T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜREKLİ KESİRLER VE BAZI DİOFANT DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Nazlıhan ERTEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Doç. Dr. Murat ALAN

Temmuz, 2021

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜREKLİ KESİRLER VE BAZI DİOFANT DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Nazlıhan ERTEN tarafından hazırlanan tez çalışması 27.07.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Murat ALAN
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Murat ALAN, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi ____________________

Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi ____________________

Prof. Dr. Ünsal TEKİR, Üye
Marmara Üniversitesi ____________________

Danışmanım Doç. Dr. Murat ALAN sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Sürekli Kesirler ve Bazı Diofant Denklemlerin Çözümleri başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Nazlıhan ERTEN

İmza

Değerli aileme ithaf ediyorum.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında bilgi ve tecrübeleri ile beni aydınlatan yapıcı ve yönlendirici fikirleriyle bana daima yol gösteren, değerli zamanını ayırarak çalışmanın tamamlanmasını sağlayan Doç. Dr. Murat ALAN'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik bölümünün değerli hocalarına yardım ve teşviklerinden dolayı sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Başta akademik hayatım boyunca her türlü maddi ve manevi desteğini eksik etmeyen aileme ve daha sonra her zaman her koşulda yanımda olan Nihan-Furkan KARDOĞAN çiftine teşekkürlerimi sunarım.

Nazlıhan ERTEN

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

$[a_0; a_1, \ldots, a_n]$	Sürekli Kesirler
$c_k = \dfrac{p_k}{q_k}$	Sürekli Kesrin k. Yaklaşımı
$[a_0; a_1, ...\overline{a_{N-1}, a_N, a_{N+1}, ..., a_{N+k-1}}]$	Periyodik Sürekli Kesir
$[a_k]$	a_k 'nın yaklaşık değeri

ÖZET

Sürekli Kesirler ve Bazı Diofant Denklemlerin Çözümleri

Nazlıhan ERTEN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Murat ALAN

Bu çalışmada Sürekli Kesirlerin teorisi ve uygulamaları üzerinde durulmuştur.Birinci bölümde literatür incelemesi ve tezin amacı belirtilmiştir. İkinci bölümde Sonlu,Sonsuz ve Periyodik Sürekli Kesirlerin ifade edilişleri ve yakınsaklarının bulunuşu gösterilip,uygulamalarla desteklenmiştir.Üçüncü bölümde sürekli kesirler yardımıyla pell denklemlerinin çözümü anlatılmıştır.Son bölümde ise $x^2 - 5y^2 = -11^t$ denkleminin çözümleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sürekli kesirler, Pell denklemleri, tekrarlanan bağlantılar

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

Continuous Fractions and Some Diophant Equations Solutions

Nazlıhan ERTEN

Faculty of Arts and Sciences
Master of Science Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Murat ALAN

In this study, the theory and applications of Continuous Fractions are emphasized. In the first part, the literature review and the purpose of the thesis are stated. In the second chapter, the expressions of finite, infinite and periodic continuous fractions and their convergence are shown and supported with applications. In the third chapter, the solution of pell equations with the help of continuous fractions is explained. In the last chapter, the solutions of the equation $x^2 - 5y^2 = -11^t$ are examined.

Keywords: Continuous fractions, Pell equations, recurrence relations

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING

1
GİRİŞ

1.1 Literatür incelemesi

Bu çalışmada pell denklemi olarak adlandırılan $x^2 - dy^2 = \pm 1$ şeklindeki denklemlerin çözümleri üzerinde durulmuştur. Bu eşitliğin, aslında John Pell'den (1611-1685) önce 7'nci ve 12'nci yüzyıllarda Brahma ve Bhaskara tarafından özel çözümlerinin yapıldığı bilinmektedir. Öte yandan ünlü Fransız matematikçi Pierre Fermat, 1657'de dünyanın tüm matematikçilerine bu denklemin genel çözümünü yapma çağrısında bulunmuştur. İngiliz matematikçiler Wallis ve Lord Brouncker uzun uğraşlar sonrasında genel çözümü bulmuşlar ve John Pell'in de bazı eklemeler yaptığı Rahn'ın Algebra adlı eserinde yayımlamışlardır.

Matematikte Pisagor Teoremi, Pascal Üçgeni gibi birçok kavram ve teorem keşfedenin değil ünlü yapanın adıyla anılır. Bu eşitlikler de benzer bir kaderle Pell denklemleri olarak bilinmektedir. $x^2 - dy^2 = \pm 1$ şeklindeki pell denkleminin x ve y çözümlerine bakarken sayılar büyüdükçe x ve y değerlerini tek tek hesaplamak zorlaşacağından bu denklemdeki d sayısının sürekli kesir açılımından yararlanacağız.

Sürekli kesirler ilk olarak 1653 yılında John Wallis'in Arithmatica Infinitorum kitabında tanımlanmıştır. Esasen, Wallis'ten daha önce ifade olarak tanımlanmasa da sürekli kesir formunu kullanan matematikçiler vardı. Bunun ilk örneği, milattan önce 300'lü yıllarda yaşamış Öklid'in, ¨ Elementler kitabında yer alan iki sayının en büyük ortak bölenini bulmaya yarayan Öklid Algoritması'ndaki kullanılışıdır. Daha sonralarda, 6. yüzyılda yaşamış Hint matematikçi Aryabhata tarafından lineer denklemleri çözmek için kullanılmıştır. 1700'lü yıllara geldiğimizde büyük matematikçilerin de sürekli kesirlerle ilgilendiğini görüyoruz. Leonard Euler, Euler kuralı olarak bilinen hesaplamayı geliştirmiştir; Lagrange, kendi ismi ile anılan teoremi kanıtlamış ve Pell denklemi için sürekli kesirleri kullanarak genel bir çözüm sunmuştur.[1]

1.2 Tezin Amacı

Bu tezde sürekli kesir açılımlarından yararlanarak Pell denklemlerinin çözümleri ve uygulamaları üzerinde durulmuştur. Daha sonrasında bu çözümler yardımıyla

$$x^2 - 5y^2 = -11^t \tag{1.1}$$

denkleminin t parametresine bağlı çözümleri incelenmiştir.

2. ve 3. Bölümdeki tanım ve teoremler Kenneth Rosen'ın "Elementary number theory" kitabından alınmıştır. [2]

1.3 Orijinal Katkı

Sürekli kesir açılımları ve Pell denklemleri yardımıyla

$$x^2 - 5y^2 = -11^t \tag{1.2}$$

denkleminin çözümleri elde edildi.

2
SÜREKLİ KESİRLER

2.1 Sonlu Sürekli Kesirler

Tanım 2.1. a_0,a_1,a_2,...,a_n 'ler a_0 hariç hepsi pozitif olan reel sayılar olmak üzere;

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + a_n}} \tag{2.1}$$

kesrine sonlu sürekli kesir denir ve $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ şeklinde gösterilir. $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ sayıları sürekli kesrin kısmi katsayılarıdır. Eğer bu katsayıların hepsi tam sayı ise bu kesir basit sürekli kesir olarak adlandırılır.

Teorem 2.1. *Her sonlu sürekli basit kesir bir rasyonel sayı ifade eder.*

İspat. Tümevarımla ispatlayalım.

<u>$n = 1$:</u>

$$[a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 \cdot a_1 + 1}{a_1} \tag{2.2}$$

k pozitif tam sayısı için doğruluğunu kabul edip $k+1$ için bakalım:

$$[a_0; a_1, ..., a_{k+1}] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, ..., a_{k+1}]} \tag{2.3}$$

olur. Hipoteze göre, $[a_1; a_2, ..., a_{k+1}]$ rasyoneldir. Bu yüzden $\frac{r}{s}$ gibi sürekli kesir olacak şekilde $s \neq 0$ olmak üzere r ve s tam sayıları vardır.

$$[a_0; a_1, ..., a_{k+1}] = a_0 + \frac{1}{\frac{r}{s}} \tag{2.4}$$

şeklinde rasyonel sayı elde edilir.

■

Teorem 2.2. *Her rasyonel sayı sonlu basit sürekli kesir tarafından ifade edilebilir.*

İspat. $b > 0$ ve a, b tam sayı olacak şekilde $x = \frac{a}{b}$ var olsun. $r_0 = a,\ r_1 = b$ diyelim. Öklid algoritması ile aşağıdaki denklemlerin serisini elde ederiz.

$$
\begin{aligned}
r_0 &= r_1.q_1 + r_2 \quad , \quad 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 &= r_2.q_2 + r_3 \quad , \quad 0 < r_3 < r_2 \\
r_2 &= r_3.q_3 + r_4 \quad , \quad 0 < r_4 < r_3 \\
r_{n-3} &= r_{n-2}.q_{n-2} + r_{n-1} \quad , \quad 0 < r_{n-1} < r_{n-2} \\
r_{n-2} &= r_{n-1}.q_{n-1} + r_n \quad , \quad 0 < r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= r_n.q_n
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

$q_2, q_3, ..., q_n$ pozitif tam sayılardır. Bu denklemleri kesirde yerine yazarsak;

$$\frac{a}{b} = \frac{r_0}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1} = q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}} \tag{2.6}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}} \tag{2.7}$$

$$\frac{r_2}{r_3} = q_3 + \frac{r_4}{r_3} = q_3 + \frac{1}{\frac{r_3}{r_4}} \tag{2.8}$$

$$\vdots \tag{2.9}$$

$$\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} = q_{n-2} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = q_{n-2} + \frac{1}{\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}} \tag{2.10}$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \frac{1}{\frac{r_{n-1}}{r_n}} \tag{2.11}$$

$$\frac{r_{n-1}}{r_n} = q_n \tag{2.12}$$

$\frac{r_1}{r_2}$' nin değerini denklemde yerine yazarsak;

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}}$$

Benzer şekilde;

$$\frac{c}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\frac{r_3}{r_4}}}}$$

devam edilirse;

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\ddots + q_{n-1} + \frac{1}{q_n}}}}$$

kesri bulunur. Bu da her rasyonel sayının sonlu basit sürekli kesirle ifade edilebileceğini gösterir. ■

Bir rasyonel sayının sonlu sürekli kesir gösterimi tek türlü değildir.

$$a_n = (a_{n-1}) + \frac{1}{1} \tag{2.13}$$

tanımından;

$$[a_0; a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n] = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n - 1, 1] \tag{2.14}$$

$a_n > 1$ iken bu şekilde olduğunu görürüz.

Örnek 2.1. $\frac{7}{11}$ *'i iki şekilde elde ederiz*

$$\begin{aligned} \frac{7}{11} &= 0 + \frac{1}{\frac{11}{7}} \\ &= 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{3}}}} \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} [0; 1, 1, 1, 3] &= \left[a_0; a_1, a_2, a_3, a_4 - 1, 1\right] \\ &= [0; 1, 1, 1, 2, 1] \end{aligned} \tag{2.16}$$

Bu şekilde rasyonel sayılar sonlu basit sürekli kesirlerle 2 yolla ifade edilebilir. Onları tek sayılı veya çift sayılı kesirlerle ifade ederiz.

Tanım 2.2. $0 \leq k \leq n$ olmak üzere, $[a_0; a_1, ..., a_k]$ kesrine $[a_0; a_1, ..., a_n]$ kesrinin k. **yaklaşımı** denir ve c_k ile gösterilir.

Teorem 2.3. *$a_1, a_2, ..., a_n$ pozitif ve $a_0, a_1, ..., a_n$ reel sayı olsun. $p_0, p_1, ..., p_n$ ve $q_0, q_1, ..., q_n$ dizileri aşağıdaki gibi tanımlanırsa;*

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0 \\ q_0 &= 1 \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} p_1 &= a_0 \cdot a_1 + 1 \\ q_1 &= a_1 \end{aligned} \tag{2.18}$$

ve $k = 2, 3, ..., n$ için;

$$\begin{aligned} p_k &= a_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_k &= a_k \cdot q_{k-1} + q_{k-2} \end{aligned} \tag{2.19}$$

olur. k. yaklaşım

$$c_k = [a_0, a_1, ..., a_k]; c_k = \frac{p_k}{q_k} \tag{2.20}$$

şeklinde bulunur.

İspat. Tümevarımla ispatlayalım.

k=0 için:

$$c_0 = [a_0] = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0} \tag{2.21}$$

k=1 için:

$$c_1 = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1} \tag{2.22}$$

$k = 0$ ve $k = 1$ için doğruluğu görülür.

Teoremin $2 \leq k \leq n$ pozitif tam sayısı için doğru olduğunu kabul edelim. Böylece;

$$c_k = [a_0; a_1, \ldots, a_k] = \frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}} \tag{2.23}$$

olacaktır. Buradan;

$$
\begin{aligned}
c_{k+1} = [a_0; a_1, \dots, a_k, a_{k+1}] &= \left[a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right] \\
&= \frac{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) q_{k-1} + q_{k-2}} \\
&= \frac{a_{k+1}(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} \\
&= \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}} \\
&= \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

eşitliği elde edilir. ■

Örnek 2.2. $\frac{173}{55}$=$[3;6,1,7]$' *dir.*

$$
\frac{173}{55} = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1+\frac{1}{7}}}
$$

$$
\begin{aligned}
p_0 &= a_0 = 3 \\
p_1 &= a_0 a_1 + 1 = 19 \\
p_2 &= a_2 p_1 + p_0 = 22 \\
p_3 &= a_3 p_2 + p_1 = 173
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

$$
\begin{aligned}
q_0 &= 1 \\
q_1 &= a_1 = 6 \\
q_2 &= a_2 q_1 + q_0 = 7 \\
q_3 &= a_3 q_2 + q_1 = 55
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{p_0}{q_0} = \frac{3}{1} = 3 \\
c_1 &= \frac{p_1}{q_1} = \frac{19}{6} \\
c_2 &= \frac{p_2}{q_2} = \frac{22}{7} \\
c_3 &= \frac{p_3}{q_3} = \frac{173}{55}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Teorem 2.4. *$k \geq 1$ pozitif tam sayı olsun. $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ sürekli kesrinin k. yaklaşımı $c_k = \frac{p_k}{q_k}$' dır. Önceki teoremde tanımlananan p_k ve q_k*

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1} \tag{2.28}$$

eşitliğini sağlar.

İspat. Tümevarımla ispatlayalım.
k=1 için

$$p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_0 a_1 + 1).1 - a_0 a_1 = 1 \tag{2.29}$$

Teoremin $1 \leq k \leq n$ olacak şekilde k tam sayısı için doğru olduğunu kabul edelim.

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1} \tag{2.30}$$

Ve daha sonra $k+1$ için bakalım:

$$\begin{aligned}
p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1} &= (a_{k+1} p_k + p_{k-1}) q_k - p_k (a_{k+1} q_k + q_{k-1}) \\
&= a_{k+1} p_k q_k + p_{k-1} q_k - a_{k+1} p_k q_k - p_k q_{k-1} \\
&= p_{k-1} q_k - p_k q_{k-1} \\
&= -(-1)^{k-1} = (-1)^k
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Böylece teorem $k+1$ için de sağlanır. İspat sonlanır. ■

Örnek 2.3. $[3; 6, 1, 7]$ *sürekli kesri için önceki teoremin sağlandığını gösterelim.*
k=1 için:

$$p_1 q_0 - p_0 q_1 = 19.1 - 3.6 = (-1)^{1-1} = 1 \tag{2.32}$$

k=2 için:

$$p_2 q_1 - p_1 q_2 = 22.6 - 19.7 = (-1)^{2-1} = -1 \tag{2.33}$$

k=3 için:

$$p_3 q_2 - p_2 q_3 = 173.7 - 22.55 = (-1)^{3-1} = 1 \tag{2.34}$$

Sonuç 2.1. $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ *basit sürekli kesrinin* k*. yaklaşımı* $c_k = \frac{p_k}{q_k}$*' dır. Burada* p_k *ve* q_k *aralarında asaldır.*

İspat. $d = (p_k, q_k)$ olsun. Önceki teoremden;

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1} \tag{2.35}$$

olduğunu görmüştük. $d|(-1)^{k-1}$ olacağından $d = 1$ bulunur. Böylece p_k ve q_k aralarında asaldır. ■

Sonuç 2.2. $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ *basit sürekli kesrinin* k*. yaklaşımı* $c_k = \frac{p_k}{q_k}$ *olsun.*
$1 \leq k \leq n$ *olacak şekildeki tüm* k *tam sayıları için;*

$$c_k - c_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}} \tag{2.36}$$

$2 \leq k \leq n$ *olacak şekildeki tüm* k *tam sayıları için;*

$$c_k - c_{k-2} = \frac{a_k(-1)^k}{q_k q_{k-2}} \tag{2.37}$$

olacaktır.

İspat. $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$ olduğunu biliyoruz.
İlk tanımdan;

$$c_k - c_{k-1} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}} \tag{2.38}$$

İkinci tanımdan;

$$c_k - c_{k-2} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = \frac{p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k}{q_k q_{k-2}} \tag{2.39}$$

$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$ ve $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$ olduğundan denklemde yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k &= (a_k p_{k-1} + p_{k-2}) q_{k-2} - p_{k-2}(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) \\ &= a_k (p_{k-1} q_{k-2} - p_{k-2} q_{k-1}) \\ &= a_k (-1)^{k-2} \end{aligned} \tag{2.40}$$

Buradan;

$$c_k - c_{k-2} = \frac{a_k(-1)^k}{q_k q_{k-2}} \tag{2.41}$$

bulunur. ■

Teorem 2.5. $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ *sürekli kesrinin* k*. yaklaşımı* c_k *olsun.*

$$\begin{aligned} c_1 > c_3 > c_5 > \ldots \\ c_0 < c_2 < c_4 < \ldots \end{aligned} \tag{2.42}$$

$j = 0, 1, 2, \ldots$ *için* c_{2j+1} *şeklindeki tek sayıdaki yaklaşımlar* c_{2j} *şeklindeki çift sayıdaki yaklaşımlardan daha büyüktür.*

İspat. Önceki sonuç $k = 2, 3, \ldots, n$ için

$$c_k - c_{k-2} = \frac{a_k(-1)^k}{q_k q_{k-2}} \tag{2.43}$$

olduğunu söylemişti. k tek tam sayı ise;

$$c_k < c_{k-2} \tag{2.44}$$

k çift tam sayı ise;

$$c_k > c_{k-2} \tag{2.45}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} c_1 > c_3 > c_5 > \ldots, \\ c_0 < c_2 < c_4 > \ldots \end{aligned} \tag{2.46}$$

Tek sayıdaki yaklaşımların çit sayıdaki yaklaşımlardan büyük olduğunu göstermek için Sonuç 2.2.' yi kullanırsak;

$$c_{2m} - c_{2m-1} = \frac{(-1)^{2m-1}}{q_{2m}q_{2m-1}} < 0 \tag{2.47}$$

elde edilir. Böylece $c_{2m-1} > c_{2m}$ olur. c_{2k} ile c_{2j-1}'i kıyaslarsak;

$$c_{2j-1} > c_{2j+2k-1} > c_{2j+2k} > c_{2k} \tag{2.48}$$

olur. Buradan da tek sayılı yakınsakların çift sayılardan daha büyük olduğunu görürüz.

■

Örnek 2.4. $[2; 3, 1, 1, 2, 4]$ *sonlu basit sürekli kesrine bakalım.*

Yakınsakları;

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{2}{1} = 2 \\
c_1 &= \frac{7}{2} = 2.3333\ldots \\
c_2 &= \frac{9}{4} = 2.25\ldots \\
c_3 &= \frac{16}{7} = 2.2857\ldots \\
c_4 &= \frac{41}{18} = 2.2777\ldots \\
c_5 &= \frac{180}{79} = 2.2784\ldots
\end{aligned} \tag{2.49}$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned}
&c_0 = 2 < c_2 = 2.25 < c_4 = 2.2777 \\
&c_5 = 2.2784 < c_3 = 2.2857 < c_1 = 2.3333
\end{aligned} \tag{2.50}$$

2.2 Sonsuz Sürekli Kesirler

$a_0, a_1, a_2, \ldots$ pozitif tam sayılarının sonsuz dizisine sahip olduğunu kabul edelim. $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ sonsuz sürekli kesrini tanımlamak için matematiksel analizden yararlanacağız.

Teorem 2.6. *$a_1, a_2, \ldots$ pozitif ve $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tam sayılarının sonsuz dizisi $c_k = [a_0; a_1, \ldots, a_k]$ olsun. Buradan c_k limitleri α değerine yakınsar.*

$$\lim_{k \to \infty} c_k = \alpha \tag{2.51}$$

Bu teoremi ispat etmeden önce, α limit değerinin sonsuz sürekli basit kesrin değeri olarak tanımlandığına dikkat edelim.
İspat için çift numaralı yakınsakların sonsuz dizisinin artan ve bir üst sınıra sahip olduğunu, tek numaralı yakınsakların sonsuz dizisinin azalan ve bir alt sınıra sahip olduğunu göstereceğiz. Daha sonra bu iki dizinin limitlerinin eşit olduğunu göstereceğiz.

İspat. m pozitif bir çift sayı olsun.

$$\begin{aligned} &c_1 > c_3 > c_5 > \ldots > c_{m-1} \\ &c_0 < c_2 < c_4 > \ldots < c_m \end{aligned} \tag{2.52}$$

olduğunu biliyoruz. $2j \leq m$ ve $2k+1 < m$ iken $c_{2j} > c_{2k+1}$' dir. m'nin tüm değerleri düşünüldüğünde

$$\begin{aligned} &c_1 > c_3 > c_5 > \ldots > c_{2n-1} > c_{2n+1} > \ldots \\ &c_0 < c_2 < c_4 > \ldots < c_{2n-2} < c_{2n} < \ldots \end{aligned} \tag{2.53}$$

tüm pozitif tam sayılı j ve k için $c_{2j} > c_{2k+1}$'dir. Buradan $c_1, c_3, c_5, \ldots$ dizisi α_1 limitine yakınsar. $c_2, c_4, c_6, \ldots$ dizisi α_2 limitine yakınsar.

$$\lim_{n \to \infty} c_{2n+1} = \alpha_1 \tag{2.54}$$

$$\lim_{n \to \infty} c_{2n} = \alpha_2 \tag{2.55}$$

Burada α_1 ve α_2 limitlerinin eşit olduğunu gösterelim.

$$c_{2n+1} - c_{2n} = \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{(-1)^{(2n+1)-1}}{q_{2n+1} q_{2n}} = \frac{1}{q_{2n+1} q_{2n}} \tag{2.56}$$

Tüm k pozitif tam sayıları için $q_k \geq k$ olduğundan;

$$\frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}} < \frac{1}{(2n+1)(2n)} \tag{2.57}$$

yazılabilir. Buradan;

$$c_{2n+1} - c_{2n} = \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}} \tag{2.58}$$

elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty}(C_{2n+1} - C_{2n}) = 0 \tag{2.59}$$

Böylece $C_1, C_3, C_5, \ldots$ ve $C_0, C_2, C_4, \ldots$ dizileri eşit limite sahiplerdir.

$$\lim_{n\to\infty}(C_{2n+1} - C_{2n}) = \lim_{n\to\infty} C_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} C_{2n} = 0 \tag{2.60}$$

$\alpha_1 = \alpha_2$'dir. Tüm yakınsakların limit değerinin eşit olduğu sonucuna varılarak ispat tamamlanır. ■

Daha önceden rasyonel sayıların sonlu sürekli basit kesirlere sahip olduklarını göstermiştik. Şimdi ise herhangi bir sonsuz sürekli basit kesrin irrasyonel değere sahip olduğunu gösterelim.

Teorem 2.7. *$a_1, a_2, \ldots$ pozitif ve $a_0, a_1, a_2 \ldots$ tam sayı olsun. Bu durumda $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ irrasyoneldir.*

İspat. $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ olduğunu varsayalım.

α'nın k. yaklaşımı;

$$c_k = \frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k] \tag{2.61}$$

olsun. n pozitif tam sayıları için $C_{2n} < \alpha < C_{2n+1}$ olduğunu biliyoruz.

$$0 < \alpha - C_{2n} < C_{2n+1} - C_{2n} \tag{2.62}$$

$$C_{2n+1} - C_{2n} = \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}} \tag{2.63}$$

$$0 < \alpha - C_{2n} < \alpha - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}} \tag{2.64}$$

$$0 < \alpha q_{2n} - p_{2n} < \frac{1}{q_{2n+1}} \tag{2.65}$$

elde edilir.α'nın rasyonel olduğunu, $b \neq 0$ ve a, b tam sayı olacak şekilde $\alpha = \frac{a}{b}$ olduğunu varsayalım. Bu ifadeleri yerine yazarsak;

$$0 < \frac{aq_{2n}}{b} - p_{2n} < \frac{1}{q_{2n+1}} \tag{2.66}$$

bulunur. Ve bu eşitsizliği b çarparsak;

$$0 < aq_{2n} - bp_{2n} < \frac{b}{q_{2n+1}} \tag{2.67}$$

elde edilir.
Tüm n pozitif tam sayıları için $aq_{2n} - bp_{2n}$ ifadesi tam sayıdır. Ve $q_{2n+1} > 2n+1$ ifadesini kullanırsak $q_{2n+1} > b$ olacak şekilde n tam sayısı bulunabilir. Böylece $\frac{b}{q_{2n+1}} < 1$' dir. $aq_{2n} - bp_{2n}$ sayısı 0 ile 1 arasında tam sayı olamayacağından bu bir çelişkidir. α'nın irrasyonel olduğu sonucuna vararak ispatı tamamlarız. ■

Teorem 2.8. *$\alpha = \alpha_0$ bir irrasyonel sayı olsun. Ve $k = 0, 1, 2, ...$ için tekrarlayan*

$$a_k = [\alpha_k], \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k} \tag{2.68}$$

dizisi var olsun. Burada α, $[a_0; a_1, a_2, ...]$ sonsuz sürekli basit kesrin değeridir.

İspat. Aşağıdaki tekrarlanan tanımdan her k tam sayısı için a_k'nın tam sayı olduğunu görürüz. Daha sonra matematiksel tümevarımı kullanarak her k için α_k'nın irrasyonel olduğunu kolayca gösterebiliriz. İlk olarak $\alpha_0 = \alpha$ irrasyoneldir. Daha sonra α_k'nın irrasyonel olduğunu kabul edersek α_{k+1}'in de irrasyonel olduğunu kolayca görebiliriz.

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= \frac{1}{(\alpha_k - a_k)} = \frac{1}{\alpha_k - [\alpha_k]} \\ \alpha_k &= a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}} \end{aligned} \tag{2.69}$$

Eğer α_{k+1} rasyonel ise α_k' da rasyoneldir.
α_k irrasyonel ve a_k tam sayı olduğundan $\alpha_k \neq a_k$'dır.

$$\begin{aligned} a_k < \alpha_k < \alpha_{k+1} \\ 0 < \alpha_k - a_k < 1 \end{aligned} \tag{2.70}$$

yazılabilir. Buradan;

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{(\alpha_k - a_k)} > 1 \tag{2.71}$$

bulunur. Ve sonuç olarak $k = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$a_{k+1} = [\alpha_{k+1}] \geq 1 \tag{2.72}$$

Bu tüm $a_1, a_2, \ldots$ sayılarının pozitif olduğu anlamına gelir.

$$\begin{aligned} \alpha = \alpha_0 &= a_0 + \frac{1}{\alpha_1} = [a_0; a_1] \\ &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\alpha_2}} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.73}$$

k sonsuza yaklaşırken $[a_0; a_1, a_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}]$'in değeri α' ya yakınsar.

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}] = \frac{\alpha_{k+1} p_{k+1} + p_{k-1}}{\alpha_{k+1} q_{k+1} + q_{k-1}} \tag{2.74}$$

$c_j = \frac{p_j}{q_j}$, $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ dizisinin j. yakınsağıdır.Buradan;

$$\begin{aligned} \alpha - C_k &= \frac{\alpha_{k+1} p_k + p_{k-1}}{\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} \\ &= \frac{(\alpha_{k+1} p_k q_k - q_k p_{k-1} - \alpha_{k+1} p_k q_k - p_k q_{k-1})}{(\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1}) q_k} \\ &= \frac{-(p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k)}{(\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1}) q_k} \\ &= \frac{(-1)^k}{(\alpha_{k+1} q_k + q_{k-1}) q_k} \end{aligned} \tag{2.75}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1}q_k + q_{k-1} &> a_{k+1}q_k + q_{k-1} = q_{k+1} \\ |\alpha - C_k| &< \frac{1}{q_k q_{k+1}} \end{aligned} \tag{2.76}$$

Bilindiği üzere $q_k > k$ olduğundan k sonsuza yaklaşırken $\frac{1}{q_k q_{k+1}}$ kesri sıfıra yaklaşır. Buradan k sonsuza yaklaşırken C_k, α' ya yakınsar. Ya da farklı bir ifadeyle $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ sonsuz sürekli basit kesrinin değeri α'dır.

■

Örnek 2.5. *α=$\sqrt{6}$'nın basit sürekli kesrine bakalım.*

$$a_0 = [\sqrt{6}] = 2 \tag{2.77}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{\alpha_0 - a_0} = \frac{1}{\sqrt{6}-2} = \frac{\sqrt{6}+2}{2} \\ a_1 &= [\alpha_1] = [\frac{\sqrt{6}+2}{2}] = 2 \end{aligned} \tag{2.78}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{1}{\alpha_1 - a_1} = \frac{1}{[\frac{\sqrt{6}+2}{2} - 2]} = \sqrt{6}+2 \\ a_2 &= [\alpha_2] = [\sqrt{6}+2] = 4 \end{aligned} \tag{2.79}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - a_2} = \frac{1}{[\sqrt{6}+2]-4} = \frac{\sqrt{6}+2}{2} = \alpha_1 \tag{2.80}$$

$\alpha_3 = \alpha_1$ olduğundan, $a_3 = a_1$, $a_4 = a_2$,... şeklinde devam eder. Buradan;

$$\sqrt{6} = [2; 2, 4, 2, 4, ...] \tag{2.81}$$

şeklinde bulunur. $\sqrt{6}$ ' nın basit sürekli kesri periyodiktir.

Örnek 2.6. *π'nin sürekli basit kesri $\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, ...]$' dir. Kısmi bölümün dizisinde fark edilebilir bir model olmadığını dikkate alalım. Bu sürekli kesrin yakınsakları π' ye en iyi rasyonel yaklaşımlardır. Bunlardan ilk beşi; $3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{335}{113}, \frac{103993}{33102}$'dir.*

2.3 Periyodik Sürekli Kesirler

Tüm pozitif $n \geq N$ sayıları için $a_n = a_{n+k}$ olacak şekilde N ve k pozitif tam sayıları varsa $[a_0; a_1, ...]$ sonsuz sürekli kesri periyodik olarak adlandırılır.
Notasyon olarak;

$$[a_0; a_1, ...\overline{a_{N-1}, a_N, a_{N+1}, ..., a_{N+k-1}}] \tag{2.82}$$

kullanılır.
Bu sonsuz periyodik sürekli kesri

$$[a_0; a_1, ..., a_{N-1}, a_N, a_{N+1}, ..., a_{N+k-1}, a_N, a_{N+1}, ...] \tag{2.83}$$

şeklinde de belirtebiliriz.
Örneğin; $[1; 2, \overline{3, 4}]$ notasyonu $[1; 2, 3, 4, 3, 4, ...]$ sonsuz sürekli basit kesrini ifade eder.

Teorem 2.9. *(Lagrange Teoremi): İrrasyonel sayıların sonsuz sürekli basit kesrinin periyodik olması için gerek ve yeter koşul sayının kuadratik irrasyonel olmasıdır.*

Teorem 2.10. *α kuadratik irrasyonel sayı olsun. $Q_0 \neq 0$, d sıfırdan büyük tam kare olmayan bir sayı ve $Q_0 | (d - {P_0}^2)$ iken*

$$\alpha = \frac{P_0 + \sqrt{d}}{Q_0} \tag{2.84}$$

olacak şekilde P_0, Q_0 ve d sayılarının var olduğunu biliyoruz.
$k = 0, 1, 2, ...$ için tekrarlı bir şekilde

$$\alpha_k = \frac{P_k + \sqrt{d}}{Q_k}$$

$$a_k = [\alpha_k] \tag{2.85}$$

$$P_{k+1} = a_k \cdot Q_k - P_k \tag{2.86}$$

$$Q_{k+1} = \frac{d - P_{k+1}^2}{Q_k} \tag{2.87}$$

tanımlanır. Buradan α=[$a_0; a_1, a_2, ...$] *bulunur.*

Örnek 2.7. $\alpha = \frac{(3+\sqrt{7})}{2}$ *sürekli kesir açılımını bulalım.*

$\alpha = \frac{(6+\sqrt{28})}{4}$ yazılır. Burada $P_0 = 6$, $Q_0 = 4$, $d = 28$' dir. Böylece $a_0 = [\alpha] = 2$' dir.

$$P_1 = a_0 \cdot Q_0 - P_0 = 2 \cdot 4 - 6 = 2,\ P_2 = a_1 \cdot Q_1 - P_1 = 1 \cdot 6 - 2 = 4 \tag{2.88}$$

$$Q_1 = \frac{(d - P_1^2)}{Q_0} = \frac{(28-4)}{4} = 6,\ Q_2 = \frac{(d - P_2^2)}{Q_1} = \frac{(28-16)}{6} = 2 \tag{2.89}$$

$$\alpha_1 = \frac{2+\sqrt{28}}{6},\ \alpha_2 = \frac{4+\sqrt{28}}{2} \tag{2.90}$$

$$a_1 = [\frac{2+\sqrt{28}}{6}] = 1,\ a_2 = [\frac{4+\sqrt{28}}{2}] = 4 \tag{2.91}$$

$$\vdots$$

şeklinde devam edilirse $P_1 = P_5$ ve $Q_1 = Q_5$ eşitliklerinin tekrarladığı görülür. Buradan;

$$\frac{(3+\sqrt{7})}{2} = [2; 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, ...] \tag{2.92}$$

$$= [2; \overline{1, 4, 1, 1}] \tag{2.93}$$

bulunur.

2.4 Uygulamalar

1) $\sqrt{7}$ sayısının sürekli kesir açılımına bakalım.

$$\alpha_0 = \sqrt{7} \tag{2.94}$$

$$a_0 = [\alpha_0] = \left[\sqrt{7}\right] \tag{2.95}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - a_0} = \frac{1}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{3} = 1 \tag{2.96}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - a_1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}+2}{3} - 1} = \frac{3}{\sqrt{7}-1} = \frac{3\sqrt{7}+3}{6} \tag{2.97}$$

$$a_2 = [\alpha_2] = \left[\frac{3\sqrt{7}+3}{6}\right] = 1 \tag{2.98}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - a_2} = \frac{1}{\frac{3\sqrt{7}+3}{6} - 1} = \frac{6}{3\sqrt{7}-3} = \frac{18\sqrt{7}+18}{54} = \frac{\sqrt{7}+1}{3} \tag{2.99}$$

$$a_3 = [\alpha_3] = \left[\frac{\sqrt{7}+1}{3}\right] = 1 \tag{2.100}$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{\alpha_3 - a_3} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}+1}{3} - 1} = \frac{3}{\sqrt{7}-2} = \frac{3\sqrt{7}+6}{3} = \sqrt{7}+2 \tag{2.101}$$

$$a_4 = \left[\alpha_4\right] = \left[\sqrt{7}+2\right] = 4 \tag{2.102}$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{\alpha_4 - a_4} = \frac{1}{\sqrt{7}+2-4} = \frac{\sqrt{7}+2}{3} \tag{2.103}$$

$$a_5 = [\alpha_5] = \left[\frac{\sqrt{7}+2}{3}\right] = 1 \tag{2.104}$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{\alpha_5 - a_5} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}+2}{3} - 1} = \frac{3}{\sqrt{7}-1} = \frac{3\sqrt{7}+3}{6} = \frac{\sqrt{7}+1}{2} \tag{2.105}$$

$$a_6 = [\alpha_6] = \left[\frac{\sqrt{7}+1}{2}\right] = 1 \tag{2.106}$$

$$\alpha_7 = \frac{1}{\alpha_6 - a_6} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}+1}{2} - 1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{7}-1} = \frac{2\sqrt{7}+2}{6} = \frac{\sqrt{7}+1}{3} \tag{2.107}$$

$$a_7 = [\alpha_7] = \left[\frac{\sqrt{7}+1}{3}\right] = 1 \tag{2.108}$$

$$\alpha_8 = \frac{1}{\alpha_7 - a_7} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}+1}{3} - 1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}-2}{3}} = \frac{3\sqrt{7}+6}{3} = \sqrt{7}+2 \tag{2.109}$$

$$a_8 = [\alpha_8] = \left[\sqrt{7}+2\right] = 4 \tag{2.110}$$

$$= \left[2; \overline{1,1,1,4}\right] \tag{2.111}$$

2) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ periyodik sürekli kesrin açılımını bulalım.

$$P_0 = 1,\ Q_0 = 2, d = 3, \alpha_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, a_0 = \left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right] \tag{2.112}$$

$$P_{k+1} = a_k Q_k - P_k \tag{2.113}$$

$$P_1 = 1.2 - 1 \tag{2.114}$$

$$Q_1 = \frac{d - P_1^2}{Q_0} = \frac{3-1}{2} = 1 \tag{2.115}$$

$$P_2 = a_1 Q_1 - P_1 = 2.1 - 1 = 1 \tag{2.116}$$

$$Q_2 = \frac{d - P_2^2}{Q_1} = \frac{3-1}{2} = 1 \tag{2.117}$$

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{1} \tag{2.118}$$

$$\alpha_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{1} \tag{2.119}$$

$$a_1 = \left[1+\sqrt{3}\right] = 2 \tag{2.120}$$

$$a_2 = \left[1+\sqrt{3}\right] = 2 \tag{2.121}$$

$$\Rightarrow \frac{1+\sqrt{3}}{2} = \left[1;\overline{2}\right] \tag{2.122}$$

3) $\frac{14+\sqrt{37}}{3}$ periyodik sürekli kesrin açılımını bulalım.

$$P_0 = 1,\ Q_0 = 3, d = 37, \alpha_0 = \frac{14+\sqrt{37}}{3}, a_0 = \left[\frac{14+\sqrt{37}}{3}\right] = 6 \tag{2.123}$$

$$P_{k+1} = a_k Q_k - P_k \tag{2.124}$$

$$P_1 = 6.3 - 14 = 4 \tag{2.125}$$

$$Q_1 = \frac{d-P_1^2}{Q_0} = \frac{37-16}{3} = 7 \tag{2.126}$$

$$P_2 = a_1 Q_1 - P_1 = 1.7 - 4 = 3 \tag{2.127}$$

$$Q_2 = \frac{d-P_2^2}{Q_1} = \frac{37-9}{7} = 4 \tag{2.128}$$

$$P_3 = a_2 Q_2 - P_2 = 2.4 - 3 = 5 \tag{2.129}$$

$$Q_3 = \frac{d-P_3^2}{Q_2} = \frac{37-25}{4} = 3 \tag{2.130}$$

$$P_4 = a_3 Q_3 - P_3 = 3.3 - 5 = 4 \tag{2.131}$$

$$Q_4 = \frac{d-P_4^2}{Q_3} = \frac{37-16}{3} = 7 \tag{2.132}$$

$$\alpha_1 = \frac{4+\sqrt{37}}{7} \tag{2.133}$$

$$\alpha_2 = \frac{3+\sqrt{37}}{4} \tag{2.134}$$

$$\alpha_3 = \frac{5+\sqrt{37}}{3} \tag{2.135}$$

$$\alpha_4 = \frac{4+\sqrt{37}}{7} \tag{2.136}$$

$$a_1 = \left[\frac{4+\sqrt{37}}{7}\right] = 1 \tag{2.137}$$

$$a_2 = \left[\frac{3+\sqrt{37}}{4}\right] = 2 \tag{2.138}$$

$$a_3 = \left[\frac{5+\sqrt{37}}{3}\right] = 3 \tag{2.139}$$

$$a_4 = \left[\frac{4+\sqrt{37}}{7}\right] = 1 \tag{2.140}$$

$$\Rightarrow \frac{14+\sqrt{37}}{3} = \left[6; \overline{1,2,3}\right] \tag{2.141}$$

4) d pozitif tam sayı olsun. $\sqrt{d^2+1}$ 'in sürekli basit kesrinin $\left[d; \overline{2d}\right]$ olduğunu gösterelim.

$$P_0 = 0 \tag{2.142}$$

$$d = d^2 + 1 \tag{2.143}$$

$$Q_0 = 1 \tag{2.144}$$

$$\alpha_0 = \frac{P_0 + \sqrt{d}}{Q_0} = \sqrt{d^2+1} \tag{2.145}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= [\alpha_0] \\ &= \left[\sqrt{d^2+1}\right] = d \end{aligned} \tag{2.146}$$

$$P_1 = a_0 Q_0 - P_0 \tag{2.147}$$

$$P_1 = d.1 - 0 \tag{2.148}$$

$$P_1 = d \tag{2.149}$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{d - P_1^2}{Q_0} \\ &= \frac{\left(d^2+1\right) - d^2}{1} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{2.150}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= a_1 Q_1 - P_1 \\ &= 2d.1 - d \\ &= d \end{aligned} \tag{2.151}$$

$$Q_2 = \frac{d - P_2^2}{Q_1} = \frac{\left(d^2+1\right) - d^2}{1} = 1 \tag{2.152}$$

$$\alpha_1 = \frac{d + \sqrt{d^2+1}}{1}, a_1 = \left[\frac{d + \sqrt{d^2+1}}{1}\right] = 2d \tag{2.153}$$

$$\alpha_2 = \frac{d + \sqrt{d^2+1}}{1}, a_2 = \left[\frac{d + \sqrt{d^2+1}}{1}\right] = 2d \tag{2.154}$$

$$\Rightarrow \sqrt{d^2+1} = \left[d; \overline{2d}\right] \tag{2.155}$$

5) Önceki örneği kullanarak $\sqrt{101}$, $\sqrt{290}$, $\sqrt{2210}$ sürekli basit kesirlerinin açılımını bulalım.

$$\sqrt{101} = \sqrt{10^2+1} = \sqrt{d^2+1} = \left[d; \overline{2d}\right] = \left[10; \overline{20}\right] \tag{2.156}$$

$$\sqrt{290} = \sqrt{17^2+1} = \sqrt{d^2+1} = \left[d;\overline{2d}\right] = \left[17;\overline{34}\right] \tag{2.157}$$

$$\sqrt{2210} = \sqrt{47^2+1} = \sqrt{d^2+1} = \left[d;\overline{2d}\right] = \left[47;\overline{94}\right] \tag{2.158}$$

6) $d \geq 2$ olacak şekilde bir tam sayı olsun. $\sqrt{d^2-1}$ sürekli basit kesrinin $\left[d-1;\overline{1,2d-2}\right]$ olduğunu gösterelim.

$$P_0 = 0 \tag{2.159}$$

$$d = d^2 - 1 \tag{2.160}$$

$$Q_0 = 1 \tag{2.161}$$

$$\alpha_0 = \frac{P_0 + \sqrt{d}}{Q_0} = d^2 - 1 \tag{2.162}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= [\alpha_0] \\ &= \left[d^2-1\right] = d-1 \end{aligned} \tag{2.163}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= a_0Q_0 - P_0 \\ &= (d-1).1 - 0 \\ &= d-1 \end{aligned} \tag{2.164}$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{d-P_1^2}{Q_0} \\ &= \frac{\left(d^2-1\right)-(d-1)^2}{1} \\ &= 2d-2 \end{aligned} \tag{2.165}$$

$$\alpha_1 = \frac{d-1+\sqrt{d^2-1}}{2d-2} \tag{2.166}$$

$$a_1 = \left[\frac{d-1+\sqrt{d^2-1}}{2d-2}\right] = 1 \tag{2.167}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= a_1 Q_1 - P_1 \\ &= 1.(2d-2)-(d-1) \\ &= d-1 \end{aligned} \tag{2.168}$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{d-P_2^2}{Q_1} \\ &= \frac{\left(d^2-1\right)-(d-1)^2}{2d-2} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{2.169}$$

$$\alpha_2 = \frac{d-1+\sqrt{d^2-1}}{1} \tag{2.170}$$

$$a_2 = \left[\frac{d-1+\sqrt{d^2-1}}{1}\right] = 2d-2 \tag{2.171}$$

$$\begin{aligned} P_3 &= a_2 Q_2 - P_2 \\ &= (2d-2).1-(d-1) \\ &= d-1 \end{aligned} \tag{2.172}$$

$$\begin{aligned} Q_3 &= \frac{d - P_3^2}{Q_2} \\ &= \frac{\left(d^2-1\right)-(d-1)^2}{1} \\ &= 2d-2 \end{aligned} \tag{2.173}$$

$$\alpha_3 = \frac{d-1+\sqrt{d^2-1}}{2d-2} \tag{2.174}$$

$$a_3 = \left[\frac{d-1+\sqrt{d^2-1}}{2d-2}\right] = 1 \tag{2.175}$$

$$\Rightarrow \sqrt{d^2-1} = \left[d; \overline{1, 2d-2}\right] \tag{2.176}$$

7) $\sqrt{d^2-d}$ sürekli basit kesrinin açılımının $\left[d-1; \overline{2, 2d-2}\right]$ olduğunu gösterelim.

$$P_0 = 0 \tag{2.177}$$

$$d = d^2 - d \tag{2.178}$$

$$Q_0 = 1 \tag{2.179}$$

$$\alpha_0 = \frac{P_0 + \sqrt{d}}{Q_0} = d^2 - d \tag{2.180}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= [\alpha_0] \\ &= \left[d^2 - d\right] = d - 1 \end{aligned} \tag{2.181}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= a_0 Q_0 - P_0 \\ &= (d-1).1 - 0 \\ &= d-1 \end{aligned} \tag{2.182}$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{d - P_1^2}{Q_0} \\ &= \frac{\left(d^2 - d\right) - (d-1)^2}{1} \\ &= d-1 \end{aligned} \tag{2.183}$$

$$\alpha_1 = \frac{d - 1 + \sqrt{d^2 - d}}{d-1} \tag{2.184}$$

$$a_1 = \left[\frac{d - 1 + \sqrt{d^2 - d}}{d-1} \right] = 2 \tag{2.185}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= a_1 Q_1 - P_1 \\ &= 2.(d-1) - (d-1) \\ &= d-1 \end{aligned} \tag{2.186}$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{d - P_2^2}{Q_1} \\ &= \frac{\left(d^2 - d\right) - (d-1)^2}{d-1} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{2.187}$$

$$\alpha_2 = \frac{d - 1 + \sqrt{d^2 - d}}{1} \tag{2.188}$$

$$a_2 = \left[\frac{d-1+\sqrt{d^2-d}}{1}\right] = 2d-2 \tag{2.189}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= 2 \\ a_4 &= 2d-2 \end{aligned} \tag{2.190}$$

$$\Rightarrow \sqrt{d^2-d} = \left[d-1;\overline{2,2d-2}\right] \tag{2.191}$$

8) $\sqrt{99}$, $\sqrt{110}$, $\sqrt{272}$, $\sqrt{600}$ sürekli basit kesir açılımlarını 6. ve 7. sorulardaki açılımlar yardımıyla bulalım.

$$\sqrt{99} = \sqrt{10^2-1} = \sqrt{d^2-1} = \left[9;\overline{1,18}\right] \tag{2.192}$$

$$\sqrt{110} = \sqrt{11^2-11} = \sqrt{d^2-d} = \left[10;\overline{2,20}\right] \tag{2.193}$$

$$\sqrt{272} = \sqrt{17^2-17} = \sqrt{d^2-d} = \left[16;\overline{2,32}\right] \tag{2.194}$$

$$\sqrt{600} = \sqrt{25^2-25} = \sqrt{d^2-d} = \left[24;\overline{2,48}\right] \tag{2.195}$$

3
PELL DENKLEMLERİ ve UYGULAMALARI

3.1 Pell Denklemleri

Bu bölümde

$$x^2 - dy^2 = n \tag{3.1}$$

şeklindeki diyofant denklemler üzerinde çalışacağız. d ve n sabit tam sayılardır. $d < 0$ ve $n > 0$ iken (3.1) denklemi $|x| \leq \sqrt{n}$ ve $|y| \leq \sqrt{n/|d|}$ eşitsizliklerini sağladığından en fazla sonlu sayıda çözüm bulunabilir. Ayrıca d tam kare iken $d = D$ dersek;

$$\begin{aligned} x^2 - dy^2 &= x^2 - Dy^2 \\ &= (x + \sqrt{D}y)(x - \sqrt{D}y) \\ &= n \end{aligned} \tag{3.2}$$

olur. Ayrıca bu denklemin herhangi bir çözümü, d sayısı tam kare iken;

$$\begin{aligned} (x + \sqrt{D}y) &= a \\ (x - \sqrt{D}y) &= b \end{aligned} \tag{3.3}$$

denklemlerinin $n = ab$ olacak şekilde eş zamanlı çözümüne karşılık gelir. Bu durumda, sadece bir tane sonlu sayıda çözüm vardır. Çünkü $n = ab$'nin her çarpanı için yukarıdaki iki denklemin tam sayılarda en fazla bir çözümü vardır.

Bu bölümün geri kalan kısmı için d ve n'nin tam sayı, d'nin tam kare olmayan pozitif tam sayı olduğu (3.1) şeklindeki diyofant denklemlerinin çözümünü inceleyeceğiz.

Teorem 3.1. *$d > 0$, tam kare olmayan ve $|n| < \sqrt{d}$ olacak şekilde d ile n tam sayıları olsun. Eğer $x^2 - dy^2 = n$ ise $\frac{x}{y}$, $\sqrt{d}$'nin basit sürekli kesrine yakınsar.*

İspat. İlk olarak $n > 0$ durumuna bakalım:
$x^2 - dy^2 = n$ olduğundan,

$$\begin{aligned} (x + y\sqrt{d})(x - y\sqrt{d}) &= n \\ (x - y\sqrt{d}) &> 0 \\ \frac{x}{y} - \sqrt{d} &> 0 \\ x &> y\sqrt{d} \end{aligned} \tag{3.4}$$

elde edilir. Ve bu sebeple $0 < n < \sqrt{d}$' dir.

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} - \sqrt{d} &= \frac{x - y\sqrt{d}}{y} \\ &= \frac{x^2 - dy^2}{y(x + y\sqrt{d})} \\ &< \frac{n}{y(2y\sqrt{d})} \\ &< \frac{n}{2y^2\sqrt{d}} \\ &< \frac{\sqrt{d}}{2y^2\sqrt{d}} \\ &< \frac{1}{2y^2} \end{aligned} \tag{3.5}$$

$0 < \frac{x}{y} - \sqrt{d} < \frac{1}{2y^2}$ olduğundan $\frac{x}{y}$'nin $\sqrt{d}$'nin sürekli basit kesrine yakınsaması gerektiğini söyleyebiliriz.

$n < 0$ olduğunda:
$x^2 - dy^2 = n$ denkleminin her iki tarafını $-d$ ile bölersek;

$$y^2 - \left(\frac{1}{d}\right)x^2 = -\frac{n}{d} \tag{3.6}$$

elde ederiz.

$n > 0$ olduğunda da benzer çıkarıma ulaşırız. $\frac{y}{x}$'in $\frac{1}{\sqrt{d}}$'nin sürekli basit kesrinin bir yakınsağı olduğunu görürüz. Bu sebepten $\frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{y}{x}}$ denkleminin $\sqrt{d} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{d}}}$ basit sürekli kesrinin yakınsağı olması gerektiğini söyleyebiliriz. ■

$x^2 - dy^2 = n$ diyofant denkleminin $|n| < \sqrt{d}$ olması durumundaki çözümlerinin $\sqrt{d}$'nin sürekli basit kesir genişlemesinin yakınsakları olduğunu göstermiştik. Bir sonraki teorem bu diyofant denklemin çözümünü bulmak için bu yakınsakları kullanmamıza yardım edecek.

Teorem 3.2. *d tam kare olmayan bir pozitif tam sayı olsun. $k = 1,2,3,\ldots$ ve $\alpha_0 = \sqrt{d}$ için aşağıdaki denklemleri tanımlayalım.*

$$\alpha_k = \frac{\left(P_k + \sqrt{d}\right)}{Q_k} \tag{3.7}$$

$$a_k = [\alpha_k] \tag{3.8}$$

$$P_{k+1} = a_k Q_k - P_k \tag{3.9}$$

$$Q_{k+1} = \frac{\left(d - P_{k+1}^2\right)}{Q_k} \tag{3.10}$$

Ve $\sqrt{d}$'nin sürekli basit kesir genişlemesinin k. yakınsaklarını $\frac{p_k}{q_k}$ olarak belirleyelim. Buradan

$$p_k^2 - dq_k^2 = (-1)^{k-1} Q_{k+1} \tag{3.11}$$

elde edilir.

Bu teoremin ispatında faydalı olacak bir lemmayı belirtelim.

Lemma 3.1. *r, s, t, u rasyonel ve d pozitif tam kare olmayan sayılar olmak üzere*

$$r + s\sqrt{d} = t + u\sqrt{d} \tag{3.12}$$

eşitliğini ele aldığımızda $r = t$ ve $s = u$ olacaktır.

İspat. $s \neq u$ olduğunu varsayalım.

$$\begin{aligned} r + s\sqrt{d} &= t + u\sqrt{d} \\ \sqrt{d} &= \frac{r-t}{u-s} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Buradan $\frac{r-t}{u-s}$ rasyonel ve $\sqrt{d}$ irrasyonel bulunur. Bu çelişkiden dolayı $r = t$, $s = u$ elde edilir. ■

Şimdi Teorem 3.2.'nin ispatını yapalım.

İspat. $\sqrt{d} = \alpha_0 = [a_0; a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}]$ olduğundan;

$$\sqrt{d} = \frac{\alpha_{k+1}p_k + p_{k-1}}{\alpha_{k+1}q_k + q_{k-1}} \tag{3.14}$$

dir.

$$\alpha_{k+1} = \frac{P_{k+1} + \sqrt{d}}{Q_{k+1}} \tag{3.15}$$

eşitliği bilindiğine göre;

$$\sqrt{d} = \frac{(P_{k+1} + \sqrt{d})p_k + Q_{k+1}p_{k-1}}{(P_{k+1} + \sqrt{d})q_k + Q_{k+1}q_{k-1}} \tag{3.16}$$

bulunur. Ve buradan,

$$dq_k + (P_{k+1}q_k + Q_{k+1}q_{k-1})\sqrt{d} = (P_{k+1}p_k + Q_{k+1}p_{k-1}) + p_k\sqrt{d} \tag{3.17}$$

elde edilir. Önceki lemmadan

$$\begin{aligned} dq_k &= P_{k+1}p_k + Q_{k+1}p_{k-1} \\ p_k &= P_{k+1}q_k + Q_{k+1}q_{k-1} \end{aligned} \tag{3.18}$$

olduğunu biliyoruz. İlk eşitliği q_k ve ikinci eşitliği p_k ile çarparsak;

$$p_k^2 - dq_k^2 = (p_k q_{k-1} - p_{k-1}q_k)Q_{k+1} = (-1)^{k-1}Q_{k+1} \tag{3.19}$$

elde edilir. Ve ispat tamamlanır. ■

Tanım 3.1. $x^2 - dy^2 = n$ türündeki Diyofant denklemler $n = 1$ iken Pell Denklemi olarak adlandırılırlar.

Teorem 3.3. *d tam kare olmayan pozitif bir tam sayı olsun. Ve $\frac{p_k}{q_k}$, $\sqrt{d}$'nin basit sürekli kesrinin k. yakınsağı olsun. $k = 1, 2, 3, \ldots$ ve n ise bu sürekli kesrin periyod uzunluğu olsun.*

n çift iken:
$x^2 - dy^2 = 1$ *diyofant denkleminin pozitif çözümleri* $j = 1, 2, 3, \ldots$ *için;* $x = p_{jn-1}$, $y = q_{jn-1}$*'dir.*

$x^2 - dy^2 = -1$ *diyofant denkleminin çözümü yoktur.*

n tek iken:
$x^2 - dy^2 = 1$ *diyofant denkleminin pozitif çözümleri* $j = 1, 2, 3, \ldots$ *için;* $x = p_{2jn-1}$, $y = q_{2jn-1}$*'dir.*

$x^2 - dy^2 = -1$ *diyofant denkleminin pozitif çözümleri* $j = 1, 2, 3, \ldots$ *için;* $x = p_{(2j-1)n-1}$, $y = q_{(2j-1)n-1}$*'dir.*

İspat. Eğer x_0 ve y_0 $x^2 - dy^2 = \pm 1$ denkleminin pozitif çözümleri ise $x_0 = p_k$, $y_0 = q_k$ olacak şekilde seçilen $\frac{p_k}{q_k}$, $\sqrt{d}$'nin basit sürekli kesrinin yakınsağı olduğunu öğrenmiştik. Diğer yandan son teorem gereğince;

$$p_k^2 - dq_k^2 = (-1)^{k-1} Q_{k+1} \tag{3.20}$$

olduğunu biliyoruz. Çünkü $\sqrt{d}$'nin sürekli basit kesir açılımının periyodu n'dir ve biz $j = 1, 2, 3, \ldots$ için $Q_{jn} = Q_0 = 1$ olduğunu biliyoruz. $\left(\sqrt{d} = \frac{P_0 + d}{Q_0}\right)$ Buradan;

$$p_{jn-1}^2 - dq_{jn-1}^2 = (-1)^{jn} Q_{nj} = (-1)^{jn} \tag{3.21}$$

elde edilir. Bu eşitlik gösterir ki; n çift iken $j = 1, 2, 3, \ldots$ için $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin çözümleri $x = p_{jn-1}$, $y = q_{jn-1}$. Ve n tek iken $j = 1, 2, 3, \ldots$ için $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin çözümleri $x = p_{2jn-1}$, $y = q_{2jn-1}$; $x^2 - dy^2 = -1$ denkleminin çözümleri ise $x = p_{(2j-1)n-1}$, $y = q_{(2j-1)n-1}$'dir.

■

Örnek 3.1. *$\sqrt{13}$'ün sürekli basit kesri* $\left[3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}\right]$*'dir.*
$x^2 - 13y^2 = 1$ *diyofant denkleminin çözümleri* $j = 1, 2, 3, \ldots$ *için $\sqrt{13}$'ün basit sürekli kesir açılımının* $(10j - 1)$*. yakınsağı* $\frac{p_{10j-1}}{q_{10j-1}}$ *iken* p_{10j-1} *,* q_{10j-1}*'dir.Buradan en küçük pozitif çözüm* $j = 1$ *iken* $p_9 = 649$*,* $q_9 = 180$ *olarak bulunur.*
$x^2 - 13y^2 = -1$ *diyofant denkleminin çözümleri* $j = 1, 2, 3, \ldots$ *için* $\frac{p_{10j-6}}{q_{10j-6}}$*'dır. Buradan en küçük pozitif çözüm ise* $p_4 = 18$*,* $q_4 = 5$ *olarak bulunur.*

Örnek 3.2. *$\sqrt{14}$' ün sürekli basit kesri $\left[3;\overline{1,2,1,6}\right]$'dir.*
$x^2-14y^2=1$ diyofant denkleminin pozitif çözümleri $j=1,2,3,\ldots$ için p_{4j-1}, q_{4j-1}'dir. En küçük pozitif çözüm ise $p_3=15$, $q_3=4$' tür.
$x^2-14y^2=-1$ diyofant denkleminin $\sqrt{13}$'ün sürekli basit kesir açılımının periyodu $(n=4)$ çift olduğundan çözümü yoktur.

Şimdi ise $\sqrt{d}$' nin sürekli kesir açılımının yakınsaklarını bulmadan en küçük pozitif çözümü kullanarak, $x^2-dy^2=1$ diyofant denkleminin tüm pozitif çözümlerinin nasıl bulunacağını gösterip bu bölümü bitireceğiz.

Teorem 3.4. *d tam kare olmayan pozitif bir tam sayı iken $x^2-dy^2=1$ diyofant denkleminin en küçük pozitif çözümü x_1, y_1 olsun. $k=1,2,3,\ldots$ için x_k, y_k tüm çözümleri*

$$x_k+y_k\sqrt{d}=(x_1+y_1\sqrt{d})^k \tag{3.22}$$

şeklinde yazabiliriz.

İspat. $k=1,2,3,\ldots$ için her çözümün x_k, y_k şeklinde olduğunu göstermeliyiz. x_k, y_k'nın bir çözüm olduğunu göstermek için eşleniği olan ifadeyi ele alalım.

$$x_k-y_k\sqrt{d}=(x_1-y_1\sqrt{d})^k \tag{3.23}$$

olacaktır. Buradan;

$$\begin{aligned} x_k^2-dy_k^2 &= (x_k+y_k\sqrt{d})(x_k-y_k\sqrt{d}) \\ &= (x_1+y_1\sqrt{d})^k(x_1-y_1\sqrt{d})^k \\ &= (x_1^2-dy_1^2)^k \\ &= 1 \end{aligned} \tag{3.24}$$

bulunur. Böylece (x_k, y_k), $k=1,2,3,\ldots$ için bir çözümdür. Tüm pozitif çözümlerin bazı k pozitif tam sayısı için x_k, y_k olduğunu göstermek için X,Y'nin $k=1,2,3,\ldots$ için x_k, y_k' dan farklı bir pozitif çözümü olduğunu varsayalım.

$$(x_1+y_1\sqrt{d})^n<X+Y\sqrt{d}<(x_1+y_1\sqrt{d})^{n+1} \tag{3.25}$$

olacak şekilde n tam sayısı vardır. Bu eşitsizliği $(x_1+y_1\sqrt{d})^{-n}$ ile çarparsak;

$$1 < (x_1 - y_1\sqrt{d})^n(X + Y\sqrt{d}) < x_1 + y_1\sqrt{d} \tag{3.26}$$

elde ederiz. Ve burada $x_1^2 - dy_1^2 = 1$ olması $x_1 - y_1\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^{-1}$ ifadesini sağlar.

$$s + t\sqrt{d} = (x_1 - y_1\sqrt{d})^n(X + Y\sqrt{d}) \tag{3.27}$$

olsun. Ve

$$\begin{aligned} s^2 - dt^2 &= (s - t\sqrt{d})(s + t\sqrt{d}) \\ &= (x_1 + y_1\sqrt{d})^n(X - Y\sqrt{d})(x_1 - y_1\sqrt{d})^n(X + Y\sqrt{d}) \\ &= (x_1^2 - dy_1^2)^n(X^2 - dY^2) \\ &= 1 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Burada s ve t' nin $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin bir çözümü olduğunu görürüz. Ve ayrıca

$$1 < s + t\sqrt{d} < x_1 + y_1\sqrt{d} \tag{3.29}$$

olduğunu biliyoruz. Dahası

$$s + t\sqrt{d} > 1 \tag{3.30}$$

olduğunu bildiğimiz için

$$0 < (s + t\sqrt{d})^{-1} < 1 \tag{3.31}$$

yazabiliriz.

Buradan

$$s = \frac{1}{2}\left[(s + t\sqrt{d}) + (s - t\sqrt{d})\right] > 0 \tag{3.32}$$

ve

$$t = \frac{1}{2\sqrt{d}}\left[(s + t\sqrt{d}) - (s - t\sqrt{d})\right] > 0 \tag{3.33}$$

bulunur. Bu s ve t' nin pozitif çözüm olduğu anlamına gelir. Böylece x_1 ve y_1'i en küçük pozitif çözüm olarak seçersek $s \geq x_1$, $t \geq y_1$ olur. Fakat bu $s + t\sqrt{d} < x_1 + y_1\sqrt{d}$ eşitsizliği ile çelişir. Böylece $k = 1, 2, 3, \ldots$ için seçilen X, Y çözümleri x_k, y_k' dan farklı bir çözüm değildir. ■

Örnek 3.3. $x^2 - 13y^2 = 1$ *diyofant denkleminin en küçük pozitif çözümlerinin* $x_1 = 649, y_1 = 180$ *olduğunu biliyoruz. Buradan tüm pozitif çözümler*

$$\begin{aligned} x_k + y_k\sqrt{13} &= (x_1 + y_1\sqrt{13})^k \\ x_k + y_k\sqrt{13} &= (649 + 180\sqrt{13})^k \end{aligned} \tag{3.34}$$

şeklinde bulunabilir. Örneğin;

$$\begin{aligned} x_2 + y_2\sqrt{13} &= (649 + 180\sqrt{13})^2 \\ x_2 + y_2\sqrt{13} &= (842361 + 233640\sqrt{13}) \end{aligned} \tag{3.35}$$

Böylece $x_2 = 842361, y_2 = 233640$ *bulunur.*

3.2 Uygulamalar

1) $x^2 + 3y^2 = 4$ denkleminin çözüm değerlerine bakalım.

$$x = \pm 1, y = \pm 1 \tag{3.36}$$

2) $2x^2 + 7y^2 = 30$ denkleminin çözüm değerlerine bakalım.

$$x = \pm 1, y = \pm 2 \tag{3.37}$$

3) $x^2 - y^2 = 8$ denkleminin çözüm değerlerine bakalım.

$$x = \pm 3, y = \pm 1 \tag{3.38}$$

4) $4x^2 - 9y^2 = 100$ denkleminin çözüm değerlerine bakalım.

$$x = \pm 13, y = \pm 8, x = \pm 5, y = 0 \tag{3.39}$$

5) $x^2 - 29y^2 = -1$ diyofant denkleminin en küçük pozitif çözümlerini bulalım.

$$\alpha = \frac{0 + \sqrt{29}}{1} \tag{3.40}$$

şeklinde yazılırsa $P_0 = 0, Q_0 = 1, d = 29, a_0 = [\alpha] = 5$ değerleri elde edilir.

$$P_1 = a_0 Q_0 - P_0 = 5.1 - 0 = 5 \tag{3.41}$$

$$Q_1 = \frac{d - P_1^2}{Q_0} = \frac{29 - 25}{1} = 4 \tag{3.42}$$

$$\alpha_1 = \frac{5 + \sqrt{29}}{4} \tag{3.43}$$

$$a_1 = [\alpha_1] = \left[\frac{5 + \sqrt{29}}{4} \right] = 2 \tag{3.44}$$

$$P_2 = a_1 Q_1 - P_1 = 2.4 - 5 = 3 \tag{3.45}$$

$$Q_2 = \frac{d - P_2^2}{Q_1} = \frac{29 - 9}{4} = 5 \tag{3.46}$$

$$\alpha_2 = \frac{3 + \sqrt{29}}{5} \tag{3.47}$$

$$a_2 = [\alpha_2] = \left[\frac{3 + \sqrt{29}}{5}\right] = 1 \tag{3.48}$$

$$P_3 = a_2 Q_2 - P_2 = 1.5 - 3 = 2 \tag{3.49}$$

$$Q_3 = \frac{d - P_3^2}{Q_2} = \frac{29 - 4}{5} = 5 \tag{3.50}$$

$$\alpha_3 = \frac{2 + \sqrt{29}}{5} \tag{3.51}$$

$$a_3 = [\alpha_3] = \left[\frac{2 + \sqrt{29}}{5}\right] = 1 \tag{3.52}$$

$$P_4 = a_3 Q_3 - P_3 = 1.5 - 2 = 3 \tag{3.53}$$

$$Q_4 = \frac{d - P_4^2}{Q_3} = \frac{29 - 9}{5} = 4 \tag{3.54}$$

$$\alpha_4 = \frac{3 + \sqrt{29}}{4} \tag{3.55}$$

$$a_4 = [\alpha_4] = \left[\frac{3+\sqrt{29}}{4}\right] = 2 \tag{3.56}$$

$$P_5 = a_4 Q_4 - P_4 = 2.4 - 3 = 5 \tag{3.57}$$

$$Q_5 = \frac{d - P_5^2}{Q_4} = \frac{29-25}{4} = 1 \tag{3.58}$$

$$\alpha_5 = \frac{5+\sqrt{29}}{1} \tag{3.59}$$

$$a_5 = [\alpha_5] = \left[\frac{5+\sqrt{29}}{1}\right] = 10 \tag{3.60}$$

$$P_6 = a_5 Q_5 - P_5 = 10.1 - 5 = 5 \tag{3.61}$$

$$Q_6 = \frac{d - P_6^2}{Q_5} = \frac{29-25}{1} = 4 \tag{3.62}$$

$$\alpha_6 = \frac{5+\sqrt{29}}{4} \tag{3.63}$$

$$a_6 = [\alpha_6] = \left[\frac{5+\sqrt{29}}{4}\right] = 2 \tag{3.64}$$

$\sqrt{29}$' un sürekli basit kesir açılımı $\left[5;\overline{2,1,1,2,10}\right]$ olarak bulunur.
$n = 5$ (tek) olduğundan $x^2 - 29y^2 = -1$ denklemi için $x = p_{(2j-1)n-1}, y = q_{(2j-1)n-1}$ değerleri çözüm olacaktır.$n = 5$ ve $j = 1$ için denklemin en küçük çözümü $x = p_4 = 70$, $y = q_4 = 13$'dür.

6) $x^2-29y^2=1$ diyofant denkleminin en küçük pozitif çözümlerini bulalım.

Önceki örnekte $\sqrt{29}=\left[5;\overline{2,1,1,2,10}\right]$ olduğunu görmüştük. Burada $n=5$ (tek) olduğundan $x^2-29y^2=1$ denklemi için $x=p_{2jn-1}, y=q_{2jn-1}$ değerleri aranılan çözümdür.$n=5$ ve $j=1$ için denklemin çözümü $x=p_9=9801$, $y=q_9=1820$'dir.

7) $x^2+y^2-1=4xy$ denkleminin tam sayı çözümlerini bulalım.[3]

Denklemde $u=y-2x$ dönüşümü yaparsak, denklem $u^2=3x^2+1$ haline gelir. Buradan $u^2-3x^2=1$ pell denklemi yazılabilir. $u_1=2, x_1=1$ değerleri için denklem sağlandığından $y_1=4$ olacaktır. Bu ilk değerlerden yola çıkarak genel çözümleri bulmak için

$$(u_n+x_n\sqrt{3})=(u_1+x_1\sqrt{3})^n \tag{3.65}$$

eşitliğini kullanalım.
n=2 için:

$$\begin{aligned}(u_2+x_2\sqrt{3})&=(u_1+x_1\sqrt{3})^2\\(u_2+x_2\sqrt{3})&=(2+\sqrt{3})^2\\(u_2+x_2\sqrt{3})&=(7+4\sqrt{3})\end{aligned} \tag{3.66}$$

Buradan $u_2=7, x_2=4, y_2=15$ elde edilir. Bu şekilde diğer çözümler de bulunabilir.

Ya da $\sqrt{3}=\left[1;\overline{2}\right]$ sürekli basit kesrinin yakınsaklarını kullanarak çözüme ulaşabiliriz.$n=1$ (tek) olduğundan $\frac{p_{2nj-1}}{q_{2nj-1}}$ şeklindeki yakınsaklar aradığımız çözümler olacaktır.

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{2}{1}\implies u=2, x=1, y=4 \tag{3.67}$$

$$\frac{p_3}{q_3}=\frac{7}{4}\implies u=7, x=4, y=15 \tag{3.68}$$

Bu şekilde diğer çözümlerde bulunabilir.

8) $k < n$ doğal sayıları için $\binom{n}{k-1} = 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ olacak şekilde tüm n doğal sayılarını bulalım.[3]

Yukarıdaki denklemi $\frac{(k+1)!(n-k+1)!}{n!}$ ile çarparsak,

$$\begin{aligned} k(k+1) &= 2(k+1)(n-k+1)+(n-k)(n-k+1) \\ k^2+k &= (2k+2)(n-k+1)+(n-k)(n-k+1) \\ k^2+k &= n^2+3n-k^2-k+2 \\ 2k^2+2k &= n^2+3n+2 \end{aligned} \tag{3.69}$$

elde edilir. Bu ifade

$$(2n+3)^2+1 \quad = 2(2k+1)^2 \tag{3.70}$$

şeklindeki tam kareli ifadeye eşittir. Burada $(2n+3) = x$ ve $(2k+1) = y$ dönüşümü yaparsak,

$$x^2-2y^2 = -1 \tag{3.71}$$

denklemini elde ederiz. Bu pell denkleminin çözümü için $\sqrt{2}$'nin sürekli kesir açılımını kullanalım.

$$\sqrt{2} = \left[1;\overline{2}\right] \tag{3.72}$$

$n = 1$ (tek) olduğundan $\frac{p_{(2j-1)(n-1)}}{q_{(2j-1)(n-1)}}$ şeklindeki yakınsaklar bu denklemin çözümü olacaktır.

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{1} \implies n = -1, k = 0 \tag{3.73}$$

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{7}{5} \implies n = 2, k = 2 \tag{3.74}$$

$$\frac{p_4}{q_4} = \frac{41}{29} \implies n = 19, k = 14 \tag{3.75}$$

Teorem 3.5. *p asal bir sayı olsun.*

$$x^2 - py^2 = -1 \tag{3.76}$$

negatif pell denkleminin çözülebilir olabilmesi için ancak ve ancak $p = 2$ ya da $p \equiv 1(mod4)$ olmalıdır.

İspat. Denklemin bir çözümünün (x, y) olduğunu varsayarsak

$$x^2 + 1 = py^2 \tag{3.77}$$

eşitliğinden $p|x^2 + 1$ bulunur. Buradan $p = 2$ ya da $p \equiv 1(mod4)$ elde edilir.
$p = 2$ için $x = y = 1$ çözümdür. Her $p = 4t + 1$ asalının çözüm olduğunu gösterelim.
(x_0, y_0) ikilisi,

$$x_0^2 - py_0^2 = 1 \tag{3.78}$$

Pell denkleminin başlangıç çözümü olsun. x_0 çözümünün tek olduğunu varsayacağız, aksi takdirde

$$y_0^2 \equiv py_0^2 \equiv 3(mod4) \tag{3.79}$$

olacaktır.

$$x_0^2 - 1 = (x_0 - 1)(x_0 + 1) = py_0^2 \tag{3.80}$$

$(x_0 + 1)$ ve $(x_0 - 1)$ çarpanlarının en büyük ortak böleni 2'dir.
$x_0 + 1 = 2x^2$, $x_0 - 1 = 2py^2$ çözümü imkansızdır. Çünkü $x^2 - py^2 = 1$ Pell denkleminin daha küçük bir çözümünün olmasına yol açar.
$x_0 - 1 = 2x^2$, $x_0 + 1 = 2py^2$ olmalıdır. Ve buradan $x^2 - py^2 = -1$ elde edilir. ■

4
$x^2 - 5y^2 = -11^t$ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

$$x^2 - 5y^2 = -11^t \tag{4.1}$$

denklemindeki $p = 5$ asal sayısı önceki teoremdeki koşulları sağladığından (4.1) denkleminin çözümü vardır diyebiliriz. Bu bölümde [4] 'den faydalanarak (4.1) denkleminin $t = 1, 3, 5, 2k, 2k + 5$ değerleri için çözümlerini inceleyeceğiz.

t=1 için:

$$x^2 - 5y^2 = -11 \tag{4.2}$$

denkleminin başlangıç çözümü $x_0 = 3, y_0 = 2$'dir. Diğer çözümlerini bulmak için

$$x^2 - 5y^2 = 1 \tag{4.3}$$

denkleminin $(\widetilde{x_n}, \widetilde{y_n})$ çözümlerinden faydalanacağız.

$$\widetilde{x_n} = \frac{1}{2} f_n \tag{4.4}$$

$$\widetilde{y_n} = \frac{1}{2\sqrt{5}} g_n \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} f_n &= (9 + 4\sqrt{5})^{n+1} + (9 - 4\sqrt{5})^{n+1} \\ g_n &= (9 + 4\sqrt{5})^{n+1} - (9 - 4\sqrt{5})^{n+1} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Bu değerler (4.4) ve (4.5) denklemlerinde yerine yazılırsa:

$$\widetilde{x_n} = \frac{1}{2}\left[(9+4\sqrt{5})^{n+1} + (9-4\sqrt{5})^{n+1}\right] \tag{4.7}$$

$$\widetilde{y_n} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[(9+4\sqrt{5})^{n+1} - (9-4\sqrt{5})^{n+1}\right] \tag{4.8}$$

elde edilir.

(x_0, y_0) ve $(\widetilde{x_n}, \widetilde{y_n})$ çözümleri arasında Brahmagupta Lemması uygulanırsa;

$$(x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{5}) = (x_0 + y_0\sqrt{5})(\widetilde{x_n} + \widetilde{y_n}\sqrt{5}) \tag{4.9}$$

eşitliği elde edilir. Burada f_n ve g_n değerleri yerine yazılırsa;

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}[3f_n + 2\sqrt{5}g_n] \tag{4.10}$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{5}}[2\sqrt{5}f_n + 3g_n] \tag{4.11}$$

eşitliği bulunur.

t=3 için:

$$x^2 - 5y^2 = -11^3 \tag{4.12}$$

denkleminin başlangıç çözümü $x_0 = 207, y_0 = 94$'dür. Diğer çözümlerini bulmak için

$$x^2 - 5y^2 = 1 \tag{4.13}$$

denkleminin $(\widetilde{x_n}, \widetilde{y_n})$ çözümlerinden faydalanacağız.

$$\widetilde{x_n} = \frac{1}{2}f_n \tag{4.14}$$

$$\widetilde{y_n} = \frac{1}{2\sqrt{5}}g_n \tag{4.15}$$

$$f_n = (9+4\sqrt{5})^{n+1} + (9-4\sqrt{5})^{n+1}$$
$$g_n = (9+4\sqrt{5})^{n+1} - (9-4\sqrt{5})^{n+1} \tag{4.16}$$

Bu değerler (4.14) ve (4.15) denklemlerinde yerine yazılırsa:

$$\widetilde{x_n} = \frac{1}{2}\left[(9+4\sqrt{5})^{n+1} + (9-4\sqrt{5})^{n+1}\right] \tag{4.17}$$

$$\widetilde{y_n} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[(9+4\sqrt{5})^{n+1} - (9-4\sqrt{5})^{n+1}\right] \tag{4.18}$$

elde edilir.

(x_0, y_0) ve $(\widetilde{x_n}, \widetilde{y_n})$ çözümleri arasında Brahmagupta Lemması uygulanırsa;

$$(x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{5}) = (x_0 + y_0\sqrt{5})(\widetilde{x_n} + \widetilde{y_n}\sqrt{5}) \tag{4.19}$$

eşitliği elde edilir. Burada f_n ve g_n değerleri yerine yazılırsa;

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}[207 f_n + 94\sqrt{5} g_n] \tag{4.20}$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{5}}[94\sqrt{5} f_n + 207 g_n] \tag{4.21}$$

eşitliği bulunur.

t=5 için:

$$x^2 - 5y^2 = -11^5 \tag{4.22}$$

denkleminin başlangıç çözümü $x_0 = 11643, y_0 = 5210$'dur. Diğer çözümlerini bulmak için

$$x^2 - 5y^2 = 1 \tag{4.23}$$

denkleminin $(\widetilde{x_n}, \widetilde{y_n})$ çözümlerinden faydalanacağız.

$$\widetilde{x_n} = \frac{1}{2} f_n \tag{4.24}$$

$$\widetilde{y_n} = \frac{1}{2\sqrt{5}} g_n \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned} f_n &= (9+4\sqrt{5})^{n+1} + (9-4\sqrt{5})^{n+1} \\ g_n &= (9+4\sqrt{5})^{n+1} - (9-4\sqrt{5})^{n+1} \end{aligned} \tag{4.26}$$

Bu değerler (4.24) ve (4.25) denklemlerinde yerine yazılırsa:

$$\widetilde{x_n} = \frac{1}{2}\left[(9+4\sqrt{5})^{n+1} + (9-4\sqrt{5})^{n+1}\right] \tag{4.27}$$

$$\widetilde{y_n} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[(9+4\sqrt{5})^{n+1} - (9-4\sqrt{5})^{n+1}\right] \tag{4.28}$$

elde edilir.

(x_0, y_0) ve $(\widetilde{x_n}, \widetilde{y_n})$ çözümleri arasında Brahmagupta Lemması uygulanırsa;

$$(x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{5}) = (x_0 + y_0\sqrt{5})(\widetilde{x_n} + \widetilde{y_n}\sqrt{5}) \tag{4.29}$$

eşitliği elde edilir. Burada f_n ve g_n değerleri yerine yazılırsa;

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}[11643 f_n + 5210\sqrt{5} g_n] \tag{4.30}$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{5}}[5210\sqrt{5} f_n + 11643 g_n] \tag{4.31}$$

eşitliği bulunur.

t=2k, k>0 için:

$$x^2 - 5y^2 = -11^{2k} \tag{4.32}$$

denkleminin başlangıç çözümü $x_0 = 2.11^k, y_0 = 11^k$ 'dır. Diğer çözümlerini bulmak için

$$x^2 - 5y^2 = 1 \tag{4.33}$$

denkleminin $(\widetilde{x_n}, \widetilde{y_n})$ çözümlerinden faydalanacağız.

$$\widetilde{x_n} = \frac{1}{2} f_n \tag{4.34}$$

$$\widetilde{y_n} = \frac{1}{2\sqrt{5}} g_n \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned} f_n &= (9+4\sqrt{5})^{n+1} + (9-4\sqrt{5})^{n+1} \\ g_n &= (9+4\sqrt{5})^{n+1} - (9-4\sqrt{5})^{n+1} \end{aligned} \tag{4.36}$$

Bu değerler (4.24) ve (4.25) denklemlerinde yerine yazılırsa:

$$\widetilde{x_n} = \frac{1}{2}\left[(9+4\sqrt{5})^{n+1} + (9-4\sqrt{5})^{n+1}\right] \tag{4.37}$$

$$\widetilde{y_n} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[(9+4\sqrt{5})^{n+1} - (9-4\sqrt{5})^{n+1}\right] \tag{4.38}$$

elde edilir.

(x_0, y_0) ve $(\widetilde{x_n}, \widetilde{y_n})$ çözümleri arasında Brahmagupta Lemması uygulanırsa;

$$(x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{5}) = (x_0 + y_0\sqrt{5})(\widetilde{x_n} + \widetilde{y_n}\sqrt{5}) \tag{4.39}$$

eşitliği elde edilir. Burada f_n ve g_n değerleri yerine yazılırsa;

$$x_{n+1} = \frac{11^k}{2}[2f_n + \sqrt{5}g_n] \tag{4.40}$$

$$y_{n+1} = \frac{11^k}{2\sqrt{5}}[\sqrt{5}f_n + 2g_n] \tag{4.41}$$

eşitliği bulunur.

t=2k+5, k>0 için:

$$x^2 - 5y^2 = -11^{2k+5} \tag{4.42}$$

denkleminin başlangıç çözümü $x_0 = 11^{k-1}.650247, y_0 = 11^{k-1}.290806$ 'dır. Diğer çözümlerini bulmak için benzer işlemleri yaparsak;

$$x_{n+1} = \frac{11^{k-1}}{2}[650247f_n + 290806\sqrt{5}g_n] \tag{4.43}$$

$$y_{n+1} = \frac{11^{k-1}}{2\sqrt{5}}[290806\sqrt{5}f_n + 650257g_n] \tag{4.44}$$

elde ederiz.

5
SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde irrasyonel sayıların sürekli basit kesir açılımını kullanarak $\sqrt{d}$ sayısı irrasyonel olacak şekilde

$$x^2 - dy^2 = \pm 1 \tag{5.1}$$

Pell Denklemlerinin çözümleri incelendi. Bu çözümler yardımıyla

$$x^2 - 5y^2 = -11^t \tag{5.2}$$

denkleminin çözümleri elde edildi.

KAYNAKÇA

[1] *Sürekli kesirler*. [Online]. Available: `https://sarkac.org/wp-content/uploads/2020/02/Gungor_Kilic.pdf`.

[2] K. H. Rosen, *Elementary number theory*. Pearson Education London, 2011.

[3] D. Djukić, V. Janković, I. Matić, N. Petrović, *The IMO Compendium: A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2009 Second Edition*. Springer Science & Business Media, 2011.

[4] M. Somanath, J. Kannan, K. Raja, V. Sangeetha, "On the integer solutions of the pell equation $x2 = 17y2-19t$," *JP Journal of Applied Mathematics*, vol. 15, no. 2, pp. 81–88, 2017.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirisi

1. N. Erten,M. Alan,"Solutions of Some Generalized Pell Equations with Recurrence Relations," 2nd International Conference on Mathematical Advances and Applications,İstanbul, 3-5 Mayıs,2019.