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{a^*}$ olsun. $\vec{a}$ spacelike vektör ise aşağıdaki durumlar ortaya çıkar [6–8, 10]:*

1) $sp \times sp = sp \ \ (\|\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle\| > \|\vec{x}\|\|\vec{a}\|)$,

2) $sp \times sp = tl \ \ (\|\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle\| < \|\vec{x}\|\|\vec{a}\|)$,

3) $sp \times sp = null \ \ (\|\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle\| = \|\vec{x}\|\|\vec{a}\|)$,

4) $tl \times sp = sp$,

5) $null \times sp = sp \ \ (\|\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle\| \neq 0)$,

6) $null \times sp = null \ \ (\|\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle\| = 0)$.

Teorem A.7. *$\vec{a}, \vec{a^*}, \vec{x} \in \mathbb{R}_1^3$ vektörleri olmak üzere ve $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{a^*}$ olsun. $\vec{a}$ timelike vektör ise aşağıdaki durumlar ortaya çıkar [6–8, 10]:*

1) $tl \times tl = sp$,

2) $sp \times tl = sp$,

3) $null \times tl = sp$.

Teorem A.8. *$\vec{a}, \vec{a^*}, \vec{x} \in \mathbb{R}_1^3$ vektörleri olmak üzere ve $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{a^*}$ olsun. $\vec{a}$ null vektör ise aşağıdaki durumlar ortaya çıkar [6–8, 10]:*

1) $sp \times null = null (\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0)$,

2) $sp \times null = sp (\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \neq 0)$,

3) $tl \times null = sp$,

4) $null \times null = sp$.

A.1.4 Lorentz Uzayında Diklik

Teorem A.9. *$\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında*

- *Timelike vektöre sadece spacelike vektör,*
- *Null vektöre sadece spacelike vektör,*
- *Spacelike vektöre null vektör, spacelike vektör ve timelike vektör*
- *Null vektör null vektöre yalnızca iki vektörün lineer bağımlı olma durumunda*

dik olabilir [6, 7].

B
GALİLE UZAY

B.1 Galile Uzayı

Tanım B.1. $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n), \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için $x_1 \neq 0$ ve $y_1 \neq 0$ iken

$$\begin{aligned} \langle , \rangle_{\mathbb{G}} : &\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ &(\vec{x}, \vec{y}) \to \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{G}} = x_1 y_1 \end{aligned}$$

olacak şekilde bir fonksiyon tanımlanır. Bu fonksiyona Galile iç çarpım fonksiyonu denir. Burada iç çarpım $\langle , \rangle_{\mathbb{G}}$ ile gösterilir [16].

Tanım B.2. $\langle , \rangle_{\mathbb{G}}$ Galile iç çarpım fonksiyonu ile birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına Galile uzayı adı verilir ve $\mathbb{G}^n$ ile göslerilir [16].

Tanım B.3. $\mathbb{G}^n$ Galile uzayında $\vec{x} = (0, x_2, \ldots, x_n)$ olan vektörlere izotropik vektör denir [12]. Aksi takdirde non-izotropik vektör denir.

Tanım B.4. $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ için $x_1 = 0$ ve $y_1 = 0$ iken $\vec{x} = (0, \ldots, x_n), \vec{y} = (0, \ldots, y_n)$ izotropik vektörler olup

$$\begin{aligned} \langle , \rangle_{\delta} : &\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ &(\vec{x}, \vec{y}) \to \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\delta} = x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \end{aligned}$$

olacak şekilde bir fonksiyon tanımlanır. Bu fonksiyona Galile özel iç çarpım fonksiyonu denir. Burada iç çarpım $\langle , \rangle_{\delta}$ ile gösterilir [9].

B.1.1 Galile Uzayında Metrik Özellikler

B.1.1.1 Galile Uzayında Norm

Tanım B.5. Galile uzayında $\forall \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{G}^n$ vektörünün normu $\|\vec{x}\|_{\mathbb{G}}$ ile gösterilir ve $x_1 \neq y_1$ için

$$\|\vec{x}\|_{\mathbb{G}} = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_{\mathbb{G}}} = |x_1| \tag{B.1}$$

şeklinde tanımlanır [9]. $\|\vec{x}\|_{\mathbb{G}} = 1$ ise $\vec{x}$ vektörüne birim vektör denir.

B.1.1.2 Galile Uzayında Özel Norm

Tanım B.6. $x = (0, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{G}^n$ izotropik vektörlerinin özel normu $\|\vec{x}\|_{\delta}$ ile gösterilir ve

$$\|\vec{x}\|_{\delta} = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_{\delta}} = \sqrt{(x_2)^2 + \ldots + (x_n)^2} \tag{B.2}$$

şeklinde tanımlanır [9].

B.1.1.3 Galile Uzayında İki Nokta Arasındaki Uzaklık

Tanım B.7. $X=(x_1,\dots,x_n)$ ve $Y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{G}^n$ noktaları arasındaki uzaklık d_{XY} ile gösterilir ve

$$d_{XY}=\|\overrightarrow{XY}\|_{\mathbb{G}}=\sqrt{\langle\overrightarrow{XY},\overrightarrow{XY}\rangle_{\mathbb{G}}} \tag{B.3}$$

şeklinde tanımlanır. $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OX}=(y_1-x_1,\dots y_n-x_n)$ olmak üzere işaretli uzaklık

$$d_{XY}=|y_1-x_1| \tag{B.4}$$

olarak gösterilir [9].

B.1.1.4 Galile Uzayında İki Nokta Arasındaki Özel Uzaklık

$X=(x_1,\dots,x_n)$ ve $Y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{G}^n$ noktaları arasındaki uzaklık eğer $x_1=x_2$ ise X ve Y aynı özel doğru üzerindedir. Böyle noktalara göre özel uzaklık

$$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OX}=(0,y_2-x_2,\dots,y_n-x_n) \tag{B.5}$$

olmak üzere

$$\delta_{XY}=\sqrt{\langle\overrightarrow{XY},\overrightarrow{XY}\rangle_{\delta}} \tag{B.6}$$

ile tanımlanır [9].

B.1.1.5 Galile Uzayında Diklik

Tanım B.8. Galile uzayında $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n),\vec{y}=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{G}^n$ vektörleri için

$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle_{\mathbb{G}}=0 \tag{B.7}$$

ise bu iki vektöre ortogonaldir denir. Yani iki dual vektörün dik olması için bu vektörlerden birinin izotropik olması gerekir. Bu durumda $\vec{y}$ vektörüne $\vec{x}$ vektörünün diki denir ve $\vec{y}\perp\vec{x}$ ile gösterilir [9]. Benzer şekilde $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ izotropik olmak üzere $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle_{\delta}=0$ ve $\vec{x}\perp_{\delta}\vec{y}$ ile gösterilir.

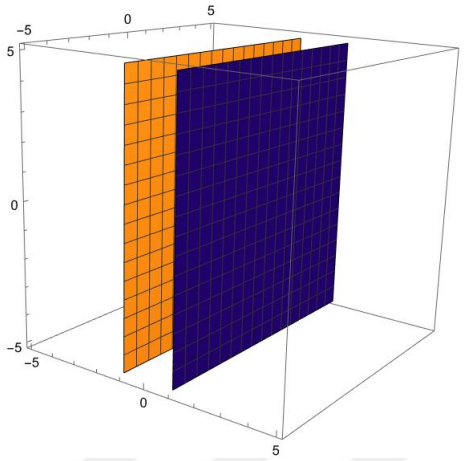
B.1.1.6 Galile Uzayında Küre

Sabit bir M noktasına uzaklıkları mutlak değerce sabit ve r olan $\vec{X}=(x,y,z)$ noktalarının kümesine küre denir ve $\mathbb{S}^2$ ile gösterilir. Burada $M=(x_0,y_0,z_0)$ noktasına kürenin merkezi ve negatif olmayan r sayısına kürenin yarıçapı denir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\mathbb{S}^2=&\{\vec{X}=(x,y,z)\in\mathbb{G}^3\ :\ \|\overrightarrow{MX}\|_{\mathbb{G}}=r\}\\ =&\{\vec{X}=(x,y,z)\in\mathbb{G}^3\ :\ |x-x_0|=r\}\end{aligned}$$

yazılabilir [13].

Bu durumda $\overrightarrow{MX} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ olmak üzere $|x-x_0| = r$ veya $x-x_0 = \pm r$, $\mathbb{G}^2$ düzleminde birbirine paralel bir çift düzlem belirtir. yani $\|\overrightarrow{MX}\|$ non-izotropik birim vektör olmak üzere $\mathbb{S}^2$ küresi birbirine paralel bir çift düzlemdir. Burada $r = 1$ ve $x_0 = 0$ için küre Galile non-izotropik birim küre olarak adlandırılır.

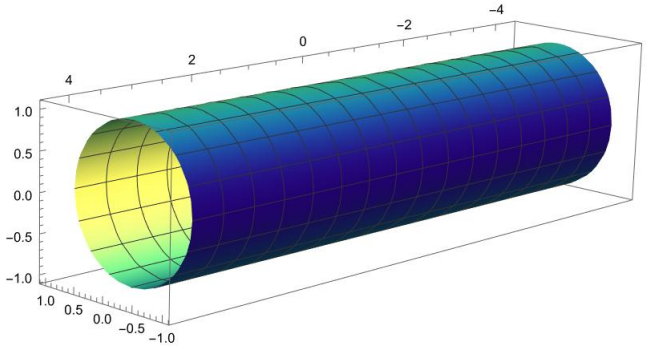


Şekil B.1 $\mathbb{G}^3$ uzayında non-izotropik birim küre

Ayrıca $\overrightarrow{MX}$ vektörlerinin her biri izotropik ve $\|\overrightarrow{MX}\|_\delta = 1$ olan vektörlerin kümesi

$$\mathbb{S}^2_\delta = \{\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{G}^3 \ : \ \|\overrightarrow{MX}\|_\delta = r\}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda (y_0, x_0) merkezli izotropik küre $(y-y_0)^2+(x-x_0)^2 = r^2$ denklemine sahiptir ve $\mathbb{G}^3$ uzayında r yarıçaplı bir silindir belirtir. yani $\|\overrightarrow{MX}\|$ izotropik birim vektör olmak üzere $\mathbb{S}^2_\delta$ küresi bir silindirdir. Burada $r = 1$ ve $M = 0$ için küre Galile izotropik birim küre olarak adlandırılır.



Şekil B.2 $\mathbb{G}^3$ uzayında izotropik birim küre

B.1.1.7 Galile Uzayında İki Birim Vektör Arasındaki Açı

Tanım B.9. Galile uzayında iki birim vektör $\vec{x} = (1, x_2, x_3)$ ve $\vec{y} = (1, y_2, y_3)$ olsun. Bu iki vektör arasındaki açının ölçüsü, fark vektörlerinin uzunluğu olarak tanımlanır ve

$$\alpha = m(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2} \tag{B.8}$$

ile hesaplanır [13].

B.1.2 Galile Uzayında Analitik Geometri

B.1.2.1 İki Noktadan Geçen Doğru Denklemi

Uzayda $A = (x_1, x_2, x_3)$ ve $B = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{G}^3$ noktalarından geçen doğru d olsun. d doğrusu üzerinde temsili bir nokta $x = (x, y, Z)$ olmak üzere d doğrusunun parametrik denklemi

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda(y_1 - x_1) \\ y &= x_2 + \lambda(y_2 - x_2) \\ Z &= x_3 + \lambda(y_3 - x_3) \end{aligned}$$

ve kartezyen denklemi

$$\frac{x - x_1}{y_1 - x_1} = \frac{y - x_2}{y_2 - x_2} = \frac{Z - x_3}{y_3 - x_3} \tag{B.9}$$

ifadesi ile verilir. Ayrıca $A = (x_1, x_2, x_3)$ noktasından geçen ve doğrultman vektörü $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ olan doğrunun kartezyen denklemi

$$\frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - x_2}{u_2} = \frac{Z - x_3}{u_3} = \lambda \tag{B.10}$$

olarak yazılır [17].

Tanım B.10. Bir d doğrusunun doğrultman vektörü $\vec{u}$ izotropik vektör ise d doğrusuna izotropik doğru denir. Eğer d doğrusunun doğrultman vektörü u izotropik vektör değil ise d doğrusuna non-izotropik doğru denir [11].

B.1.3 Galile Uzayında Lineer Cebir

B.1.3.1 İç Çarpımın Geometrik yorumu

$\vec{u}$ birim vektör ve $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ herhangi bir vektör olmak üzere $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = v_1 = \|v_1 \vec{u}\|$ yazılabilir. Dolayısıyla iki vektörün iç çarpımı, birim olmayan vektörün birim vektör üzerine Galile anlamında dik izdüşüm vektörünün boyunu verir. Burada $\vec{v} - v_1 \vec{u}$ non-izotropik vektör olup $\vec{u}$ vektörüne Galile anlamda diktir [17].

B.1.4 Galile Uzayında Vektörel Çarpım

Tanım B.11. $\mathbb{G}^3$ uzayında $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3),\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{G}^3$ için vektörel çarpım

$$\vec{x}\times_{\mathbb{G}}\vec{y}=\begin{vmatrix}0 & e_2 & e_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=(0,x_3y_1-x_1y_3,x_1y_2-x_2y_1)$$

şeklinde tanımlanır [12].

B.1.5 Galile Uzayında İzotropik Vektörlerin Özel Vektörel Çarpımı

Tanım B.12. $\mathbb{G}^3$ uzayında $\vec{x}=(0,x_2,x_3),\vec{y}=(0,y_2,y_3)\in\mathbb{G}^3$ izotropik vektörler için vektörel çarpım;

$$\vec{x}\times_{\delta}\vec{y}=\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ 0 & x_2 & x_3\\ 0 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=(x_2y_3-x_3y_2,0,0)$$

şeklinde tanımlanır [18].

B.1.5.1 Vektörel Çarpımın Özellikleri

$\vec{x}=(x_1,x_2,x_3),\vec{y}=(y_1,y_2,y_3),\vec{z}=(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{G}^3$, olmak üzere

1. $\forall\vec{x}\in\mathbb{G}^3$ için $\vec{x}\times_{\mathbb{G}}\vec{x}=\vec{0}$,
2. $\forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{G}^3$ için $\vec{x}\times_{\mathbb{G}}\vec{y}=-\vec{y}\times_{\mathbb{G}}\vec{x}$,
3. $\forall\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathbb{G}^3$ için $\vec{z}\times_{\mathbb{G}}(\vec{x}+\vec{y})=(\vec{z}\times_{\mathbb{G}}\vec{x})+(\vec{z}\times_{\mathbb{G}}\vec{y})$,
4. $\forall\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathbb{G}^3$ ve $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ için $(\vec{x}+\vec{y})\times_{\mathbb{G}}\vec{z}=(\vec{x}\times_{\mathbb{G}}\vec{z})+(\vec{y}\times_{\mathbb{G}}\vec{z})$,
5. $\forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{G}^3$ ve $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ için $\lambda\vec{x}\times_{\mathbb{G}}\vec{y}=\lambda(\vec{x}\times_{\mathbb{G}}\vec{y})=(\vec{x}\times_{\mathbb{G}}\lambda\vec{y})$,
6. $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ lineer bağımlı ise $\vec{x}\times_{\mathbb{G}}\vec{y}=\vec{0}$

olarak görülür [17].

B.1.5.2 Vektörel Çarpımın Geometrik yorumu

$\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{G}^3$ iki non-izotropik vektörü verilsin. Bu durumda Tanım (B.11) gereğince

$$\|\vec{x}\times_{\mathbb{G}}\vec{y}\|_{\delta}=\sqrt{(x_3y_1-x_1y_3)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2} \tag{B.11}$$

olup $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerini birimleştirirsek;

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\| &= \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_{\mathbb{G}}} = \sqrt{x_1^2} = |x_1|, \\ \|\vec{y}\| &= \sqrt{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{G}}} = \sqrt{y_1^2} = |y_1|\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \vec{A} = (1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}), \tag{B.12}$$

$$\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} = \vec{B} = (1, \frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}) \tag{B.13}$$

olup birim vektörler elde edilir.

$$\vec{A} = \left(1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right), \vec{B} = \left(1, \frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}\right) \tag{B.14}$$

vektörleri ve

$$\vec{A} \times_{\mathbb{G}} \vec{B} = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ 1 & \frac{x_2}{x_1} & \frac{x_3}{x_1} \\ 1 & \frac{y_2}{y_1} & \frac{y_3}{y_1} \end{vmatrix} = (0, \frac{x_3}{x_1} - \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_2}{y_1} - \frac{x_2}{x_1}) = (0, \frac{x_3 y_1 - y_3 x_1}{x_1 y_1}, \frac{y_2 x_1 - x_2 y_1}{x_1 y_1}) \tag{B.15}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\|\vec{A} \times \vec{B}\|_{\delta} &= \sqrt{\frac{(x_3 y_1 - y_3 x_1)^2}{x_1^2 y_1^2} + \frac{(y_2 x_1 - x_2 y_1)^2}{x_1^2 y_1^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(x_3 y_1 - y_3 x_1)^2 + (y_2 x_1 - x_2 y_1)^2}}{|x_1||y_1|}\end{aligned}$$

olduğu görülür. Ayrıca $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri arasındaki açının Tanım (B.9) gereğince

$$\begin{aligned}\theta &= m(\vec{A}, \vec{B}) \\ &= \sqrt{\left[\frac{y_2}{y_1} - \frac{x_2}{x_1}\right]^2 + \left[\frac{y_3}{y_1} - \frac{x_3}{x_1}\right]^2} \\ &= \sqrt{\left[\frac{(y_2 x_1 - x_2 y_1)^2}{(x_1 y_1)^2}\right] + \left[\frac{(y_3 x_1 - x_3 y_1^2}{(x_1 y_1)^2}\right]^2} \\ &= \frac{\sqrt{(x_3 y_1 - y_3 x_1)^2 + (y_2 x_1 - x_2 y_1)^2}}{|x_1||y_1|}\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$\|\vec{A} \times_{\mathbb{G}} \vec{B}\|_{\delta} = \theta$$

eşitliği ve Şekil (2.3) yardımıyla $\sin g\,\theta = \theta$ olup

$$\|\vec{A} \times_{\mathbb{G}} \vec{B}\|_{\delta} = \theta = \sin g\,\theta$$

şeklinde yazılabilir [17].

B.1.5.3 Galile Uzayında Paralelkenarın Alanı

i. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{G}^3$ non-izotropik vektörler arasındaki açı α olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} Alan =& (Taban)(yükseklik) \\ =& (\|\vec{x}\|_{\mathbb{G}})(\|\vec{y}\|_{\mathbb{G}} \sin g\,\alpha) \\ =& \|\vec{x}\|_{\mathbb{G}} \|\vec{y}\|_{\mathbb{G}} \sin g\,\alpha \\ =& \|\vec{x} \times_{\mathbb{G}} \vec{y}\|_{\delta} \end{aligned}$$

elde edilir.

ii. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{G}^3$ non-izotropik $\vec{y} = (0, y_2, y_3) \in \mathbb{G}^3$ izotropik vektörler arasındaki açı α olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} Alan =& (Taban)(yükseklik) \\ =& (\|\vec{x}\|_{\mathbb{G}})(\|\vec{y}\|_{\delta}) \\ =& \|\vec{x}\|_{\mathbb{G}} \|\vec{y}\|_{\delta} \end{aligned}$$

elde edilir.

iii. $\vec{x} = (0, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (0, y_2, y_3) \in \mathbb{G}^3$ izotropik vektörler arasındaki açı α olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} Alan =& (Taban)(yükseklik) \\ =& (\|\vec{x}\|_{\delta})(\|\vec{y}\|_{\delta} \sin \alpha) \\ =& \|\vec{x} \times_{\delta} \vec{y}\|_{\mathbb{G}} \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak, dual Galile uzayında vektörel çarpımın geometrik yorumu için iki yorum yapılabilir [17].

1) İki vektörün vektörel çarpımı bu iki vektöre dik olan yeni bi vektör oluşturur.

2) İki non-izotropik vektör tarafından kurulan paralelkenarın alanı iki vektörün vektörel çarpımının boyuna eşittir.

B.1.6 Galile Uzayında Üç Vektör Üzerine Kurulan Paralel yüzlünün Hacmi

Bilindiği gibi hacim, taban alan ile yüksekliğin çarpımı yoluyla bulunur yani

$$Hacim = (Taban\ Alan)(yükseklik)$$

ile hesaplanır. Ancak dual Galile uzayında taban alanın bulunduğu düzleme göre hesabı değişeceğinden aşağıdaki durumlar incelenmelidir:

1) $\vec{x}$ non-izotropik, $\vec{y}$ ve $\vec{z}$ izotropik olan vektörler olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} Hacim =& (Taban\ Alan)(yükseklik) \\ =& (\|\vec{y} \times_\delta \vec{z}\|)(\|\vec{x}\|_{\mathbb{G}}) \\ =& \|\vec{x}\|_{\mathbb{G}} \|\vec{y} \times_\delta \vec{z}\|_{\mathbb{G}} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

2) $\vec{z}$ ve $\vec{y}$ non-izotropik, $\vec{z}$ izotropik olan vektör olsun. Bu durumda $\vec{z}$ izotropik vektörü $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri tarafından kurulan paralelkenara diktir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} Hacim =& (Taban\ Alan)(yükseklik) \\ =& \|\vec{x} \times_{\mathbb{G}} \vec{y}\|_\delta \|\vec{z}\|_\delta \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

3) $\vec{x}$, $\vec{y}$ ve $\vec{z}$ non-izotropik vektörler olsun. Bu durumda $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri tarafından kurulan paralelkenarın alanı $\|\vec{x} \times_{\mathbb{G}} \vec{y}\|_\delta$ ile hesaplanır. Böylece

$$\begin{aligned} Hacim =& (Taban\ Alan)(yükseklik) \\ =& (\|\vec{x} \times_{\mathbb{G}} \vec{y}\|_\delta)(yükseklik) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Burada yükseklik, $\vec{z}$ vektörünün uç noktasından $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ tarafından kurulan paralelkenara olan dik uzaklık (yani $\vec{z}$ vektörünün uç noktasının $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerinin gerdiği düzleme dik uzaklığı) ile hesaplanır [17].

B.1.7 Karma Çarpım

Galile uzayında üç vektörün karma çarpımı için temelde 4 durum söz konusudur: (Burada $V(x,y,z)$ paralel yüzlünün hacmini belirtir.)

1) $\vec{x}$, $\vec{y}$ ve $\vec{z}$ izotropik vektörler olsun. yani,
$\vec{x} = (0, x_2, x_3), \vec{y} = (0, y_2, y_3)$ ve $\vec{z} = (0, z_2, z_3)$ ise

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} \times_\delta \vec{y}, \vec{z} \rangle_{\mathbb{G}} =& 0 \\ =& V(x,y,z) \end{aligned}$$

elde edilir.

2) $\vec{x}$ non-izotropik ve $\vec{y}, \vec{z}$ izotropik vektörler olsun. yani, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (0, y_2, y_3)$ ve $\vec{z} = (0, z_2, z_3)$ ise

$$\begin{aligned} |\langle \vec{y} \times_\delta \vec{z}, \vec{x} \rangle_{\mathbb{G}}| =& |x_1(z_2 y_3 - y_2 z_3)| \\ =& V(x, y, z) \end{aligned}$$

bulunur.

3) $\vec{x}$, $\vec{y}$ ve $\vec{z}$ non-izotropik vektörler olsun. yani, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ ve $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} \times_{\mathbb{G}} \vec{y}, \vec{z} \rangle_{\mathbb{G}} =& 0 \\ \neq& V(x, y, z) \end{aligned}$$

bulunur.

4. $\vec{x}$, $\vec{y}$ non-izotropik ve $\vec{z}$ izotropik olan vektörler olsun. yani, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ ve $\vec{z} = (0, z_2, z_3)$ ise

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} \times_{\mathbb{G}} \vec{y}, \vec{z} \rangle_\delta =& x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 + x_1 y_2 z_3 - x_2 y_1 z_3 \\ =& det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \\ \neq& V(x, y, z) \end{aligned}$$

elde edilir [17].

B.1.8 Üç Vektörün Vektörel Çarpımı

$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{G}^3$ non-izotropik vektörlerin vektörel çarpımı $(\vec{x} \times_{\mathbb{G}} \vec{y}) \times_{\mathbb{G}} \vec{z}$ olmak üzere

$$(\vec{x} \times_{\mathbb{G}} \vec{y}) \times_{\mathbb{G}} \vec{z} = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle_{\mathbb{G}} \vec{y} - \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle_{\mathbb{G}} \vec{x} \tag{B.16}$$

veya

$$\vec{x} \times_{\mathbb{G}} (\vec{y} \times_{\mathbb{G}} \vec{z}) = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle_{\mathbb{G}} \vec{y} - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{G}} \vec{z} \tag{B.17}$$

şeklinde tanımlanır. Dikkat edilirse $(\vec{x} \times_{\mathbb{G}} \vec{y}) \times_{\mathbb{G}} \vec{z} \neq \vec{x} \times_{\mathbb{G}} (\vec{y} \times_{\mathbb{G}} \vec{z})$ olup vektörel çarpma işleminde birleşme özelliği yoktur [17].

B.1.9 $\mathbb{G}^3$ Uzayında Plücker Koordinatları

Tanım B.13. $\mathbb{G}^3$ uzayında bir doğru, uzayın başlangıç noktasına göre üzerindeki bir M noktası ve doğrunun, $\vec{a}$ doğrultman vektörü ile birlikte tanımlanır. Burada doğrunun vektörel denklemi

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MX} \tag{B.18}$$

veya $\vec{x} = \vec{m} + \lambda \vec{a}$ şeklinde yazılabilir. Buradan $(\vec{x} - \vec{m}) \times_{\mathbb{G}} \vec{a} = \vec{0}$ yazılabilir. Böylece $\vec{a}$ yerine $\lambda \vec{a}$ alınırsa eşitlik aynı doğruyu belirtmiş olacağından $\vec{a}$ birim vektör alınabilir.

Buradan

$$\vec{x} \times_{\mathbb{G}} \vec{a} = \vec{m} \times_{\mathbb{G}} \vec{a} = \vec{a^*} \tag{B.19}$$

elde edilir. $\vec{a^*}$ vektörüne $\vec{a}$ birim vektörünün başlangıç noktasına göre vektörel momenti denir. Şimdi $\vec{a^*}$ vektörünün geometrik özelliklerini verelim:

1) $\vec{a^*}$ vektörü doğru üzerindeki noktanın seçilişinden bağımsızdır: Doğru üzerinde x noktasından başka bir y noktası alınırsa $(\vec{y} - \vec{m}) \times_{\mathbb{G}} \vec{a} = \vec{0}$ yazılabilir. Bundan dolayı $\vec{y} \times_{\mathbb{G}} \vec{a} = \vec{x} \times_{\mathbb{G}} \vec{a} = \vec{m} \times_{\mathbb{G}} \vec{a} = \vec{a^*}$ elde edilir.

2) $\vec{a}$ ve $\vec{a^*}$ vektörleri birbirlerine diktir. (B.16) gereğince
$(\vec{a} \perp \vec{a^*}) : \langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{m} \times_{\mathbb{G}} \vec{a} \rangle = \det(\vec{a}, \vec{m}, \vec{a}) = 0$ elde edilir.

3) (B.16) gereğince $\vec{a} \times_{\mathbb{G}} \vec{a^*} = \vec{a} \times_{\mathbb{G}} (\vec{z} \times_{\mathbb{G}} \vec{a}) = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \vec{z} - \langle \vec{z}, \vec{a} \rangle = \vec{z}$ elde edilir.

3) $\vec{a^*}$ vektörünün boyu başlangıç noktasının doğruya olan uzaklığına eşittir: $\vec{a^*}$ vektörü doğru üzerinde seçilen bir x noktasından bağımsız olduğundan dolayı Z noktası başlangıç noktasından doğruya inilen dikmenin ayağı olup
$\vec{z} \times_{\mathbb{G}} \vec{a} = \vec{y} \times_{\mathbb{G}} \vec{a} = \vec{x} \times_{\mathbb{G}} \vec{a} = \vec{m} \times_{\mathbb{G}} \vec{a} = \vec{a^*}$ şeklinde yazılır. Böylece $\vec{z} = \vec{a} \times_{\mathbb{G}} \vec{a^*}$ olup $\vec{z} \perp \vec{a}$ elde edildiği görülür. Buradan α için iki vektörün arasındaki açı olup;

- $\vec{z}, \vec{a}$ non-izotropik vektör ise
  $\|\vec{a^*}\| = \|\vec{z} \times_{\mathbb{G}} \vec{a}\|_\delta = \|\vec{z}\|_{\mathbb{G}} \|\vec{a}\|_{\mathbb{G}} \sin g\alpha = \|\vec{z}\|_{\mathbb{G}} \sin g\alpha,$
- $\vec{z}$ non-izotropik, $\vec{a}$ izotropik vektör ise $\|\vec{a^*}\| = \|\vec{z} \times_{\mathbb{G}} \vec{a}\|_\delta = \|\vec{z}\|_{\mathbb{G}} \|\vec{a}\|_\delta = \|\vec{z}\|_{\mathbb{G}},$
- $\vec{z}, \vec{a}$ izotropik vektör ise $\|\vec{a^*}\| = \|\vec{z} \times_\delta \vec{a}\|_{\mathbb{G}} = \|\vec{z}\|_\delta \|\vec{a}\|_\delta \sin\alpha = \|\vec{z}\|_\delta \sin\alpha$

elde edilir.

O halde özetle;

1) M noktasından geçen ve $\vec{a}$ doğrultmanı verilmiş olan d doğrusu verilip
$\vec{a^*} = \vec{m} \times_{\mathbb{G}} \vec{a}$ ile $\vec{a^*}$ vektörü bulunabilir.

2) $\vec{a}$ birim vektörü ve $\vec{a}$ nın başlangıç noktasına göre vektörel momenti olan $\vec{a^*}$ vektörü verilsin. Buradan $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1$ ve $\langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle = 0$ olsun. $\vec{a}$ vektörünü doğrunun doğrultman vektörü olarak kabul edildiğinde $\vec{z} = \vec{a} \times_{\mathbb{G}} \vec{a^*}$ yardımıyla doğru üzerindeki bir Z noktasının başlangıç noktasına göre $\vec{z}$ konum vektörü bulunmuş olur. Böylece Z noktasından geçen ve $\vec{a}$ doğrultman vektörlü bir doğru elde edilir.

Tanım B.14. $(\vec{a}, \vec{a^*})$ vektör çifti $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 1$, $\langle \vec{a}, \vec{a^*} \rangle = 0$ özelliklerine sahip bu vektör çifti, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir doğru belirtir. Buradan $\mathbb{R}^3$ uzyaındaki doğrular ile $(\vec{a}, \vec{a^*})$ vektör çifti eşleşir. $\mathbb{R}^3$ uzayındaki standart baz vektörleri $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ olup $\vec{a}, \vec{a^*} \in \mathbb{R}^3$ vektörleri için $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$ ve $\vec{a^*} = a_1^*\vec{e_1} + a_2^*\vec{e_2} + a_3^*\vec{e_3}$, $a_i, a_i^* \in \mathbb{R}$ şeklinde yazılabilir. Böylece $(\vec{a}, \vec{a^*})$ vektör çifti veya doğrusu

$$(\vec{a}, \vec{a^*}) = (a_1, a_2, a_3, a_1^*, a_2^*, a_3^*) \tag{B.20}$$

sıralı 6-lı şeklinde yazılıp, normlanmış homojen olmayan Plücker koordinatları denir.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirisi

1. Yüce, S., Kolay, M. "Inner Products on Dual Numbers." 2nd International Congress on Scientific Advances, ss. 746-747, 2022.