T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞMELİ YARI HALKALARDA 2 YUTAN BULANIK İDEALLER

Rabia AYAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Doç. Dr. Erdoğan Mehmet Özkan

Temmuz, 2023

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞMELİ YARI HALKALARDA 2 YUTAN BULANIK İDEALLER

Rabia AYAN tarafından hazırlanan tez çalışması 24.07.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Erdoğan Mehmet Özkan
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Erdoğan Mehmet Özkan , Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Ünsal TEKİR, Üye
Marmara Üniversitesi _____

Dr. Ögr. Üyesi Serkan ONAR, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Danışmanım Doç. Dr. Erdoğan Mehmet Özkan sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Değişmeli Yarı Halkalarda 2 Yutan Bulanık İdealler başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Rabia AYAN

Bu çalışma, “Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Proje Koordinatörlüğü’nün FYL-2022-5040” numaralı projesi ile desteklenmiştir.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren, tez çalışmam süresince ilgisini ve yardımını eksik etmeyen danışman hocam Doç. Dr. Erdoğan Mehmet Özkan'a ve bu çalışma boyunca her soruma sabırla cevap veren hocam Dr. Öğretim Üyesi Serkan Onar'a teşekkür ederim. Ayrıca lisans ve lisansüstü eğitimim boyunca birlikte yol aldığım arkadaşım İlayda Kaplan'a ve her zaman beni koşulsuz destekleyen anneme ve kardeşime teşekkür ederim.

Tezimin gerçekleşmesinde 2210 numaralı Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı ile maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Rabia AYAN

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ vi

ŞEKİL LİSTESİ viii

ÖZET ix

ABSTRACT xi

1 GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1

1.2 Temel Kavramlar 2

2 DEĞİŞMELİ YARI HALKALARDA 2 YUTAN SEZGİSEL BULANIK İDEALLER 8

3 DEĞİŞMELİ YARI HALKALARDA 2 YUTAN BELİRSİZ İDEALLER 16

4 DEĞİŞMELİ YARI HALKALARDA 2 YUTAN BİPOLAR BULANIK İDEALLER 24

5 SONUÇ 32

KAYNAKÇA 33

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR 35

SİMGE LİSTESİ

χ_A	A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$\subseteq$	Alt küme
$\exists$	Bazı
$\langle \mu_D^+, \mu_D^- \rangle$	Bipolar bulanık küme
$\geq$	Büyük eşittir
$>$	Büyüktür
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$\forall$	Her, bütün
$\supseteq$	İçerir
$\sqrt{J}$	İdeal J için radikal
$J^{(\gamma,\delta)}$	İdeal J için (γ, δ)-seviye alt kümesi
$\Rightarrow$	İse, gerektirir
$J_{(\gamma,\delta)}$	J kümesinin (γ, δ)-kesimi
$\rho(J)$	J nin ρ altındaki görüntüsü
$\rho^{-1}(J)$	J nin ρ altındaki ters görüntüsü
$J \times K$	J ve K kümeleri için kartezyen çarpım
$J = \langle \Phi, \Psi \rangle$	J sezgisel bulanık ideali
$<$	Küçüktür
$\leq$	Küçük eşittir
$\cap$	Kümelerin kesişimi
$\max$	Maksimum
$\min$	Minimum

$\wedge$	Minimum veya infimum
$\vee$	Supremum veya maksimum
Z	Tam sayılar halkası
t_V	V kümesinin doğru üyelik fonksiyonu
f_V	V kümesinin yanlış üyelik fonsiyonu
V	$V =< t_V, 1 - f_V >$, V nin belirsiz kümesi

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 2-Yutan Sezgisel Bulanık İdealler 15
Şekil 4.1 2-Yutan Bipolar Bulanık İdealler 31

ÖZET

Değişmeli Yarı Halkalarda 2 Yutan Bulanık İdealler

Rabia AYAN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Erdoğan Mehmet Özkan

Bulanık kümeler teorisi Lotfı A. Zadeh tarafından geliştirilmiştir.Bulanık kümeler, klasik kümelerden farklı olarak küme elemanlarının kısmi üyeliğine olanak sağlamaktadır.Üyelik derecesi 0 ve 1 gibi keskin değerler yerine, $[0,1]$ kapalı aralığında bir değere sahip olabilir.Bu da gerçek hayattaki belirsizliği anlamlandırmada büyük bir olanak sağlar.Bulanık küme kavramı ile farklı alanlarda karşılaşabiliriz.Yapay zeka, sistem analizi, karar analizi, nümerik analiz, optimizasyon problemlerinin çözümünde, veri işleme, mühendislik, tıbbi teşhiste, astronomi, matematik, biyoloji, kimya, sosyoloji ve ekonomi gibi alanlarda karşımıza çıkabilmektedir.Yıllar boyunca gerçekliğe, klasik kümelerden daha yakın sonuçlar çıkarması dolayısıyla dikkat çekici bir konu olmuştur. Bulanık kümeler üzerine bir çok bilim insanı çeşitli çalışmalar ve geliştirmeler yapmıştır.Bu çalışmalardan bazıları bulanık kümelerin uzantısı olan sezgisel bulanık kümeler, belirsiz kümeler ve bipolar bulanık kümeler üzerinedir.

Bu tezde de bahsi geçen kümeler ve 2-yutan ideallerden faydalanılarak klasik cebirdeki tanımlar, teoremler baz alınıp 2-yutan sezgisel bulanık idealler, 2-yutan belirsiz idealler ve 2 yutan bipolar bulanık idealler değişmeli yarı halkalar üzerinde incelenmiştir.Birinci bölümde, literatür özeti ile tezde kullanılan gerekli temel tanım ve teoremler verilmiştir.İkinci bölümde, değişmeli yarı halkalar üzerinde 2-Yutan Sezgisel Bulanık İdealler teorik bir bakış açısıyla incelendi.Üçüncü bölümde, değişmeli yarı halkalar üzerinde 2-Yutan Belirsiz İdeallerin özellikleri teoremler ve örneklerle açıklanmıştır. Dördüncü bölümde ise 2-Yutan Bipolar Bulanık İdealler üzerinde çalışılmış ve örneklerle incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: 2-yutan, 2-yutan sezgisel bulanık idealler, 2-yutan belirsiz idealler, 2-yutan bipolar bulanık idealler

ABSTRACT

On 2 Absorbing Fuzzy Ideals of Commutative Semirings

Rabia AYAN

Department of Mathematics
Master of Science Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Erdoğan Mehmet Özkan

Fuzzy set theory was developed by Lotfi A. Zadeh. Fuzzy sets, unlike classical sets, allow partial membership of set elements. Membership degree can have a value in the closed range of $[0, 1]$ instead of sharp values like 0 and 1. This provides a great opportunity to make sense of uncertainty in real life. We can encounter the concept of fuzzy set in different fields. It can be encountered in fields such as artificial intelligence, systems analysis, decision analysis, numerical analysis, solution of optimization problems, data processing, engineering, medical diagnosis, astronomy, mathematics, biology, chemistry, sociology and economics. Over the years, it has been a remarkable subject as it draws conclusions closer to reality than classical sets. Many scientists have made various studies and developments on fuzzy sets. Some of these studies are on intuitive fuzzy sets, indeterminate sets and bipolar fuzzy sets, which are extensions of fuzzy sets.

In this thesis, using the aforementioned sets and 2-absorbing ideals, definitions in classical algebra, based on theorems, 2-absorbing intuitionistic fuzzy ideals, 2-absorbing vague ideals and 2-absorbing bipolar fuzzy ideals are examined on commutative semirings.This thesis consists of four parts. In the first chapter, necessary basic definitions and theorems used in the thesis are given. In the second part, 2-Absorbing Intuitionistic Fuzzy Ideals of Commutative Semirings are examined from a theoretical perspective. In the third chapter, 2-Absorbing Vague Ideals of Commutative Semirings are explained with theorems and examples. In the fourth chapter, 2-Absorbing Bipolar Fuzzy Ideals are studied and examined with examples.

Keywords: 2-absorbing, 2-absorbing intuitionistic fuzzy ideals, 2-absorbing vague ideals, 2-absorbing bipolar fuzzy ideals

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Her bir elemanın üyelik derecesini sıfır ile bir arasında tek bir değer olarak veren bir üyelik fonksiyonu ile tanımlanan bulanık alt küme kavramı ilk olarak 1965 yılında, Zadeh tarafından ortaya konulmuştur [1]. Daha sonraları bu kavram farklı matematik dallarında kullanılmıştır.Bu dallardan biri de cebirdir. 1971 yılında Rosenfeld cebirsel yapılar üzerine bulanık kümeleri uygulamıştır [2]. Ayrıca Liu bir halkanın bulanık ideal kavramı üzerine çalışmıştır [3]. Mukherjee and Sen de asal bulanık idealleri tanımlamışlardır [4].

Atanassov tarafından bulanık kümelerin genelleştirilmesi, elemanın üyelik ve üyelik olmama derecesi ile tanımlanan sezgisel bulanık kümeler olarak sunulmuştur [5]. Ek olarak, Hur ve arkadaşları, sezgisel bulanık alt halka kavramına odaklanmıştır ve ardından çeşitli yazarlar sezgisel bulanık alt halka kavramını genelleştirmeye çalışmışlardır [6]. Marashdeh ve arkadaşları, sezgisel bulanık halka kavramına bağlı olarak bulanık uzay kavramını açıklamıştır [7]. Sezgisel bulanık alt halkaların çevirileri Sharma tarafından açıklanmıştır[8].

Gerçek dünyada çeşitli belirsizlikler vardır ancak bunları modellemek için klasik matematiksel araçlar uygun değildir.Belirsiz küme teorisi de bu belirsizlikleri modellemek için matematiksel bir araç olarak düşünülebilir.Matematikte belirsiz kümeler, bulanık kümelerin bir uzantısıdır.Gau ve ark. her nesnenin iki farklı üyelik fonksiyonu ile karakterize edildiği belirsiz kümeler kavramını önermiştir.Bu fonksiyonlar; gerçek üyelik fonksiyonu ve yanlış üyelik fonksiyonu olarak isimlendirilmektedir[9].

Zhang, Zadeh [1] tarafından tanımlanan bulanık kümelerin bir genellemesi olan bipolar bulanık kümeler fikrini geliştirdi [10].Bipoar bulanık kümeler üyelik derecesi aralığı $[-1, 1]$ olan kümelerdir. Bu kümeler pozitif ve negatif olmak üzere iki farklı kutuptan oluşmaktadır. Pozitif bilgi bize mümkün görüneni sunarken,

negatif bilgi ise imkansız olduğu düşünülen şeyi vermektedir.

2-yutan idealler ise ilk defa Badavi tarafından asal ideallerin bir genellemesi olarak sunulmuştur[11]. Ek olarak Badavi ve arkadaşları n-yutan idealler ile 2-yutan asalımsı idealleri incelemişlerdir. Bir çok araştırmacı 2-yutan idealler üzerine çalışmakta ve gün geçtikçe farklı sonuçlar elde edilmektedir. Ayrıca Darani [12] L- bulanık 2- yutan idealleri tanımlamış ve ardından Hashempoor ile birlikte [13] L- bulanık 2- yutan idealleri yarı halkalar üzerinde incelemiştir.

1.2 Temel Kavramlar

Bu kısımda tez içerisinde kullanılan temel kavramlardan bahsedilecektir.

Tanım 1.1. $(\Im, +., 0, 1)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomlar ile bir yarı halkadır.

i) $(\Im, +, 0)$ değişmeli monoid,

ii) $(\Im, ., 1)$ monoid ($1 \neq 0$,),

iii) $\forall r, s, t \in \Im$, için $r(s+t) = rs + rt$ ve $(s+t)r = sr + tr$,

iv) $\forall r \in \Im$ için $r.0 = 0.r$.

Tanım 1.2. $\Im$ yarı halkasının alt kümesi $\Re$, 0 ile 1 içeriyorsa ve $\Im$ de toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalı ise $\Re$, $\Im$ nin bir alt yarı halkasıdır [14].

Örnek 1.1. $\Im$ yarı halka olmak üzere $P(\Im) = \{0\} \cup \{s+1 : s \in \Im\}$ alt yarı halkadır [14].

Tanım 1.3. $\Im$ bir yarı halka olsun. $\Im$ nin boştan farklı alt kümesi J ve $J \neq \Im$ olmak üzere eğer $\forall r, s \in J$ ve $p \in \Im$ için $r + s \in J, pr \in J$ sağlanıyorsa, J ya $\Im$ nin sol ideali denir [14].

Teorem 1.1. *$\Im$ yarı halkasının ideali J olmak üzere aşağıdaki koşullar denktir:*

i) J asaldır;

ii) $\{rps : p \in \Im\} \subseteq J$ gerek ve yeter şart $r \in J$ ya da $s \in J$;

iii) $r, s \in \Im$ olmak üzere eğer $(r)(s) \subseteq J$ sağlanıyorsa ya $r \in J$ ya da $s \in J$ dir [14] .

Sonuç 1.1. *$\Im$ değişmeli yarı halkasının ideali J nın asal olması için gerek ve yeter şart $\forall r, s \in \Im$ için $rs \in J$ iken $r \in J$ ya da $s \in J$ olmasıdır [14].*

Teorem 1.2. *Eğer $\Im$ değişmeli yarı halkasının ideali J ise $\sqrt{J}$ de $\Im$ nin asal idealidir [14] .*

$\Im$ yarı halkası değişmeli ise her $r, s \in \Im$ için $rs = sr$ dır. Bu tezde her yarı halka değişmelidir.

Tanım 1.4. $\Im$ değişmeli yarı halka olsun. $\Im$ nin bir öz ideali J olmak üzere eğer $r, s, t \in \Im$ için $rst \in J$ iken $rs \in J$ ya da $rt \in J$ ya da $st \in J$ ise J idealine 2-yutan ideal denir [11].

Tanım 1.5. $\Im$ nin bir öz ideali J olmak üzere eğer $r, s, t \in \Im$ için $rst \in J$ iken $rs \in J$ ya da $rt \in \sqrt{J}$ ya da $st \in \sqrt{J}$ ise J idealine 2-yutan asalımsı ideal denir [15].

Teorem 1.3. *J, $\Im$ nin 2-yutan asalımsı ideali ise J ideali $\Im$ nin 2-yutan idealidir [15].*

Teorem 1.4. *$\Im$ yarı halkasının sıfırdan farklı öz idealinin J olduğunu varsayalım. O halde aşağıdaki koşullar denktir:*

i) J ideali $\Im$ nin 2-yutan idealidir.

ii) $\Im$ nin bazı J_1, J_2, J_3 idealleri için $J_1J_2J_3 \subseteq J$ ise $J_1J_2 \subseteq J$ ya da $J_1J_3 \subseteq J$ ya da $J_2J_3 \subseteq J$ dır [11].

Örnek 1.2. Z de ideal $\Omega = (45)$ olsun. $3.3.5 \in \Omega$ iken $3.3 \notin \Omega$ ve $3.5 \notin \Omega$ dir. Yani Ω 2-yutan ideal değildir. Diğer yandan Ω nın 2-yutan asalımsı ideal olduğu açıktır. Öyle ki değişmeli yarı halkanın her asalımsı ideali 2-yutan asalımsı idealdir. Fakat bunun tersi doğru olmayabilir. Örneğin (15), Z nin 2-yutan asalımsı ideali iken asalımsı ideali değildir.

Tanım 1.6. X kümesinde Φ bir bulanık alt küme ve $\Phi : X \to [0, 1]$ şeklinde tanımlı bir dönüşümdür [12].

Tanım 1.7. X boştan farklı bir küme olmak üzere, X in bulanık sezgisel kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$A = \{\langle r, \Phi(r), \Psi(r)\rangle \,|r \in X\}$$

Burada $\Phi : X \to [0, 1]$ ve $\Psi : X \to [0, 1]$ fonksiyonları her $r \in X$ için sırasıyla üyelik derecesi ve üyelik olmama derecesidir. Burada her $r \in X$ için
$0 \leq \Phi(r) + \Psi(r) \leq 1$ sağlanmalıdır [16].

Tanım 1.8. X boştan farklı bir küme ve $D = \langle \Phi_D, \Psi_D \rangle$ ile $F = \langle \Phi_F, \Psi_F \rangle$, X'de sezgisel bulanık kümeler olsun.O halde,

i) $D \subset F \iff \Phi_D \leq \Phi_F$ ve $\Psi_D \geq \Psi_F$,

ii) $D = F \iff D \subset F$ ve $F \subset D$,

iii) $D^c = \langle \Psi_D, \Phi_D \rangle$,

iv) $D \cap F = (\Phi_D \wedge \Phi_F, \Psi_D \vee \Psi_F)$,

v) $D \cup F = (\Phi_D \vee \Phi_F, \Psi_D \wedge \Psi_F)$

dir [5].

Tanım 1.9. X kümesinin bulanık sezgisel kümesi J olsun. $\gamma, \delta \in [0,1]$ ve $\gamma + \delta \leq 1$ için J nin (γ, δ) seviye alt kümesi:

$$J_{(\gamma,\delta)} = \{r \in X \mid \Phi_J(r) \geq \gamma \text{ ve } \Psi_J(r) \leq \delta\}$$

olarak tanımlanır [17].

Tanım 1.10. $\Im$ bir yarı halka olsun. $\forall r, s \in \Im$ için

$$D = \{\langle r, \Phi(r), \Psi(r) \rangle \, | r \in \Im\}$$

bulanık sezgisel kümesi aşağıdaki şartları sağlar ise $\Im$ nin sezgisel bulanık idealidir [16].

1. $\Phi(r+s) \geq \Phi(r) \wedge \Phi(s)$,
2. $\Psi(r+s) \leq \Psi(r) \vee \Psi(s)$,
3. $\Phi(rs) \geq \Phi(r) \vee \Phi(s)$,
4. $\Psi(rs) \leq \Psi(r) \wedge \Psi(s)$.

Tanım 1.11. $\Im$ nin bulanık sezgisel ideali $J = \langle \Phi_J, \Psi_J \rangle$ olsun. J nın radikali $\sqrt{J}(r) = \vee_{n \geq 1} J(r^n)$ şeklinde tanımlanır [18].

Teorem 1.5. *$\Im$ nin bulanık sezgisel idealleri J ve K olsun.O halde,*

$$\sqrt{J \cap K} = \sqrt{J} \cap \sqrt{K}$$

dir [19].

Teorem 1.6. *Let $\rho : \Im \to S$ morfizma ve $\Im$ nin sezgisel bulanık ideali J çekρ üzerinde sabit ve S nin sezgisel bulanık ideali K olsun. Buradan aşağıdaki durumlar elde edilir:*

$i)$ $\sqrt{\rho(J)} = \rho(\sqrt{J})$,

$ii)$ $\sqrt{\rho^{-1}(K)} = \rho^{-1}(\sqrt{K})$ *[20].*

Tanım 1.12. $\Im$ nin bulanık sezgisel ideali $J = \langle \Phi_J, \Psi_J \rangle$ olsun. $\Im$ nin $D = \langle \Phi_D, \Psi_D \rangle$ ve $F = \langle \Phi_F, \Psi_F \rangle$ sezgisel bulanık idealleri için eğer $DF \subset J$ iken $D \subset J$ ya da $F \subset J$ oluyorsa, J idealine bulanık sezgisel asal ideal denir [12] .

Tanım 1.13. $\Im$ yarı halkasının bir bulanık ideali J olsun. Her $r, s \in \Im$ ve $n \in Z^+$ olmak üzere

$$\Phi_J(rs) = \Phi_J(r) \; ve \; \Psi_J(rs) = \Psi_J(r)$$

ya da

$$\Phi_J(rs) \leq \Phi_J(s^n) \; ve \; \Psi_J(rs) \geq \Psi_J(s^n)$$

ise J idealine sezgisel bulanık asalımsı ideal denir [21].

Tanım 1.14. U söylem evreni ve D $\subseteq$ U olsun. Bir D belirsiz kümesi (t_D, f_D) ikilisi ile tanımlanır. Burada $t_D : U \to [0, 1]$ ve $f_D : U \to [0, 1]$ fonksiyonlarına her $x \in U$ için sırasıyla doğru ve yanlış üyelik fonksiyonları denir ve her $x \in U$ için $t_D(u) + f_D(u) \leq 1$ sağlanmalıdır [9].

Tanım 1.15. A bir belirsiz küme ve $u \in D$ olsun. D kümesinde u nun belirsizlik değeri $[t_D, 1 - f_D]$ aralığındadır ve $V_D(u)$ ile gösterilir.Yani $V_D(u) = [t_D, 1 - f_D]$ dır [9].

Tanım 1.16. U söylem evreninde D ve F iki belirsiz küme olsun. $D \subseteq F$ olması için gerek ve yeter şart $V_D(u) \leq V_F(u)$ yani $\forall u \in U$ için $t_D(u) \leq t_F(u)$ ve $1 - f_D(u) \leq 1 - f_F(u)$ olmasıdır [9].

Tanım 1.17. D ve F iki belirsiz küme olmak üzere $D = F$ olması için gerek ve yeter şart $D \subseteq F$ ve $D \supseteq F$ yani $\forall u \in U$ için $V_D(u) \leq V_F(u)$ ve $V_D(u) \geq V_F(u)$ dır. ($t_D(u) = t_F(u)$ ve $1 - f_D(u) = 1 - f_F(u)$)[9].

Tanım 1.18. D ve F iki belirsiz küme olsun. Bu iki kümenin birleşimi C belirsiz kümesi, $E = D \cup F$ şeklinde gösterilir. $t_E = max\{t_D, t_F\}$ ve $1 - f_E = max\{1 - f_D, 1 - f_F\} = 1 - min\{f_D, f_F\}$ olarak tanımlanır [9].

Tanım 1.19. D ve F iki belirsiz küme olsun. Bu iki kümenin kesişimi C belirsiz kümesi, $E = D \cap F$ şeklinde gösterilir. $t_E = min\{t_D, t_F\}$ ve $1 - f_E = min\{1 - f_D, 1 - f_F\} = 1 - max\{f_D, f_F\}$ olarak tanımlanır [9].

Tanım 1.20. D, U evreninin belirsiz bir kümesi olsun. Eğer $\forall u \in U$ için $t_D(u) = 0$ ve $f_D(u) = 1$ ise D, U evreninin sıfır belirsiz kümesidir. Eğer $\forall u \in U$ için $t_D(u) = 1$ ve $f_D(u) = 0$ ise D, U evreninin birim belirsiz kümesidir [9].

Tanım 1.21. D, U evreninin belirsiz bir kümesi olsun. $\gamma \leq \delta$ olmak üzere $\gamma, \delta \in [0, 1]$ için belirsiz bir D kümesinin (γ, δ)-kesimi veya belirsiz kesimi, U'nun kesin alt kümesidir ve şu şekilde tanımlanır:

$$D_{(\gamma,\delta)} = \{x \in U \mid V_D(x) \geq [\gamma, \delta]\}$$

yani

$$D_{(\gamma,\delta)} = \{x \in U \mid t_D(x) \geq \gamma \text{ ve } 1 - f_D(x) \geq \delta\}.$$

dır [9].

Tanım 1.22. D nın belirsiz kümesinin γ-kesimi, D_γ ile gösterilir. D nın (γ, γ)-kesimidir ve

$$D_\alpha = \{x \in U \mid t_D(x) \geq \alpha\}.$$

şeklinde tanımlanır [9].

Tanım 1.23. $(\Im, +, .)$ bir yarı halka olsun.$\Im$ nin bir belirsiz kümesi X için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa X, $\Im$ nin sol(sağ) belirsiz idealidir [22].

$\forall r, s \in \Im$ için $V_X(r+s) \geq \min\{V_X(r), V_X(s)\}$ ve $V_X(rs) \geq V_X(s)$ $(V_X(rs) \geq V_X(r))$ yani,

i) $t_X(r+s) \geq \min\{t_X(r), f_X(s)\}$,

$1 - f_X(r+s) \geq \min\{1 - f_X(r), 1 - f_X(s)\}$;

ii) $t_X(rs) \geq t_X(s)$ $(t_X(rs) \geq t_X(r))$

$1 - f_X(rs) \geq 1 - f_X(s)$ $(1 - f_X(rs) \geq 1 - f_X(r))$.

Sonuç 1.2. *Sıfır belirsiz küme ve birimli belirsiz kümenin S nin sol(sağ) belirsiz ideali olduğu açıktır [22].*

Teorem 1.7. *Eğer D ve F idealleri $\Im$ yarı halkasının iki sol(sağ) belirsiz ideali ise $D \cap F$ de $\Im$ nin bir sol(sağ) belirsiz idealidir [22].*

Teorem 1.8. *D, $\Im$ değişmeli yarı halkasının bir sol(sağ) belirsiz ideali olsun. $\forall \gamma, \delta \in [0, 1]$ için (γ, δ)-kesimi olmak üzere $D_{(\gamma,\delta)}$, $\Im$ nin sol(sağ) idealidir [22].*

Sonuç 1.3. *D, $\Im$ değişmeli yarı halkasının bir sol(sağ) belirsiz ideali olsun. $\forall \gamma \in [0, 1]$ için γ-kesimi olmak üzere D_γ, $\Im$ nin sol(sağ) idealidir [22].*

Tanım 1.24. X boştan farklı bir küme olmak üzere, bipolar bulanık küme aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$D = \{\langle r, \mu^+(r), \mu^-(r)\rangle \,|r \in X\}$$

Burada $\mu^+ : X \to [0,1]$ ve $\mu^- : X \to [-1,0]$ fonksiyonları her $r \in X$ için sırasıyla üyelik derecesi ve üyelik olmama derecesidir. Burada her $r \in X$ için $0 \leq \mu^+(r) - \mu^-(r) \leq 1$ sağlanmalıdır [23].

Tanım 1.25. X boştan farklı bir küme ve $D = \langle \mu_D^+, \mu_D^-\rangle$ ile $F = \langle \mu_F^+, \mu_F^-\rangle$, X'de bipolar bulanık kümeler olsun.O halde,

1. $D \subset F \iff \mu_D^+ \leq \mu_F^+$ ve $\mu_D^- \geq \mu_F^-$,
2. $D = F \iff D \subset F$ ve $F \subset D$,
3. $D^c = \langle \mu_D^-, \mu_D^+\rangle$
4. $D \cap F = (\mu_D^+ \wedge \mu_F^+, \mu_D^- \vee \mu_F^-)$,
5. $D \cup F = (\mu_D^+ \vee \mu_F^+, \mu_D^- \wedge \mu_F^-)$ [23].

Tanım 1.26. X kümesinin bipolar bulanık kümesi $\mu = (\mu^+, \mu^-)$ olsun. $(\gamma, \delta) \in [0,1] \times [-1,0]$ için μ nün (γ, δ) seviye alt kümesi:

$$\mu_{(\gamma,\delta)} = \{r \in X \mid \mu^+(r) \geq \gamma \text{ ve } \mu^-(r) \leq \delta\}$$

olarak tanımlanır [24].

Tanım 1.27. $\Im$ bir yarı halka olsun. $\forall r, s \in \Im$ için

$$D = \{\langle r, \mu^+(r), \mu^-(r)\rangle \,|r \in \Im\}$$

bipolar bulanık kümesi verilen şartları sağlıyor ise $\Im$ nin bipolar bulanık idealidir [24].

1. $\mu^+(r+s) \geq \mu^+(r) \wedge \mu^+(s)$,
2. $\mu^-(r+s) \leq \mu^-(r) \vee \mu^-(s)$,
3. $\mu^+(rs) \geq \mu^+(r) \vee \mu^+(s)$,
4. $\mu^-(rs) \leq \mu^-(r) \wedge \mu^-(s)$.

Tanım 1.28. $\Im$ nin bipolar bulanık ideali $\mu = \langle \mu^+, \mu^-\rangle$ olsun. μ nün radikali $\sqrt{\mu}(r) = \vee_{n\geq 1}\mu(r^n)$ şeklinde tanımlanır ve $\sqrt{\mu}$ olarak gösterilir [24].

2
DEĞİŞMELİ YARI HALKALARDA 2 YUTAN SEZGİSEL BULANIK İDEALLER

Tanım 2.1. $\Im$ yarı halka ve J sezgisel bulanık küme olsun.$\Im$ yarı halkasının J sezgisel bulanık idealine her $r, s, t \in \Im$ ve $\gamma, \delta \in [0, 1]$ için

$$\Phi(rst) \geq \gamma \text{ iken } \Phi(rs) \geq \gamma \text{ ya da } \Phi(st) \geq \gamma \text{ ya da } \Phi(rt) \geq \gamma, \tag{2.1}$$

$$\Psi(rst) \leq \delta \text{ iken } \Psi(rs) \leq \delta \text{ ya da } \Psi(st) \leq \delta \text{ ya da } \Psi(rt) \leq \delta, \tag{2.2}$$

ise 2-yutan sezgisel bulanık ideal denir.

Örnek 2.1. $\Im = \{0, d, f, h, g\}$ kümesinde toplama $+$ ve çarpma $\cdot$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

+	0	d	f	h	g
0	0	d	f	h	g
d	d	f	h	g	0
f	f	h	g	0	d
h	h	g	0	d	f
g	g	0	d	f	h

·	0	d	f	h	g
0	0	0	0	0	0
d	0	d	f	h	g
f	0	f	g	d	h
h	0	h	d	g	f
g	0	g	h	f	d

Bu işleme göre $(\Im, +, \cdot)$ bir değişmeli yarı halkadır.

$\Omega = (1, 0)/0 + (0.4, 0.3)/d + (0.5, 0.7)/f + (0.2, 0.8)/h + (0.3, 0.5)/g$ değerleri ile $\Im$ de $\Omega =< \Phi, \Psi >$ sezgisel bulanık ideali tanımlansın. $\Omega =< \Phi, \Psi >$, $\Im$ değişmeli yarı halkasının 2-yutan sezgisel bulanık idealidir.

Tanım 2.2. $J =< \Phi, \Psi >$ ideali $\Im$ yarı halkasının sezgisel bulanık ideali olsun. $\forall r, s, t \in \Im$ ve $\gamma, \delta \in [0, 1]$ için

$$\Phi(rst) \geq \gamma \; iken \; \Phi(rs) \geq \gamma \; ya \; da \; \sqrt{\Phi}(st) \geq \gamma \; ya \; da \; \sqrt{\Phi}(rt) \geq \gamma, \tag{2.3}$$

$$\Psi(rst) \leq \delta \; iken \; \Psi(rs) \leq \delta \; ya \; da \; \sqrt{\Psi}(st) \leq \delta \; ya \; da \; \sqrt{\Psi}(rt) \leq \delta, \tag{2.4}$$

ise J idealine 2-yutan sezgisel bulanık asalımsı ideal denir.

Örnek 2.2. $J = \langle \lambda, \delta \rangle$ aşağıdaki şekilde tanımlı sezgisel bulanık ideal olsun.

$$\lambda_J(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{eğer } x \in 18Z \\ 0, & \text{aksi halde} \end{array} \right\} \text{ ve } \delta_J(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{eğer } x \in 18Z \\ 0, & \text{aksi halde} \end{array} \right\}$$

J nin 2-yutan sezgisel bulanık asalımsı ideal olduğu açıktır. Fakat J, 2-yutan sezgisel bulanık ideal değildir.Çünkü $2_{(1,0)}3_{(1,0)}3_{(1,0)} \in J$ ama $2_{(1,0)}3_{(1,0)} \notin J$ ve $3_{(1,0)}3_{(1,0)} \notin J$ dir.

Teorem 2.1. *$\Im$ yarı halkasının sezgisel bulanık alt kümesi J olsun. J nin $\Im$ nin 2-yutan sezgisel bulanık ideali olması için gerek ve yeter şart $J_{(\gamma,\delta)}$ nın $\Im$ yarı halkasında 2-yutan ideal olmasıdır.*

İspat ($\Rightarrow$): J, $\Im$ nin 2-yutan sezgisel bulanık ideali olsun. $J_{(\gamma,\delta)}$ nın, $\Im$ de 2-yutan ideal olduğunu gösterelim.

$r, s, t \in \Im$ ve $\gamma, \delta \in [0,1]$ için $rst \in J_{(\gamma,\delta)}$ alalım. J nin, $\Im$ nin 2-yutan sezgisel bulanık ideali olduğu gerçeği göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} rst \in J_{(\gamma,\delta)} &\Longrightarrow \Phi(rst) \geq \gamma \text{ ve } \Psi(rst) \leq \delta \\ &\Longrightarrow \Phi(rs) \geq \gamma \text{ ya da } \Phi(st) \geq \gamma \text{ ya da } \Phi(rt) \geq \gamma \text{ ve} \\ &\quad \Psi(rs) \leq \delta \text{ ya da } \Psi(st) \leq \delta \text{ ya da } \Psi(rt) \leq \delta \\ &\Longrightarrow rs \in J_{(\gamma,\delta)} \text{ ya da } st \in J_{(\gamma,\delta)} \text{ ya da } rt \in J_{(\gamma,\delta)}. \end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu nedenle $J_{(\gamma,\delta)}$, $\Im$ nin 2-yutan idealidir.

($\Leftarrow$): Tersine, J ideali $\Im$ nin sezgisel bulanık altkümesi ve her $\gamma, \delta \in [0,1]$ için $J_{(\gamma,\delta)}$ nın 2-yutan ideal olduğunu varsayalım. Fakat J, $\Im$ nin 2-yutan sezgisel bulanık ideali olmasın.Bu durumda, $r, s, t, \in \Im$ ve $\gamma, \delta \in [0,1]$ için $\Phi(rst) \geq \gamma$ iken $\Phi(rs) \geq \gamma$ ya da $\Phi(st) \geq \gamma$ ya da $\Phi(rt) \geq \gamma$, ve $\Psi(rst) \leq \delta$ iken $\Psi(rs) \leq \delta$ ya da $\Psi(st) \leq \delta$ ya da $\Psi(rt) \leq \delta$ sağlanmaz. Demek ki $rst \in J_{(\gamma,\delta)}$ iken $rs \in J_{(\gamma,\delta)}$ ya da $st \in J_{(\gamma,\delta)}$ ya da $rt \in J_{(\gamma,\delta)}$ sonucuna ulaşamayız.

Bu $J_{(\gamma,\delta)}$ idealinin $\Im$ nin 2-yutan ideali olması ile çelişmektedir. Bu yüzden temel varsayımımız doğru değildir. Dolayısıyla J idealinin $\Im$ nin 2-yutan sezgisel bulanık ideali olduğuna ulaşırız.

Teorem 2.2. *Θ, $\Im$ yarı halkasının 2-yutan ideali ve $\gamma, \delta \in [0,1]$ olsun.$\Im$ nin sezgisel*

bulanık alt kümesi I olmak üzere

$$\Theta(a) = \begin{cases} (1,0) & ; \quad a \in I \\ (A,w) & ; \quad a \notin I \end{cases} \tag{2.5}$$

ise Θ, $\Im$ nin 2-yutan sezgisel bulanık idealidir.

İspat Θ, $\Im$ yarı değişmeli halkasının 2-yutan sezgisel bulanık ideali ve $r, s, t \in \Im$ olsun. $\Phi(rst) \geq \gamma$ ve $\Psi(rst) \leq \delta$ olduğunu kabul edelim.

Durum 1: $\gamma = 1$ ve $\delta = 0$

$rst \in \Theta_{(1,0)}$ öyle ki $rst \in I$. O zaman

$$\begin{aligned} &\Phi(rs) < \gamma = 1 \text{ ya da } \Phi(st) < \gamma = 1 \text{ ya da } \Phi(rt) < \gamma = 1 \text{ ve} \\ &\Psi(rs) > \delta = 0 \text{ ya da } \Psi(st) > \delta = 0 \text{ ya da } \Psi(rt) > \delta = 0. \end{aligned}$$

dir. Buradan $rs \notin I, st \notin I$ ve $rt \notin I$ dir. Bu Θ nın 2-yutan ideal olması ile çelişir.

Durum 2: $\gamma = A$ ve $\delta = w$

Buradan $\Theta(rst) = (A, w)$ öyle ki $\Phi(rst) = A$ ve $\Psi(rst) = w$ dir. $\Theta(rs)$ ya da $\Theta(st)$ ya da $\Theta(rt)$ bunlardan birinin (A, w) ya eşitliği sağlanır. Diğer açıdan $\Theta(rs), \Theta(st)$ ve $\Theta(rt)$ nin tamamı $(1, 0)$ a eşittir. Bu durumda $rs, st, rt \in I$ dır. Ancak $rst \notin I$ idi. Bu Θ nın 2-yutan ideal olması ile çelişir.

Teorem 2.3. *J ideali, $\Im$ nin 2-yutan sezgisel bulanık asalımsı ideali olsun.O zaman $\sqrt{J}$, $\Im$ nin 2-yutan sezgisel bulanık idealidir.*

İspat J ideali, $\Im$ nin 2-yutan sezgisel bulanık asalımsı ideali olsun. $r, s, t \in \Im$ ve $\gamma, \delta \in [0, 1]$ için $\sqrt{J}(rst) \geq (\gamma, \delta)$ olduğunu varsayalım. Dolayısıyla

$$\sqrt{\Phi}(rst) \geq \gamma \text{ ve } \sqrt{\Psi}(rst) \leq \delta.$$

Demek ki

$$\begin{aligned} \sqrt{\Phi}(rst) \geq \gamma &\implies \bigvee\{\Phi(rst)^k \mid k \in Z \geq \gamma\} \\ &\implies \bigvee\{\Phi(r^k s^k t^k) \mid k \in Z \geq \gamma\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \sqrt{\Psi}(rst) \leq \delta &\implies \bigwedge\{\Psi(rst)^k \mid k \in Z \leq \delta\} \\ &\implies \bigwedge\{\Psi(r^k s^k t^k) \mid k \in Z \leq \delta\}. \end{aligned}$$

Farz edelim ki $st, rt \notin \sqrt{J}$ öyle ki $st, rt \notin \sqrt{\Phi}$ ve $st, rt \notin \sqrt{\Psi}$. Böylece $\gamma, \delta \in [0,1]$ ve $k \in Z$ için

$$\sqrt{\Phi}(s^k t^k) \not\geq \gamma \text{ ve } \sqrt{\Phi}(r^k t^k) \not\geq \gamma$$

$$\sqrt{\Psi}(s^k t^k) \not\leq \delta \text{ ve } \sqrt{\Psi}(r^k t^k) \not\leq \delta$$

elde edilir.

J idealinin $\Im$ nin 2-yutan sezgisel bulanık asalımsı ideali olduğu gerçeğinden hareketle $\exists l \in Z$ için $\Phi((r^k s^k)^l) \geq \gamma$ ve $\Psi((r^k s^k)^l) \leq \delta$ yazabiliriz. Buradan

$$\bigvee\{\Phi(r^u s^u) \mid u \in Z \geq \gamma\}$$

$$\bigwedge\{\Psi(r^u s^u) \mid u \in Z \leq \delta\}.$$

Buradan $rs \in \sqrt{\Phi}$ ve $rs \in \sqrt{\Psi}$ elde ederiz. Böylece $rs \in \sqrt{J}$ dır. Sonuç olarak $\sqrt{J}$, $\Im$ nin 2-yutan sezgisel bulanık idealidir.

Şimdi $\Im$ nin 2-yutan sezgisel bulanık ideallerinin boştan farklı kesişim ailesinin de $\Im$ nin 2-yutan sezgisel bulanık ideali olduğunu göstereceğiz.

Teorem 2.4. *$\Im$ nin 2-yutan sezgisel bulanık ideallerinin $i = 1, 2, \cdots \in K$ için boştan farklı ailesi J_i olsun. $\bigcap J_i$ ler de $\Im$ nin 2 -yutan sezgisel bulanık idealleridir.*

İspat $\Im$ nin sezgisel bulanık ideallerinin boştan farklı ailesinin kesişimi de $\Im$ nin sezgisel bulanık ideali olduğu açıktır. O halde, 2-yutan idealler için, $\{I_i : i \in J\}$, $\Im$ nin 2-yutan sezgisel bulanık ideallerinin boştan farklı ailesi ve $r, s, t \in \Im$ olsun. O zaman,

$$\left(\bigcap_{i\in K} J_i\right)(rst) \geq (\gamma,\delta)$$

$$\Longrightarrow \left(\bigcap_{i\in K}\Phi_i\right)(rst) \geq \gamma \text{ ve } \left(\bigcup_{i\in K}\Psi_i\right)(rst) \leq \delta$$

$$\Longrightarrow \bigwedge_{i\in K}\{\Phi_i(rst)\} \geq \gamma \text{ ve } \bigvee_{i\in K}\{\Psi_i(rst)\} \leq \delta$$

$$\Longrightarrow \bigwedge_{i\in K}\{\Phi_i(rs)\} \geq \gamma \text{ ya da } \bigwedge_{i\in K}\{\Phi_i(st)\} \geq \gamma \text{ ya da } \bigwedge_{i\in K}\{\Phi_i(rt)\} \geq \gamma$$

ve

$$\bigvee_{i\in K}\{\Psi_i(rs)\} \leq \delta \text{ ya da } \bigvee_{i\in K}\{\Psi_i(st)\} \leq \delta \text{ ya da } \bigvee_{i\in K}\{\Psi_i(rt)\} \leq \delta$$

$$\Longrightarrow \left(\bigcap_{i\in K}\Phi_i\right)(rs) \geq \gamma \text{ ya da } \left(\bigcap_{i\in K}\Phi_i\right)(st) \geq \gamma \text{ ya da } \left(\bigcap_{i\in K}\Phi_i\right)(rt) \geq \gamma$$

ve

$$\left(\bigcup_{i\in K}\Psi_i\right)(rs) \leq \delta \text{ ya da } \left(\bigcup_{i\in K}\Psi_i\right)(st) \leq \delta \text{ ya da } \left(\bigcup_{i\in K}\Psi_i\right)(rt) \leq \delta$$

$$\Longrightarrow \left(\bigcap_{i\in K} J_i\right)(rs) \geq (\gamma,\delta) \text{ ya da } \left(\bigcap_{i\in K} J_i\right)(st) \geq (\gamma,\delta)$$

ya da $\left(\bigcap_{i\in K} J_i\right)(rt) \geq (\gamma,\delta)$

verebiliriz. Böylece, $\bigcap_{i\in K} J_i$ ler de $\Im$ nin 2-yutan sezgisel bulanık idealleridir.

Teorem 2.5. *$\Im$ nin 2-yutan sezgisel bulanık asalımsı ideallerinin $i = 1, 2, \cdots \in K$ için boştan farklı ailesi J_i olsun. $\bigcap J_i$ ler de $\Im$ nin 2 -yutan sezgisel bulanık asalımsı idealleridir.*

İspat Teorem2.4'e benzer şekilde ispat edilebilir.

Teorem 2.6. *$\rho : \Im_1 \to \Im_2$ yarı halkaların homomorfizması ve J, $\Im_2$ nin 2-yutan sezgisel bulanık ideali olsun.O halde $\rho^{-1}(J)$ da $\Im_1$ in 2-yutan sezgisel bulanık idealidir.*

İspat $\rho : \Im_1 \to \Im_2$ yarı halkaların homomorfizması ve J, $\Im_2$ nin 2-yutan sezgisel bulanık ideali olsun.

$r, s, t \in \Im$ ve $\gamma, \delta \in [0, 1]$ için

$$
\begin{aligned}
&\rho^{-1}(J)(rst) \geq (\gamma, \delta) \\
&\quad \Longrightarrow \ \rho^{-1}(\Phi)(rst) \geq \gamma \ \text{ ve } \ \rho^{-1}(\Psi)(rst) \leq \delta \\
&\quad \Longrightarrow \ \Phi(\rho(rst)) \geq \gamma \ \text{ ve } \ \Psi(\rho(rst)) \leq \delta \\
&\quad \Longrightarrow \ \Phi(\rho(r)\rho(s)\rho(t)) \geq \gamma \ \text{ ve } \ \Psi(\rho(r)\rho(s)\rho(t)) \leq \delta \\
&\quad \Longrightarrow \ \Phi(\rho(r)\rho(s)) \geq \gamma \ \text{ ya da } \ \Phi(\rho(s)\rho(t)) \geq \gamma \ \text{ ya da } \ \Phi(\rho(r)\rho(t)) \geq \gamma \\
&\qquad\quad \text{ve} \\
&\qquad\quad \Psi(\rho(r)\rho(s)) \leq \delta \ \text{ ya da } \ \Psi(\rho(s)\rho(t)) \leq \delta \ \text{ ya da } \ \Psi(\rho(r)\rho(t)) \leq \delta \\
&\quad \Longrightarrow \ \rho^{-1}(\Phi)(rs) \geq \gamma \ \text{ ya da } \ \rho^{-1}(\Phi)(st) \geq \gamma \ \text{ ya da } \ \rho^{-1}(\Phi)(rt) \geq \gamma \\
&\qquad\quad \text{ve} \\
&\qquad\quad \rho^{-1}(\Psi)(rs) \leq \gamma \ \text{ ya da } \ \rho^{-1}(\Psi)(st) \leq \gamma \ \text{ ya da } \ \rho^{-1}(\Psi)(rt) \leq \gamma \\
&\quad \Longrightarrow \ \rho^{-1}(J)(rs) \geq (\gamma, \delta) \ \text{ ya da } \ \rho^{-1}(J)(st) \geq (\gamma, \delta) \\
&\qquad\quad \text{ya da } \ \rho^{-1}(J)(rt) \geq (\gamma, \delta).
\end{aligned}
$$

Böylece, $\rho^{-1}(J)$ da $\Im_1$ in 2-yutan sezgisel bulanık idealidir.

Teorem 2.7. *$\rho : \Im_1 \to \Im_2$ yarı halkaların homomorfizması ve K, $\Im_1$ in 2-yutan sezgisel bulanık ideali olsun.O halde $\rho(K)$ de $\Im_2$ nin 2-yutan sezgisel bulanık idealidir.*

İspat Torem 2.6'e benzer şekilde ispat edilebilir.

Teorem 2.8. *J_1, 2-yutan sezgisel bulanık ideal ve $J_1 \subseteq J_2$ olmak üzere J_1 ve J_2, $\Im$ nin iki sezgisel bulanık ideali olsun. Eğer $r, s, t \in \Im$ ve $\gamma, \delta \in [0, 1]$ için $J_2(rst) \geq J_1(rst) \geq (\gamma, \delta)$ ise J_2 de $\Im$ değişmeli yarı halkasında 2-yutan sezgisel bulanık idealdir.*

İspat J_1 ve J_2, $\Im$ nin iki sezgisel bulanık alt kümesi iken $J_1 \subseteq J_2$ ve J_1 2-yutan sezgisel bulanık ideal olsun.$r, s, t \in \Im$ ve $\gamma, \delta \in [0, 1]$ için $J_2(rst) \geq (\gamma, \delta)$ olsun.$J_2(rst) \geq J_1(rst) \geq (\gamma, \delta)$ ve J_1, 2-yutan sezgisel bulanık ideal olmak üzere

$$J_1(rs) \geq (\gamma, \delta) \ \text{ ya da } \ J_1(st) \geq (\gamma, \delta) \ \text{ ya da } \ J_1(rt) \geq (\gamma, \delta)$$

Buradan

$J_2(rs) \geq J_1(rs) \geq (\gamma, \delta)$ ya da $J_2(st) \geq J_1(st) \geq (\gamma, \delta)$ ya da $J_2(rt) \geq J_1(rt) \geq (\gamma, \delta)$.

Sonuç olarak J_2 de 2-yutan sezgisel bulanık idealdir.

Şimdi, yarı halkaların sezgisel bulanık alt kümelerinin kartezyen çarpımını inceleyelim.

Tanım 2.3. J ve K sırasıyla $\Im$ ve $\Re$ nin iki sezgisel bulanık alt kümeleri olsun. J ve K nin kartezyen çarpımı aşağıdaki gibi verilir.

$J =< \Phi_1, \Psi_1 >$ ve $K =< \Phi_2, \Psi_2 >$ olsun.

$$\begin{aligned} &(J \times K)(r,s) = J(r) \wedge K(s), \ \ \forall (r,s) \in \Im \times \Re, \ \ yani \\ &(J \times K)(r,s) = (\Phi_1(r) \wedge \Phi_2(s), \Psi_1(r) \vee \Psi_2(s)). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Tanım 2.4. $\Re$ bir yarı halka ve J, $\Re$ nin boştan farklı alt kümesi olsun. J nin sezgisel bulanık karakteristik fonksiyonu $\mathcal{X}_J =< \Phi_{\mathcal{X}_J}, \Psi_{\mathcal{X}_J} >$ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} &\Phi_{\mathcal{X}_J} : \Re \to [0,1] \\ &r \to \Phi_{\mathcal{X}_J}(r) = \begin{cases} 1 \ ; & \text{eğer } \ r \in \Re \\ 0 \ ; & \text{eğer } \ r \notin \Re \end{cases} \end{aligned} \tag{2.7}$$

ve

$$\begin{aligned} &\Psi_{\mathcal{X}_J} : \Re \to [0,1] \\ &r \to \Psi_{\mathcal{X}_J}(r) = \begin{cases} 0 \ ; & \text{eğer } \ r \in \Re \\ 1 \ ; & \text{eğer } \ r \notin \Re. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.8}$$

olarak verilir.

Teorem 2.9. *$\Im$ ve $\Re$ iki değişmeli yarı halka ve J, $\Im$ nin 2-yutan sezgisel bulanık ideali olsun. O halde $\mathcal{X}_\Re$, $\Re$ nin karakteristik fonksiyonu olmak üzere $J \times \mathcal{X}_\Re$, $\Im \times \Re$ nin 2-yutan sezgisel bulanık idealidir.*

İspat Kabul edelim ki $\Im$ ve $\Re$ iki değişmeli yarı halka olsun. J ve $\mathcal{X}_\Re$ sırasıyla $\Im$ ve $\Re$ nin 2-yutan sezgisel bulanık ideali olsun.

$\mathcal{X}_\Re =< \Phi_{\mathcal{X}_\Re}, \Psi_{\mathcal{X}_\Re} >$ olsun.

$$\begin{aligned} &(J \times \mathcal{X}_\Re)(r_1s_1t_1, r_2s_2t_2) \geq (\gamma, \delta) \\ &\implies (\Phi \times \mathcal{X}_{\Phi_\Re})(r_1s_1t_1, r_2s_2t_2) \geq \gamma \ \text{ ve } \ (\Psi \times \mathcal{X}_{\Psi_\Re})(r_1s_1t_1, r_2s_2t_2) \leq \delta \\ &\implies \Phi(r_1s_1t_1) \wedge \mathcal{X}_{\Phi_\Re}(r_2s_2t_2) \geq \gamma \ \text{ ve } \ \Psi(r_1s_1t_1) \vee \mathcal{X}_{\Psi_\Re}(r_2s_2t_2) \leq \delta \\ &\implies \Phi(r_1t_1) \wedge \mathcal{X}_{\Phi_\Re}(r_2s_2t_2) \geq \gamma \ \text{ ya da } \ \Phi(s_1t_1) \wedge \mathcal{X}_{\Phi_\Re}(r_2s_2t_2) \geq \gamma \ \text{ ya da} \\ &\quad \Phi(r_1t_1) \wedge \mathcal{X}_{\Phi_\Re}(r_2s_2t_2) \geq \gamma \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} &\Psi(r_1s_1) \vee \mathcal{X}_{\Psi_\Re}(r_2s_2t_2) \leq \delta \ \text{ ya da } \ \Psi(s_1t_1) \vee \mathcal{X}_{\Psi_\Re}(r_2s_2t_2) \leq \delta \ \text{ ya da} \\ &\Psi(r_1t_1) \wedge \mathcal{X}_{\Psi_\Re}(r_2s_2t_2) \leq \delta \end{aligned}$$

$r_2, s_2, t_2 \in \Re$ olduğu için $\mathcal{X}_{\Phi_\Re}(r_2 s_2 t_2) = 1$ ve $\mathcal{X}_{\Psi_\Re}(r_2 s_2 t_2) = 0$ olur.

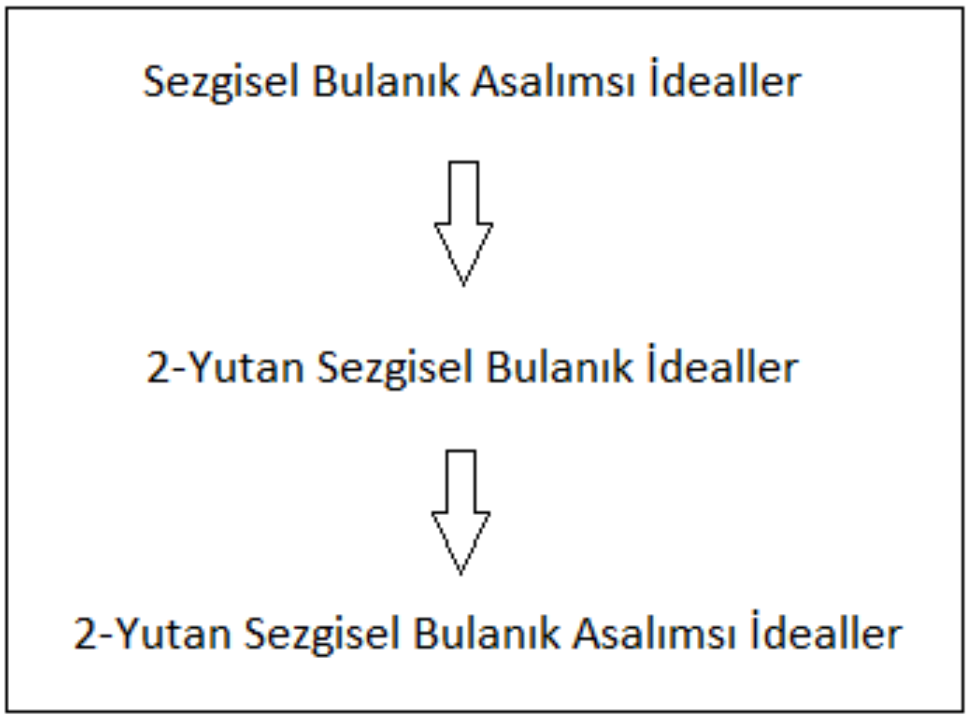
Buradan $\Phi(r_1 s_1) \wedge \mathcal{X}_{\Phi_\Re}(de) \geq \gamma$ ya da $\Phi(s_1 t_1) \wedge \mathcal{X}_{\Phi_\Re}(de) \geq \gamma$ ya da
$\Phi(r_1 t_1) \wedge \mathcal{X}_{\Phi_\Re}(de) \geq \gamma$ ve $\Psi(r_1 s_1) \vee \mathcal{X}_{\Psi_\Re}(de) \leq \delta$ ya da
$\Psi(s_1 t_1) \vee \mathcal{X}_{\Psi_\Re}(de) \leq \delta$ ya da $\Psi(r_1 t_1) \wedge \mathcal{X}_{\Psi_\Re}(de) \leq \delta$.

Burada $d, e \in \{r_2, s_2, t_2\}$. Bu nedenle,

$J \times \mathcal{X}_\Re(r_1 s_1, de) \geq (\gamma, \delta)$ ya da $J \times \mathcal{X}_\Re(r_1 t_1, de) \geq (\gamma, \delta)$ ya da
$J \times \mathcal{X}_\Re(r_1 t_1, de) \geq (\gamma, \delta)$

Bu yüzden, $J \times \mathcal{X}_\Re$, $\Im \times \Re$ nin 2-yutan sezgisel bulanık idealidir.

Sonuç 2.1. *Verilen tanımları şema halinde verebiliriz:*



Şekil 2.1 2-Yutan Sezgisel Bulanık İdealler

3
DEĞİŞMELİ YARI HALKALARDA 2 YUTAN BELİRSİZ İDEALLER

Tanım 3.1. V belirsiz küme ve $\Im$ yarı halka olsun. $\Im$ yarı halkasının $V =< t_V, f_V >$ belirsiz idealine $\forall r,s,t \in \Im$ ve $\gamma,\delta \in [0,1]$ için $V(rst) \geq (\gamma,\delta)$ iken $V(rs) \geq (\gamma,\delta)$ ya da $V(st) \geq (\gamma,\delta)$ ya da $V(rt) \geq (\gamma,\delta)$ yani,

$$t_V(rst) \geq \gamma \text{ iken } t_V(rs) \geq \gamma \text{ ya da } t_V(st) \geq \gamma \text{ ya da } t_V(rt) \geq \gamma, \tag{3.1}$$

$$1 - f_V(rst) \geq \delta \text{ iken } 1 - f_V(rs) \geq \delta \text{ ya da } 1 - f_V(st) \geq \delta \text{ya da } 1 - f_V(rt) \geq \delta, \tag{3.2}$$

ise 2-yutan belirsiz ideal denir.

Örnek 3.1. $\Im$ ={0,m,n,r} toplama $+$ ve çarpma $\cdot$ altında aşağıdaki gibidir.

+	0	m	n	r
0	0	m	n	r
m	m	m	n	r
n	n	n	n	r
r	r	r	r	r

$\cdot$	0	m	n	r
0	0	0	0	0
m	0	m	m	m
n	0	m	n	n
r	0	m	n	r

$(\Im, +, \cdot)$ formu bir değişmeli yarı halkadır. $\Im$ de tanımlı olan $I = \langle t_v, 1 - f_v \rangle$ belirsiz alt küme $t_V(0) = 1,\ t_V(m) = 0.5,\ t_V(n) = 0.4,\ t_V(r) = 0.2$ ve $(1-f_V)(0) = 1,\ (1-f_V)(m) = 0.6,\ (1-f_V)(n) = 0.5,\ (1-f_V)(r) = 0.4$ olmak üzere $t_V(mnr) \geq 0.5$ iken $t_V(mn) \geq 0.5$ ya da $t_V(nr) \ngeq 0.5$ ya da $t_V(mr) \geq 0.5$ ve $1 - f_V(mnr) \geq 0.6$ iken $1 - f_V(mn) \geq 0.6$ ya da $1 - f_V(nr) \ngeq 0.6$ ya da $1 - f_V(mr) \geq 0.6$ elde edilir. Böylece $I = \langle t_v, 1 - f_v \rangle$, 2- yutan belirsiz idealdir.

Örnek 3.2. $\Im = \{0, d, f, h, g\}$ toplama $+$ ve çarpma $\cdot$ altında aşağıdaki gibidir.

+	0	d	f	h	g
0	0	d	f	h	g
d	d	f	h	g	0
f	f	h	g	0	d
h	h	g	0	d	f
g	g	0	d	f	h

·	0	d	f	h	g
0	0	0	0	0	0
d	0	d	f	h	g
f	0	f	g	d	h
h	0	h	d	g	f
g	0	g	h	f	d

$(\Im, +, \cdot)$ formu bir değişmeli yarı halkadır.

$\Im$ nin $V_A = \langle t_A, f_A \rangle$ belirsiz alt kümesi $V_A = (1,0)/0 + (0.4,0.3)/d + (0.5,0.4)/f + (0.2,0.8)/h + (0.3,0.5)/g$ şeklinde tanımlıdır. O halde $V_A = \langle t_A, f_A \rangle$, $\Im$ değişmeli yarı halkasının 2-yutan belirsiz idealidir.

Tanım 3.2. $V =< t_V, f_V >$, $\Im$ yarı halkasının belirsiz ideali olsun.$\forall r, s, t \in \Im$ ve $\gamma, \delta \in [0,1]$ için

$$t_V(rst) \geq \gamma \text{ iken } t_V(rs) \geq \gamma \text{ ya da } \sqrt{t_V}(st) \geq \gamma \text{ ya da } \sqrt{t_V}(rt) \geq \gamma, \quad (3.3)$$

$$1-f_V(rst) \geq \delta \text{ iken } 1-f_V(rs) \geq \delta \text{ ya da } 1-\sqrt{f_V}(st) \geq \delta \text{ ya da } 1-\sqrt{f_V}(rt) \geq \delta, \quad (3.4)$$

ise $V =< t_V, f_V >$ idealine, $\Im$ yarı halkasının 2-yutan belirsiz asalımsı ideali denir.

Örnek 3.3. $V_A = \langle t_A, f_A \rangle$ aşağıdaki şekilde tanımlı bir belirsiz ideal olsun.

$$t_A(r) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{eğer} r \in 12Z \\ 0, & \text{eğer } r \notin 12Z \end{array} \right\} \text{ ve } f_A(r) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{eğer } r \in 12Z \\ 1, & \text{eğer } r \notin 12Z \end{array} \right\}$$

V_A nın 2-yutan belirsiz asalımsı ideal olduğu açıktır.Fakat V_A 2-yutan belirsiz ideal değildir. Çünkü $2_{(1,0)}2_{(1,0)}3_{(1,0)} \in V_A$ ama $2_{(1,0)}2_{(1,0)} \notin V_A$ ve $2_{(1,0)}3_{(1,0)} \notin V_A$ dir.

Teorem 3.1. *$\Im$ yarı halkasının V belirsiz alt kümesi olsun. V nin $\Im$ yarı halkasının 2-yutan belirsiz ideali olması için gerek ve yeter şart $V_{(\gamma,\delta)}$ nın $\Im$ yarı halkasında 2-yutan ideal olmasıdır.*

İspat ($\Rightarrow$): V, $\Im$ nin 2-yutan belirsiz ideali olsun. $V_{(\gamma,\delta)}$ nın $\Im$ yarı halkasında 2-yutan ideal olduğunu gösterelim.

$r, s, t \in \Im$ ve $\gamma, \delta \in [0,1]$ için $rst \in V_{(\gamma,\delta)}$ alalım. V idealinin $\Im$ yarı halkasının

2-yutan belirsiz ideali olduğu gerçeği göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} rst \in V_{(\gamma,\delta)} &\implies t_V(rst) \geq \gamma \text{ ve } 1 - f_V(rst) \geq \delta \\ &\implies t_V(rs) \geq \gamma \text{ ya da } t_V(st) \geq \gamma \text{ ya da } t_V(rt) \geq \gamma \text{ ve} \\ &\quad 1 - f_V(rs) \geq \delta \text{ ya da } 1 - f_V(st) \geq \delta \text{ ya da } 1 - f_V(rt) \geq \delta \\ &\implies rs \in V_{(\gamma,\delta)} \text{ ya da } st \in V_{(\gamma,\delta)} \text{ ya da } rt \in V_{(\gamma,\delta)}. \end{aligned}$$

Bu nedenle, $V_{(\gamma,\delta)}$ ideali $\Im$ nin 2-yutan idealidir.

($\Leftarrow$): Tersine, V ideali $\Im$ nin belirsiz altkümesi ve $\forall \gamma, \delta \in [0,1]$ için $V_{(\gamma,\delta)}$ nın 2-yutan ideal olduğunu varsayalım. Fatak V, $\Im$ nin 2-yutan belirsiz ideali değildir. Bu durumda, $r, s, t \in \Im$ ve $\gamma, \delta \in [0,1]$ için $t_V(rst) \geq \gamma$ iken $t_V(rs) \geq \gamma$ ya da $t_V(st) \geq \gamma$ ya da $t_V(rt) \geq \gamma$ ve $1 - f_V(rst) \geq \delta$ iken $1 - f_V(rs) \geq \delta$ ya da $1 - f_V(st) \geq \delta$ ya da $1 - f_V(rt) \geq \delta$ sağlanmaz. Buradan $rst \in V_{(\gamma,\delta)}$ iken $rs \in V_{(\gamma,\delta)}$ ya da $st \in V_{(\gamma,\delta)}$ ya da $rt \in V_{(\gamma,\delta)}$ olmadığı sonucuna ulaşırız.

Bu $V_{(\gamma,\delta)}$ idealinin $\Im$ 2-yutan ideali olması ile çelişmektedir. Bu yüzden temel varsayımımız doğru değildir. Böylece V idealinin $\Im$ nin 2-yutan belirsiz ideali olduğu sonucuna ulaşırız.

Teorem 3.2. *J, $\Im$ yarı halkasının 2-yutan ideali ve $\gamma, \delta \in [0,1]$ olsun. $\Im$ nin belirsiz alt kümesi V olmak üzere*

$$J(a) = \begin{cases} (1,0) & ; \quad a \in V \\ (A,w) & ; \quad a \notin V \end{cases} \tag{3.5}$$

ise J, $\Im$ nin 2-yutan belirsiz idealidir.

İspat J, $\Im$ yarı değişmeli halkasının 2-yutan belirsiz ideali ve $r, s, t \in \Im$ olsun. $t_V(rst) \geq \gamma$ ve $1 - f_V(rst) \geq \delta$ olduğunu kabul edelim.

Durum 1: $\gamma = 1$ ve $\delta = 0$

$rst \in J_{(1,0)}$ öyle ki $rst \in V$. O zaman

$$\begin{aligned} &t_V(rs) < \gamma = 1 \text{ ya da } t_V(st) < \gamma = 1 \text{ ya da } t_V(rt) < \gamma = 1 \text{ ve} \\ &1 - f_V(rs) > \delta = 0 \text{ ya da } 1 - f_V(st) > \delta = 0 \text{ ya da } 1 - f_V(rt) > \delta = 0. \end{aligned}$$

dir. Buradan $rs \notin V, st \notin V$ ve $rt \notin V$ dir. Bu J nin 2-yutan ideal olması ile çelişir.

Durum 2: $\gamma = A$ ve $\delta = w$

Buradan $J(rst) = (A,w)$ öyle ki $t_V(rst) = A$ ve $1 - f_V(rst) = w$ dir.

$J(rs)$ ya da $J(st)$ ya da $J(rt)$ bunlardan birinin (A, w) ya eşitliği sağlanır. Diğer açıdan $J(rs), J(st)$ ve $J(rt)$ nin tamamı $(1, 0)$ a eşittir. Bu durumda $rs, st, rt \in J$ dir. Ancak $rst \notin J$ idi. Bu J nin 2-yutan ideal olması ile çelişir.

Teorem 3.3. *V ideali $\Im$ yarı halkasının 2-yutan belirsiz asalımsı ideali olsun. O zaman $\sqrt{V}$, $\Im$ yarı halkasının 2-yutan belirsiz idealidir.*

İspat V, $\Im$ yarı halkasında 2-yutan belirsiz asalımsı ideal olsun.$r, s, t \in \Im$ ve $\gamma, \delta \in [0, 1]$ için $\sqrt{V}(rst) \geq (\gamma, \delta)$ olduğunu varsayalım. Dolayısıyla

$$\sqrt{t_V}(rst) \geq \gamma \text{ ve } \sqrt{1 - f_V}(rst) \geq \delta.$$

Buradan,

$$\begin{aligned} \sqrt{t_V}(rst) \geq \gamma &\implies \bigvee\{t_V(rst)^k \mid k \in Z \geq \gamma\} \\ &\implies \bigvee\{t_V(r^k s^k t^k) \mid k \in Z \geq \gamma\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - f_V}(rst) \leq \delta &\implies \bigwedge\{1 - f_V(rst)^k \mid k \in Z \leq \delta\} \\ &\implies \bigwedge\{1 - f_V(r^k s^k t^k) \mid k \in Z \leq \delta\}. \end{aligned}$$

Farz edelim ki $st, rt \notin \sqrt{V}$ öyle ki $st, rt \notin \sqrt{t_V}$ ve $st, rt \notin \sqrt{1 - f_V}$. Böylece $\gamma, \delta \in [0, 1]$ ve $k \in Z$ için

$$\sqrt{t_V}(s^k t^k) \ngeq \gamma \text{ ve } \sqrt{t_V}(r^k t^k) \ngeq \gamma$$

$$\sqrt{1 - f_V}(s^k t^k) \geq \delta \text{ ve } \sqrt{1 - f_V}(r^k t^k) \geq \delta$$

elde edilir.

V nin $\Im$ yarı halkasının 2-yutan belirsiz asalımsı ideali olduğu gerçeğinden hareketle $\exists l \in Z$ için $t_V((r^k s^k)^l) \geq \gamma$ ve $1 - f_V((r^k s^k)^l) \geq \delta$ söyleyebiliriz. Böylece

$$\bigvee\{t_V(r^u s^u) \mid u \in Z \geq \gamma\}$$

$$\bigwedge\{1 - f_V(r^u s^u) \mid u \in Z \geq \delta\}.$$

Böylece $rs \in \sqrt{t_V}$ ve $rs \in \sqrt{1 - f_V}$ elde ediz. Böylece $rs \in \sqrt{V}$ dır. Sonuç olarak $\sqrt{V}$, $\Im$ yarı halkasının 2-yutan belirsiz idealidir.

Teorem 3.4. *$\Im$ yarı halkasının 2-yutan belirsiz ideallerinin $i = 1, 2, \cdots \in J$ boştan farklı ailesi V_i olsun. Böylece $\bigcap V_i$, $\Im$ de 2-yutan belirsiz idealdir.*

İspat $\Im$ nin belirsiz ideallerinin boştan farklı ailesinin kesişimi de $\Im$ nin belirsiz

ideali olduğu açıktır. O halde 2-yutan idealler için $\{V_i : i \in J\}$, $\Im$ nin 2-yutan belirsiz ideallerinin boştan farklı ailesi ve $r, s, t \in \Im$ olsun. O zaman,

$$\left(\bigcap_{i\in J} V_i\right)(rst) \geq (\gamma, \delta)$$

$$\Longrightarrow \left(\bigcap_{i\in J} t_{V_i}\right)(rst) \geq \gamma \text{ ve } \left(\bigcup_{i\in J}(1 - f_{V_i})\right)(rst) \leq \delta$$

$$\Longrightarrow \bigwedge_{i\in J}\{t_{V_i}(rst)\} \geq \gamma \text{ ve } \bigvee_{i\in J}\{1 - f_{V_i}(rst)\} \leq \delta$$

$$\Longrightarrow \bigwedge_{i\in J}\{t_{V_i}(rs)\} \geq \gamma \text{ ya da } \bigwedge_{i\in J}\{t_{V_i}(st)\} \geq \gamma \text{ ya da } \bigwedge_{i\in J}\{t_{V_i}(rt)\} \geq \gamma$$

ve

$$\bigvee_{i\in J}\{1 - f_{V_i}(rs)\} \leq \delta \text{ ya da } \bigvee_{i\in J}\{1 - f_{V_i}(st)\} \leq \delta \text{ ya da } \bigvee_{i\in J}\{1 - f_{V_i}(rt)\} \leq \delta$$

$$\Longrightarrow \left(\bigcap_{i\in J} t_{V_i}\right)(rs) \geq \gamma \text{ ya da } \left(\bigcap_{i\in J} t_{V_i}\right)(st) \geq \gamma \text{ ya da } \left(\bigcap_{i\in J} t_{V_i}\right)(rt) \geq \gamma$$

ve

$$\left(\bigcup_{i\in J}(1 - f_{V_i})\right)(rs) \leq \delta \text{ ya da } \left(\bigcup_{i\in J}(1 - f_{V_i})\right)(st) \leq \delta \text{ ya da}$$

$$\left(\bigcup_{i\in J}(1 - f_{V_i})\right)(rt) \leq \delta$$

$$\Longrightarrow \left(\bigcap_{i\in J} V_i\right)(rs) \geq (\gamma, \delta) \text{ ya da } \left(\bigcap_{i\in J} V_i\right)(st) \geq (\gamma, \delta) \text{ ya da}$$

$$\left(\bigcap_{i\in J} V_i\right)(rt) \geq (\gamma, \delta).$$

Böylece $\bigcap_{i\in J} V_i$ de $\Im$ yarı halkasının 2-yutan belirsiz idealidir.

Teorem 3.5. *$\Im$ nin 2-yutan belirsiz asalımsı ideallerinin $i = 1, 2, \cdots \in J$ için boştan farklı ailesi V_i olsun. $\bigcap V_i$ ler de $\Im$ nin 2-yutan belirsiz asalımsı idealleridir.*

İspat Teorem3.4'e benzer şekilde ispat edilebilir.

Teorem 3.6. *$\rho : \Im_1 \to \Im_2$ yarı halka homomorfizması ve V, $\Im_2$ de 2-yutan belirsiz ideal olsun. O halde $\rho^{-1}(V)$ de $\Im_1$ de 2-yutan belirsiz idealidir.*

İspat $\rho : \Im_1 \to \Im_2$ yarı halka homomorfizması ve V, $\Im_2$ de 2-yutan belirsiz ideal

olsun. Şimdi $r, s, t \in \Im$ ve $\gamma, \delta \in [0, 1]$ için

$$
\begin{aligned}
&\rho^{-1}(V)(rst) \geq (\gamma, \delta) \\
&\quad \Longrightarrow \ \rho^{-1}(t_V)(rst) \geq \gamma \ \text{ ve } \ \rho^{-1}(1 - f_V)(rst) \leq \delta \\
&\quad \Longrightarrow \ t_V(\rho(rst)) \geq \gamma \ \text{ ve } \ 1 - f_V(\rho(rst)) \leq \delta \\
&\quad \Longrightarrow \ t_V(\rho(r)\rho(s)\rho(t)) \geq \gamma \ \text{ ve } \ 1 - f_V(\rho(r)\rho(s)\rho(t)) \leq \delta \\
&\quad \Longrightarrow \ t_V(\rho(r)\rho(s)) \geq \gamma \ \text{ ya da } \ t_V(\rho(s)\rho(t)) \geq \gamma \ \text{ ya da } \ t_V(\rho(r)\rho(t)) \geq \gamma \\
&\qquad \text{ve} \\
&\qquad 1 - f_V(\rho(r)\rho(s)) \leq \delta \ \text{ ya da } \ 1 - f_V(\rho(s)\rho(t)) \leq \delta \ \text{ ya da} \\
&\qquad 1 - f_V(\rho(r)\rho(t)) \leq \delta \\
&\quad \Longrightarrow \ \rho^{-1}(t_V)(rs) \geq \gamma \ \text{ ya da } \ \rho^{-1}(t_V)(st) \geq \gamma \ \text{ ya da } \ \rho^{-1}(t_V)(rt) \geq \gamma \\
&\qquad \text{ve} \\
&\qquad \rho^{-1}(1 - f_V)(rs) \leq \gamma \ \text{ ya da } \ \rho^{-1}(1 - f_V)(st) \leq \gamma \ \text{ ya da} \\
&\qquad \rho^{-1}(1 - f_V)(rt) \leq \gamma \\
&\quad \Longrightarrow \ \rho^{-1}(V)(rs) \geq (\gamma, \delta) \ \text{ ya da } \ \rho^{-1}(V)(st) \geq (\gamma, \delta) \ \text{ ya da} \\
&\qquad \rho^{-1}(V)(rt) \geq (\gamma, \delta).
\end{aligned}
$$

Böylece $\rho^{-1}(V)$ de $\Im_1$ in 2-yutan belirsiz idealidir.

Teorem 3.7. *$\rho : \Im_1 \to \Im_2$ yarı halkaların homomorfizması ve J, $\Im_1$ in be 2-yutan belirsiz ideali olsun. O halde $\rho(J)$ de $\Im_2$ nin 2-yutan belirsiz idealidir.*

İspat Teorem3.6'e benzer şekilde ispat edilebilir.

Teorem 3.8. *V_1 ve V_2, $\Im$ nin iki belirsiz alt kümesi öyle ki V_1, 2-yutan belirsiz ideal ve $V_1 \subseteq V_2$ olsun. Eğer $r, s, t \in \Im$ ve $\gamma, \delta \in [0, 1]$ için $V_2(rst) \geq V_1(rst) \geq (\gamma, \delta)$ ise V_2 de $\Im$ de 2-yutan belirsiz idealdir.*

İspat V_1 ve V_2, $\Im$ nin iki belirsiz alt kümesi öyle ki $V_1 \subseteq V_2$ ve V_1 2-yutan belirsiz ideal olsun. $r, s, t \in \Im$ ve $\gamma, \delta \in [0, 1]$ için $V_2(rst) \geq (\gamma, \delta)$ olsun. $V_2(rst) \geq V_1(rst) \geq (\gamma, \delta)$ ve V_1 2-yutan belirsiz ideal olduğundan

$$V_1(rs) \geq (\gamma, \delta) \ \text{ ya da } \ V_1(st) \geq (\gamma, \delta) \ \text{ ya da } \ V_1(rt) \geq (\gamma, \delta)$$

dir. Buradan,

$V_2(rs) \geq V_1(rs) \geq (\gamma, \delta)$ ya da $V_2(st) \geq V_1(st) \geq (\gamma, \delta)$ ya da $V_2(rt) \geq V_1(rt) \geq (\gamma, \delta)$ elde edilir.

Sonuç olarak V_2 de $\Im$ yarı halkasının 2-yutan belirsiz idealidir.

Tanım 3.3. V ve J sırasıyla $\Im$ ve $\Re$ nin iki belirsiz alt kümesi olsun. V ve J nin kartezyen çarpımı aşağıdaki şekilde verilir.

$V =< t_{V1}, 1 - f_{V1} >$ ve $J =< t_{V2}, 1 - f_{V2} >$ olsun.

$$\begin{aligned} &(I \times J)(r,s) = I(r) \wedge J(s), \ \ \forall (r,s) \in S \times R, \ \ yani \\ &(I \times J)(r,s) = (t_{V_1}(r) \wedge t_{V_2}(s), 1 - f_{V_1}(r) \wedge 1 - f_{V_2}(s)). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Tanım 3.4. $\Re$ bir yarı halka ve V de onun boştan farklı bir alt kümesi olsun.V nin belirsiz karakteristik fonksiyonu $\chi_V =< t_{V\chi V}, 1 - f_{V\chi V} >$ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} &t_{V_{\mathcal{X}_\mathcal{I}}} : R \to [0,1] \\ &r \to t_{V_{\mathcal{X}_\mathcal{I}}}(r) = \begin{cases} 1 \ \ ; & \text{eğer } \ r \in R \\ 0 \ \ ; & \text{eğer } \ r \notin R \end{cases} \end{aligned} \tag{3.7}$$

ve

$$\begin{aligned} &1 - f_{V_{\mathcal{X}_\mathcal{I}}} : R \to [0,1] \\ &r \to 1 - f_{V_{\mathcal{X}_\mathcal{I}}}(r) = \begin{cases} 1 \ \ ; & \text{eğer } \ r \in R \\ 0 \ \ ; & \text{eğer } \ r \notin R. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Teorem 3.9. *$\Im$ ve $\Re$ iki değişmeli yarı halka ve V, $\Im$ nin 2-yutan belirsiz ideali olsun.O halde $\chi_\Re$, $\Re$ nin karakteristik fonksiyonu olmak üzere $V \times \chi_\Re$ kartezyen çarpımı $\Im \times \Re$ nin 2-yutan belirsiz idealidir.*

İspat $\Im$ ve $\Re$ nin iki değişmeli yarı halka ve V ile $\chi_\Re$ nin sırasıyla 2-yutan belirsiz ideal I ve $\mathcal{X}_R$ olduğunu kabul edelim.

$\chi_\Re =< t_{V\chi_\Re}, 1 - f_{V\chi_\Re} >$ olsun.

$(I \times \mathcal{X}_R)(r_1s_1t_1, r_2s_2t_2) \geq (\gamma, \delta)$

$\implies (t_V \times \mathcal{X}_{t_{V_R}})(r_1s_1t_1, r_2s_2t_2) \geq \gamma$ ve $(1 - f_V \times \mathcal{X}_{1-f_{V_R}})(r_1s_1t_1, r_2s_2t_2) \leq \delta$

$\implies t_V(r_1s_1t_1) \wedge \mathcal{X}_{t_{V_R}}(r_2s_2t_2) \geq \gamma$ ve $1 - f_V(r_1s_1t_1) \vee \mathcal{X}_{1-f_{V_R}}(r_2s_2t_2) \leq \delta$

$\implies t_V(r_1s_1) \wedge \mathcal{X}_{t_{V_R}}(r_2s_2t_2) \geq \gamma$ ya da $t_V(b_1c_1) \wedge \mathcal{X}_{t_{V_R}}(r_2s_2t_2) \geq \gamma$ ya da
$t_V(r_1t_1) \wedge \mathcal{X}_{t_{V_R}}(r_2s_2t_2) \geq \gamma$
ve
$1 - f_V(r_1s_1) \vee \mathcal{X}_{1-f_{V_R}}(r_2s_2t_2) \leq \delta$ ya da $1 - f_V(s_1t_1) \vee \mathcal{X}_{1-f_{V_R}}(r_2s_2t_2) \leq \delta$
ya da $1 - f_V(r_1t_1) \wedge \mathcal{X}_{1-f_{V_R}}(r_2s_2t_2) \leq \delta$

$r_2, s_2, t_2 \in \Re$ olduğu için $\chi_{t_{VR}}(r_2s_2t_2) = 1$ ve $\chi_{1-f_{VR}}(r_2s_2t_2) = 0$ olur.

Buradan $t_V(r_1s_1) \wedge \mathcal{X}_{t_{V_R}}(de) \geq \gamma$ ya da $t_V(s_1t_1) \wedge \mathcal{X}_{t_{V_R}}(de) \geq \gamma$ ya da

$t_V(r_1t_1) \wedge \mathcal{X}_{t_{V_R}}(de) \geq \gamma$ ve $1 - f_V(r_1s_1) \vee \mathcal{X}_{1-f_{V_R}}(de) \leq \delta$ ya da
$1 - f_V(s_1c_1) \vee \mathcal{X}_{1-f_{V_R}}(de) \leq \delta$ ya da $1 - f_V(r_1t_1) \wedge \mathcal{X}_{1-f_{V_R}}(de) \leq \delta$

Burada $d, e \in \{r_2, s_2, t_2\}$ dir. Bu nedenle,

$V \times \chi_{\Re}(r_1s_1, de) \geq (\gamma, \delta)$ ya da $V \times \chi_{\Re}(s_1t_1, de) \geq (\gamma, \delta)$
ya da $V \times \chi_{\Re}(r_1t_1, de) \geq (\gamma, \delta)$.

Bu yüzden, $V \times \chi_{\Re}$, $\Im \times \Re$ nin 2-yutan belirsiz idealidir.

4
DEĞİŞMELİ YARI HALKALARDA 2 YUTAN BİPOLAR BULANIK İDEALLER

Tanım 4.1. μ bir bipolar bulanık küme ve $\Im$ bir değişmeli yarı halka olsun.$\Im$ yarı halkasının $\mu =< \mu^+, \mu^- >$ bir bipolar bulanık idealine $\forall r, s, t \in \Im$ ve $(\gamma, \delta) \in [0,1] \times [-1,0]$ için

$$\mu^+(rst) \geq \gamma \text{ iken } \mu^+(rs) \geq \gamma \text{ ya da } \mu^+(st) \geq \gamma \text{ ya da } \mu^+(rt) \geq \gamma, \quad (4.1)$$

$$\mu^-(rst) \leq \delta \text{ iken } \mu^-(rs) \leq \delta \text{ ya da } \mu^-(st) \leq \delta \text{ ya da } \mu^-(rt) \leq \delta, \quad (4.2)$$

ise 2-yutan bipolar bulanık ideal denir.

Örnek 4.1. $\Im = \{0, x, y, z, t\}$ kümesinde toplama $+$ ve çarpma $\cdot$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

+	0	x	y	z	t
0	0	x	y	z	t
x	x	y	z	t	0
y	y	z	t	0	x
z	z	t	0	x	y
t	t	0	x	y	z

·	0	x	y	z	t
0	0	0	0	0	0
x	0	x	y	z	t
y	0	y	t	x	z
z	0	z	x	t	y
t	0	t	z	y	x

Bu işleme göre $(\Im, +, \cdot)$bir değişmeli yarı halkadır.

$\mu = (1,0)/0 + (0.4,-0.3)/x + (0.5,-0.4)/y + (0.2,-0.8)/z + (0.3,-0.5)/t$ değerleri ile $\Im$ de $\mu =< \mu^+, \mu^- >$ bipolar bulanık ideali tanımlansın. $\mu =< \mu^+, \mu^- >$, $\Im$ değişmeli yarı halkasının 2-yutan bipolar bulanık idealidir.

Tanım 4.2. $\mu =< \mu^+, \mu^- >$, $\Im$ nin bir bipolar bulanık ideali olsun.$\forall r, s, t \in \Im$ ve $(\gamma, \delta) \in [0,1] \times [-1,0]$ için

$$\mu^+(rst) \geq \gamma \text{ iken } \mu^+(rs) \geq \gamma \text{ ya da } \sqrt{\mu^+}(st) \geq \gamma \text{ ya da } \sqrt{\mu^+}(rt) \geq \gamma, \quad (4.3)$$

$\mu^-(rst) \leq \delta$ iken $\mu^-(rs) \leq \delta$ ya da $\sqrt{\mu^-}(st) \leq \delta$ ya da $\sqrt{\mu^-}(rt) \leq \delta$, (4.4)

ise 2-yutan bipolar bulanık asalımsı ideal denir.

Örnek 4.2. $\mu = \langle \mu^+, \mu^- \rangle$ aşağıdaki şekilde tanımlı bipolar bulanık ideal olsun.

$$\lambda_\mu(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{eğer } x \in 12Z \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{array} \right\} \text{ ve } \delta_\mu(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -1, & \text{eğer } x \in 12Z \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{array} \right\}$$

μ nün 2-yutan bipolar bulanık asalımsı ideal olduğu açıktır. Fakat μ, 2-yutan bipolar bulanık ideal değildir. Çünkü $2.2.3 \in \mu$ ama $2.2 \notin \mu$ ve $2.3 \notin \mu$ dir.

Teorem 4.1. *μ, $\Im$ yarı halkasının bir bipolar bulanık alt kümesi olsun.μ nün 2-yutan bipolar bulanık ideal olması için gerek ve yeter şart $\mu_{(\gamma,\delta)}$ nın 2-yutan ideal olmasıdır.*

İspat ($\Rightarrow$): μ, $\Im$ nin 2-yutan bipolar bulanık ideali olsun.$\mu_{(\gamma,\delta)}$ nin $\Im$ yarı halkasında 2-yutan ideal olduğunu gösterelim.

$r, s, t \in \Im$ ve $(\gamma, \delta) \in [0,1] \times [-1,0]$ için $rst \in \mu_{(\gamma,\delta)}$ alalım. μ nün $\Im$ nin 2-yutan bipolar bulanık ideali olduğu gerçeği göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} rst \in \mu_{(\gamma,\delta)} &\implies \mu^+(rst) \geq \gamma \text{ ve } \mu^-(rst) \leq \delta \\ &\implies \mu^+(rs) \geq \gamma \text{ ya da } \mu^+(st) \geq \gamma \text{ ya da } \mu^+(rt) \geq \gamma \text{ ve} \\ &\quad \mu^-(rs) \leq \delta \text{ ya da } \mu^-(st) \leq \delta \text{ ya da } \mu^-(rt) \leq \delta \\ &\implies rs \in \mu_{(\gamma,\delta)} \text{ ya da } st \in \mu_{(\gamma,\delta)} \text{ ya da } rt \in \mu_{(\gamma,\delta)} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle $\mu_{(\gamma,\delta)}$ ideali $\Im$ nin 2-yutan idealidir.

($\Leftarrow$): Tersine, μ ideali $\Im$ nin bipolar bulanık altkümesi ve her $(\gamma, \delta) \in [0,1] \times [-1,0]$ için $\mu_{(\gamma,\delta)}$ nın 2-yutan ideal olduğunu varsayalım. Fatak μ, $\Im$ nin 2-yutan bipolar bulanık ideali olmasın.Bu durumda, $r, s, t, \in \Im$ ve $(\gamma, \delta) \in [0,1] \times [-1,0]$ için $\mu^+(rst) \geq \gamma$ iken $\mu^+(rs) \geq \gamma$ ya da $\mu^+(st) \geq \gamma$ ya da $\mu^+(rt) \geq \gamma$, ve $\mu^-(rst) \leq \delta$ iken $\mu^-(rs) \leq \delta$ ya da $\mu^-(st) \leq \delta$ ya da $\mu^-(rt) \leq \delta$ sağlanmaz. Demek ki $rst \in \mu_{(\gamma,\delta)}$ iken $rs \in \mu_{(\gamma,\delta)}$ ya da $st \in \mu_{(\gamma,\delta)}$ ya da $rt \in \mu_{(\gamma,\delta)}$ sonucuna ulaşamayız.

Bu $\mu_{(\gamma,\delta)}$ idealinin $\Im$ nin 2-yutan ideali olması ile çelişmektedir. Bu yüzden temel varsayımımız doğru değildir. Dolayısıyla μ idealinin $\Im$ nin 2-yutan bipolar bulanık ideali olduğu sonucuna ulaşırız.

Teorem 4.2. *Θ, $\Im$ yarı halkasının 2-yutan ideali ve $(\gamma, \delta) \in [0,1] \times [-1,0]$ olsun.*

$\Im$ nin bipolar bulanık alt kümesi μ olmak üzere

$$\Theta(a) = \begin{cases} (1,-1) & ; \quad a \in \mu \\ (A,w) & ; \quad a \notin \mu \end{cases} \tag{4.5}$$

ise Θ, $\Im$ nin 2-yutan bipolar bulanık idealidir.

İspat Θ, $\Im$ yarı değişmeli halkasının 2-yutan bipolar bulanık ideali ve $r,s,t \in \Im$ olsun. $\mu^+(rst) \geq \gamma$ ve $\mu^-(rst) \leq \delta$ olduğunu kabul edelim.

Durum 1: $\gamma = 1$ ve $\delta = -1$

$rst \in \Theta_{(1,-1)}$ öyle ki $rst \in \mu$. O zaman

$$\begin{aligned} &\mu^+(rs) < \gamma = 1 \text{ ya da } \mu^+(st) < \gamma = 1 \text{ ya da } \mu^+(rt) < \gamma = 1 \text{ ve} \\ &\mu^-(rs) > \delta = -1 \text{ ya da } \mu^-(st) > \delta = -1 \text{ ya da } \mu^-(rt) > \delta = -1. \end{aligned}$$

dir. Buradan $rs \notin \mu, st \notin \mu$ ve $rt \notin \mu$ dir. Bu Θ nın 2-yutan ideal olması ile çelişir.

Durum 2: $\gamma = A$ ve $\delta = w$

Buradan $\Theta(rst) = (A,w)$ öyle ki $\mu^+(rst) = A$ ve $\mu^-(rst) = w$ dir. $\Theta(rs)$ ya da $\Theta(st)$ ya da $\Theta(rt)$ bunlardan birinin (A,w) ya eşitliği sağlanır. Diğer açıdan $\Theta(rs), \Theta(st)$ ve $\Theta(rt)$ nin tamamı $(1,-1)$ e eşittir. Bu durumda $rs, st, rt \in \mu$ dır. Ancak $rst \notin \mu$ idi. Bu Θ nın 2-yutan ideal olması ile çelişir.

Teorem 4.3. *μ, $\Im$ yarı halkasının 2-yutan bipolar bulanık asalımsı ideali olsun. O zaman $\sqrt{\mu}$, $\Im$ yarı halkasının 2-yutan bipolar bulanık idealdir.*

İspat μ, $\Im$ yarı halkasının 2-yutan bipolar bulanık asalımsı ideali olsun. $r,s,t \in \Im$ ve $(\gamma,\delta) \in [0,1] \times [-1,0]$ için $\sqrt{\mu}(rst) \geq (\gamma,\delta)$ olduğunu varsayalım. Dolayısıyla

$$\sqrt{\mu^+}(rst) \geq \gamma \text{ ve } \sqrt{\mu^-}(rst) \leq \delta.$$

Buradan

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu^+}(rst) \geq \gamma &\implies \bigvee \{\mu^+(rst)^k \mid k \in Z \geq \gamma\} \\ &\implies \bigvee \{\mu^+(r^k s^k t^k) \mid k \in Z \geq \gamma\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu^-}(rst) \leq \delta &\implies \bigwedge \{\mu^-(rst)^k \mid k \in Z \leq \delta\} \\ &\implies \bigwedge \{\mu^-(r^k s^k t^k) \mid k \in Z \leq \delta\}. \end{aligned}$$

Farz edelim ki $st, rt \notin \sqrt{\mu}$ öyle ki $st, rt \notin \sqrt{\mu^+}$ ve $st, rt \notin \sqrt{\mu^-}$. Böylece

$(\gamma, \delta) \in [0,1] \times [-1,0]$ ve $k \in Z$ için

$$\sqrt{\mu^+}(s^k t^k) \not\geq \gamma \text{ ve } \sqrt{\mu^+}(r^k t^k) \not\geq \gamma$$

$$\sqrt{\mu^-}(s^k t^k) \not\leq \delta \text{ ve } \sqrt{\mu^-}(r^k t^k) \not\leq \delta$$

elde edilir.

μ nün $\Im$ yarı halkasının 2-yutan bipolar bulanık asalımsı ideali olduğu gerçeğinden hareketle $\exists l \in Z$ için $\mu^+((r^k s^k)^l) \geq \gamma$ ve $\mu^-((r^k s^k)^l) \leq \delta$ söyleyebiliriz. Böylece

$$\bigvee\{\mu^+(r^u s^u) \mid u \in Z \geq \gamma\}$$

$$\bigwedge\{\mu^-(r^u s^u) \mid u \in Z \leq \delta\}.$$

Böylece $rs \in \sqrt{\mu^+}$ ve $rs \in \sqrt{\mu^-}$ elde ederiz. Bu yüzden $rs \in \sqrt{\mu}$ dir. Sonuç olarak $\sqrt{\mu}$, $\Im$ yarı halkasının 2-yutan bipolar bulanık idealidir.

Şimdi $\Im$ nin 2-yutan bipolar bulanık ideallerinin boştan farklı kesişim ailesinin de $\Im$ nin 2-yutan bipolar bulanık ideali olduğunu göstereceğiz.

Teorem 4.4. *$\Im$ yarı halkasının 2-yutan bipolar bulanık ideallerinin $i = 1, 2, \cdots \in J$ için boştan farklı ailesi μ_i olsun. O zaman $\bigcap \mu_i$, $\Im$ yarı halkasında 2-yutan bipolar bulanık idealdir.*

İspat $\Im$ nin bipolar bulanık ideallerinin boştan farklı ailesinin kesişimi de $\Im$ nin bipolar bulanık ideali olduğu açıktır. O halde, 2-yutan idealler için, $\{\mu_i : i \in J\}$, $\Im$ nin 2-yutan bipolar bulanık ideallerinin boştan farklı ailesi ve $r, s, t \in \Im$ olsun. O zaman,

$$\left(\bigcap_{i\in J}\mu_i\right)(rst) \geq (\gamma,\delta)$$

$$\Longrightarrow \left(\bigcap_{i\in J}\mu_i^+\right)(rst) \geq \gamma \text{ ve } \left(\bigcup_{i\in J}\mu_i^+\right)(rst) \leq \delta$$

$$\Longrightarrow \bigwedge_{i\in J}\{\mu_i^+(rst)\} \geq \gamma \text{ ve } \bigvee_{i\in J}\{\mu_i^+(rst)\} \leq \delta$$

$$\Longrightarrow \bigwedge_{i\in J}\{\mu_i^+(rs)\} \geq \gamma \text{ ya da } \bigwedge_{i\in J}\{\mu_i^+(st)\} \geq \gamma \text{ ya da } \bigwedge_{i\in J}\{\mu_i^+(rt)\} \geq \gamma$$

ve

$$\bigvee_{i\in J}\{\mu_i^+(rs)\} \leq \delta \text{ ya da } \bigvee_{i\in J}\{\mu_i^+(st)\} \leq \delta \text{ ya da } \bigvee_{i\in J}\{\mu_i^+(rt)\} \leq \delta$$

$$\Longrightarrow \left(\bigcap_{i\in J}\mu_i^+\right)(rs) \geq \gamma \text{ ya da } \left(\bigcap_{i\in J}\mu_i^+\right)(st) \geq \gamma \text{ ya da } \left(\bigcap_{i\in J}\mu_i^+\right)(rt) \geq \gamma$$

ve

$$\left(\bigcup_{i\in J}\mu_i^+\right)(rs) \leq \delta \text{ ya da } \left(\bigcup_{i\in J}\mu_i^+\right)(st) \leq \delta \text{ ya da } \left(\bigcup_{i\in J}\mu_i^-\right)(rt) \leq \delta$$

$$\Longrightarrow \left(\bigcap_{i\in J}\mu_i\right)(rs) \geq (\gamma,\delta) \text{ ya da } \left(\bigcap_{i\in J}\mu_i\right)(st) \geq (\gamma,\delta)$$

ya da $\left(\bigcap_{i\in J}\mu_i\right)(rt) \geq (\gamma,\delta)$.

Böylece, $\bigcap_{i\in J}\mu_i$ de $\Im$ yarı halkasının 2-yutan bipolar bulanık idealidir.

Teorem 4.5. *$\Im$ yarı halkasının 2-yutan bipolar bulanık asalımsı ideallerinin $i = 1, 2, \cdots \in J$ için boştan farklı ailesi μ_i olsun. O zaman $\bigcap \mu_i$, $\Im$ yarı halkasında 2-yutan bipolar bulanık asalımsı idealdir.*

İspat Teorem4.4'e benzer şekilde ispat edilebilir.

Teorem 4.6. *$\rho : \Im_1 \to \Im_2$ yarı halka homomorfizması ve μ, $\Im_2$ de 2-yutan bipolar bulanık ideal olsun. O halde $\rho^{-1}(\mu)$ de $\Im_1$ de 2-yutan bipolar bulanık idealdir.*

İspat $\rho : \Im_1 \to \Im_2$ yarı halka homomorfizması ve μ, $\Im_2$ de 2-yutan bipolar bulanık

ideal olsun. Şimdi $r, s, t \in \Im$ ve $(\gamma, \delta) \in [0,1] \times [-1,0]$ için

$$
\begin{aligned}
&\rho^{-1}(\mu)(rst) \geq (\gamma, \delta) \\
&\quad \Longrightarrow \ \rho^{-1}(\mu^+)(rst) \geq \gamma \ \text{ ve } \ \rho^{-1}(\mu^-)(rst) \leq \delta \\
&\quad \Longrightarrow \ \mu^+(\rho(rst)) \geq \gamma \ \text{ ve } \ \mu^-(\rho(rst)) \leq \delta \\
&\quad \Longrightarrow \ \mu^+(\rho(r)\rho(s)\rho(t)) \geq \gamma \ \text{ ve } \ \mu^-(\rho(r)\rho(s)\rho(t)) \leq \delta \\
&\quad \Longrightarrow \ \mu^+(\rho(r)\rho(s)) \geq \gamma \ \text{ ya da } \ \mu^+(\rho(s)\rho(t)) \geq \gamma \ \text{ ya da } \ \mu^+(\rho(r)\rho(t)) \geq \gamma \\
&\qquad\quad \text{ve} \\
&\qquad\quad \mu^-(\rho(r)\rho(s)) \leq \delta \ \text{ ya da } \ \mu^-(\rho(s)\rho(t)) \leq \delta \ \text{ ya da } \ \mu^-(\rho(r)\rho(t)) \leq \delta \\
&\quad \Longrightarrow \ \rho^{-1}(\mu^+)(rs) \geq \gamma \ \text{ ya da } \ \rho^{-1}(\mu^+)(st) \geq \gamma \ \text{ ya da } \ \rho^{-1}(\mu^+)(rt) \geq \gamma \\
&\qquad\quad \text{ve} \\
&\qquad\quad \rho^{-1}(\mu^-)(rs) \leq \gamma \ \text{ ya da } \ \rho^{-1}(\mu^-)(st) \leq \gamma \ \text{ ya da } \ \rho^{-1}(\mu^-)(rt) \leq \gamma \\
&\quad \Longrightarrow \ \rho^{-1}(\mu)(rs) \geq (\gamma, \delta) \text{ ya da } \rho^{-1}(\mu)(st) \geq (\gamma, \delta) \text{ ya da } \rho^{-1}(\mu)(rt) \geq (\gamma, \delta).
\end{aligned}
$$

Böylece, $\rho^{-1}(\mu)$ de $\Im_1$ in 2-yutan bipolar bulanık idealidir.

Teorem 4.7. *$\rho : \Im_1 \to \Im_2$ yarı halka homomorfizması ve ν, $\Im_1$ de 2-yutan bipolar bulanık ideal olsun. O halde, $\rho(\nu)$ de $\Im_2$ de 2-yutan bipolar bulanık idealdir.*

İspat Teorem4.6'e benzer şekilde ispat edilebilir.

Teorem 4.8. *μ_1, 2-yutan bipolar bulanık ideal ve $\mu_1 \subseteq \mu_2$ olmak üzere μ_1 ve μ_2, $\Im$ nin iki bipolar bulanık ideali olsun. Eğer $r, s, t \in \Im$ ve $(\gamma, \delta) \in [0,1] \times [-1,0]$ için $\mu_2(rst) \geq \mu_1(rst) \geq (\gamma, \delta)$ ise μ_2 de $\Im$ değişmeli yarı halkasında 2-yutan bipolar bulanık idealdir.*

İspat μ_1 ve μ_2, $\Im$ nin iki bipolar bulanık alt kümesi iken $\mu_1 \subseteq \mu_2$ ve μ_1 2-yutan bipolar bulanık ideal olsun.$r, s, t \in \Im$ ve $(\gamma, \delta) \in [0,1] \times [-1,0]$ için $\mu_2(rst) \geq (\gamma, \delta)$ olsun. $\mu_2(rst) \geq \mu_1(rst) \geq (\gamma, \delta)$ ve Ω_1 2-yutan bipolar bulanık ideal olmak üzere

$$\mu_1(rs) \geq (\gamma, \delta) \ \text{ ya da } \ \mu_1(st) \geq (\gamma, \delta) \ \text{ ya da } \ \mu_1(rt) \geq (\gamma, \delta)$$

Buradan, $\mu_2(rs) \geq \mu_1(rs) \geq (\gamma, \delta)$ ya da $\mu_2(st) \geq \mu_1(st) \geq (\gamma, \delta)$ ya da $\mu_2(rt) \geq \mu_1(rt) \geq (\gamma, \delta)$ elde edilir.

Sonuç olarak μ_2 de 2-yutan bipolar bulanık idealdir.

Şimdi, yarı halkaların bipolar bulanık alt kümelerinin kartezyen çarpımını inceleyelim.

Tanım 4.3. μ ve ν sırasıyla $\Im$ ve $\Re$ nin iki bipolar bulanık alt kümesi olsun. μ ve ν nun kartezyen çarpımı aşağıdaki şekilde verilir.

$\mu =< \mu_1^+, \mu_1^- >$ ve $\nu =< \mu_2^+, \mu_2^- >$ olsun.

$$\begin{aligned}(\mu \times \nu)(r,s) &= \mu(r) \wedge \nu(s), \ \ \forall (r,s) \in \Im \times \Re, \ \ yani \\ (\mu \times \nu)(r,s) &= (\mu_1^+(r) \wedge \mu_2^+(s), \mu_1^-(r) \vee \mu_2^-(s)).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Tanım 4.4. $\Re$ bir yarı halka ve μ de $\Re$ nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. μ nün bipolar bulanık karakteristik fonksiyonu $\mathcal{X}_\mu < \mu^+_{\mathcal{X}_\mu}, \mu^-_{\mathcal{X}_\mu} >$ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned}&\mu^+_{\mathcal{X}_\mu} : \Re \to [0,1] \\ &r \to \mu^+_{\mathcal{X}_\mu}(r) = \begin{cases} 1 \ \ ; & \text{eğer } \ r \in \Re \\ 0 \ \ ; & \text{eğer } \ r \notin \Re \end{cases}\end{aligned} \tag{4.7}$$

ve

$$\begin{aligned}&\mu^-_{\mathcal{X}_\mu} : \Re \to [-1,0] \\ &r \to \mu^-_{\mathcal{X}_\mu}(r) = \begin{cases} -1 \ \ ; & \text{eğer } \ r \in \Re \\ 0 \ \ ; & \text{eğer } \ r \notin \Re. \end{cases}\end{aligned} \tag{4.8}$$

olarak verilir.

Teorem 4.9. *$\Im$ ve $\Re$ iki değişmeli yarı halka ve μ, $\Im$ nin 2-yutan bipolar bulanık ideali olsun. O halde $\mathcal{X}_\Re$, $\Re$ nin karakteristik fonksiyonu olmak üzere $\mu \times \mathcal{X}_\Re$, $\Im \times \Re$ nin 2-yutan bipolar bulanık idealidir.*

İspat Kabul edelim ki $\Im$ ve $\Re$ iki değişmeli yarı halka olsun. μ ve $\mathcal{X}_\Re$ sırasıyla $\Im$ ve $\Re$ nin 2-yutan bipolar bulanık ideali olsun.

$\mathcal{X}_\Re =< \mu^+_{\mathcal{X}_\Re}, \mu^-_{\mathcal{X}_\Re} >$ olsun.

$$\begin{aligned}&(\mu \times \mathcal{X}_\Re)(r_1s_1t_1, r_2s_2t_2) \geq (\gamma, \delta) \\ &\implies (\mu^+ \times \mathcal{X}_{\mu^+_\Re})(r_1s_1t_1, r_2s_2t_2) \geq \gamma \ \text{ ve } \ (\mu^- \times \mathcal{X}_{\mu^-_\Re})(r_1s_1t_1, r_2s_2t_2) \leq \delta \\ &\implies \mu^+(r_1s_1t_1) \wedge \mathcal{X}_{\mu^+_\Re}(r_2s_2t_2) \geq \gamma \ \text{ ve } \ \mu^-(r_1s_1t_1) \vee \mathcal{X}_{\mu^-_\Re}(r_2s_2t_2) \leq \delta \\ &\implies \mu^+(r_1t_1) \wedge \mathcal{X}_{\mu^+_\Re}(r_2s_2t_2) \geq \gamma \ \text{ ya da } \ \mu^+(s_1t_1) \wedge \mathcal{X}_{\mu^+_\Re}(r_2s_2t_2) \geq \gamma \ \text{ ya da} \\ &\qquad \mu^+(r_1t_1) \wedge \mathcal{X}_{\mu^+_\Re}(r_2s_2t_2) \geq \gamma \\ &\qquad \text{ve} \\ &\qquad \mu^-(r_1s_1) \vee \mathcal{X}_{\mu^-_\Re}(r_2s_2t_2) \leq \delta \ \text{ ya da } \ \mu^-(s_1t_1) \vee \mathcal{X}_{\mu^-_\Re}(r_2s_2t_2) \leq \delta \ \text{ ya da} \\ &\qquad \mu^-(r_1t_1) \wedge \mathcal{X}_{\mu^-_\Re}(r_2s_2t_2) \leq \delta\end{aligned}$$

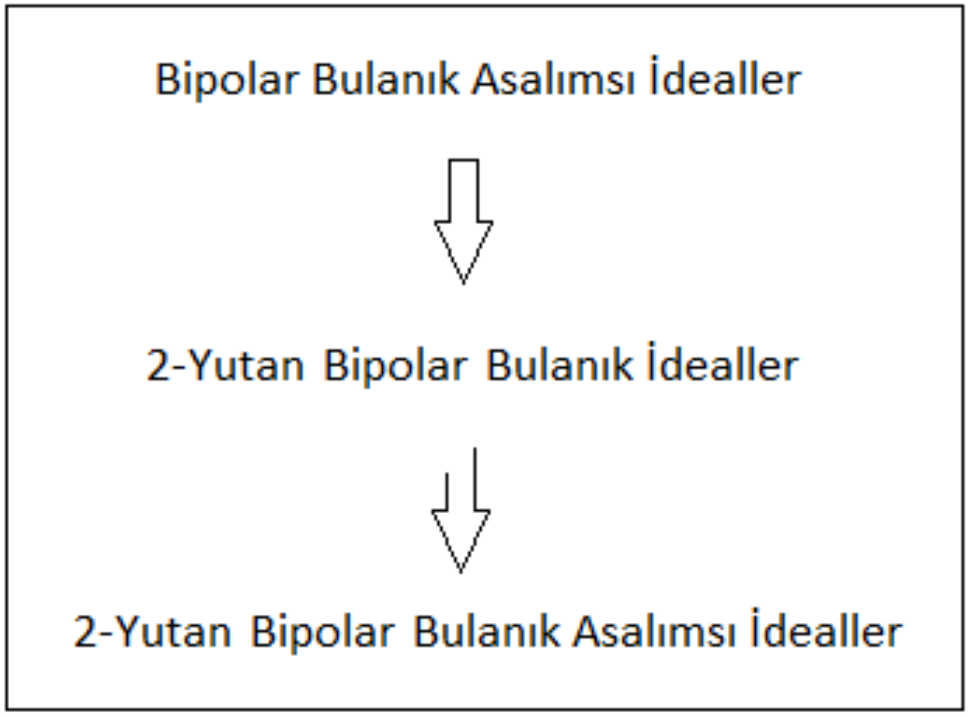
$r_2, s_2, t_2 \in \Re$ olduğu için $\mathcal{X}_{\mu^+_{\Re}}(r_2 s_2 t_2) = 1$ ve $\mathcal{X}_{\mu^-_{\Re}}(r_2 s_2 t_2) = 0$ olur.

Buradan $\mu^+(r_1 s_1) \wedge \mathcal{X}_{\mu^+_{\Re}}(de) \geq \gamma$ ya da $\mu^+(s_1 t_1) \wedge \mathcal{X}_{\mu^+_{\Re}}(de) \geq \gamma$ ya da $\mu^+(r_1 t_1) \wedge \mathcal{X}_{\mu^+_{\Re}}(de) \geq \gamma$ ve $\mu^-(r_1 s_1) \vee \mathcal{X}_{\mu^-_{\Re}}(de) \leq \delta$ ya da $\mu^-(s_1 t_1) \vee \mathcal{X}_{\mu^-_{\Re}}(de) \leq \delta$ ya da $\mu^-(r_1 t_1) \wedge \mathcal{X}_{\mu^-_{\Re}}(de) \leq \delta$.

Burada $d, e \in \{r_2, s_2, t_2\}$. Bu nedenle, $\mu \times \mathcal{X}_{\Re}(r_1 s_1, de) \geq (\gamma, \delta)$ ya da $\mu \times \mathcal{X}_{\Re}(r_1 t_1, de) \geq (\gamma, \delta)$ ya da $\mu \times \mathcal{X}_{\Re}(r_1 t_1, de) \geq (\gamma, \delta)$

Bu yüzden $\mu \times \mathcal{X}_{\Re}$, $\Im \times \Re$ nin 2-yutan bulanık idealidir.

Sonuç 4.1. *Verilen tanımları şema halinde verebiliriz:*



Şekil 4.1 2-Yutan Bipolar Bulanık İdealler

5
SONUÇ

Bu çalışmada bulanık sezgisel kümeler, belirsiz kümeler ve bipolar kümelerden yararlanılarak, değişmeli yarı halkalarda 2-yutan idealler teorik bir bakış açısıyla incelenmiştir. Ayrıca 2-yutan sezgisel bulanık ideallerin, 2-yutan belirsiz ideallerin ve 2-yutan bipolar bulanık ideallerin kartezyen çarpımı ve özellikleri üzerinde duruldu.

Bu bağlamda, bulanık sezgisel kümeler, belirsiz kümeler ve bulanık bipolar kümeler kullanılarak oluşturulan yeni yapılarda da klasik cebirde varlığı bilinen özelliklerin korunduğu sonucuna ulaşılmıştır.

KAYNAKÇA

[1] L. Zadeh, "Fuzzy sets," *Inform Control*, vol. 8, pp. 338–353, 1965.

[2] A. Rosenfeld, "Fuzzy groups," *Journal of mathematical analysis and applications*, vol. 35, no. 3, pp. 512–517, 1971.

[3] L. Wang-Jin, "Operations on fuzzy ideals," *Fuzzy sets and systems*, vol. 11, no. 1, pp. 31–39, 1983.

[4] T. Mukherjee, M. Sen, "Prime fuzzy ideals in rings," *Fuzzy sets and systems*, vol. 32, no. 3, pp. 337–341, 1989.

[5] Atanassov, "Intuitionistic fuzzy sets," *Fuzzy sets and systems*, vol. 20, no. 1, pp. 87–96, 1986.

[6] K. Hur, H. W. Kang, H. K. Song, "Intuitionistic fuzzy subgroups and subrings,", vol. 25, no. 1, pp. 19–41, 2003.

[7] M. F. Marashdeh, A. R. Salleh, "Intuitionistic fuzzy rings," *Int. J. Algebra*, vol. 5, no. 1, pp. 37–47, 2011.

[8] P. Sharma, "Translates of intuitionistic fuzzy subring," *International Review of Fuzzy Mathematics*, vol. 6, no. 2, pp. 77–84, 2011.

[9] W.-L. Gau, D. J. Buehrer, "Vague sets," *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, vol. 23, no. 2, pp. 610–614, 1993.

[10] W.-R. Zhang, "(yin)(yang) bipolar fuzzy sets," in *1998 IEEE international conference on fuzzy systems proceedings. IEEE world congress on computational intelligence (Cat. No. 98CH36228)*, IEEE, vol. 1, 1998, pp. 835–840.

[11] A. Badawi, "On 2-absorbing ideals of commutative rings," *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, vol. 75, no. 3, pp. 417–429, 2007.

[12] A. Y. Darani, G. Ghasemi, "On l-fuzzy 2-absorbing ideals," *risi*, vol. 1, p. 1, 2016.

[13] A. Y. Darani, A. Hashempoor, "L-fuzzy 0-(1-or 2-or 3-) 2-absorbing ideals in semiring," *Annals of Fuzzy Math. and Inform*, vol. 7, no. 2, pp. 303–311, 2014.

[14] J. S. Golan, J. S. Golan, "Hemirings and semirings: Definitions and examples," *Semirings and their Applications*, pp. 1–18, 1999.

[15] A. Badawi, U. Tekir, E. Yetkin, "On 2-absorbing primary ideals in commutative rings," *Bull. Korean Math. Soc*, vol. 51, no. 4, pp. 1163–1173, 2014.

[16] I. Bakhadach, S. Melliani, M. Oukessou, L. Chadli, "Intuitionistic fuzzy ideal and intuitionistic fuzzy prime ideal in a ring," *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets*, vol. 22, no. 2, pp. 59–63, 2016.

[17] D. Ahmed, Y. Elkettani, A. Kasem, "On intuitionistic fuzzy 2-absorbing ideals in commutative rings," *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 13, no. 9, pp. 5479–5489, 2017.

[18] T. Mukherjee, M. Sen, "Primary fuzzy ideals and radical of fuzzy ideals," *Fuzzy sets and systems*, vol. 56, no. 1, pp. 97–101, 1993.

[19] A. Malik, J. N. Mordeson, "Fuzzy prime ideals of a ring," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 37, no. 1, pp. 93–98, 1990.

[20] F. Sidky, S. Khatab, "Nil radical of fuzzy ideal," *Fuzzy sets and systems*, vol. 47, no. 1, pp. 117–120, 1992.

[21] M. Palanivelrajan, S. Nandakumar, "Some operations of intuitionistic fuzzy primary and semi-primary ideal," *Asian journal of algebra*, vol. 5, no. 2, p. 44, 2012.

[22] T. Eswarlal, "Vague ideals and normal vague ideals in semirings," *INTERNATIONAL JOURNAL OF COMPUTATIONAL COGNITION (HTTP://WWW. IJCC. US)*, vol. 6, no. 3, 2008.

[23] J.-G. Lee, K. Hur, "Bipolar fuzzy relations," *Mathematics*, vol. 7, no. 11, p. 1044, 2019.

[24] M. O. Massa'deh, "On bipolar fuzzy cosets, bipolar fuzzy ıdeals and ısomorphism of Γ- near rings," *Far East J. Math. Sci*, vol. 102, no. 4, pp. 731–747, 2017.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Makale

1. E. M. Ozkan, S. Onar, A. Ozkan, R. Ayan, "2-absorbing intuitionistic fuzzy ideals of commutative semirings", Journal of Science and Arts, vol. 23, no. 1, pp. 187-198, 2023.

Konferans Bildirisi

1. R. Ayan, E. M. Özkan, "On 2-Absorbing Fuzzy Ideals of Commutative Semirings", 5th International E-Conference on Mathematical Advances and Its Applications, ss.158, 2022.

2. R. Ayan, "On 2-Absorbing Vague Fuzzy Ideals of Commutative Semirings", Izmır Mathematics Days-IV, ss.42, 2022.

3. E. M. Özkan, S. Onar, A. Özkan, R. Ayan, "A Note on 2-Absorbing Vague Ideals of Commutative Semirings", 9th International Congress on Fundamental and Applied Sciences, ss.173, 2022.

4. R. Ayan, E. M. Özkan, S. Onar, A. Özkan, "On 2-Absorbing Bipolar Fuzzy Primary Ideals of Commutative Semirings", 4th International Congress on Applied Sciences Engineering and Mathematics, ss.15, 2022.

Proje

1. E. M. Özkan, R. Ayan, "Değişmeli Yarı Halkalarda 2-Yutan Bulanık İdealler," Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projesi(Tez Projesi, Yüksek Lisans), FYL-2022-5040, 2022-2023.