T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUATERNİYONİK MANİFOLDLARIN ALT MANİFOLDLARI

Çiğdem AY

DOKTORA TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Prof. Dr. Salim YÜCE

Mart, 2023

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUATERNİYONİK MANİFOLDLARIN ALT MANİFOLDLARI

Çiğdem AY tarafından hazırlanan tez çalışması 03.03.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Salim YÜCE
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Salim YÜCE, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Güler ARSAN, Üye
İstanbul Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU, Üye
İstanbul Gelişim Üniversitesi _____

Doç. Dr. Nurten GÜRSES, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Danışmanım Prof. Dr. Salim YÜCE sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Kuaterniyonik Manifoldların Alt Manifoldları başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Çiğdem AY

İmza

Bu tez çalışması (TÜBİTAK) Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu tarafından 2228B numaralı burs programı ile desteklenmektedir.

Ailem'e
Vatanım'a...

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca daima desteğini hissettiğim, akademik çalışmalarımda yol gösteren, bilgi ve tecrübesiyle yoluma ışık tutan saygıdeğer tez danışmanım Prof.Dr. Salim YÜCE'ye,

Eğitim hayatım boyunca bana inanan, başarılarımı destekleyen, ihtiyaç duyduğumda cesaretlendiren ve güven aşılayan Ailem'e,

Bana her zaman ailem kadar yakın olan, sevgi ve özverisini arkamda hissettiğim değerli teyzem Müşerref ÇETİN'e,

İçtenlikle teşekkür eder, sevgi, saygı ve şükranlarımı sunarım.

Hayatıma dokunan herkese minnetle...

Çiğdem AY

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ viii

KISALTMA LİSTESİ ix

ŞEKİL LİSTESİ x

ÖZET xi

ABSTRACT xiii

1 GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1

1.2 Tezin Amacı 2

1.3 Hipotez 2

2 TEMEL KAVRAMLAR 4

2.1 Diferansiyellenebilir Manifoldlar 4

2.1.1 Manifoldlar 4

2.1.2 Diferansiyellenebilir Manifoldlar 7

2.1.3 Diferansiyellenebilir Manifold Üzerinde Eğriler 23

2.1.4 Diferansiyellenebilir Manifoldlar Üzerinde Tensörler 28

2.2 Riemann Manifoldlar 30

2.2.1 Yarı-Riemann Uzay ve Lorentz Uzay 30

2.2.2 Riemann Manifold ve Yarı-Riemann Manifold 33

2.2.3 Riemann Manifold üzerinde Türev Operatörü ve Eğrilikler . . . 34

2.2.4 Riemann Manifoldlar Arasındaki Dönüşümler 38

2.2.5 Riemann Manifoldların Alt Manifoldları 42

2.2.6 Riemann Manifoldlar Üzerinde Eğriler 53

2.3 Genel Anlamda Konneksiyonlar 62

2.3.1 Konneksiyon 1 Formlar 66

2.3.2 Eğrilik Tensörleri 68

2.3.3 Cartan Denklemleri 69

2.3.4 İki Konneksiyonun Fark Tensörü 71

2.4 Simplektik Manifoldlar 72
2.4.1 Yarı Simetrik Bilineer Dönüşümler 72
2.4.2 Simplektik Vektör Uzayı 73
2.4.3 Simplektik Alt Vektör Uzayları 75
2.4.4 Simplektik Manifold 75
2.5 Kompleks Manifoldlar 77
2.5.1 $\mathbb{C}^n$ Uzayında Temel Kavramlar 77
2.5.2 Vektör Uzayı Üzerinde Almost Kompleks Yapı 78
2.5.3 Manifold Üzerinde Almost Kompleks Yapı 80
2.6 Hermityen Manifoldlar 84
2.7 Kaehler Manifoldlar 86
2.7.1 Kuaterniyon Kaehler Manifold 87
2.7.2 Para-Kuaterniyon Kaehler Manifold 91

3 EĞİK MANİFOLDLAR 94
3.1 Eğik Alt Manifoldlar 94
3.2 Para-Hermityen Eğik Alt Manifoldlar 96
3.3 Para- Kaehler Manifoldun Eğik Alt Manifoldu 102

4 PARA KUATERNİYON EĞİK ALT MANİFOLD 108

5 PARA KUATERNİYON KAEHLER MANİFOLD 116

6 PARA KUATERNİYON EĞİK DAĞILIMLAR 125

7 PARA KUATERNİYON YARI EĞİK ALT MANİFOLDLAR 129

8 SONUÇ VE ÖNERİLER 136

KAYNAKÇA 137

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR 139

SİMGE LİSTESİ

J	Almost yapı
D	Dağılım kümesi
K	Düzlemsel kesit eğriliği
M	Diferansiyellenebilir manifold
h	İkinci temel form
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{H}$	Kuaterniyonlar kümesi
∇	Kovaryant türev işlemi
$\chi(M)$	M manifoldu üzerinde vektör alanları kümesi
$\chi^{\perp}(M)$	M manifoldu üzerinde normal vektör alanları kümesi
N	Nijenhuis tensör
E^n	n boyutlu Öklid uzay
H	Ortalama eğrilik
$T_M(P)$	$P \in M$ noktasındaki tanjant uzay
$T_M^{\perp}(P)$	$P \in M$ noktasındaki normal uzay
$\mathbb{H}'$	Para kuaterniyon kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
R	Riemann eğrilik tensörü
Ω	Temel 2 form

KISALTMA LİSTESİ

dif.bilir	diferansiyellenebilir
g.y.k	gerek ve yeter koşul

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Koordinat komşuluğu diyagramı 6
Şekil 2.2 Geçiş fonksiyonları diyagramı 7
Şekil 2.3 1-boyutlu küre 9
Şekil 2.4 Bir noktası çıkartılmış küre 10
Şekil 2.5 Stereografik izdüşüm 11
Şekil 2.6 Silindir dif.bilirliği 16
Şekil 2.7 Sonsuz mobius şeridi 17
Şekil 2.8 C^{∞} yapıya sahip küme örneği 21
Şekil 2.9 Bir atlas tanımlamayan iki harita 22
Şekil 2.10 Fonksiyon dif.bilirlik diyagramı 23
Şekil 2.11 Manifold üzerinde eğri diyagramı 24
Şekil 2.12 Manifoldlar arası dönüşümler 39
Şekil 7.1 Dağılım diyagramı 129

ÖZET

Kuaterniyonik Manifoldların Alt Manifoldları

Çiğdem AY

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Salim YÜCE

Bu tez çalışmasında, para-kuaterniyonik manifoldların eğik alt manifoldları incelenmiştir. Bu araştırma sekiz bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm literatürün bir özetini, tezin amacını ve hipotez kısmını içermektedir. İkinci bölüm, diferansiyellenebilir manifoldlar kavramı, diferansiyellenebilir manifoldlarla ilgili örnekler, Riemann konneksiyonlar ve kompleks manifoldlar, Simplektik manifoldlar, para-kuaterniyonik manifoldlar gibi özel manifoldları ve bu manifoldların bazı özelliklerini de içeren temel kavramlardan oluşmaktadır. Bu temel kavramlar tezin diğer bölümlerinde kullanılmak için bir dayanak niteliği taşımaktadır. Üçüncü bölümde, eğik alt manifoldların bazı tanımları verildikten sonra, para-Hermityen eğik alt manifoldlar üzerine yapılan çalışmalara yer verilecektir. Dördüncü bölüm, beşinci bölüm, altıncı bölüm ve yedinci bölüm orijinal bölümü içermektedir. Dördüncü orijinal bölüm, para-kuaterniyon manifoldların sahip olduğu özel koşulları dikkate alarak incelediğimiz para-kuaterniyon eğik alt manifoldları içermektedir. Bu bölümde eğik alt manifoldlar semi-Riemann geometri özellikleri de baz alınarak para-kuaterniyon manifoldlar için karakterize edilerek tanımlanmıştır ve bazı teoremlere yer verilmiştir. Beşinci orijinal bölüm, bir önceki bölümde oluşturulan para-kuaterniyon manifoldların eğik alt manifoldlarından yararlanarak, para-kuaterniyon Kaehler manifoldlar üzerindeki yapılar için bazı teoremleri ve kanonik yapı karakterizasyonlarını içermektedir. Altıncı orijinal bölümde, para-kuaterniyon eğik dağılımlar tanımlandıktan sonra, para-kuaterniyon manifoldun eğik alt manifoldları çalışmamıza benzer şekilde, bazı tanım ve teoremler incelenecektir. Yedinci orijinal bölümde, para-kuaterniyon Hermityen manifold üzerindeki diferansiyellenebilir dağılımın yarı-eğiklik durumları karakterize edilmiştir.

Bazı teoremler ispatlarıyla birlikte verilmiştir. Son bölümde ise, tezin literatüre katkısı değerlendirilerek elde edilen bazı sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Riemann geometri, para-kuaterniyon, eğik altmanifold, dağılım

ABSTRACT

Submanifolds of Quaternionic Manifolds

Çiğdem AY

Department of Mathematics
Doctor of Philosophy Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Salim YÜCE

This thesis investigates slant submanifolds of para-quaternionic manifolds. This study has eight chapters. The first section includes a summary of the literature, the thesis's purpose, and the hypothesis. The second chapter introduces the concept of differentiable manifolds, as well as examples of differentiable manifolds, Riemannian connections, and special manifolds such as complex manifolds, Symplectic manifolds, para-quaternionic manifolds, and basic concepts such as some properties of these manifolds. These fundamental concepts serve as the foundation for the rest of the thesis. Following some definitions of slant submanifolds, the third chapter presents studies on para-Hermitian slant submanifolds. The original chapter appears in the fourth, fifth, sixth, and seventh chapters. The fourth original section investigates para-quaternion slant submanifolds by taking into account the special conditions of para-quaternion manifolds. In this section, slant submanifolds for para-quaternion manifolds are characterized and defined using semi-Riemannian geometry properties, and some theorems are given. The fifth original chapter contains some theorems and canonical structure characterizations for structures on para-quaternion Kaehler manifolds, which make use of the slant submanifolds created in the previous section. After defining para-quaternion slant distributions, some definitions and theorems will be examined in the sixth original chapter, similar to our study of slant submanifolds of para-quaternion manifolds. The semi-curvature states of the differentiable distribution on the para-quaternion Hermitian manifolds are characterized in the seventh original chapter. Some theorems are presented along with their proofs. In the final section, some results are presented by evaluating the thesis's contribution to the literature.

Keywords: Riemannian geometry, para-quaternion, slant submanifold, distribution

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Almost Hermityen manifold (hemen hemen hermityen manifold), daha özel olarak Kaehler manifoldların alt manifold teorisi, diferansiyel geometrideki önemli konulardan biridir. Alt manifoldların üzerinde tanımlanan almost kompleks yapısına göre tanjant bundle (demet) davranışı sonucunda, kompleks alt manifold ve totally (tamamen) reel alt manifold şeklinde oluşan iki sınıfı mevcuttur.

Bir $(\bar{M}, J, g)$ almost Hermityen manifoldun M kompleks alt manifoldunun TM tanjant bundle davranışına göre karakterizasyonu, herhangi $P \in M$ noktasında

$$J(T_M(P)) \subseteq T_M(P)$$

koşulu ile verilir. Yani, M manifoldunun $(\bar{M}, J, g)$ manifoldunun kompleks alt manifoldu olması için g.y.k. herhangi $P \in M$ noktasında M manifolduna teğet $0 \neq X$ vektör alanı için JX ve $T_M(P)$ tanjant uzayı arasındaki açı $\theta = 0$ dır.

$(\bar{M}, J, g)$ almost Hermityen manifoldunun M tamamen reel alt manifoldu, TM tanjant bundle davranışına göre, M manifoldunun her teğet vektörünü $\bar{M}$ manifoldunda M manifoldunun normal uzayına karşılık getirir, yani herhangi $P \in M$ noktasında

$$J(T_M(P)) \subseteq T_M^{\perp}(P)$$

şeklindedir. Diğer bir deyişle M manifoldunun $(\bar{M}, J, g)$ manifoldunun tamamen reel alt manifoldu olması için g.y.k. herhangi $P \in M$ noktasında M manifolduna teğet $0 \neq X$ vektör alanı için JX ile $T_M(P)$ tanjant uzayı arasındaki açı $\theta = \frac{\pi}{2}$ şeklindedir.

Bu tezde bu iki sınıftan farklı bir sınıf olan eğik alt manifoldlar ele alınacak, yani $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$ şeklindeki alt manifoldlar incelenecektir.

Eğik alt manifold terimi ilk kez 1990 yılında B.Y.Chen [1] tarafından tanımlanmıştır.

Chen Riemann manifoldun sabit Wirtinger açılı almost Hermityen manifolda izometrik immersiyonunu tanımlamıştır [2]. Guanghan ve Chuanxi kompleks uzay formları ve Chen eşitsizliğinin eğik immersiyonu notasyonu ile ilgili çalışma hazırlamıştır [3]. Daha sonraları eğik alt manifoldlar pek çok matematikçi tarafından çalışma alanı olarak benimsenmiş ve farklı manifold çeşitleri baz alınarak incelenmiştir. Eğik alt manifoldların yarı-eğik, kısmi-eğik ya da bi-eğik alt manifoldlar gibi genelleştirilmeleri tanımlanmıştır. Papaghiuc [4] eğik alt manifoldların özel bir durumu olan yarı-eğik alt manifold kavramını tanımlamıştır. Ayrıca, farklı tipten manifoldların eğik alt manifoldları da çalışılmıştır. J. L. Cabrerizo, A. Carriazo, L. M. Fernández, ve M. Fernández [5] Sasakian manifoldun eğik alt manifoldlarını çalışırken, B. Şahin [6] almost çarpımsal manifoldlar ve [7] kuaterniyon manifoldların eğik alt manifoldlarını çalışmıştır.

Semi-Riemann manifoldların eğik alt manifoldları ile ilgili çalışmalar B.-Y. Chen, O. Garay, ve I. Mihai tarafından Lorentz kompleks uzay formlarında eğik yüzey sınıflandırılmasıyla tanımlanmıştır [8], [9]. K. Arslan, A. Carriazo, B.-Y. Chen, ve C. Murathan [10] neutral Kaehler manifoldun eğik alt manifoldlarını tanımlarken, A. Carriazo and M. J. Pérez-García [11] neutral almost kontakt pseudo metrik manifoldlarda çalışmalar yapmıştır. M. A. Khan, K. Singh, ve V. A. Khan [12] LP kontakt metrik manifoldlarda eğik alt manifoldları çalışırken, P. Alegre [13] Lorentz Sasakian ve para-Sasakian manifoldların eğik alt manifoldlarını tanımlamıştır.

Para-Hermityen manifoldun eğik alt manifold tanımı ilk olarak Y. Gündüzalp [14] tarafından verilmiş, fakat semi-Riemann geometri özellikleri dikkate alınmadığından, bu çalışmadaki eksiklikleri gidermek amacıyla P. Alegre ve A. Carriazo [15] para-Hermityen manifoldların eğik alt manifoldlarını farklı sınıflar üzerinden ele almıştır.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışması, para-kuaterniyon manifoldların eğik alt manifold kavramını semi-Riemann geometri ve para-kuaterniyon özellikleri dikkate alınarak, farklı tipte eğiklik sınıfları üzerinden inceleme amacını taşımaktadır.

1.3 Hipotez

Herhangi para-kuaterniyon manifold $4m$ $(m \geq 1)$ boyutludur ve g uyumlu metriği $(2m, 2m)$ işaretli neutral metriktir. (M, J_P, g) para-kuaterniyon Hermityen

manifoldunun M_1^2 alt manifoldunun

$$g(e_1, e_1) = 1, g(e_1, e_2) = 0, g(e_2, e_2) = -1 \tag{1.1}$$

şeklindeki $\{e_1, e_2\}$ yerel ortonormal çatısından hareketle $T_\alpha e_1 = \mu e_2$ olacak şekilde, $\mu \neq 0, \mp 1$ reel değerli fonksiyonları alındığında, $End(TM)$ endomorfizminin J_P rank-3 alt bundle'ının sectionları üzerindeki $\{J_1, J_2, J_3\}$ yerel bazı ve alt manifold özelliği kullanılarak,

$$g(J_\alpha e_1, J_\alpha e_1) = g(T_\alpha e_1, T_\alpha e_1) + g(F_\alpha e_1, F_\alpha e_1), \tag{1.2}$$

eşitliği ve $J_\alpha^2 = -\varepsilon_\alpha Id$ para-kuaterniyonik özelliğinden

$$\varepsilon_\alpha + \mu^2 = g(F_\alpha e_1, F_\alpha e_1) \tag{1.3}$$

bağıntısı elde edilir.

Para-kuaterniyon Hermityen manifoldlar daima neutral özelliğe sahip olduğundan, herhangi X space-like (time-like) vektör alanı için $T_\alpha X$ time-like (space-like) vektör alan belirtir. Bu durum $T_\alpha e_1 = \mu e_2$ olmak üzere $g(T_\alpha e_1, T_\alpha e_1) = \mu^2 g(e_2, e_2)$ eşitliğini verir ve $T_\alpha e_1$ ile e_2 daima aynı karakterlidir. Böylece,

$$g(F_\alpha e_1, F_\alpha e_1) = \varepsilon_\alpha + \mu^2 \tag{1.4}$$

denkleminde farklı olasılıklar ortaya çıkmaktadır.

Bu nedenle, ε_α ve μ fonksiyonlarına bağlı olarak, farklı eğiklik tipleri elde edilerek, para-kuaterniyon Hermityen manifoldların eğik alt manifoldlarına farklı bir yaklaşım getirilerek inceleme ihtiyacı oluşmuştur.

Ayrıca, eğik alt manifoldları farklı sınıflandırmalar ile inceledikten sonra, benzer olasılıkların para-kuaterniyon manifoldların eğik dağılımları için de araştırılabileceği hipotezi ile karşılaşmak mümkündür.

2
TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin diğer bölümlerinde kullanacağımız diferansiyellenebilir manifold, Riemann manifold, konneksiyon kavramı ve bazı özel manifold kavramları üzerinde durulacaktır.

2.1 Diferansiyellenebilir Manifoldlar

2.1.1 Manifoldlar

Tanım 2.1. $M \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere, M kümesinin tüm alt kümelerinin ailesine kuvvet kümesi denir ve $P(M)$ şeklinde gösterilir [16].

Tanım 2.2. M herhangi bir küme, ayrıca $\tau \subseteq P(M)$, M manifoldunun alt kümelerinin kolleksiyonu olsun. Eğer

1) $M, \emptyset \in \tau$,

2) τ kümesinde alınan herhangi sayıdaki elemanların birleşimi τ kümesine aittir. Başka bir deyişle, I bir indis kümesi olmak üzere $\forall \{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$ için

$$\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau, \tag{2.1}$$

3) τ kümesinde alınan sonlu sayıdaki elemanların kesişimi τ kümesine aittir. Başka bir deyişle, J sonlu bir indis kümesi olmak üzere $\forall \{A_i\}_{i\in J} \subset \tau$ için

$$\bigcap_{i\in J} A_i \in \tau \tag{2.2}$$

koşulları sağlanırsa, τ kolleksiyonuna M kümesi üzerinde ***topoloji*** denir. Bu τ topolojisine sahip M kümesine veya (M, τ) ikilisine ***topolojik uzay*** denir [16, 17] .

Örnek 2.1. Aşağıda bazı topoloji örnekleri verilmiştir [16]:

1) M bir küme ve M kümesinin kuvvet kümesi $P(M)$ olmak üzere, $\tau = P(M)$ kümesine M üzerinde ***diskrit (ayrık) topoloji*** denir.

2) $M \neq \emptyset$ küme olmak üzere, $W = \{\emptyset, M\}$ kümesine ***indiskrit (triviyal) topoloji*** denir.

3) $M = \{a, b, c\}$ kümesi verildiğinde $\tau = \{\emptyset, M, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ kümesi ile birlikte topoloji değildir.

4) $M \neq \emptyset$ küme olmak üzere, $\tau_F = \{\emptyset\} \cup \{U \subset M | M - U$ sonlu$\}$ kolleksiyonuna M üzerinde ***sonlu tümleyen topolojisi*** denir.

5) (M, τ) topolojik uzay ve $Y \subset M$ olmak üzere, $\forall A_i \in \tau$ için, $\tau_Y = \{Y \cap A_i | A_i \in \tau, i \in I\}$ kümesi Y ***üzerinde*** M ***manifoldundan indirgenen topoloji*** adını alır.

Tanım 2.3. Bir M topolojik uzayındaki P ve Q gibi farklı noktaların A_P ve A_Q gibi açık kümeleri $A_P \cap A_Q = \emptyset$ olacak şekilde M uzayında bulunabilirse, M topolojik uzayına ***Hausdorff uzayı*** denir [16] .

Lemma 2.1. *Her metrik uzay bir Hausdorff uzayıdır [18].*

İspat. (M, d) metrik uzay ve $x \neq y \in M$ farklı iki nokta olsun. Eğer $d(x, y) = r$ alırsak, x ile y nin komşulukları $B\left(x, \frac{r}{2}\right) = U$ ve $B\left(y, \frac{r}{2}\right) = V$ iken, $U \cap V = \emptyset$ olduğunu gösterelim.

Eğer $U \cap V \neq \emptyset$ ise bir $z \in U \cap V$ elemanı $z \in B\left(x, \frac{r}{2}\right)$ ile $z \in B\left(y, \frac{r}{2}\right)$ olacak şekilde vardır. Böylece, $d(x, z) < \frac{r}{2}$ ve $d(z, y) < \frac{r}{2}$ eşitsizlikleri yazılabilir. Dolayısıyla, $r = d(x, y) < d(x, z) + d(z, y) < r$ olduğundan $r < r$ çelişkisi elde edilir. O halde, $U \cap W = \emptyset$ dır. ■

Tanım 2.4. Bir (M, τ) topolojik uzayında,

1) M bir Hausdorff uzayı,

2) M uzayındaki her açık alt küme E^n veya E^n in açık alt kümesine homeomorf,

3) M sayılabilir açık kümeler ile örtülebilir

özellikleri sağlanıyorsa, M topolojik uzayına n***—boyutlu topolojik manifold*** veya ***topolojik*** n***—manifold*** denir [16] .

Tanım 2.5. M ve N birer topolojik uzay olmak üzere,

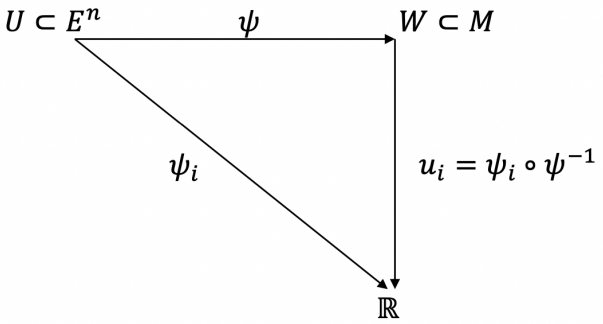
$$f : M \to N$$

bijektif fonksiyonu ile f^{-1} ters fonksiyonu sürekli iken f ***homeomorfizm (topolojik dönüşüm)*** adını alır. Bu durumda, M ve N uzaylarına ***homeomorfik (topolojik olarak denk)*** denir [16].

Tanım 2.6. (M, τ) topolojik uzayında $U \subset E^n$ ve $W \subset M$ açık kümeleri arasında

$$\psi : U \subset E^n \to W \subset M$$

homeomorfizmi varsa (ψ, W) gösterimine ***koordinat komşuluğu (harita)*** denir. ψ homeomorfizminin koordinat fonksiyonları $\psi_1, ..., \psi_n : U \subset E^n \to \mathbb{R}$ şeklinde olmak üzere, $\forall Q \in E^n$ noktası için $\psi(Q) = (\psi_1(Q), ..., \psi_n(Q)) = P$ yazılabileceğinden,



Şekil 2.1 Koordinat komşuluğu diyagramı

diyagramı bilgisi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} P = \psi(Q) &= (\psi_1(Q), ..., \psi_n(Q)) \\ &= \left(\psi_1\left(\psi^{-1}(P)\right), ..., \psi_n\left(\psi^{-1}(P)\right)\right) \\ &= (u_1(P), ..., u_n(P)) \end{aligned} \tag{2.3}$$

eşitliği elde edilip, $\forall P \in M$ noktası için bir $(u_1(P), ..., u_n(P))$ sıralı $n-$lisi karşılık getirilmiş olur. Burada, $u_i(P)$ reel sayısına $\psi(Q) = P$ ***noktasının*** i***. koordinatı*** ve $u_i : \psi_i \circ \psi^{-1} : W \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna da W ***kümesinin*** i***. Öklid koordinat fonksiyonu*** denir. Ayrıca, $\{u_1, ..., u_n\}$ sıralı $n-$lisine de (ψ, W) üzerindeki ***yerel koordinat sistemi*** adı verilir [16].

Tanım 2.7. M manifoldu n—boyutlu topolojik manifold olmak üzere, $\{W_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ailesi M manifoldunun açık örtüsü olsun. Bu durumda,

$$\psi_\alpha : U_\alpha \subset E^n \to W_\alpha \subset M$$

homeomorfizmlerinin veya koordinat komşuluklarının $\{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ koleksiyonuna M ***manifoldunun bir atlası*** denir [16].

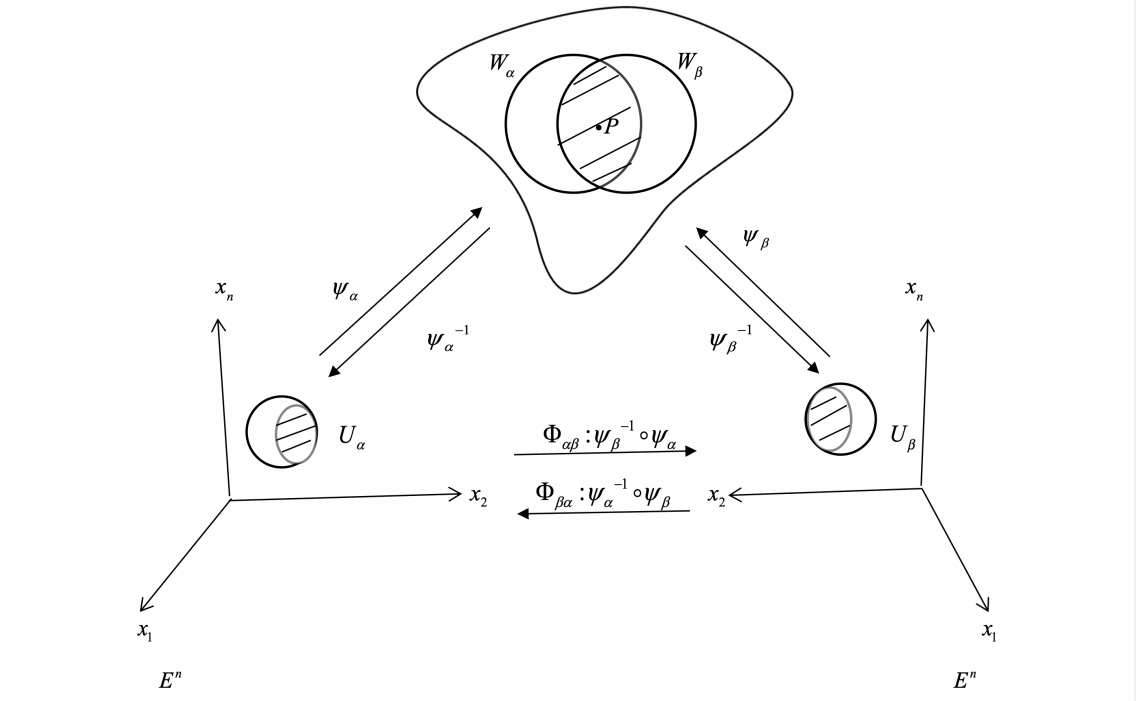
2.1.2 Diferansiyellenebilir Manifoldlar

Bir $\alpha \in I$ indisi için, $\{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ atlası üzerindeki yerel koordinat sistemini $\left\{u_\alpha{}^1, ..., u_\alpha{}^n\right\}$ ile gösterirsek, $\forall \alpha, \beta \in I$ için, $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ kesişiminin her noktasında $\left\{u_\alpha{}^1, ..., u_\alpha{}^n\right\}$ ve $\left\{u_\beta{}^1, ..., u_\beta{}^n\right\}$ gibi iki koordinat sistemi tanımlıdır.
O halde $\alpha, \beta \in I$ indisleri için,

$$\psi_\alpha : U_\alpha \subset E^n \to W_\alpha \subset M,$$

$$\psi_\beta : U_\beta \subset E^n \to W_\beta \subset M$$

homeomorfizmleri kullanılarak, M manifoldu üzerinde



Şekil 2.2 Geçiş fonksiyonları diyagramı

diyagramı çizilebilir. Bu diyagramdaki

$$\Phi_{\alpha\beta} : {\psi_\beta}^{-1} \circ \psi_\alpha : {\psi_\alpha}^{-1}\left(W_\alpha \cap W_\beta\right) \to {\psi_\beta}^{-1}\left(W_\alpha \cap W_\beta\right),$$

$$\Phi_{\beta\alpha} : {\psi_\alpha}^{-1} \circ \psi_\beta : {\psi_\beta}^{-1}\left(W_\alpha \cap W_\beta\right) \to {\psi_\alpha}^{-1}\left(W_\alpha \cap W_\beta\right)$$

geçiş fonksiyonları iki homeomorfizm birleşimi olduğundan homeomorfizmdir. Tanımdan, $\Phi_{\beta\alpha}$ ve $\Phi_{\alpha\beta}$ geçiş fonksiyonlarının diferansiyellenebilir olması, $\left(\varphi_{\beta\alpha}\right)_i$ ve $\left(\varphi_{\alpha\beta}\right)_i$ koordinat fonksiyonlarının diferansiyellenebilir olmasını gerektirir [16].

Tanım 2.8. M manifoldu n—boyutlu topolojik bir manifold ve $A = \{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ kümesi M manifoldunun atlası olmak üzere, $\forall \alpha, \beta \in I$ indisi için,

$$\Phi_{\alpha\beta} : {\psi_\beta}^{-1} \circ \psi_\alpha : {\psi_\alpha}^{-1}\left(W_\alpha \cap W_\beta\right) \to {\psi_\beta}^{-1}\left(W_\alpha \cap W_\beta\right),$$

$$\Phi_{\beta\alpha} : {\psi_\alpha}^{-1} \circ \psi_\beta : {\psi_\beta}^{-1}\left(W_\alpha \cap W_\beta\right) \to {\psi_\alpha}^{-1}\left(W_\alpha \cap W_\beta\right)$$

homeomorfizmleri C^k sınıfından diferansiyellenebilir ise, A atlasına M manifoldu üzerinde C^k sınıfından ***diferansiyellenebilir yapı*** denir. Bu taktirde M manifolduna C^k sınıfından n—***boyutlu diferansiyellenebilir manifold*** denir [16].

Bu tezin kalan kısımlarında diferansiyellenebilir kavramı, dif.bilir şeklinde ifade edilecektir.

2.1.2.1 Bazı Manifold Örnekleri

Örnek 2.2. (1-boyutlu küre) E^2 de S^1, merkezi orijinde olan birim çemberi 1—boyutlu topolojik manifold belirtir [17].

Çözüm

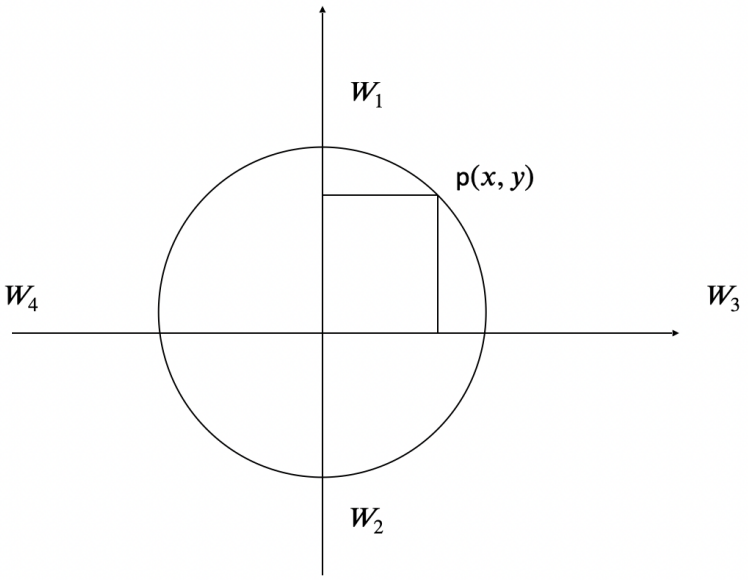
$$\begin{aligned} W_1 &= \{p = (x, y) \in S^1 | y > 0\}, \\ W_2 &= \{p = (x, y) \in S^1 | y < 0\}, \\ W_3 &= \{p = (x, y) \in S^1 | x > 0\}, \\ W_4 &= \{p = (x, y) \in S^1 | x < 0\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

olmak üzere, U_i ve V_i $1 \leq i \leq 2$, kümeleri S^1 in birer açık alt kümesidirler. Ayrıca

$$S^1 = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4 \tag{2.5}$$

yazılabilir. Böylece S^1 çemberinin sayılabilir açık örtüsü $\{W_i\}_{i=1,2,3,4}$ şeklindedir.

$U_1 = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 1\}$ ve $U_2 = \{y \in \mathbb{R} | -1 < y < 1\}$ kümeleri E^1 Öklid uzayında



Şekil 2.3 1-boyutlu küre

birer açık kümedir.

$$\psi_i : U_i \subset E^1 \to W_i \subset S^1, \qquad i = 1,2,3,4 \tag{2.6}$$

dönüşümlerini tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \psi_1 : U_1 \subset E^1 \to W_1 \subset S^1, \qquad & \psi_1^{-1}(x,y) = x_1 \\ x_1 \to \psi_1(x_1) = & \left(x_1, \sqrt{1-x_1^2}\right) \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \psi_2 : U_1 \subset E^1 \to W_2 \subset S^1, \qquad & \psi_2^{-1}(x,y) = x_1 \\ x_1 \to \psi_2(x_1) = & \left(x_1, -\sqrt{1-x_1^2}\right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

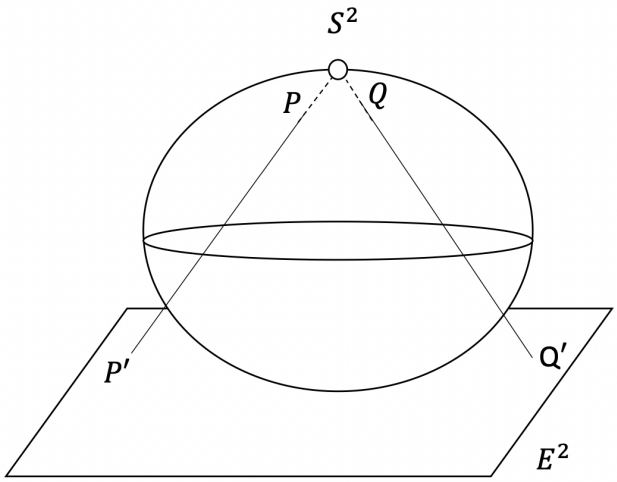
$$\begin{aligned} \psi_3 : U_2 \subset E^1 \to W_3 \subset S^1, \qquad & \psi_3^{-1}(x,y) = x_2 \\ x_2 \to \psi_3(x_2) = & \left(\sqrt{1-x_1^2}, x_2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_4 : U_2 \subset E^1 \to W_4 \subset S^1, \qquad & \psi_4^{-1}(x,y) = x_2 \\ x_2 \to \psi_4(x_2) = & \left(-\sqrt{1-x_1^2}, x_2\right) \end{aligned} \tag{2.9}$$

dönüşümleri 1-1, örten ve süreklidir. O halde (ψ_1, W_1), (ψ_2, W_2), (ψ_3, W_3) ve (ψ_4, W_4) S^1 için haritadır. Böylece, $\{(\psi_i, W_i)\}_{i=1,2,3,4}$ S^1 için bir atlastır ve S^1 1—boyutlu topolojik manifolddur.

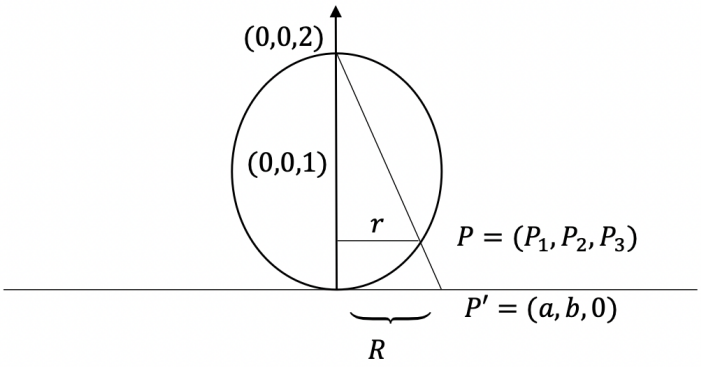
Örnek 2.3. Bir noktası çıkartılmış S^2 küresi E^2 düzlemine homeomorf yani topolojik olarak denktir [16].

Çözüm E^2 düzlemi olarak xoy düzlemini, S^2 küresi olarak $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ birim



Şekil 2.4 Bir noktası çıkartılmış küre

küresini alırsak, Stereografik izdüşüm yardımıyla



Şekil 2.5 Stereografik izdüşüm

izdüşümü elde edilir. Benzerlik kullanılarak, $\frac{2-P_3}{2} = \frac{r}{R}$ oranından, $P_3 = 2 - \frac{2r}{R}$ eşitliği elde edilir.

O halde, $(0,0,2)$ ve $(a,b,0)$ noktalarından geçen doğrunun parametrik denklemi,

$$\begin{cases} x = ta, \\ y = tb, \\ z = 2 + t(-2) \end{cases} \tag{2.10}$$

olup, P noktası doğru üzerinde olduğundan,

$$\begin{cases} P_1 = ta, \\ P_2 = tb, \\ P_3 = 2 - 2t \end{cases} \tag{2.11}$$

yazılabilir. O halde $z = 2 + t\,(-2)\,P_3 = 2 - 2t$ bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} f &: S^2 \to E^2 \\ (P_1, P_2, P_3) &\to f\,(P_1, P_2, P_3) = \left(\frac{2P_1}{2 - P_3}, \frac{2P_2}{2 - P_3} \right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Stereografik izdüşümü elde edilir ve süreklidir. Bu izdüşüm fonksiyonunun f^{-1} ters fonksiyonunu elde edelim.

$$f^{-1}: E^2 \to S^2, \qquad f^{-1}(a,b) = (P_1, P_2, P_3) \tag{2.13}$$

tanımından, P noktası küre üzerinde olduğundan ${P_1}^2 + {P_2}^2 + (P_3 - 1)^2 = 1$ eşitliği kullanılarak, $a^2t^2 + b^2t^2 + (1-2t)^2 = 1$, $\left(a^2+b^2+4\right)t^2 - 4t = 0$ iken, $t = \frac{4}{a^2+b^2+4}$ ifadesi yerine yazılırsa,

$$f^{-1}(a,b) = \left(\frac{4a}{a^2+b^2+4}, \frac{4b}{a^2+b^2+4}, \frac{2a^2+2b^2}{a^2+b^2+4}\right) \tag{2.14}$$

dönüşümü süreklidir. Böylece f bir homeomorfizma olduğundan bir noktası çıkartılmış küre, düzleme homeomorftur.

Örnek 2.4. S^2 küresi, 2—boyutlu bir topolojik manifolddur [17].

1) S^2 küresinin E^2 düzlemine homeomorf olduğunu gösterdik.

2) $\forall P,Q \in S^2$, $P \neq Q$ için P ve Q noktalarını içine alan ayrık açık kümeler küre kapakçıklarıdır, böylece S^2 Hausdorff uzayıdır.

3) S^2 sayılabilir çoklukta küre kapakçıkları ile örtülebilir.

Örnek 2.5. S^2 birim küresi üzerinde bir atlas bulalım ve diferansiyellenebilir manifold olduğunu gösterelim [17].

$$W_{1,2} = \left\{(x,y,z) \in S^2 \middle|\, \begin{smallmatrix} x \rangle 0 \\ x \langle 0 \end{smallmatrix}\right\},$$

$$W_{3,4} = \left\{(x,y,z) \in S^2 \middle|\, \begin{smallmatrix} y \rangle 0 \\ y \langle 0 \end{smallmatrix}\right\},$$

$$W_{5,6} = \left\{(x,y,z) \in S^2 \middle|\, \begin{smallmatrix} z \rangle 0 \\ z \langle 0 \end{smallmatrix}\right\}$$

kümeleri, S^2 küresini örten açık kümelerdir. E^2 kümesinin $U = \left\{(u,v) | u^2+v^2 \langle 1\right\}$ açık alt kümesinden S^2 küresinin açık alt kümelerine

$$\begin{aligned} \psi_{1,2}: U \subset E^2 &\to W_{1,2} \subset S^2 \\ (u,v) &\to \psi_{1,2}(u,v) = \left(\pm\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v\right) \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned} \psi_{3,4}: U \subset E^2 &\to W_{3,4} \subset S^2 \\ (u,v) &\to \psi_{3,4}(u,v) = \left(u, \pm\sqrt{1-u^2-v^2}, v\right) \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} \psi_{5,6}: U \subset E^2 &\to W_{5,6} \subset S^2 \\ (u,v) &\to \psi_{5,6}(u,v) = \left(u, v, \pm\sqrt{1-u^2-v^2}\right) \end{aligned} \tag{2.17}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümler, homeomorfizma olduklarından $\{(\psi_i, W_i)\}_{i\in I}$ atlası elde edilir.

S^2 küresinin dif.bilir manifold olduğunu gösterelim.

S^2 küresi üzerinde tanımlanan $\{(\psi_i, W_i)\}_{i\in I}$ atlasını göz önüne alırsak,
$W_3 \cap W_5 = \left\{(x,y,z)\in S^2 \middle|\ y\rangle 0,\ z\rangle 0\right\}$ ve $\forall (u,v) \in {\psi_3}^{-1}(W_3 \cap W_5)$ için $\Phi_{35}(u,v) = {\psi_5}^{-1}(\psi_3(u,v)) = {\psi_5}^{-1}\left(u,\sqrt{1-u^2-v^2},v\right) = \left(u,\sqrt{1-u^2-v^2}\right)$ ve $\Phi_{53}(u,v) = \left(u,\sqrt{1-u^2-v^2}\right)$ dönüşümlerinin koordinat fonksiyonları dif.bilir olduklarından dif.bilirdir. Böylece, $\Phi_{12}, \Phi_{15}, \Phi_{32}, \ldots$ dönüşümlerinin de dif.bilir olduğu görülebileceğinden S^2 dif.bilir manifolddur.

Örnek 2.6. (n—boyutlu küre)

$$S^n = \left\{(x_1,\cdots,x_{n+1}) \in E^{n+1}, \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2\right\} \subset E^{n+1} \tag{2.18}$$

kümesine n—**boyutlu küre** (n—küre) denir. S^n küresi bir n—boyutlu topolojik manifold belirtir [17].

Çözüm

S^n kümesinin n—boyutlu topolojik manifold olduğunu göstermek için S^1 halindeki gibi

$$\begin{aligned} U_i &= \{p = (x_1,\cdots,x_{n+1}) \in S^n | x_i > 0\} \\ V_i &= \{p = (x_1,\cdots,x_{n+1}) \in S^n | x_i < 0\}, \qquad 1 \le i \le n+1 \end{aligned} \tag{2.19}$$

alınması ve

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i \to B^n &= \left\{(y_1,\cdots,y_n) \middle| \sum_{i=1}^{n} y_i^2 < r^2\right\} \\ \Psi_i : V_i \to B^n &= \left\{(y_1,\cdots,y_n) \middle| \sum_{i=1}^{n} y_i^2 < r^2\right\} \end{aligned} \tag{2.20}$$

fonksiyonlarının

$$P = \{x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_i, \cdots, x_n\} \to \{x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, \cdots, x_n\} \tag{2.21}$$

şeklinde tanımlaması gerekmektedir. Burada B^n kümesi E^n deki bir S^{n-1} kürenin içidir ve bir açıktır. φ_i, Ψ_i fonksiyonlarının her biri birer homeomorfizimdir ve dolayısıyla S^n bir n—boyutlu topolojik manifolddur.

Örnek 2.7. (Projektif Uzay) E^{n+1} kümesinden $O = (0, \cdots, 0)$ noktasını çıkarmakla elde edilen $E^{n+1} - \{O\}$ kümesinde bir denklik bağıntısını şu şekilde tanımlayalım. $x = (x_i)$ ve $y = (y_i) \in E^{n+1} - \{O\}$ gibi iki noktanın denk olması için gerek ve yeter koşul $x = \lambda y$ olacak şekilde bir $\lambda \neq 0$ reel sayısının var olmasıdır. Bu denklik bağıntısına göre $x \in E^{n+1} - \{O\}$ noktasını içeren denklik sınıfı $\pi(x)$ olmak üzere

$$P^n = \{\pi(x) | x \in E^{n+1} - \{O\}\} \tag{2.22}$$

kümesini tanımlayalım. O halde

$$\pi : E^{n+1} - \{O\} \to P^n \tag{2.23}$$

şeklindedir. Yani, $\pi(x) \in P^n$ elemanının E^{n+1} deki karşılığı $O = \{0, \cdots, 0\}$ dan geçen $tx, t \in \mathbb{R}$, doğrusudur. Bu eşleşme birebir olduğundan P^n kümesine E^{n+1} de başlangıçtan geçen doğruların kümesi olarak bakılabilir.

P^n uzayında bir topoloji tanımlayabilmek için P^n deki bir U açık alt kümesinin nasıl belirtilebileceğini gösterelim. Bu gösterim için π^{-1} dönüşümü altında $\pi^{-1}(U) \subset E^{n+1} - \{O\}$ alt kümesi açık ise $U \subset P^n$ de açıktır diye tanımlayabiliriz. Böylece P^n, bir Hausdorff uzayı olur. Ayrıca π dönüşümü süreklidir.

1. $\pi : E^{n+1} - \{O\} \to P^n$ dönüşümü birebir, üzerine ve süreklidir.

2. $\pi^{-1}(U) \subset E^{n+1} - \{O\}$ bir açık cümle ise U da açıktır.

3. P^n bir Hausdorff uzayıdır.

4. P^n bir topolojik uzaydır.

Şimdi P^n in bir topolojik manifold olduğunu gösterelim:

$p \in P^n$ ve $p = \pi(x)$, $x = (x_1, \cdots, x_{n+1})$ olsun. x in $i-$yinci koordinatının $x_i \neq 0$ olması $p = \pi(x)$ için seçilecek olan x temsilcisine bağlı değildir.

$$U_\alpha = \{p \in P^n | p = \pi(x),\ x \in E^{n+1} - \{O\},\ x_\alpha \neq 0\}, \qquad 1 \leq \alpha \leq n+1 \tag{2.24}$$

kümelerini seçelim. O halde,

$$\pi^{-1}(U_\alpha) = \{x | x_\alpha \neq 0\} \qquad 1 \leq \alpha \leq n+1, \tag{2.25}$$

kümeleri $E^{n+1}-\{O\}$ da birer açık kümeler olacağından U_α kümeleri de P^n de birer açıktırlar. Eğer $p \in U_\alpha$ ve $p=\pi(x)$ ise $\frac{x_j}{x_\alpha}$, $1 \leq j \leq n+1$, oranı p için x temsilcisinin seçilişinden bağımsızdır. Böylece U üzerinde birer reel değerli fonksiyonlar olarak

$$(x_\alpha)_1, \cdots, (x\alpha)_n \text{ (veya bunları } x\alpha^1, \cdots, x_\alpha^n \text{ de yazabiliriz)} \tag{2.26}$$

fonksiyonlarını

$$\begin{aligned} &(x_\alpha)_j : U_\alpha \to \mathbb{R} \\ &p=\pi(x) \to \begin{cases} (x_\alpha)_j(p)=\frac{x_j}{x\alpha}, & 1 \leq j \leq \alpha-1, \\ (x_\alpha)_j(p)=\frac{xj+1}{x_\alpha}, & \alpha \leq j \leq n, \end{cases} \end{aligned} \tag{2.27}$$

biçiminde tanımlayabiliriz. Şimdi de bir

$$\Psi_\alpha : U_\alpha \to E^\alpha \tag{2.28}$$

fonksiyonunu

$$p=\pi(x) \to \Psi_\alpha(p)=((x_\alpha)_1(p), \cdots, (x\alpha)_n(p)) \tag{2.29}$$

olarak tanımlayalım. O zaman Ψ_α fonksiyonları birer homeomorfizm olurlar. Dolayısıyla P^n de $P^n=\bigcup_{\alpha=1}^{n+1} U_\alpha$ olur. O halde P^n manifoldu n—boyutlu topolojik manifold belirtir. Ayrıca, $S=\{U_\alpha, \Psi_\alpha\}_{\alpha=1,\cdots,n+1}$ ifadesi P^n için bir atlas olur. P^n manifolduna n—**boyutlu reel projektif uzay** da denir.

Örnek 2.8. $M=\left\{(x,y,z) \in E^3 \middle| x^2+y^2=1\right\}$ silindir dif.bilir manifold belirtir [17].

Çözüm Böylece,

$$\begin{aligned} &\psi : U \subset E^2 \to M \subset E^3 \\ &(u,v) \to \psi(u,v)=(\cos u, \sin u, v) \end{aligned} \tag{2.30}$$

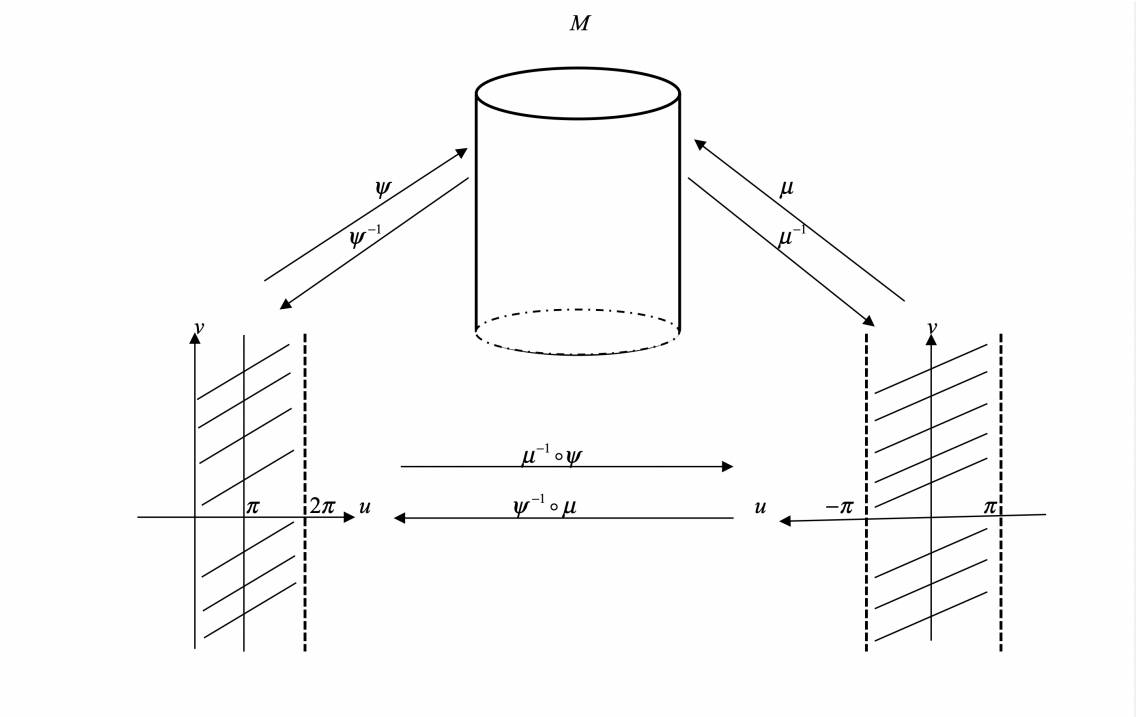
dönüşümü için $\psi\left(E^2\right)=M$ yani ψ silindirin tamamını örter, fakat birebir değildir. Eğer $U=(0,2\pi)\times\mathbb{R}$ alınırsa, ψ dönüşümü birebir ve süreklidir.

$\forall (x,y,z) \in M$ için, $\psi(u,v)=(x,y,z)$ eşitliğini sağlayacak şekilde $(u,v) \in M$ varlığını gösterelim. $\psi(u,v)=(x,y,z)=(\cos u, \sin u, v)$ ve $u=\arctan\left(\frac{y}{x}\right), v=z$ eşitliğinden ψ örten olup $\psi^{-1}(x,y,z)=(u,v)=\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right), z\right) \in U$ olur ve ψ^{-1} sürekli olduğundan ψ homeomorfizm (ψ, U) ikilisi haritadır. ψ homeomorfizmasının görüntüsü M manifoldu üzerinde $(1,0,v)$ doğrusu hariç manifoldun tamamıdır.

Benzer şekilde, $V = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \mu : V \subset E^2 &\to M \subset E^3 \\ (u, v) &\to \psi(u, v) = (\cos u, \sin u, v) \end{aligned} \tag{2.31}$$

dönüşümü bir homeomorfizmdir. μ dönüşümünün görüntüsü $\bar{V}$ $(-1, 0, 0)$ dan geçen z ye paralel olan doğru hariç M manifoldunun tamamıdır. Böylece, $\left\{\left(\psi, \bar{U}\right), \left(\mu, \bar{V}\right)\right\}$ atlası elde edilir.



Şekil 2.6 Silindir dif.bilirliği

$\forall (u, v) \in V - (\{0\} \times \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} \left(\psi^{-1} \circ \mu\right)(u, v) &= \psi^{-1}(\mu(u, v)) \\ &= \psi^{-1}(\cos u, \sin u, v) \\ &= (\arctan(\tan u), v) \\ &= (u, v) \end{aligned} \tag{2.32}$$

olup, dönüşüm dif.bilirdir.
Benzer şekilde, $\left(\mu^{-1} \circ \psi\right)$ dönüşümünün dif.bilirliği de gösterilebileceğinden, elde edilen atlas dif.bilirdir ve silindir dif.bilir bir manifold belirtir [17].

Örnek 2.9. M ve N sırası ile m ve n boyutlu C^∞ manifold, $S_m = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ ve $S_n = \left\{\left(V_\beta, \varphi_\beta\right)\right\}_{\beta \in B}$ M ve N manifoldları üzerindeki atlaslar olsun. $M \times N$ direkt çarpımı üzerindeki topolojiye ***çarpım topolojisi*** adı verilir. $M \times N$ çarpım uzayındaki

topoloji Hausdorff uzayıdır. $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ ve $\left(V_\beta\right)_{\beta\in B}$ sırası ile M ve N manifoldlarının açık örtüleri ise, $\left\{\left(U_\alpha \times V_\beta\right)\right\}_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$ de $M\times N$ manifoldunun açık örtüsünü oluşturur.

$$\psi_\alpha \times \varphi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \to \left(\psi_\alpha(U_\alpha) \times \varphi_\beta\left(V_\beta\right)\right) \subset E^{m+n}$$

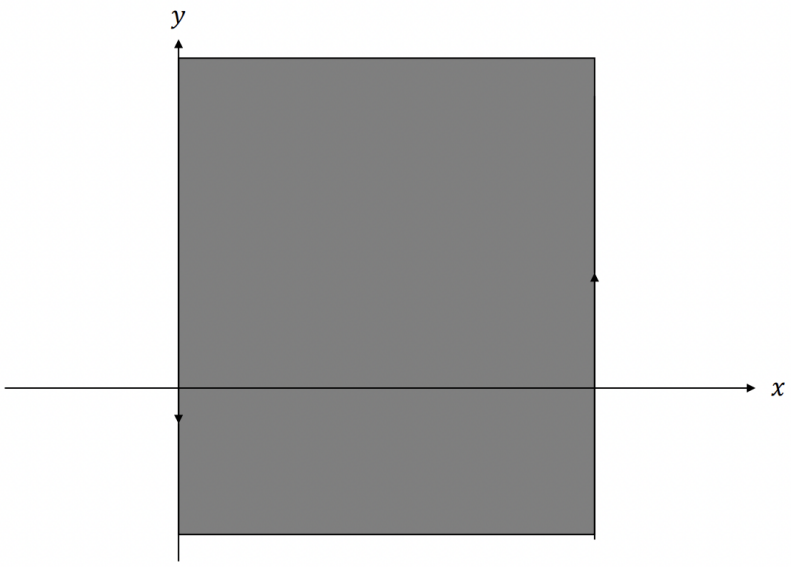
$$(P,Q) \to \left(\psi_\alpha(P), \varphi_\beta(Q)\right)$$

ile tanımlı dönüşüm homeomorfizmadır.

Dolayısıyla, $S_{m+n} = \left\{\left(U_\alpha \times V_\beta\right), \psi_\alpha \times \varphi_\beta\right\}_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$ sistemi de $M\times N$ çarpım topolojisinin atlası ve C^r sınıfındandır. Böylece, $M\times N$ kümesi $(m+n)-$boyutlu topolojik manifold belirtir ve M ile N manifoldlarının çarpım manifoldu ile isimlendirilir.

M manifoldunun U_α üzerindeki yerel koordinat sistemini $\{u_1,...,u_m\}$ ve N manifoldunun V_β üzerindeki yerel koordinat sistemini $\{v_1,...,v_n\}$ ile gösterirsek, $\forall (P,Q) \in U_\alpha \times V_\beta$ için, $\bar{u}_i(P,Q) = u_i(P)$ ve $\bar{v}_k(P,Q) = v_k(Q)$ olmak üzere, $\{\bar{u}_1,...,\bar{u}_m,\bar{v}_1,...,\bar{v}_n\}$ sistemi $M\times N$ manifoldu için $U_\alpha \times V_\beta$ üzerinde yerel koordinat sistemi olur [17].

Örnek 2.10. Sonsuz Mobius şeridini $[0,1]\times\mathbb{R}$ nin topolojik bölümü olarak $(0,y)$ ve $(1,-y)$ çiftleri ile tanımlı denklik bağıntısı olarak tanımlayarak, topolojisi ile uyumlu C^∞ manifold yapısı gerçeklediğini gösterelim [19].



Şekil 2.7 Sonsuz mobius şeridi

Çözüm: $p : [0,1] \times \mathbb{R} \to M = ([0,1] \times \mathbb{R}) / \sim$ bölüm dönüşümü olsun. M kümesinin açık iki alt kümesini

$$\begin{aligned} U &= ((0,1) \times \mathbb{R}) / \sim \\ V &= ([0,1/2) \cup (1/2,1] \times \mathbb{R}) / \sim \end{aligned} \tag{2.33}$$

şeklinde alalım. $z \in U$ noktaları

$$z = p(x,y), \qquad (x,y) \in (0,1) \times \mathbb{R} \tag{2.34}$$

şeklinde tek türlü yazılabilir.

$$\begin{aligned} \varphi : U &\to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^2 \\ z &\to \varphi(z) = (x,y) \end{aligned} \tag{2.35}$$

homeomorfizmini tanımlayabiliriz. Ayrıca,

$$\psi : V \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^2 \tag{2.36}$$

homeomorfizmini

$$z = p(x,y), \qquad (x,y) \in ([0,1/2) \cup (1/2,1]) \times \mathbb{R} \tag{2.37}$$

olmak üzere,

$$\psi(z) = \begin{cases} (x+1,-y), & x < 1/2 \\ (x,y), & x > 1/2 \end{cases} \tag{2.38}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Bu tanım $\forall y \in \mathbb{R}$ için $\psi(p(0,y)) = \psi(p(1,-y)) = (1,-y)$ iken mantıklıdır. ψ, V ve $(1/2,3/2) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ açık alt kümeleri

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) &\to \varphi(U \cap V) \\ ((1/2,1) \cup (1,3/2)) \times \mathbb{R} &\to ((0,1/2) \cup (1/2,1)) \times \mathbb{R} \end{aligned} \tag{2.39}$$

arasında homeomorfizmi

$$(\varphi \circ \psi^{-1})(x,y) = \begin{cases} (x,y), & 1/2 < x < 1 \\ (x-1,-y), & 1 < x < 3/2 \end{cases} \tag{2.40}$$

olacak şekilde ile verilebilir. Benzer şekilde

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V) \tag{2.41}$$

koordinat dönüşümü

$$((0,1/2) \cup (1/2,1)) \times \mathbb{R} \to ((1/2,1) \cup (1,3/2)) \times \mathbb{R} \tag{2.42}$$

$$(\psi \circ \varphi^{-1})(x,y) = \begin{cases} (x+1,-y), & 0 < x < 1/2 \\ (x,y), & 1/2 < x < 1 \end{cases} \tag{2.43}$$

ile verilen C^∞ dönüşümüdür.

Örnek 2.11. $\mathbb{T}^2$ $(0,0,0)$ merkezli $\mathbb{R}^3$ de devrilmiş bir tor olmak üzere,

$$\begin{aligned} a : \mathbb{T}^2 &\to \mathbb{T}^2 \\ (x,y,z) &\to a(x,y,z) = (-x,-y,-z) \end{aligned} \tag{2.44}$$

ile tanımlansın. K, $p \sim a(p)$, $p \in \mathbb{T}^2$ denklik bağıntısı altında bölüm uzayı ve

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{T}^2 &\to K \\ p &\to \pi(p) = \{p, a(p)\} \end{aligned} \tag{2.45}$$

gösterilsin. $\mathbb{T}^2$ nin $x_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{T}^2$ parametrizasyonları ile örtüldüğünü kabul edersek, $\forall U_\alpha$, $\mathbb{R}^2$ nin açık alt kümesi iken,

$$x_\alpha(U_\alpha) \cap (a \circ x_\alpha)(U_\alpha) = \emptyset \tag{2.46}$$

olsun. K nın $(U_\alpha, \pi \circ x_\alpha)$ parametrizasyonları ile örtüldüğünü ve karşılık gelen koordinat dönüşümlerinin C^∞ olduğunu gösterelim. Burada K **Klein şişesi** adını alır [19].

Çözüm $(\pi \circ x_\alpha)(U_\alpha)$ alt kümelerinin K yı örttüğünü kabul edelim. Bu alt kümelerin her biri

$$\pi^{-1}((\pi \circ x_\alpha)(U_\alpha)) = x_\alpha(U_\alpha) \cup a(x_\alpha(U_\alpha)) \tag{2.47}$$

ve $x_\alpha(U_\alpha)$, $a(x_\alpha(U_\alpha))$ $\mathbb{T}^2$ nin açık alt kümesi olduğundan K da açıktır. Dahası, her

$$\pi \circ x_\alpha : U_\alpha \to K \tag{2.48}$$

dönüşümü $x_\alpha(U_\alpha) \cap (a \circ X_\alpha)(U_\alpha) = \emptyset$ koşulundan bir parametrizasyon (yani 1-1) dir.

Sonuç olarak, koordinat değişimleri C^∞ dır. Gerçekten,

$$p \in domain((\pi \circ x_\beta)^{-1} \circ (\pi \circ x_\alpha)) \tag{2.49}$$

iken, $p \in U_\alpha$ ve $(\pi \circ x_\alpha)(p) \in (\pi \circ x_\beta)(U_\beta)$ olup böylece, $x_\alpha(p) \in x_\beta(U_\beta)$ ya da $x_\alpha \in (a \circ x_\beta)(U_\beta)$. Eğer $x_\alpha(p) \in (a \circ x_\beta)(U_\beta)$ ise p nin komşuluğu üzerinde,

$$(\pi \circ x_\beta)^{-1} \circ (\pi \circ x_\alpha) = x_\beta^{-1} \circ x_\alpha. \tag{2.50}$$

Eğer $x_\alpha(p) \in (a \circ x_\beta)(U_\beta)$ ise, p nin komşuluğu üzerinde,

$$(\pi \circ x_\beta)^{-1} \circ (\pi \circ x_\alpha) = (a \circ x_\beta)^{-1} \circ x_\alpha \tag{2.51}$$

şeklindedir. a bir difeomorfizm olduğundan, p nin komşuluğu üzerinde $(\pi \circ x_\beta)^{-1} \circ (\pi \circ x_\alpha)$ bir difeomorfizm olup böylece C^∞ dır.

Örnek 2.12.

$$\begin{aligned} U &= \{(s,0) \in \mathbb{R}^2 : s \in \mathbb{R}\}, \\ V &= \{(s,0) \in \mathbb{R}^2 : s < 0\} \cup \{(s,1) \in \mathbb{R}^2 : s > 0\} \end{aligned} \tag{2.52}$$

kümeleri ve

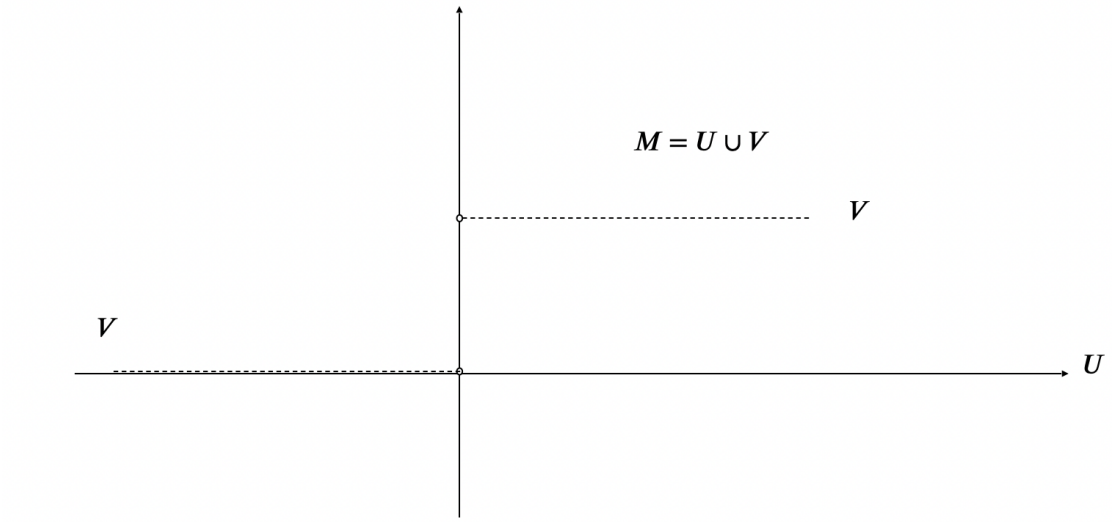
$$\begin{aligned} \varphi &: U \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(s,0) = s, \\ \psi &: V \to \mathbb{R}, \qquad \psi(s,0) = s, \qquad \psi(s,1) = s, \\ \gamma &: V \to \mathbb{R}, \qquad \gamma(s,0) = s^3, \qquad \psi(s,1) = s^3 \end{aligned} \tag{2.53}$$

dönüşümlerini alalım. $M = U \cup V$ kümesi üzerinde $\{(U,\varphi),(V,\psi)\}$ C^∞ yapı tanımlar [19].

Çözüm φ ve ψ dönüşümleri birebir ve $\varphi(U) = \mathbb{R}$, $\psi(V) = \mathbb{R} - \{0\}$ $\mathbb{R}$ nin açık alt kümeleridir. $\varphi \circ \psi^{-1}$ ve $\psi \circ \varphi^{-1}$ her ikisi de

$$\psi(U \cap V) = (-\infty, 0) = \varphi(U \cap V) \tag{2.54}$$

üzerinde özdeşlik dönüşümüdür. $\varphi(U \cap V)$, $\psi(U \cap V)$ $\mathbb{R}$ nin açık alt kümeleridir. Böylece, $\mathscr{A} = \{(U,\varphi),(V,\psi)\}$ M üzerinde bir C^∞ atlasıdır.



Şekil 2.8 C^∞ yapıya sahip küme örneği

Örnek 2.13. $S = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-1,1)\} \cup \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1)\}$ kümesini ele alalım.

$$\begin{aligned} U &= \{(x,0) : x \in (-1,1)\}, \\ V &= \{(x,0) : x \in (-1,0]\} \cup \{(x,x) : x \in (0,1)\} \end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned} \varphi &: U \to \mathbb{R} \\ (x,0) &\to \varphi(x,0) = xx \end{aligned} \tag{2.56}$$

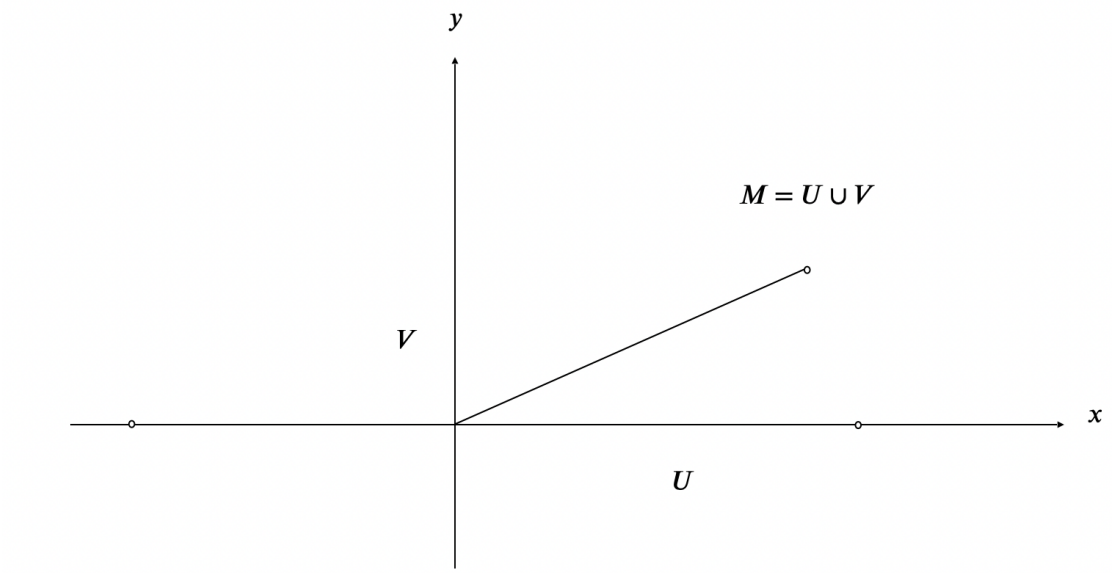
$$\begin{aligned} \psi &: V \to \mathbb{R} \\ (x,0) &\to \psi(x,0) = x, \qquad \psi(x,x) = x \end{aligned} \tag{2.57}$$

olmak üzere, $\mathscr{A} = \{(U,\varphi),(V,\psi)\}$ S kümesi üzerinde bir atlas mıdır?

Çözüm $S = U \cup V$ olduğundan, ayrıca φ ve ψ dönüşümleri $\mathbb{R}$'nin $(-1,+1)$ açık alt kümeleri olmak üzere birebir dönüşüm olduğundan, (U,φ) ve (V,ψ) S üzerinde bir haritadır, fakat

$$\varphi(U \cap V) = \psi(U \cap V) = (-1,0] \tag{2.58}$$

$\mathbb{R}$ kümesinin açık alt kümesi değildir. Böylece $\mathscr{A}$ kümesi S üzerinde atlas değildir.



Şekil 2.9 Bir atlas tanımlamayan iki harita

Örnek 2.14. $GL(n,\mathbb{R})$ genel lineer grup n^2 boyutlu dif.bilir manifold belirtir [20].

Çözüm $GL(n,\mathbb{R})$, reel elemanlı tüm $n \times n$ non-singüler matrislerin kümesi

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{A | A \in \mathbb{R}^n_n, \det A \neq 0\} \tag{2.59}$$

alalım. $GL(n,\mathbb{R})$, $GL(n,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2} - \{0\}$ olarak, topolojik uzay olduğu görülebilir. O halde topolojisi $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ nin topolojisi ile eşleşir.

$$\begin{aligned} \varphi : & GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2} \\ & (A = [a_{ij}] \to \varphi(a_{ij}) = (a_{11}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, \cdots, a_{nn}) \end{aligned} \tag{2.60}$$

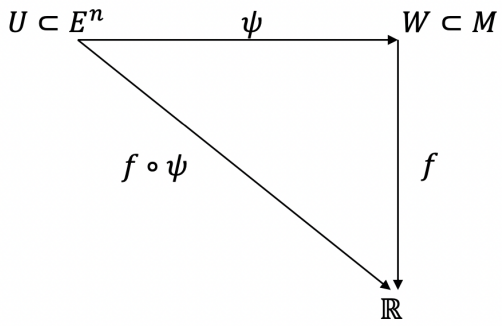
ile tanımlı 1-1 ve örtendir. Bu φ dönüşümü bir homeomorfizmdir. O halde, $\{GL(n,\mathbb{R}), \varphi\}$ yapısı $GL(n,\mathbb{R})$ üzerinde bir haritadır. Koordinat değişimleri özdeşliktir, böylece difeomorfizmdir. $\{GL(n,\mathbb{R}), \varphi\}$, $GL(n,\mathbb{R})$ üzerinde bir atlas oluşturur. Sonuç olarak $GL(n,\mathbb{R})$ n^2 boyutlu dif.bilir manifold belirtir.

Örnek 2.15. $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{H}$ kuaterniyonlar cismi üzerinde n—boyutlu sağ modül olsun. $\mathbb{H}^n$ üzerinde kanonik bilineer form, $u = (u_1, \cdots, u_n)$, $v = (v_1, \cdots, v_n)$ olmak üzere,

$$< u, v >= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (u_i \overline{v_i} + v_i \overline{u_i}) \tag{2.61}$$

ile tanımlanır. $< \cdot, \cdot >$ 2—formu $\mathbb{H}^n$ $4n$—boyutlu reel vektör uzayı üzerinde skaler çarpım belirtir ve $\mathbb{H}^n$ bir HyperKaehler manifolddur [21, 22].

Tanım 2.9. M n—boyutlu manifoldu üzerinde $\psi : U \subset E^n \to W \subset M$ homeomorfizmi verilsin. $f : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için eğer $f \circ \psi : U \subset E^n \to \mathbb{R}$ Öklid anlamında diferansiyellenebilir ise, $f : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna **dif.bilirdir** denir.
Bu ilişki aşağıdaki diyagram ile gösterilebilir:



Şekil 2.10 Fonksiyon dif.bilirlik diyagramı

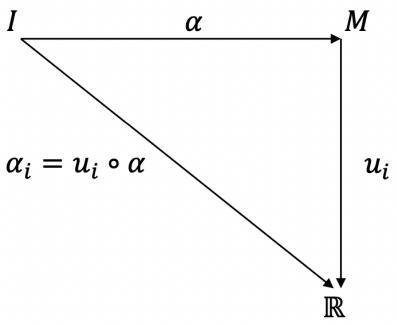
M manifoldu üzerinde tanımlı C^∞ dif.bilir reel değerli fonksiyonlar kümesi $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ile gösterilir [16].

2.1.3 Diferansiyellenebilir Manifold Üzerinde Eğriler

Tanım 2.10. M dif.bilir manifoldunun $P \in M$ noktasının komşuluğundaki yerel koordinat sistemi $\{u_1, ..., u_n\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha : I &\to M \\ t &\to \alpha(t) = (\alpha_1(t), ..., \alpha_n(t)) \end{aligned} \tag{2.62}$$

dönüşümünün, $\alpha_i = u_i \circ \alpha : I \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq n)$ koordinat fonksiyonları C^k sınıfından ise, α eğrisi C^k sınıfındandır. Bu durumda, $\alpha(I) \subset M$ kümesine M manifoldu üzerinde ***diferansiyellenebilir eğri,*** $\{(I, \alpha)\}$ ikilisine de α ***eğrisi için atlas*** denir [16].



Şekil 2.11 Manifold üzerinde eğri diyagramı

Tanım 2.11. (Bir Eğrinin Teğet Vektörü) M dif.bilir manifold ve $\alpha(I) \subset M$ eğrisi $\{(I,\alpha)\}$ atlası ile verilen C^k sınıfı eğri olsun. Bir $P = \alpha(t) \in M$ noktası ve $g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ fonksiyonu için,

$$\begin{aligned} X_P : C^\infty(M,\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ g &\to X_P[g] = \left.\frac{d(g\circ\alpha)}{dt}\right|_t \end{aligned} \tag{2.63}$$

ile tanımlı X_P fonksiyonuna α eğrisinin $\alpha(t) = P$ ***noktasındaki teğet vektörü*** denir ve $\alpha(t) = P$ noktasındaki tüm teğet vektörler kümesi $T_{\alpha(I)}(\alpha(t))$ ile gösterilir. Ayrıca, $T_{\alpha(I)}(\alpha(t))$ kümesi üzerinde $X_P, Y_P \in T_{\alpha(I)}(\alpha(t))$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için,

$$(X_P + Y_P)(g) = X_P(g) + Y_P(g) \tag{2.64}$$

ve

$$(\lambda X_P)(g) = \lambda X_P(g) \tag{2.65}$$

şeklinde tanımlı, sırasıyla, toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle birlikte $\mathbb{R}$ üzerinde vektör uzayıdır. Bu uzaya α eğrisinin $\alpha(t) = P$ noktasındaki ***tanjant uzayı*** denir [16].

Teorem 2.1. *M dif.bilir manifold ve $\alpha(I) \subset M$ eğrisi $\{(I,\alpha)\}$ atlası ile verilen C^k sınıfından bir eğri olmak üzere, $\forall f_1, f_2 \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ fonksiyonları için,*

1) $X_P : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *dönüşümü lineer*

2) $X_P(f_1 f_2) = X_P(f_1) f_2(P) + f_1(P) X_P(f_2)$

özellikleri mevcuttur [16].

İspat. $\forall f_1, f_2 \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ fonksiyonları ve a, b reel sayıları için,

1)

$$\begin{aligned} X_P(af_1+bf_2) &= \left.\frac{d[(af_1+bf_2)\circ\alpha]}{dt}\right|_t \\ &= \left.\frac{d[(af_1\circ\alpha+bf_2\circ\alpha)]}{dt}\right|_t \\ &= a\left.\frac{d(f_1\circ\alpha)}{dt}\right|_t + b\left.\frac{d(f_2\circ\alpha)}{dt}\right|_t \\ &= aX_P(f_1)+bX_P(f_2) \end{aligned} \tag{2.66}$$

2)

$$\begin{aligned} X_P(f_1f_2) &= \left.\frac{d[(f_1f_2)\circ\alpha]}{dt}\right|_t \\ &= \left.\frac{d[(f_1\circ\alpha)(f_2\circ\alpha)]}{dt}\right|_t \\ &= \left.\frac{d(f_1\circ\alpha)}{dt}\right|_t (f_2\circ\alpha)_t + \left.\frac{d(f_2\circ\alpha)}{dt}\right|_t (f_1\circ\alpha)_t \end{aligned} \tag{2.67}$$

elde edilir. ■

Tanım 2.12. (Bir Manifoldun Teğet Vektörü) M dif.bilir manifold ve $P \in M$ olmak üzere, eğer X_P tanjant vektörü P noktasından geçen bir eğrinin teğet vektörü ise X_P vektörüne M ***manifoldunun teğet vektörü*** denir. $P \in M$ noktasındaki tüm teğet vektörleri kümesi $T_M(P)$ ile gösterilir. Bu küme $X_P, Y_P \in T_M(P)$ vektörleriyle tanımlanan işlemler ile birlikte vektör uzayı yapısına sahiptir. Ayrıca, bu uzay M ***manifoldunun*** P ***noktasındaki teğet uzay*** adını alır [16].

Örnek 2.16. M manifoldunun P noktasındaki yerel koordinat sistemi $\{u_1,...,u_n\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_P : C^\infty(M,\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ f &\to \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_P f = \left.\frac{\partial f}{\partial u_i}\right|_P \end{aligned} \tag{2.68}$$

ile tanımlanan dönüşüme $P \in M$ noktasından geçen eğrinin ***teğet vektörü*** denir.
O halde $\alpha_i = u_i \circ \alpha$ eşitliği kullanılırsa

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t),...,\alpha_n(t)) = ((u_1\circ\alpha)(t),...,(u_n\circ\alpha)(t))$$

yazılabilir.
Eğer X_P teğet vektör ise, yani

$$X_P[f] = \left.\frac{d(f\circ\alpha)}{dt}\right|_t = \sum \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}\frac{d\alpha_j}{dt} = \sum \left.\frac{\partial f}{\partial u_j}\right|_P \frac{d\alpha_j}{dt} \tag{2.69}$$

ise,

$$X_P = \left.\frac{\partial}{\partial u_j}\right|_P \tag{2.70}$$

şeklindedir [16].

Teorem 2.2. *M dif.bilir manifoldunun P noktasındaki yerel koordinat sistemi* $\{u_1, ..., u_n\}$ *olmak üzere,*

$$\phi = \left\{ \left.\frac{\partial}{\partial u_1}\right|_P, ..., \left.\frac{\partial}{\partial u_n}\right|_P \right\} \tag{2.71}$$

kümesi $T_M(P)$ *uzayının bir bazıdır [16].*

İspat. Eğer $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_P = 0$ alırsak, $\forall u_j \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left.\frac{\partial}{\partial u_i}\right|_P (u_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left.\frac{\partial u_j}{\partial u_i}\right|_P = 0(u_j) = 0 \tag{2.72}$$

eşitliğinden $\lambda_j = 0$ bulunur. Ayrıca $boy\, T_M(P) = boy M$ olduğundan ϕ kümesi $T_M(P)$ uzayının bir bazıdır.

■

Tanım 2.13. Bir M manifoldu üzerinde,

$$\begin{aligned} X : M &\to \bigcup_{P\in M} T_M(P) \\ P &\to X(P) = X_P \end{aligned} \tag{2.73}$$

ile tanımlanan ve manifoldun her noktasına teğet vektör karşılık getiren dönüşüme ***vektör alanı*** denir. M manifoldu üzerindeki tüm vektör alanları kümesi $\chi(M)$ ile gösterilir [16].

Tanım 2.14. M manifoldunun $T_M(P)$ tanjant uzayı üzerinde tanımlı reel değerli lineer dönüşümler kümesi $T_M^*(P)$ ile gösterilir ve $P \in M$ noktasındaki ***kotanjant uzay*** adını alır. $T_M^*(P)$ kotanjant uzayının elemanları $P \in M$ noktasında ***kotanjant vektör*** belirtir. $T_M^*(P) = \{\theta \mid \theta : T_M(P) \to \mathbb{R}\}$ ile tanımlandığından $P \in M$ noktasındaki kotanjant vektör $T_M(P)$ uzayından $\mathbb{R}$ kümesine tanımlı lineer dönüşümdür [16].

Tanım 2.15. $T_M^*(P)$, M manifoldunun $P \in M$ noktasındaki kotanjant uzay iken,

$$\begin{aligned} w : M &\to \bigcup_{P \in M} T_M^*(P) \\ P &\to w(P) = w_P \end{aligned} \tag{2.74}$$

fonksiyonu eğer, $\prod \circ w : M \to M$ özdeşlik dönüşümü olacak şekilde bir

$$\prod : \bigcup_{P \in M} T_M^*(P) \to M \tag{2.75}$$

dönüşümü mevcut ise, M manifoldu üzerinde 1−***form*** adını alır. M manifoldu üzerindeki 1−formlar kümesi $\chi^*(M)$ ile gösterilen, $\forall \theta, w \in \chi^*(M)$ ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için aşağıdaki işlemler ile birlikte $C^\infty(M, \mathbb{R})$ modül belirten bir kümedir;

$$(\theta + w)(P) = \theta_P + w_P \tag{2.76}$$

ve

$$(f\theta)(P) = f(P)\,\theta_P. \tag{2.77}$$

Ayrıca, $w \in \chi^*(M)$ 1−formu,

$$\begin{aligned} w : \chi(M) &\to C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ X &\to w(X) : M \to \mathbb{R} \\ &\qquad P \to w_P(X_P) \end{aligned} \tag{2.78}$$

şeklinde de tanımlanabilir [16].

Tanım 2.16. M dif.bilir manifold olmak üzere, $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $X \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} d : C^\infty(M, \mathbb{R}) &\to \chi^*(M) \\ X &\to df(X) = X(f) \end{aligned} \tag{2.79}$$

ile tanımlanan d fonksiyonuna ***diferansiyel operatör*** denir.

$\forall X_P \in T_M(P)$ için, $df|_P(X_P) \in \mathbb{R}$ olduğundan $(df)_P : T_M(P) \to \mathbb{R}$ şeklinde yazılabilir [16].

Tanım 2.17. M dif.bilir manifoldu üzerinde $Z, W \in \chi(M)$ vektör alanları için Lie parantez operatörü,

$$\begin{aligned} [.,.] : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (Z, W) &\to [Z, W] = ZW - WZ. \end{aligned} \tag{2.80}$$

$\forall g \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ için, $[Z,W](g) = Z(Wg) - W(Zg)$ ile tanımlanan ve aşağıdaki özellikleri sağlayan operatördür. Yani, $\forall Z,W,X \in \chi(M)$ ve $g_1, g_2 \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ için,

1) $[Z,W] = -[W,Z]$,

2) $[aZ + bW, X] = a[Z,X] + b[W,X]$,

3) $[[Z,W],X] + [[W,X],Z] + [[X,Z],W] = 0$,

4) $[g_1 Z, g_2 W] = g_1 g_2 [Z,W] + g_1 Z(g_2) W - g_2 W(g_1) Z$

özellikleri vardır [16].

2.1.4 Diferansiyellenebilir Manifoldlar Üzerinde Tensörler

Tanım 2.18. $V_1, ..., V_r$ reel vektör uzayları ve $(1 \leq i \leq r)$ olmak üzere,

$$L : V_1 \times ... \times V_r \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu verilsin. $\forall \alpha_i, \beta_i \in V_i$, $a, b \in \mathbb{R}$ sayıları için,

$$\begin{aligned} L(\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1} a\alpha_i + b\beta_i \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_r) = aL(\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_r) \\ + bL(\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \beta_i, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_r) \end{aligned} \tag{2.81}$$

koşulunu sağlıyorsa L fonksiyonuna $r-$***lineer fonksiyon*** denir. Bütün $r-$lineer fonksiyonlar kümesi $L(V_1, ..., V_r; \mathbb{R})$ ile gösterilir [16].

Tanım 2.19. $L(V_1, ..., V_r; \mathbb{R})$ $r-$lineer fonksiyonlar kümesi, $\forall (\alpha_1, ..., \alpha_r) \in V_1 \times ... \times V_r$ sıralı $r-$lisi ve λ reel sayısı için,

$$\begin{aligned} (L_1 + L_2)(\alpha_1, ..., \alpha_r) &= L_1(\alpha_1, ..., \alpha_r) + L_2(\alpha_1, ..., \alpha_r) \\ (\lambda L)(\alpha_1, ..., \alpha_r) &= \lambda L(\alpha_1, ..., \alpha_r) \end{aligned} \tag{2.82}$$

işlemleri ile birlikte reel vektör uzayıdır. Bu uzaya $V_1^*, ..., V_r^*$ ***dual uzaylarının tensör çarpımı*** denir ve $L(V_1, ..., V_r; \mathbb{R}) = V_1^* ... \otimes V_r^*$ ile gösterilir [16].

Tanım 2.20. $L(V_1, ..., V_r; \mathbb{R})$ tensör uzayında $V_1 = ... = V_r = V$ alınırsa, elde edilen uzaya ***kovaryant tensör uzayı*** adını alır ve

$$L(V_1, ..., V_r; \mathbb{R}) = V^* \otimes ... \otimes V^* = \otimes^r V^* = T^r(V) \tag{2.83}$$

şeklinde gösterilir. Bu uzayın her bir elemanına r. ***derece kovaryant tensör*** denir [16].

Tanım 2.21. $L(V,...,V;\mathbb{R})$ kovaryant tensör uzayında V vektör uzayı yerine V^* dual uzayı alınır ve $(V^*)^* = V$ kullanılırsa elde edilen

$$L(V^*,...,V^*;\mathbb{R}) = V \otimes ... \otimes V = \otimes^r V = T_r(V^*)$$

ile gösterilen tensör uzayına ***kontravaryant tensör uzayı*** ve her elemanına da r. ***dereceden kontravaryant tensör*** denir [16].

Tanım 2.22. V vektör uzayı için, $L(V^r,(V^*)^s;\mathbb{R}) = \{L | L : V^r \times (V^*)^s \to \mathbb{R}\}$ kümesi tensörlerde toplama ve skaler ile çarpma işlemleri ile birlikte reel vektör uzayı oluşturur. Bu uzaya r. ***dereceden kovaryant,*** s. ***dereceden kontravaryant tensör uzayı*** denir. Bu uzayın her bir elemanına $(r,s)-$***tipi karışık tensör*** denir ve

$$L(V^r,(V^*)^s;\mathbb{R}) = T^r(V) \otimes T_s(V^*) = T^r_s(V) \tag{2.84}$$

ile gösterilir [16].

Tanım 2.23. Bir M manifoldu üzerinde $A : \chi^*(M)^r \times \chi(M)^s \to C^\infty(M,\mathbb{R})$ şeklinde tanımlanan $(r,s)-$tipi tensör alanı $C^\infty(M,\mathbb{R})$ çok lineer fonksiyondur. Böylece, $\theta^1,...,\theta^r$ $1-$formları ve $X_1,...,X_s$ vektör alanları için

$$f = A\left(\theta^1,...,\theta^r,X_1,...,X_s\right) \in C^\infty(M,\mathbb{R}) \tag{2.85}$$

reel değerli fonksiyonunu üretir. Burada θ^i $1-$formlarına A tensör alanının i. ***kontravaryant bileşeni*** ve X_j vektör alanlarına da j. ***kovaryant bileşeni*** denir. M manifoldu üzerindeki tüm $(r,s)-$tipi vektör alanları kümesi $T^r_s(M)$ ile gösterilecektir. Ayrıca, $T^r_s(M)$ kümesi $C^\infty(M,\mathbb{R})$ üzerinde modül oluşturur.

Özel olarak, $r = s = 0$ olması durumunda M üzerindeki $(0,0)-$tipi tensör alanı $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ fonksiyonudur [16].

Tanım 2.24. M manifoldu üzerinde tanımlanan $A(r,s)-$tipi tensör alanı her bileşene göre $C^\infty(M,\mathbb{R})$ lineer ise, ***tensör çarpım*** denir.

Eğer $A \in T^r_s(M)$ ve $B \in T^{r'}_{s'}(M)$ ise, A ile B nin tensör çarpımı

$$A \otimes B : \chi^*(M)^{r+r'} \times \chi(M)^{s+s'} \to C^\infty(M,\mathbb{R})$$

$$\left(\theta^1,...,\theta^{r+r'},X_1,...,X_{s+s'}\right) \to A\left(\theta^1,...,\theta^r,X_1,...,X_s\right) B\left(\theta^{r+1},...,\theta^{r+r'},X_{s+1},...,X_{s+s'}\right)$$

ile tanımlanan $(r+r',s+s')-$tipi tensördür.

$$A : \chi^*(M)^r \times \chi(M)^s \to C^\infty(M,\mathbb{R}) \tag{2.86}$$

fonksiyonunun tensör olduğunu göstermek için her bileşene göre $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ lineer olduğu gösterilmelidir. Her bileşene göre toplamsallık açıktır, bu nedenle çarpımsallık yani

$$A\left(\theta^1,...,\theta^r,X_1,..,fX_i,.,X_s\right)=fA\left(\theta^1,...,\theta^r,X_1,..,X_i,.,X_s\right)$$

eşitliği araştırılmalıdır [17].

Örnek 2.17.

$$\begin{aligned} A:\chi^*(M)\times\chi(M)&\to C^{\infty}(M,\mathbb{R})\\ (\theta,X)&\to A(\theta,X)=\theta X \end{aligned} \tag{2.87}$$

fonksiyonunun $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ lineerliği açık olduğundan $(1,1)-$ tipi tensör alanıdır [17].

Örnek 2.18. $0\neq w$ 1−formu için,

$$\begin{aligned} A:\chi(M)\times\chi(M)&\to C^{\infty}(M,\mathbb{R})\\ (X,Y)&\to A(X,Y)=X(wY) \end{aligned} \tag{2.88}$$

ile tanımlanan fonksiyon X vektör alanına göre $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ lineer fakat Y vektör alanına göre toplamsal değildir. Buradan,

$$A(X,fY)=X(fwY)=(Xf)wY+fA(X,Y) \tag{2.89}$$

şeklindedir. Böylece A tensör alanı değildir [16].

2.2 Riemann Manifoldlar

2.2.1 Yarı-Riemann Uzay ve Lorentz Uzay

Tanım 2.25. V reel vektör uzayı üzerinde

$$\begin{aligned} g:V\times V&\to\mathbb{R}\\ (u,v)&\to g(u,v) \end{aligned} \tag{2.90}$$

fonksiyonu ele alınsın. $\forall u,v,w\in V$ ve $\forall a,b\in\mathbb{R}$ için,

1) $g(u,v)=g(v,u)$,

2) $g(au+bv,w)=ag(u,w)+bg(v,w)$,

3) $g(u,av+bw)=ag(u,v)+bg(u,w)$

özelliklerini sağlıyorsa g dönüşümüne ***simetrik bilineer form*** denir [23, 24].

Tanım 2.26. V reel vektör uzayı üzerinde tanımlı g simetrik bilineer formu için, $g|_W$ nın negatif tanımlı olduğu en geniş boyutlu alt uzayın boyutuna g ***simetrik bilineer formunun*** V ***vektör uzayı üzerindeki indeksi*** denir ve ϑ ile gösterilir [23, 24].

Tanım 2.27. V reel vektör uzayı üzerinde tanımlı g simetrik bilineer form olmak üzere,

1) $\forall u \in V, u \neq 0$ için, $g(u,u) > 0$ ise g formu ***pozitif tanımlı simetrik bilineer form***
2) $\forall u \in V, u \neq 0$ için, $g(u,u) < 0$ ise g formu ***negatif tanımlı simetrik bilineer form***
3) $\forall u \in V, u \neq 0$ için, $g(u,u) \geq 0$ ise g formu ***pozitif yarı tanımlı simetrik bilineer form***
4) $\forall u \in V, u \neq 0$ için, $g(u,u) \leq 0$ ise g formu ***negatif yarı tanımlı simetrik bilineer form***

olarak isimlendirilir.

$\forall v \in V$ için $g(v,u) = 0$ iken $u = 0$ oluyorsa, g dönüşümüne ***dejenere olmayan (non-dejenere)*** aksi halde ***dejenere simetrik bilineer form*** denir. V vektör uzayı üzerindeki simetrik, non-dejenere, g bilineer formuna ***skaler çarpma***, V uzayına ***skaler çarpım uzayı*** denir [23, 24].

Tanım 2.28. V vektör uzayı üzerinde g skaler çarpması tanımlı iken V uzayının $\{e_1, ..., e_m\}$ ortonormal bazı için,

$$g\left(e_i, e_j\right) = \varepsilon_i \delta_{ij}, \quad g(e_i, e_i) = \varepsilon_i = \pm 1$$

yazılabilir. Burada

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{2.91}$$

Kronecker deltadır. O halde $\forall u \in V$ vektörü,

$$u = \sum \varepsilon_j g\left(u, e_j\right) e_j \tag{2.92}$$

şeklinde tek türlü yazılabilir. V skaler çarpım uzayının $\{e_1, ..., e_m\}$ ortonormal bazındaki vektörlerin $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m$ işaretlerinden negatif olanların sayısı V uzayının indeksini gösterir [23, 24].

Tanım 2.29. V skaler çarpım uzayı, $boyV \geq 2$ ve $\vartheta = 1$ olsun. V üzerindeki

$$\begin{aligned} g : V \times V &\to \mathbb{R} \\ (X,Y) &\to g(X,Y) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n \end{aligned} \tag{2.93}$$

skaler çarpımına ***Lorentz skaler çarpımı*** denir. (V,g) ikilisine de ***Lorentz vektör uzayı*** denir. Eğer $boyV = n$ ise, Lorentz uzayı L^n ile gösterilir [23, 24].

Tanım 2.30. L^n, n—boyutlu Lorentz uzayı ve $X = (x_1, ..., x_n) \in L^n$ olmak üzere,

1) $g(X,X) < 0$ ise X vektörüne ***time-like vektör***,
2) $g(X,X) > 0$ veya $\vec{X} = 0$ ise X vektörüne ***space-like vektör***,
3) $g(X,X) = 0$ ise X vektörüne ***null vektör***

denir [23, 24].

Tanım 2.31. L^n uzayında, $\forall X, Y \in L^n$ için $g(X,Y) = 0$ ise, X ile Y vektörlerine ***Lorentz anlamında diktir*** denir [23, 24].

Tanım 2.32. L^n uzayında $X \in L^n$ vektörünün normu, $\|X\| = |g(X,X)|^{\frac{1}{2}}$ ile tanımlanır. Ayrıca

1) $\|X\| > 0$,
2) X null vektör $\Leftrightarrow X = 0$,
3) X time-like vektör ise, $\|X\|^2 = -g(X,X)$,
4) X space-like vektör ise, $\|X\|^2 = g(X,X)$

özelliklerine sahiptir [23, 24].

Tanım 2.33. L^n uzayının W alt uzayı için,

1) $g|_W : W \times W \to \mathbb{R}$ pozitif tanımlı ise, ***space-like alt uzay***,
2) $g|_W$ nın indeksi 1 ve non-dejenere ise, ***time-like alt uzay***,
3) $g|_W$ dejenere ise, ***light-like alt uzay***

denir [25].

2.2.2 Riemann Manifold ve Yarı-Riemann Manifold

Tanım 2.34. M dif.bilir manifold ve $\chi(M)$ vektör alanları uzayı olmak üzere,

$$\begin{aligned} g : \chi(M) \times \chi(M) &\to C^{\infty}(M, \mathbb{R}) \\ (X, Y) &\to g(X, Y) \end{aligned} \tag{2.94}$$

iç çarpımı tanımlı ise, M manifolduna ***Riemann manifold*** ve g dönüşümüne M manifoldu üzerindeki ***iç çarpım***, ***metrik tensör, Riemann metriği*** ya da ***dif.bilir metrik*** denir.

Bir $P \in M$ noktası esas alınırsa, $T_M(P)$ tanjant uzayı üzerinde Riemann metriği

$$\begin{aligned} g|_P : T_M(P) \times T_M(P) &\to \mathbb{R} \\ (X_P, Y_P) &\to g|_P(X_P, Y_P) \end{aligned} \tag{2.95}$$

dönüşümüne indirgenebilir [26].

Tanım 2.35. M dif.bilir manifold olmak üzere,

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M, \mathbb{R})$$

1) Bilineer,
2) Simetrik,
3) Non-dejenere, yani $\forall X \in \chi(M)$ vektör alanı için $g(X, Y) = 0$ eşitliği var iken $Y = 0$ ise,

sabit ϑ indeksli g metriğine ***yarı-Riemann metrik***, M manifolduna ***yarı-Riemann manifoldu*** denir.

Burada, $0 \leq \vartheta \leq boyM$ ve $\vartheta = 0$ olması durumunda M yarı-Riemann manifolduna ***Riemann manifold*** adı verilir. Eğer $\vartheta = 1, n \geq 2$ ise, M manifolduna ***Lorentz manifold*** denir [26].

Tanım 2.36. M yarı-Riemann manifoldunun

$$g|_P : T_M(P) \times T_M(P) \to \mathbb{R}$$

metrik tensörü için,

1) $g(U_P, U_P) > 0$ veya $U_P = 0$ ise, U_P ***space-like (uzaysal) vektör,***

2) $g(U_P, U_P) < 0$ ise, U_P ***time-like (zamansal) vektör,***

3) $U_P \neq 0$ olmak üzere $g(U_P, U_P) = 0$ ise, U_P ***light-like (null,ışıksal) vektör***

olarak isimlendirilir [26].

2.2.3 Riemann Manifold üzerinde Türev Operatörü ve Eğrilikler

Tanım 2.37. M dif.bilir manifoldu üzerindeki dif.bilir vektör alanları uzayı $\chi(M)$

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X, Y) &\to \nabla_X Y \end{aligned} \tag{2.96}$$

ile tanımlanan, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, f_1, f_2 \in \mathbb{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ için

1) $\nabla_{f_1 X + f_2 Y} Z = f_1 \nabla_X Z + f_2 \nabla_Y Z$,

2) $\nabla_X (fY) = X(f) Y + f \nabla_X Y$

özelliklerini sağlayan dönüşüme ***afin konneksiyon***, ∇_X işlemine de X vektör alanı yönündeki ***kovaryant türev operatörü*** denir. Burada $\nabla_X Y$ vektör alanı Y ***vektör alanının*** X ***vektör alanı boyunca kovaryant türevidir*** [16].

Özel olarak M yerine Riemann manifold alınırsa, ∇ ile g metriği arasında bağıntı kurulabilir.

Tanım 2.38. M Riemann manifoldu üzerinde ∇ afin konneksiyon olmak üzere, $\forall Z, W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} T : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (Z, W) &\to T(Z, W) = \nabla_Z W - \nabla_W Z - [Z, W] \end{aligned} \tag{2.97}$$

şeklindeki tensör alanına ∇ ***afin konneksiyonunun burulma tensörü*** denir [27].

Tanım 2.39. Bir M dif.bilir manifoldu üzerindeki ∇ afin konneksiyonuna $\forall Z, W \in \chi(M)$ için $\nabla_Z W - \nabla_W Z = [Z, W]$ oluyorsa, ***simetrik*** denir [27].

Teorem 2.3. *M Riemann manifoldu üzerinde* ∇ *afin konneksiyon olmak üzere,*

1) ∇ C^∞ *sınıfı,*

2) ∇ *g metriği ile uyumlu, yani* $Z[g(W,X)] = g(\nabla_Z W, X) + g(W, \nabla_Z X)$,

3) ∇ *simetrik, yani burulmasız,* $\nabla_Z W - \nabla_W Z = [Z,W]$ *veya* $T = 0$

özellikleri sağlanırsa, ∇ *konneksiyonuna* M *manifoldu üzerinde* ***Riemann konneksiyon*** *veya* ***Levi Civita konneksiyon*** *denir.*

∇_Z *operatörüne* Z ***vektör alanı yönünde Riemann anlamında kovaryant türev operatörü*** *denir.*

Bu özellikler

$$2g(\nabla_W X, Z) = Wg(X,Z) + Xg(Z,W) - Zg(W,X) - g(W,[X,Z]) + g(X,[Z,W]) + g(Z,[W,X]) \tag{2.98}$$

Koszul formülü ile karakterize edilir [27].

Teorem 2.4. *Bir Riemann veya yarı-Riemann manifoldu üzerinde tanımlanan konneksiyon tektir [16].*

İspat. M Riemann manifoldunun U komşuluğu üzerinde $\{u_1,...,u_n\}$ yerel koordinat sisteminin belirlediği ortonormal çatıyı $\xi = \{U_1,...,U_n\}$ ve $g\left(U_i,U_j\right) = g_{ij}$ $(1 \leq i,j \leq n)$ ile gösterelim. Burada g metrik tensörünün ξ bazına göre matrisi $\left[g_{ij}\right]$ olup, simetrik ve $g_{ij} > 0$ dır. Simetrik ve pozitif tanımlı matrisin determinant değeri karakteristik değerler çarpımına eşit olduğundan karateristik değerleri de pozitiftir. O halde matris tersi vardır ve $\left[g_{ij}\right]$ matrisinin tersinin bileşenleri g^{ij} ile gösterilir.

$\nabla_{U_i} U_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k$ ile tanımlanan $\Gamma_{ij}^k : U \to C^\infty(M,\mathbb{R})$ fonksiyonlarına ∇ konneksiyonunun ***2.tip Christoffel sembolleri*** denir.

$\forall f \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ için,

$$\begin{aligned}\left[U_i,U_j\right](f) &= U_i\left[U_j(f)\right] - U_j\left[U_i(f)\right] \\ &= U_i\frac{\partial f}{\partial U_j} - U_j\frac{\partial f}{\partial U_i} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial U_i \partial U_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial U_j \partial U_i} \\ &= 0\end{aligned} \tag{2.99}$$

olduğundan $\left[U_i,U_j\right] = 0$ yazılır. Böylece,

$$0 = \left[U_i,U_j\right] = \nabla_{U_i}U_j - \nabla_{U_j}U_i = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}{}^k U_k - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ji}{}^k U_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\Gamma_{ij}{}^k - \Gamma_{ji}{}^k\right) U_k$$

ile $\xi = \{U_1, ..., U_n\}$ lineer bağımsız olduğundan $\Gamma_{ij}{}^{k} = \Gamma_{ji}{}^{k}$ bulunur. ∇ Riemann konneksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned}
&U_i\left[g\left(U_r, U_j\right)\right] + U_j\left[g\left(U_r, U_i\right)\right] - U_r\left[g\left(U_i, U_j\right)\right] \\
&= g\left(\nabla_{U_i} U_r, U_j\right) + g\left(U_r, \nabla_{U_i} U_j\right) + g\left(\nabla_{U_j} U_r, U_i\right) \\
&\quad + g\left(U_r, \nabla_{U_j} U_i\right) - g\left(\nabla_{U_r} U_i, U_j\right) - g\left(U_i, \nabla_{U_r} U_j\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ir}{}^{k} g\left(U_k, U_j\right) + \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}{}^{k} g\left(U_r, U_k\right) + \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{jr}{}^{k} g\left(U_k, U_i\right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ji}{}^{k} g\left(U_r, U_k\right) - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ri}{}^{k} g\left(U_k, U_j\right) - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{rj}{}^{k} g\left(U_i, U_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \{\left(\Gamma_{ir}{}^{k} - \Gamma_{ri}{}^{k}\right) g\left(U_k, U_j\right) \\
&\quad + \left(\Gamma_{jr}{}^{k} - \Gamma_{rj}{}^{k}\right) g\left(U_k, U_i\right) + \left(\Gamma_{ji}{}^{k} + \Gamma_{ij}{}^{k}\right) g\left(U_r, U_k\right)
\end{aligned} \tag{2.100}$$

olur. Buna göre,

$$\begin{aligned}
&U_i\left[g\left(U_r, U_j\right)\right] + U_j\left[g\left(U_r, U_i\right)\right] - U_r\left[g\left(U_i, U_j\right)\right] = 2\sum_{i=1}^{n} \Gamma_{ji}{}^{k} g_{kr}, \\
&U_i\left[g_{rj}\right] + U_j\left[g_{ri}\right] - U_r\left[g_{ij}\right] = 2\sum_{i=1}^{n} \Gamma_{ji}{}^{k} g_{kr}, \\
&\left[\Gamma_{ji}{}^{k}\right] = \frac{1}{2} g^{kr}\left\{U_i\left[g_{rj}\right] + U_j\left[g_{ri}\right] - U_r\left[g_{ij}\right]\right\} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} g^{kr}\left\{\frac{\partial g_{rj}}{\partial U_i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial U_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial U_r}\right\}
\end{aligned} \tag{2.101}$$

yazılabilir. Böylece Christoffel sembolleri metrik tensör bileşenleri ile ifade edilmiş olur. ■

Örnek 2.19. E^n Öklid uzayının ∇ konneksiyonunun Christoffel sembolleri sıfırdır [16].

Çözüm E^n uzayında $\{x_1, ..., x_n\}$ Öklid koordinat sistemi ve $X, Y \in \chi(E^n)$ vektör alanları da

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.102}$$

ve

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.103}$$

$\xi_i, \eta_i \in C^\infty(E^n, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^{n} X[\eta_i] \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.104}$$

ile tanımlı ∇ Riemann konneksiyonunu alalım. $\frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$ $(1 \leq i \leq n)$ için $\{X_1, ..., X_n\}$ $\chi(E^n)$ vektör alanları uzayının bir bazı olup ∇ konneksiyonunun tanımı gereğince $\nabla_{X_i} X_j \in Sp\{X_1, ..., X_n\}$ ve $\Gamma_{ij}{}^k \in C^\infty(E^n, \mathbb{R})$ $(1 \leq i, j, k \leq n)$ olmak üzere,

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}{}^k X_k \tag{2.105}$$

yazılabilir. Diğer taraftan, $X_j = \sum_{k=1}^{n} \delta_{jk} X_k$ olup

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{n} X_i \left[\delta_{jk}\right] X_k = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}{}^k X_k \tag{2.106}$$

ve $\Gamma_{ij}{}^k = X_i\left[\delta_{jk}\right] = 0$ eşitliğinden $\nabla_{X_i} X_j = 0$ bulunur.

Tanım 2.40. M Riemann manifoldunun $\chi(M)$ vektör alanları uzayında,

$$\begin{aligned} R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X, Y, Z) &\to R(X, Y) Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \end{aligned} \tag{2.107}$$

şeklinde tanımlanan 3. mertebe kovaryant tensör alanına M ***manifoldu üzerinde eğrilik tensör alanı*** veya ∇ ***lineer konneksiyonunun eğrilik tensörü*** adı verilir [16].

Tanım 2.41. M, m—boyutlu Riemann manifoldu ve g metrik tensör olmak üzere,

$$\begin{aligned} K : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\to C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (X, Y, Z, W) &\to K(X, Y, Z, W) = g(X, R(Z, W) Y) \end{aligned} \tag{2.108}$$

şeklindeki kovaryant tensöre M ***manifoldu üzerinde Riemann Christoffel eğrilik tensörü*** denir [16].

Örnek 2.20. $M = E^n$ alırsak, $\forall X, Y, Z \in \chi(E^n)$ vektör alanları için Riemann eğrilik tensör alanı $R(X, Y) Z = 0$ dır [16].

Çözüm E^n Öklid uzayının doğal koordinatları kullanılarak, $Z = (z_1, ..., z_n)$ ile verilirse,

$$\begin{aligned} \nabla_Y \nabla_X Z &= (YXz_1, ..., YXz_n), \\ \nabla_X \nabla_Y Z &= (XYz_1, ..., XYz_n), \\ \nabla_{[X,Y]} Z &= ([X, Y] z_1, ..., [X, Y] z_n) \end{aligned} \tag{2.109}$$

eşitlikleri Riemann eğrilik tensör alanında yazılırsa,

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{2.110}$$

bulunur [16].

Tanım 2.42. Bir M Riemann manifoldunun $P \in M$ noktasında $T_M(P)$ tanjant uzayının boyutu 2 olan σ lineer alt uzayına ***düzlemsel kesit*** denir. Eğer $\{X, Y\}$ lineer bağımsız vektörleri σ düzlemsel kesitinin bazı ise,

$$\overline{K}(X,Y) = \frac{K(X,Y,X,Y)}{g(X,X)\,g(Y,Y) - g^2(X,Y)} \tag{2.111}$$

ile tanımlanan değere $P \in M$ noktasında σ ***düzlemsel kesitinin Riemann anlamındaki eğriliği*** denir.

$\overline{K}(X,Y)$ değeri her σ düzlemsel kesiti için sabit değerli ise, M manifolduna ***sabit eğrilikli uzay*** ya da ***uzay formu*** denir [16].

Teorem 2.5. *M Riemann manifold ve $T_M(P)$ tanjant uzayının 2−boyutlu alt uzayı*

$$\sigma = Sp\{X,Y\} \tag{2.112}$$

şeklinde olmak üzere,

1) $\overline{K}(X,Y) = \overline{K}(Y,X)$,

2) $\overline{K}(X,Y) = \overline{K}(rX,sY)\ r \neq 0, s \neq 0$,

3) $\overline{K}(X,Y) = \overline{K}(X,Y+tX)$,

4) $\overline{K}(X,Y) = \overline{K}(aX+bY, cX+dY)\ ad - bc \neq 0$

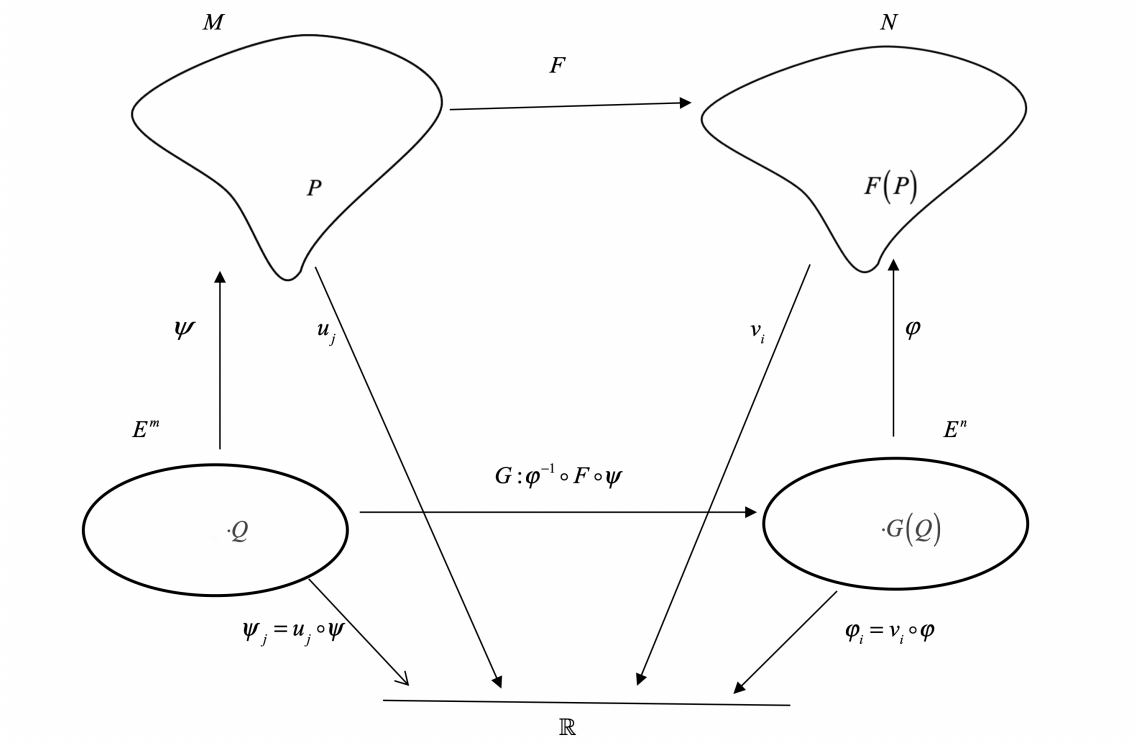
özellikleri mevcuttur [16].

2.2.4 Riemann Manifoldlar Arasındaki Dönüşümler

M m−boyutlu ve N n−boyutlu manifoldları C^∞ diferansiyellenebilir manifold olmak üzere,

$$F : M \to N \tag{2.113}$$

dönüşümü verilsin. $\forall P \in M$ noktasının U komşuluğuna $F(P) \in N$ noktasının V komşuluğu karşılık gelir. M ve N manifoldlarının $\psi : U \subset E^m \to M$ ve $\varphi : V \subset E^n \to N$ koordinat fonksiyonları arasındaki geçiş fonksiyonu $G : \varphi^{-1} \circ F \circ \psi : E^m \to E^n$ olmak üzere, $\psi_j : u_j \circ \psi : E^m \to \mathbb{R}$ dönüşümü dif.bilir ise, G geçiş fonksiyonu dif.bilirdir.



Şekil 2.12 Manifoldlar arası dönüşümler

N manifoldunun (φ, V) koordinat komşuluğuna ait koordinat fonksiyonları $v_i : V \to \mathbb{R}$ olmak üzere, $u_j : v_i \circ F : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonları F dönüşümünün koordinat fonksiyonlarıdır [16].

Tanım 2.43. M ve N manifoldlar olmak üzere, $F : M \to N$ dif.bilir dönüşümü yardımıyla $\forall X_P \in T_M(P)$ vektör alanı için,

$$\begin{aligned} F_* : T_M(P) &\to T_N(F(P)) \\ X_P &\to F_*(X_P) : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ &\qquad g \to [F_*(X_P)](g) = X_P[g \circ F] \end{aligned} \tag{2.114}$$

ile tanımlanan dönüşüme F ***dönüşümünün türev*** veya ***Jakobiyen dönüşümü*** denir [16].

Teorem 2.6. *$F : M \to N$ diferansiyellenebilir dönüşümü yardımıyla tanımlanan*

$$F_* : T_M(P) \to T_N(F(P)) \tag{2.115}$$

türev dönüşümü lineerdir [16].

İspat. $\forall X_P, Y_P \in T_M(P)$,$a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için,

$$\begin{aligned} F_*(aX_P + bY_P)(f) &= (aX_P + bY_P)(f \circ F) \\ &= aX_P(f \circ F) + bY_P(f \circ F) \\ &= aF_*(X_P)(f) + bF_*(Y_P)(f) \end{aligned} \tag{2.116}$$

eşitliği doğru olduğundan F_* türev dönüşümünün lineerliği gösterilmiş olur. ■

Lemma 2.2. *$F : M \to N$ dönüşümünün F_* türev dönüşümüne karşılık gelen Jakobiyen matrisi bulalım [16].*

İspat. F_* türev dönüşümüne karşılık gelen matrisi bulmak için, iki baz arasındaki lineer dönüşüm matrisini bulmak yeterlidir.

Bir $P \in M$ noktasının U açık komşuluğu üzerinde $\{u_1, ..., u_m\}$ yerel koordinat sistemine karşılık $F(P) \in N$ noktasının V komşuluğundaki $\{v_1, ..., v_n\}$ yerel koordinat sistemini göz önüne alırsak, $\left\{ \frac{\partial}{\partial u_1}\Big|_P, ..., \frac{\partial}{\partial u_m}\Big|_P \right\}$ ile $\left\{ \frac{\partial}{\partial v_1}\Big|_{F(P)}, ..., \frac{\partial}{\partial v_n}\Big|_{F(P)} \right\}$ sistemleri sırasıyla $T_M(P)$ ile $T_N(F(P))$ uzaylarının bazını oluşturur.

$F_*\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\Big|_P \right) \in T_N(F(P))$ tanjant vektörünü

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\Big|_P \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial v_i}\Big|_{F(P)} \tag{2.117}$$

ile gösterebiliriz. $\forall 1 \leq k \leq n$ için,

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\Big|_P \right)[v_k] = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial v_i}\Big|_{F(P)} \right)[v_k] = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial v_k}{\partial v_i}\Big|_{F(P)} = a_k \tag{2.118}$$

yazılabilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} F_*\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\Big|_P \right) : C^\infty(N, \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ v_k \to \left[F_*\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\Big|_P \right) \right](v_k) &= \frac{\partial}{\partial u_j}\Big|_P (v_k \circ F) \\ &= \frac{\partial (v_k \circ F)}{\partial u_j}\Big|_P \\ &= \frac{\partial f_k}{\partial u_j} \\ &= a_k. \end{aligned} \tag{2.119}$$

Buradan,

$$F_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial u_j}\right|_P\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial u_j}\left.\frac{\partial}{\partial v_k}\right|_{F(P)} \tag{2.120}$$

elde edillir. Böylece, F_* türev dönüşümüne karşılık gelen Jakobiyen matris

$$\begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right|_P & \left.\frac{\partial f_2}{\partial u_1}\right|_P & \cdots & \left.\frac{\partial f_n}{\partial u_1}\right|_P \\ \left.\frac{\partial f_1}{\partial u_2}\right|_P & \left.\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right|_P & \cdots & \left.\frac{\partial f_n}{\partial u_2}\right|_P \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left.\frac{\partial f_1}{\partial u_m}\right|_P & \left.\frac{\partial f_2}{\partial u_m}\right|_P & \cdots & \left.\frac{\partial f_n}{\partial u_m}\right|_P \end{bmatrix}^T_{m\times n} \tag{2.121}$$

şeklindedir. ■

Lemma 2.3. *M m—boyutlu ve N n—boyutlu manifoldlar olmak üzere, $F : M \to N$ dif.bilir dönüşümü verilsin. $\forall P \in M$ noktası için aşağıdaki özellikler denktir:*

1) *$F_*|_P : T_M(P) \to T_N(F(P))$ türev dönüşümü birebir*
2) *$F_*|_P$ türev dönüşümünün Jakobiyen matris rankı m*
3) *N manifoldunun $F(P)$ noktasında koordinat sistemi $\{v_1, ..., v_n\}$ şeklinde ise $1 \le i_1 \le ... \le i_m \le n$ tamsayıları vardır ve $v_{i_1} \circ F, ..., v_{i_m} \circ F$ fonksiyonları M manifoldunun P noktasının komşuluğunda bir koordinat sistemi oluşturur [26].*

Tanım 2.44. Eğer $F_*|_P$ türev dönüşümü $\forall P \in M$ noktasında birebir ise, yani

$$Rank\, F = boy\, M \tag{2.122}$$

ise, F bir immersiyondur [26].

Lemma 2.4. *M m—boyutlu ve N n—boyutlu manifoldlar olmak üzere, $F : M \to N$ dif.bilir dönüşümü verilsin. Aşağıdaki şartlar denktir:*

1) *$F_*|_P : T_M(P) \to T_N(F(P))$ türev dönüşümü örten*
2) *$F_*|_P$ türev dönüşümünün Jakobiyen matris rankı n*
3) *N manifoldunun $F(P)$ noktasında koordinat sistemi $\{v_1, ..., v_n\}$ şeklinde ise M manifoldunun P noktasında $v_1 \circ F, ..., v_n \circ F, u_{n+1}, ..., u_m$ şeklinde bir koordinat sistemi mevcuttur [26].*

2.2.5 Riemann Manifoldların Alt Manifoldları

Tanım 2.45. M m—boyutlu ve $\bar{M}$ k—boyutlu manifoldlar iken, $\bar{M}$ manifoldu M manifoldunun alt manifoldu olsun. $\bar{M}$ manifoldunun bir V açık alt kümesi ve M manifoldunun bir U açık alt kümesi $U \cap \bar{M} = V$ olacak şekilde varsa, $\bar{M}$ manifolduna M ***manifoldunun topolojik alt uzayı*** denir [16].

Tanım 2.46. Eğer $\bar{M}$ manifoldu için,

1) $\bar{M}$, M uzayının topolojik alt uzayı
2) $j : \bar{M} \to M$ izdüşüm fonksiyonu diferansiyellenebilir ve $j_*|_P$ türev dönüşümü birebir ise,

$\bar{M}$ manifolduna M ***manifoldunun diferansiyellenebilir*** veya ***gömülmüş alt manifoldu*** denir.

Yani, $\bar{M}$ manifoldunun $\{v_1, ..., v_k\}$ ve M manifoldunun $\{u_1, ..., u_m\}$ koordinat sistemleri için, $\left\{u_1|_V = v_1, ..., u_k|_V = v_k\right\}$ V komşuluğunda koordinat sistemi oluşturur [16].

Tanım 2.47. M Riemann manifold ve $\bar{M}$ k—boyutlu alt manifold iken, M manifoldunun g metrik tensörünün $\chi\left(\bar{M}\right)$ uzayına kısıtlanmasıyla elde edilen tensöre, ***indirgenmiş metrik tensör*** ve $\bar{M}$ manifolduna ***indirgenmiş metrik tensör altında Riemann manifoldu*** denir.

Genellikle M Riemann manifoldunun alt manifoldu olan $\bar{M}$ manifolduna indirgenen metrik tensöre de $\bar{M}$ ***manifoldunun birinci temel formu*** da denir.

Bu durum E^n uzayında hiperyüzeylerin birinci temel formu ve $\bar{M}$ manifolduna indirgenmiş metrik tensörün karşılaştırılmasından da görülebilir [16].

Tanım 2.48. M m—boyutlu Riemann manifold ve $\bar{M}$ manifoldu da k—boyutlu alt manifoldu olsun. $\chi(M) = \chi\left(\bar{M}\right) \oplus \chi^{\perp}\left(\bar{M}\right)$ eşitliği göz önüne alınırsa, M üzerindeki Riemann konneksiyon ∇ olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi\left(\bar{M}\right)$ için, $\nabla_X Y \in \chi(M)$ nin teğet bileşeni $\bar{\nabla}_X Y \in \chi\left(\bar{M}\right)$ ve normal bileşeni $V(X,Y) \in \chi^{\perp}\left(\bar{M}\right)$ ise,

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y + V(X,Y) = tan(\nabla_X Y) + nor(\nabla_X Y)$$

eşitliğine ***genelleştirilmiş Gauss denklemi*** denir.
O halde $X \in \chi(M)$ vektör alanı,

$$\chi(M) = \chi\left(\bar{M}\right) \oplus \chi^{\perp}\left(\bar{M}\right) \tag{2.123}$$

eşitliğinden

$$X = X_1 + X_2 \tag{2.124}$$

şeklinde iki vektör alanının toplamı olarak yazılabilir. O halde $X_1 = tan(X)$ ve $X_2 = nor(X)$ dir. Daha da önemlisi, tan ve nor fonksiyonları $\chi\left(\bar{M}\right)$ üzerinde $C^{\infty}\left(\bar{M},\mathbb{R}\right)$ lineer fonksiyonlardır [16].

Örnek 2.21. E^n uzayında $\bar{M}$ hiperyüzeyi üzerindeki şekil operatörü S olsun. E^n uzayının Riemann konneksiyonu ∇ ile gösterilmek üzere, $\forall X, Y \in \chi\left(\bar{M}\right)$ için,

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y - \langle S(X), Y\rangle \xi \tag{2.125}$$

şeklinde tanımlanan $\bar{\nabla}$ operatörü $\bar{M}$ manifoldunda ***Gauss anlamında kovaryant türev operatörü*** denir. Ayrıca,

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y - \langle S(X), Y\rangle \xi \tag{2.126}$$

denklemi de $\bar{M}$ ***hiperyüzeyi üzerindeki Gauss denklemidir*** [16].

Teorem 2.7. *M bir Riemann manifoldu, $\bar{M}$ manifoldu $\bar{M} \subset M$ olacak şekilde k—boyutlu alt manifold iken,*

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} : \chi\left(\bar{M}\right) \times \chi\left(\bar{M}\right) &\to \chi\left(\bar{M}\right) \\ (Z,W) &\to \bar{\nabla}(Z,W) = \bar{\nabla}_Z W = tan(\nabla_Z W) \end{aligned} \tag{2.127}$$

ile tanımlı $\bar{\nabla}$, $\bar{M}$ üzerinde Riemann konneksiyondur [16].

İspat. 1) $\bar{\nabla}$ **konneksiyondur:**

i. $\forall Z, W, X \in \chi\left(\bar{M}\right)$ için, $\bar{\nabla}_Z(W+X) = \bar{\nabla}_Z W + \bar{\nabla}_Z X$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_Z(W+X) &= tan(\nabla_Z(W+X)) = tan(\nabla_Z W + \nabla_Z X) \\ &= tan(\nabla_Z W) + tan(\nabla_Z X) = \bar{\nabla}_Z W + \bar{\nabla}_Z X \end{aligned} \tag{2.128}$$

bulunur.

ii. $\forall Z, W, X \in \chi\left(\bar{M}\right)$ için, $\bar{\nabla}_{(Z+W)}X = \bar{\nabla}_Z X + \bar{\nabla}_W X$ olduğu benzer şekilde görülebilir.

iii. $\forall Z, W \in \chi\left(\bar{M}\right)$, $\forall f \in C^{\infty}\left(\bar{M},\mathbb{R}\right)$ için,

$$\bar{\nabla}_{fZ} W = tan\left(\nabla_{fZ} W\right) = tan(f\nabla_Z W) = f\, tan(\nabla_Z W) = f\bar{\nabla}_Z W.$$

iv. $\forall Z, W \in \chi\left(\bar{M}\right)$, $\forall f \in C^{\infty}\left(\bar{M}, \mathbb{R}\right)$için,

$$\bar{\nabla}_Z (fW) = Z(f)W + f\bar{\nabla}_Z W \tag{2.129}$$

olduğu da görülebilir.
Böylece, $\bar{\nabla}$ $\bar{M}$ manifoldu üzerinde bir afin konneksiyondur.

2) $\bar{\nabla}$ **konneksiyonunun Riemann konneksiyon olduğunu gösterelim.**

i. $\forall Z, W, X \in \chi\left(\bar{M}\right)$ için, ∇ Riemann konneksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} Z[g(W,X)] &= g(\nabla_Z Z, W) + g(W, \nabla_Z X) \\ &= g\left(\bar{\nabla}_Z W + V(Z,W), X\right) + g\left(W, \bar{\nabla}_Z X + V(Z,X)\right) \\ &= g\left(\bar{\nabla}_Z W, X\right) + g(V(Z,W), X) + g\left(Z, \bar{\nabla}_Z X\right) \\ &\quad + g(W, V(Z,X)) \\ &= g\left(\bar{\nabla}_Z W, X\right) + g\left(W, \bar{\nabla}_Z X\right). \end{aligned} \tag{2.130}$$

ii. $\forall Z, W \in \chi\left(\bar{M}\right)$ için, $\nabla_Z W - \nabla_W Z = [Z, W]$ olduğunu gösterelim:

$$\bar{\nabla}_Z W - \bar{\nabla}_W Z = tan(\nabla_Z W - \nabla_W Z) = tan([Z, W]) = [Z, W]. \tag{2.131}$$

■

Teorem 2.8. *M Riemann manifoldunun bir alt manifoldu $\bar{M}$ olmak üzere, $\forall Z, W \in \chi\left(\bar{M}\right)$ için,*

$$\begin{aligned} V : \chi\left(\bar{M}\right) \times \chi\left(\bar{M}\right) &\to \chi^{\perp}\left(\bar{M}\right) \\ (Z, W) &\to V(Z,W) = \nabla_Z W - \bar{\nabla}_Z W \end{aligned} \tag{2.132}$$

fonksiyonu simetrik, 2—boyutlu kovaryant tensördür. Bu tensöre $\bar{M}$ manifoldunun ***ikinci temel tensörü*** *ya da* ***genelleştirilmiş Weingarten dönüşümü*** *denir [16].*

İspat. $\forall Z, W, X \in \chi\left(\bar{M}\right)$ ve $\forall f_1, f_2 \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ için,

$$V(f_1 Z + f_2 W, X) = f_1 V(Z,X) + f_2 V(W,X)$$

ve

$$V(Z, f_1 W + f_2 X) = f_1 V(Z,W) + f_2 V(Z,X)$$

olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} V(f_1Z+f_2W,X) &= \nabla_{f_1Z+f_2W}X-\bar{\nabla}_{f_1Z+f_2W}X \\ &= f_1\nabla_Z X+f_2\nabla_W X-f_1\bar{\nabla}_Z X-f_2\bar{\nabla}_W X \\ &= f_1\left(\nabla_Z X-\bar{\nabla}_Z X\right)+f_2\left(\nabla_W X-\bar{\nabla}_W X\right), \end{aligned} \tag{2.133}$$

$$\begin{aligned} V(Z,f_1W+f_2X) &= \nabla_Z(f_1W+f_2X)-\bar{\nabla}_Z(f_1W+f_2X) \\ &= Z(f_1)W+f_1\nabla_Z W+Z(f_2)X+f_2\nabla_Z X- \\ &Z(f_1)W-f_1\bar{\nabla}_Z W-Z(f_2)X-f_2\bar{\nabla}_Z X \\ &= f_1\left(\nabla_Z W-\bar{\nabla}_Z W\right)+f_2\left(\nabla_Z X-\bar{\nabla}_Z X\right) \\ &= f_1V(Z,W)+f_2V(Z,X). \end{aligned} \tag{2.134}$$

O halde V fonksiyonu $\chi^{\perp}\left(\bar{M}\right)$ değerli 2—kovaryant tensördür.
Ayrıca $\forall Z,W,X\in\chi\left(\bar{M}\right)$ için

$$\begin{aligned} V(Z,W)-V(W,Z) &= \left(\nabla_Z W-\bar{\nabla}_Z W\right)-\left(\nabla_W Z-\bar{\nabla}_W Z\right) \\ &= [Z,W]-[Z,W]=0 \end{aligned} \tag{2.135}$$

elde edilir. Böylece, V fonksiyonu simetriktir.

■

Teorem 2.9. *M m—boyutlu Riemann manifoldunun k—boyutlu alt manifoldu $\bar{M}$ olsun. $\bar{M}$ manifoldunun 2. temel tensörü V ve $\chi^{\perp}\left(\bar{M}\right)$ uzayının ortonormal bazı $\zeta=(\xi_1,...,\xi_{m-k})$ olmak üzere,*

$$\begin{aligned} B_i:\chi\left(\bar{M}\right)\times\chi\left(\bar{M}\right) &\to C^{\infty}\left(\bar{M},\mathbb{R}\right) \\ (Z,W) &\to B_i(Z,W)=g\left(V(Z,W),\xi_i\right) \end{aligned} \tag{2.136}$$

*$(1\leq i\leq m-k)$ ile tanımlanan B_i fonksiyonları $\chi\left(\bar{M}\right)$ üzerinde bilineer form oluşturur. Bu şekilde tanımlanan B_i bilineer formlarına, $\bar{M}$ **manifoldunun ζ bazına göre ikinci temel formları** denir [16].*

İspat. $\forall Z,W,X \in \chi\left(\bar{M}\right)$ ve $\forall f_1,f_2 \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ için,

$$\begin{aligned} B_i(f_1X+f_2W,X) &= g(V(f_1Z+f_2W,X),\xi_i) \\ &= g(f_1V(Z,X)+f_2V(W,X),\xi_i) \\ &= f_1g(V(Z,X),\xi_i)+f_2g(V(W,X),\xi_i) \\ &= f_1B_i(Z,X)+f_2B_i(W,X) \end{aligned} \tag{2.137}$$

olduğundan B_i dönüşümü 1. bileşene göre lineerdir, 2. bileşene göre lineerliği benzer şekilde gösterilebileceğinden bilineerdir. Ayrıca,

$$B_i(Z,W) = g(V(Z,W),\xi_i) = g(V(W,Z),\xi_i) = B_i(W,Z)$$

olduğundan simetriktir. ■

Örnek 2.22. (Temel Formlar) E^n uzayında M hiperyüzeyi üzerinde q. temel form, $(1 \leq q \leq n)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} I^q : \chi(M)\times\chi(M) &\to C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \\ (X,Y) &\to I^q(X,Y) = \left\langle S^{q-1}(X),Y\right\rangle \end{aligned} \tag{2.138}$$

şeklinde tanımlı fonksiyondur. O halde 1. temel form

$$I(X,Y) = \langle X,Y\rangle$$

metrik tensörüdür [16].

Tanım 2.49. M $m-$boyutlu Riemann manifold ve $\bar{M}$ $k-$boyutlu alt manifold olmak üzere, $\chi^{\perp}\left(\bar{M}\right)$ uzayının $\zeta = (\xi_1,...,\xi_{m-k})$ ortonormal bazı için,

$$\begin{aligned} S_i : \chi\left(\bar{M}\right) &\to \chi\left(\bar{M}\right) \\ X &\to S_i(X) = tan(\nabla_X\xi_i) \end{aligned} \tag{2.139}$$

ile tanımlanan dönüşüme $\bar{M}$ ***manifoldunun*** ζ ***bazına göre*** i. ***Weingarten dönüşümü*** denir [16].

Örnek 2.23. E^n uzayının M hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı ξ ve E^n üzerinde tanımlanan Riemann konneksiyon ∇ olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} S : \chi(M) &\to \chi(M) \\ X &\to S(X) = \nabla_X \xi \end{aligned} \tag{2.140}$$

ile tanımlı dönüşüme M ***manifoldunda şekil operatörü*** ya da M ***manifoldunun Weingarten dönüşümü*** adı verilir [16].

Teorem 2.10. *$\bar{M}$ $k-$boyutlu alt manifoldunun i. Weingarten dönüşümü S_i ve ikinci temel formları B_i $(1 \leq i \leq m-k)$ ise,*

1) $\forall X, Y \in \chi\left(\bar{M}\right)$ *için,* $B_i(X,Y) = -g(S_i(X), Y)$,

2) $\forall X, Y \in \chi\left(\bar{M}\right)$ *için,* $V(X,Y) = -\sum_{i=1}^{m-k} g(S_i(X), Y)\,\xi_i$

eşitlikleri yazılabilir [16].

İspat. 1) $\forall X, Y \in \chi\left(\bar{M}\right)$ için,

$$\begin{aligned} B_i(X,Y) &= g(V(X,Y), \xi_i) \\ &= g\left(\nabla_X Y - \bar{\nabla}_X Y, \xi_i\right) \\ &= g(\nabla_X Y, \xi_i) - g\left(\bar{\nabla}_X Y, \xi_i\right) \\ &= X[g(Y, \xi_i)] - g(Y, \nabla_X \xi_i) \\ &= -g(Y, tan\nabla_X \xi_i + nor\nabla_X \xi_i) \\ &= -g(Y, tan\nabla_X \xi_i) - g(Y, nor\nabla_X \xi_i) \\ &= -g(Y, S_i(X)) \\ &= -g(S_i(X), Y). \end{aligned} \tag{2.141}$$

2) $\forall X, Y \in \chi\left(\bar{M}\right)$ için, $\chi^{\perp}\left(\bar{M}\right)$ uzayının $\zeta = (\xi_1, ..., \xi_{m-k})$ ortonormal bazı kullanılarak

$$\begin{aligned} V(X,Y) &= \sum_{i=1}^{m-k} g(V(X,Y), \xi_i)\ \xi_i \\ &= \sum_{i=1}^{m-k} B_i(X,Y)\ \xi_i \\ &= -\sum_{i=1}^{m-k} g(S_i(X), Y)\ \xi_i \end{aligned} \tag{2.142}$$

bulunur.

$\nabla_X \xi_i$ vektör alanının normal bileşeni yardımıyla

$$\begin{aligned} L_i : \chi\left(\bar{M}\right) &\to \chi^{\perp}\left(\bar{M}\right) \\ X &\to L_i(X) = nor\nabla_X \xi_i = \nabla_X \xi_i - S_i(X) \end{aligned} \tag{2.143}$$

dönüşümünü tanımlanabilir. ■

Teorem 2.11. *M $m-$boyutlu Riemann manifold ve $\bar{M}$ $k-$boyutlu alt manifold olmak üzere, $\bar{M}$ manifoldunun $\bar{\nabla}$ Riemann konneksiyonu ve V ikinci temel tensörü C^{∞} sınıfındandır [16].*

İspat. $\bar{M}$ manifoldunun bir C bölgesi üzerinde P noktasını göz önüne alalım. $C \subset \bar{M} \subset M$ olduğundan M ile $\bar{M}$ nin P noktasını içeren (U, ψ) ile (V, φ) koordinat komşulukları mevcuttur. U üzerindeki yerel koordinat fonksiyonları yardımıyla tanımlanan koordinat vektör alanları $U_1, ..., U_k, ..., U_m$ olsun. (V, ψ) haritasının V komşuluğu üzerindeki yerel koordinat fonksiyonları yardımıyla elde edilen koordinat vektör alanları $V_1, ..., V_k$ ise, $U_1|_V = V_1, ..., U_k|_V = V_k$ olacak şekilde seçilirse, $\{U_1, ..., U_m\}$ sistemine Gram Schmidt metodu uygulayarak, U komşuluğu üzerinde $\{W_1, ..., W_m\}$ sistemi elde edilebilir. $\left\{W_1|_V = V_1, ..., W_k|_V = V_k\right\}$ sistemi de V üzerinde $\chi\left(\bar{M}\right)$ için C^{∞} ortonormal bazdır ve kalan $\left\{W_{k+1}|_V, ..., W_k|_V\right\}$ sistemi de V üzerinde $\chi^{\perp}\left(\bar{M}\right)$ in C^{∞} baz alanını oluşturur. U üzerinde $u_i, v_j \in C^{\infty}(V, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$X = \sum_{i=1}^{k} u_i W_i \tag{2.144}$$

ve

$$Y = \sum_{j=1}^{k} v_j W_j \tag{2.145}$$

vektör alanlarını göz önüne alalım. Diğer taraftan, M manifoldunun ∇ Riemann konneksiyonu için,

$$\nabla_{W_i} W_j = \sum_{r=1}^{m} B_{ji}^{r} W_r, B_{ji}^{r} \in C^{\infty}(U, \mathbb{R}) \tag{2.146}$$

olsun. Böylece,

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_X\left(\sum_{j=1}^{k} v_j W_j\right) = \sum_{j=1}^{k} X\left[v_j\right] W_j + \sum_{j=1}^{k} v_j \nabla_X W_j \\ &= \sum_{j=1}^{k} X\left[v_j\right] W_j + \sum_{j=1}^{k} v_j \nabla_{\sum_{i=1}^{k} u_i W_i} W_j \\ &= \sum_{j=1}^{k} X\left[v_j\right] W_j + \sum_{i,j=1}^{k} u_i v_j \left(\sum_{r=1}^{m} B_{ji}^{r} W_r\right) \\ &= \sum_{r=1}^{k}\left\{X\left[v_r\right] + \sum_{i,j=1}^{k} u_i v_j B_{ji}^{r}\right\} W_r + \sum_{r=k+1}^{m}\left(\sum_{i,j=1}^{k} u_i v_j B_{ji}^{r}\right) W_r\end{aligned} \tag{2.147}$$

bulunur. O halde $\forall X, Y \in \chi(V)$ için,

$$\bar{\nabla}_X Y = \sum_{r=1}^{k}\left\{X\left[v_r\right] + \sum_{i,j=1}^{k} u_i v_j B_{ji}^{r}\right\} W_r$$

ve

$$V(X,Y) = \sum_{r=k+1}^{m}\left(\sum_{i,j=1}^{k} u_i v_j B_{ji}^{r}\right) W_r$$

şeklindedir. Burada, $u_i, v_j \in C^{\infty}(V,\mathbb{R})$ ve $B_{ji}^{r} \in C^{\infty}(V,\mathbb{R})$ olduğundan $\bar{\nabla}_X Y, V(X,Y)$ ve dolayısıyla $\bar{\nabla}$ ile V tensörleri C^{∞} sınıfındandır. ■

Teorem 2.12. *M m—boyutlu Riemann manifold ve k—boyutlu alt manifoldu $\bar{M}$ olmak üzere, Riemann konneksiyon ve Riemann eğrilik tensörleri sırasıyla, ∇, R ve $\bar{\nabla}, \bar{R}$ olsun. V, $\bar{M}$ manifoldunun 2. temel tensörü olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi\left(\bar{M}\right)$ için,*

$$tanR(X,Y,Z) = \bar{R}(X,Y,Z) + tan\left\{\nabla_X V(Y,Z) - \nabla_Y V(X,Z)\right\} \tag{2.148}$$

ve

$$norR(X,Y,Z) = V\left(X, \bar{\nabla}_Y Z\right) - V\left(Y, \bar{\nabla}_X Z\right) - V([X,Y],Z) + nor\left\{\nabla_X V(Y,Z) - \nabla_Y V(X,Z)\right\} \tag{2.149}$$

*eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitliklere sırasıyla **genelleştirilmiş Gauss eğrilik denklemi** ve **genelleştirilmiş Codazzi-Mainardi denklemi** denir [16].*

İspat. $\forall X,Y,Z\in\chi\left(\bar{M}\right)$ için, $R(X,Y,Z)=\nabla_X(\nabla_Y Z)-\nabla_Y(\nabla_X Z)-\nabla_{[X,Y]}Z$ eşitliğinde genelleştirilmiş Gauss denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
R(X,Y,Z) &= \nabla_X\left(\bar{\nabla}_Y Z+V(Y,Z)\right)-\nabla_Y\left(\bar{\nabla}_X Z+V(X,Z)\right)-\bar{\nabla}_{[X,Y]}Z-V([X,Y],Z)\\
&= \nabla_X\bar{\nabla}_Y Z+\nabla_X V(Y,Z)-\nabla_Y\bar{\nabla}_X Z-\nabla_Y V(X,Z)\\
&\quad -\bar{\nabla}_{[X,Y]}Z-V([X,Y],Z)\\
&= \bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y Z+V\left(X,\bar{\nabla}_Y Z\right)+\nabla_X V(Y,Z)-\bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_X Z\\
&\quad -V\left(Y,\bar{\nabla}_X Z\right)-\nabla_Y V(X,Z)-\bar{\nabla}_{[X,Y]}Z-V([X,Y],Z)\\
&= \bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y Z-\bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_X Z-\bar{\nabla}_{[X,Y]}Z+V\left(X,\bar{\nabla}_Y Z\right)\\
&\quad -V\left(Y,\bar{\nabla}_X Z\right)+\nabla_X V(Y,Z)-\nabla_Y V(X,Z)-V([X,Y],Z)\\
&= \bar{R}(X,Y,Z)+V\left(X,\bar{\nabla}_Y Z\right)-V\left(Y,\bar{\nabla}_X Z\right)+tan(\nabla_X V(Y,Z))+nor(\nabla_X V(Y,Z))\\
&\quad -tan(\nabla_Y V(X,Z))-nor(\nabla_Y V(X,Z))-V([X,Y],Z)
\end{aligned}\tag{2.150}$$

eşitliğinden,

$$tanR(X,Y,Z)=\bar{R}(X,Y,Z)+tan\{\nabla_X V(Y,Z)-\nabla_Y V(X,Z)\}$$

ve

$$norR(X,Y,Z)=V\left(X,\bar{\nabla}_Y Z\right)-V\left(Y,\bar{\nabla}_X Z\right)-V([X,Y],Z)+nor\{\nabla_X V(Y,Z)-\nabla_Y V(X,Z)\}$$

elde edilir. ■

Örnek 2.24. Öklid Uzayında $(n-1)-$boyutlu Alt Manifold Eğriliği

Çözüm E^n uzayında M $(n-1)-$boyutlu alt manifoldunun birim normal vektör alanı ξ ve $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için, $R(X,Y,Z)=0$ eşitliğine Gauss denklemi uygulayalım. Buradan

$$\begin{aligned}
\nabla_X\nabla_Y Z &= \nabla_X\left(\bar{\nabla}_Y Z-\langle S(Y),Z\rangle\xi\right)=\nabla_X\left(\bar{\nabla}_Y Z\right)-\nabla_X\left(\langle S(Y),Z\rangle\xi\right)\\
&= \bar{\nabla}_X\left(\bar{\nabla}_Y Z\right)-\left\langle S(X),\bar{\nabla}_Y Z\right\rangle\xi-X\left[\langle S(Y),Z\rangle\right]\xi-\langle S(Y),Z\rangle\nabla_X\xi\\
&= \bar{\nabla}_X\left(\bar{\nabla}_Y Z\right)-\langle S(Y),Z\rangle S(X)-\left\langle S(X),\bar{\nabla}_Y Z\right\rangle\xi\\
&\quad -\left\{\underbrace{\langle\nabla_X S(Y),Z\rangle}_{\bullet}+\underbrace{\langle S(Y),\nabla_X Z\rangle}_{\bullet\bullet}\right\}\xi
\end{aligned}\tag{2.151}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X S(Y), Z\rangle) &= \left\langle \bar{\nabla}_X (S(Y)) - \langle S(X), S(Y)\rangle \xi, Z \right\rangle \\ &= \left\langle \bar{\nabla}_X (S(Y)), Z \right\rangle - \langle S(X), S(Y)\rangle \langle \xi, Z\rangle \\ &= \left\langle \bar{\nabla}_X (S(Y)), Z \right\rangle\end{aligned} \tag{2.152}$$

ve

$$\begin{aligned}\langle S(Y), \nabla_X Z\rangle &= \left\langle S(Y), \bar{\nabla}_X Z - \langle S(X), Z\rangle \xi \right\rangle \\ &= \left\langle S(Y), \bar{\nabla}_X Z \right\rangle - \langle S(Y), \xi\rangle \langle S(X), Z\rangle \\ &= \left\langle S(Y), \bar{\nabla}_X Z \right\rangle\end{aligned} \tag{2.153}$$

bulunur. (2.152) ve (2.153) denklemleri yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\nabla_X \nabla_Y Z = \bar{\nabla}_X \left(\bar{\nabla}_Y Z\right) &- \langle S(Y), Z\rangle S(X) \\ &- \left\langle S(X), \bar{\nabla}_Y Z \right\rangle \xi - \left\langle \bar{\nabla}_X (S(Y)), Z \right\rangle \xi \\ &- \left\langle S(Y), \overline{\nabla}_X Z \right\rangle \xi\end{aligned} \tag{2.154}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\nabla_Y \nabla_X Z = \bar{\nabla}_Y \left(\bar{\nabla}_X Z\right) &- \langle S(X), Z\rangle S(Y) \\ &- \left\langle S(Y), \bar{\nabla}_X Z \right\rangle \xi - \left\langle \bar{\nabla}_Y (S(X)), Z \right\rangle \xi \\ &- \left\langle S(X), \bar{\nabla}_Y Z \right\rangle \xi\end{aligned} \tag{2.155}$$

yazılır ve

$$\nabla_{[X,Y]} Z = \bar{\nabla}_{[X,Y]} Z - \langle S([X,Y]), Z\rangle \xi \tag{2.156}$$

olduğu göz önüne alınırsa, $\forall X, Y, Z \in \chi(E^n)$ için, (2.154)-(2.155)-(2.156)=0 elde edilir. Buradan, $R(X,Y,Z) = 0 = I + II.\xi$ =(2.154)-(2.155)-(2.156) olmak üzere, burada

$$I = \bar{\nabla}_X \left(\bar{\nabla}_Y Z\right) - \bar{\nabla}_Y \left(\bar{\nabla}_X Z\right) - \bar{\nabla}_{[X,Y]} Z - \langle S(Y), Z\rangle S(X) + \langle S(X), Z\rangle S(Y) \tag{2.157}$$

$$II = \left\langle \bar{\nabla}_Y S(X), Z \right\rangle - \left\langle \bar{\nabla}_X S(Y), Z \right\rangle + \langle S([X,Y]), Z\rangle \tag{2.158}$$

şeklindedir. O halde, $I + II.\xi = 0$ eşitliğinden $I = II = 0$ olmalıdır. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X \left(\bar{\nabla}_Y Z\right) - \bar{\nabla}_Y \left(\bar{\nabla}_X Z\right) - \bar{\nabla}_{[X,Y]} Z &= \langle S(Y), Z\rangle S(X) - \langle S(X), Z\rangle S(Y) \\ &= \begin{vmatrix} S(X) & S(Y) \\ \langle S(X), Z\rangle & \langle S(Y), Z\rangle \end{vmatrix}\end{aligned} \tag{2.159}$$

olup

$$\left\langle \bar{\nabla}_Y S(X) - \bar{\nabla}_X S(Y) + S([X,Y]), Z \right\rangle = 0 \tag{2.160}$$

elde edilir. Bu eşitlik $\forall X \in \chi(M)$ için geçerli olduğundan

$$\bar{\nabla}_X S(Y) - \bar{\nabla}_Y S(X) - S([X,Y]) = 0 \tag{2.161}$$

olmalıdır [16].

Tanım 2.50. E^n uzayında $(n-1)-$boyutlu M alt manifoldu üzerinde Riemann konneksiyonu $\overline{\nabla}$ olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X\left(\overline{\nabla}_Y Z\right) - \overline{\nabla}_Y\left(\overline{\nabla}_X Z\right) - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z &= \langle S(Y), Z\rangle S(X) - \langle S(X), Z\rangle S(Y) \\ &= \begin{vmatrix} S(X) & S(Y) \\ \langle S(X), Z\rangle & \langle S(Y), Z\rangle \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{2.162}$$

ve

$$\bar{\nabla}_X S(Y) - \bar{\nabla}_Y S(X) - S([X,Y]) = 0 \tag{2.163}$$

eşitliklerine sırasıyla M manifoldunun ***Gauss eğrilik denklemi*** ve ***Codazzi-Mainardi denklemi*** denir [16].

Teorem 2.13. *M $m-$boyutlu Riemann manifoldunun $\bar{M}$ $k-$boyutlu alt manifoldu olsun. $\chi^{\perp}\left(\bar{M}\right)$ uzayının bir $\zeta = (\xi_1, ..., \xi_{m-k})$ ortonormal bazına göre $\bar{M}$ manifoldunun i. Weingarten dönüşümü S_i, ikinci temel formları $B_1, ..., B_{m-k}$ ve $\forall X \in \chi\left(\bar{M}\right)$ için,*

$$L_i(X) = \nabla_X \xi_i - S_i(X)$$

ise, $\bar{M}$ manifoldunun Gauss eğrilik denklemi

$$tanR(X,Y,Z) = \bar{R}(X,Y,Z) + \sum_{i=1}^{m-k} \{g(S_i(X), Z) S_i(Y) - g(S_i(Y), Z) S_i(X)\} \tag{2.164}$$

şeklindedir. $\bar{M}$ manifoldunun Codazzi Mainardi denklemi ise

$$\begin{aligned} norR(X,Y,Z) = \sum_{i=1}^{m-k} \Big\{ &\left(\bar{\nabla}_Y S_i(X) - \bar{\nabla}_X S_i(Y) + S_i([X,Y]), Z\right) \xi_i \\ &- g(S_i(Y), Z) L_i(X) + g(S_i(X), Z) L_i(Y) \end{aligned} \tag{2.165}$$

şeklindedir [16].

Teorem 2.14. *M m—boyutlu Riemann manifold ve $\bar{M}$ $(n-1)$—boyutlu alt manifoldu olsun. $\bar{M}$ manifoldunun C^∞ birim normal vektör alanı $\xi \in \chi(M)$ olduğuna göre,*

$$\begin{aligned} S_P : T_{\bar{M}}(P) &\to T_{\bar{M}}(P) \\ X_P &\to S_P(X_P) = \nabla_{X_P}\xi \end{aligned} \tag{2.166}$$

olarak tanımlanan Weingarten dönüşümüne göre genelleştirilmiş Gauss denklemi $\forall X, Y \in \chi\left(\bar{M}\right)$ için

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y + g(S(X), Y)\xi \tag{2.167}$$

şeklindedir. Yani,

$$V(X,Y) = -g(S(X), Y)\xi \tag{2.168}$$

yazılabilir [16].

İspat. Genelleştirilmiş Gauss denkleminden

$$\begin{aligned} g(V(X,Y),\xi) &= g\left(\nabla_X Y - \bar{\nabla}_X Y, \xi\right) \\ &= g(\nabla_X Y, \xi) \\ &= X[g(\xi, Y)] - g(\nabla_X \xi, Y) - g(S(X), Y) \end{aligned} \tag{2.169}$$

bulunur. ■

2.2.6 Riemann Manifoldlar Üzerinde Eğriler

Tanım 2.51. M Riemann manifoldunun metrik tensörü g olmak üzere, $X_P, Y_P \in T_M(P)$ tanjant vektörleri arasındaki θ açı ölçüsü için $g(X_P, Y_P) = \|X_P\|\|Y_P\|\cos\theta$ $0 \leq \theta \leq \pi$ şeklindedir. Burada θ ölçüsünün $[0, \pi]$ kapalı aralığında bulunacağı $|g(X_P, Y_P)| \leq \|X_P\|\|Y_P\|$ eşitsizliğinden aşikardır [16].

Tanım 2.52. (Yay Uzunluk ölçüsü) M Riemann manifoldu g metrik tensörüne sahip ve $\{([a,b], \alpha)\}$ atlasına sahip eğrinin T teğet vektör alanı olmak üzere, $\alpha([a,b]) \subset M$ eğrisinin $\alpha(a)$ dan $\alpha(b)$ ye yay uzunluk ölçüsü

$$|\alpha|_a^b = \int_a^b \sqrt{g(T(t), T(t))}dt$$

olarak tanımlanır. $\{([a,b], \alpha)\}$ atlası dif.bilir olduğundan integral süreklidir, dolayısıyla yay uzunluğunu veren integral sürekli ve daima mevcuttur. Eğer eğri parçalı ise, C^∞ sınıfı parçaların uzunlukları toplanarak eğri uzunluğu bulunur [16].

Tanım 2.53. M $n-$boyutlu Riemann manifoldu üzerindeki konneksiyon ∇ iken,

$$\begin{aligned} \alpha : I \subseteq \mathbb{R} &\to M \\ t &\to \alpha(t) \end{aligned} \tag{2.170}$$

tanımlı eğrisi için $\alpha_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = V \in \chi(M)$ vektör alanına ***eğrinin hız vektör alanı*** denir. Burada, $\alpha_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}[\alpha] \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \alpha'(t)$ şeklindedir [16].

Tanım 2.54. M Riemann manifoldu üzerindeki α eğrisi T birim teğet vektör alanına sahip olmak üzere $T = \frac{V}{\|V\|}$ ile tanımlanabilir. Burada, $\|V\| \in C^{\infty}(I, \mathbb{R})$ fonksiyonuna α eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre ***skaler hız fonksiyonu*** denir. Ayrıca, $t \in I$ için $\|V\|(t) = \left\|V_{\alpha(t)}\right\|$ reel sayısına da α ***eğrisinin*** (I, α) ***koordinat komşuluğuna göre*** $\alpha(t)$ ***noktasındaki skaler hızı*** denir [16].

Tanım 2.55. M Riemann manifoldu ∇ konneksiyonuna sahip ve üzerindeki α eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere, $\nabla_T T$ vektör alanına α ***eğrisinin geodezik eğrilik vektör alanı*** denir. Eğer $\nabla_{\alpha'}\alpha' = \nabla_V V = 0$ ise, α eğrisine M manifoldu üzerinde ***geodezik eğri*** denir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} k_g : I &\to \mathbb{R} \\ t &\to k_g(t) = \|\nabla_T T\| \end{aligned} \tag{2.171}$$

ile tanımlı fonksiyona α ***eğrisinin geodezik eğrilik fonsiyonu*** denir [16].

Teorem 2.15. *M Riemann manifoldu üzerinde tanımlanan α eğrisinin geodezik olması için gerek ve yeter koşul k_g geodezik eğrilik fonksiyonunun sıfır ve skaler hız fonksiyonunun sabit olmasıdır [16].*

İspat. (I, α) atlasına sahip α eğrisinin hız vektör alanı V olsun.

$(\Rightarrow)$: α geodezik eğri ise, $\nabla_V V = \nabla_{T\|V\|}(T\|V\|) = \|V\| \nabla_T (T\|V\|)$ eşitliğinden $V \neq 0$ olduğundan $(T(\|V\|)T + \|V\| \nabla_T T) = 0$ olmalıdır. Her iki tarafın normunun karesi alınırsa,

$$[T(\|V\|)]^2 + \|V\|^2 g(\nabla_T T, \nabla_T T) + 2T(\|V\|)\|V\| g(T, \nabla_T T) = 0 \tag{2.172}$$

bulunur. $g(T,T) = 1$ eşitliğinden $T[g(T,T)] = 0$ ya da $g(\nabla_T T, T) = 0$ şeklindedir. Böylece, $T[\|V\|] = 0$ ve $\nabla_T T = 0$ veya $T(\|V\|) = 0$ ve $k_g = 0$ bulunur. O halde α eğrisi M manifoldu üzerinde geodezik eğri iken, $k_g = 0$ ve skaler hız fonksiyonu sabit fonksiyondur.

$(\Leftarrow)$: α eğrisinin skaler hız fonksiyonu sabit fonksiyon ve $k_g = 0$ olmak üzere,

$T(\|V\|) = 0$ ve $k_g = 0$ ise, $\nabla_V V = 0$ bulunur. Böylece, α eğrisi M manifoldu üzerinde geodezik eğridir.

■

Tanım 2.56. M Riemann manifoldu üzerinde $\{(I, \alpha)\}$ atlası ile verilen eğrinin hız vektörü V olmak üzere,

$$\begin{aligned} \alpha' &= V \\ \alpha'' &= \nabla_V V \\ \alpha''' &= \nabla_V (\nabla_V V) \\ \alpha^{(n)} &= \nabla_V (\nabla_V ... (\nabla_V V) ...) \end{aligned} \tag{2.173}$$

ile gösterelim. Bu $\{\alpha', ..., \alpha^{(n)}\} \subset \chi(M)$ sisteminin lineer bağımsız $\{\alpha', ..., \alpha^{(r)}\}$ alt kümesine Gram-Schmidt ortonormalleştirme metodu uygulayarak elde edilen $\{V_1, ..., V_r\}$ vektör alanları sistemine M manifoldu üzerinde ***Frenet*** r***—ayaklı alanı*** denir. $\forall t \in I$ için $V_i|_{\alpha(t)}$ tanjant vektörüne de $\alpha(t)$ noktasındaki i. ***Frenet vektörü*** denir [16].

Tanım 2.57. M Riemann manifoldu ∇ konneksiyonuna sahip ve $\{(I, \alpha)\}$ atlasına sahip eğrinin Frenet r—ayaklı alanı $\{V_1, ..., V_r\}$ iken,

$$\begin{aligned} k_i : I &\to \mathbb{R} \\ t &\to k_i(t) = g\left(\nabla_{V_i} V_i, V_{i+1}\right)\Big|_{\alpha(t)} \end{aligned} \tag{2.174}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona α ***eğrisinin*** i. ***eğrilik fonksiyonu*** ve $k_i(t)$ sayısına da α ***eğrisinin*** $\alpha(t)$ ***noktasındaki*** i. ***eğriliği*** denir [16].

Tanım 2.58. M Riemann manifoldunun konneksiyonu ∇ ve $\{(I, \alpha)\}$ atlası ile verilen eğrinin i. eğrilik fonksiyonu k_i olmak üzere, $(1 \leq i \leq r)$ için

$$\begin{aligned} \nabla_{V_1} V_1 &= k_1 V_2 \\ \nabla_{V_1} V_i &= -k_{i-1} V_{i-1} + k_i V_{i+1} \\ \nabla_{V_1} V_r &= -k_{r-1} V_{r-1} \end{aligned} \tag{2.175}$$

formüllerine ***Frenet formülleri*** denir.

Matris gösterimi ise,

$$\begin{bmatrix} \nabla_{V_1} V_1 \\ \nabla_{V_1} V_2 \\ \nabla_{V_1} V_3 \\ \vdots \\ \nabla_{V_1} V_{r-2} \\ \nabla_{V_1} V_{r-1} \\ \nabla_{V_1} V_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{r-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{r-2} & 0 & 0 & k_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{r-2} \\ V_{r-1} \\ V_r \end{bmatrix} \tag{2.176}$$

ile verilir [16].

Tanım 2.59. M m—boyutlu Riemann manifoldunun k—boyutlu alt manifoldu $\bar{M}$ olsun. Bir $P \in M$ noktasında $X_P, Y_P \in T_{\bar{M}}(P)$ için,

$$V(X_P, Y_P) = V(X,Y)|_P = 0$$

ise, X_P ve Y_P doğrultularına ***eşlenik doğrultular*** denir [16] .

Tanım 2.60. M m—boyutlu Riemann manifoldunun $\bar{M}$ k—boyutlu alt manifoldunun $P \in M$ noktasındaki $X_P \in T_{\bar{M}}(P)$ tanjant vektörü için,

$$V(X_P, X_P) = 0 \tag{2.177}$$

ise X_P doğrultusuna $\bar{M}$ ***manifoldunun asimptotik doğrultusu*** denir [16].

Tanım 2.61. M m—boyutlu Riemann manifoldunun k—boyutlu $\bar{M}$ alt manifoldu üzerindeki ikinci temel tensör V ve bir

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \bar{M}$$

eğrisinin T birim teğet vektör alanı olmak üzere, $V(T,T)$ vektör alanına α ***eğrisinin normal eğrilik vektör alanı***,

$$\bar{k}_T = \|V(T,T)\|$$

olarak tanımlanan $\bar{k}_T : \alpha(I) \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna da α ***eğrisinin normal eğrilik fonksiyonu*** denir [16].

Teorem 2.16. *M m—boyutlu Riemann manifoldunun $\bar{M}$ k—boyutlu alt manifoldu verilsin.*

1) $\bar{M}$ manifoldunun bir $P \in \bar{M}$ noktasında T_P birim teğeti aynı olan eğrilerin normal

eğrilikleri aynıdır.

2) *Bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \bar{M}$ eğrisinin $\bar{M}$ ve M manifoldlarındaki geodezik eğrilikleri sırası ile, $\bar{k}_g$ ve k_g ile gösterilirse, α eğrisinin birim teğet vektör alanı için,*

$$\left(k_g\right)^2 = \left(\bar{k}_g\right)^2 + \left(\bar{k}_T\right)^2$$

yazılabilir.

3) *Bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \bar{M}$ eğrisinin M manifolduna göre 2. Frenet vektör alanı V_2 ile $V(T,T)$ normal eğrilik vektör alanı arasındaki açı γ ise,*

$$\bar{k}_T = k_g \cos\gamma \tag{2.178}$$

şeklindedir [16].

İspat. 1) $T_P \in T_{\bar{M}}(P)$ için, $\bar{k}_T = \bar{k}(P,T) = \|V(T_P, T_P)\|$ olduğundan T_P teğet vektörü aynı olan eğrilerin $\bar{k}_T$ değeri aynıdır.

2) $\nabla_T T = \bar{\nabla}_T T + V(T,T)$ genelleştirilmiş Gauss denkleminden

$$\|\nabla_T T\|^2 = \left\|\bar{\nabla}_T T + V(T,T)\right\|^2 \tag{2.179}$$

ve

$$g\left(\bar{\nabla}_T T, V(T,T)\right) = 0 \tag{2.180}$$

olduğundan

$$\|\nabla_T T\|^2 = \left\|\bar{\nabla}_T T\right\|^2 + \|V(T,T)\|^2 \tag{2.181}$$

$$\left(k_g\right)^2 = \left(\bar{k}_g\right)^2 + \left(\bar{k}_T\right)^2 \tag{2.182}$$

bulunur.

3) $k_g = 0$ ise, 2) den dolayı $\bar{k}_g = \bar{k}_T = 0$ dolayısıyla γ açısı da tanımsız olur. Eğer $k_g > 0$ ve $\bar{k}_T = 0$ ise, $V(T,T) = 0$ ve genelleştirilmiş Gauss denkleminden, $\bar{\nabla}_T T = \nabla_T T \in \chi\left(\bar{M}\right)$ olur ve böylece α eğrisinin 2. Frenet vektör alanı V_2 için $V_2|_P \in T_{\bar{M}}(P)$ ve bu ise $\gamma = \frac{\pi}{2}$ demektir.

Eğer $\bar{k}_T \neq 0$ ise $V(T,T) \neq 0$ ve $V(T,T) \in \chi^{\perp}\left(\bar{M}\right)$ olduğundan $V(T,T)$ ile lineer bağımlı olan η birim vektör alanı bulunabilir ve $V(T,T) = \bar{k}_T \eta$ yazılabilir. Böylece $\bar{k}_T = g(V(T,T), \eta)$ eşitliğinde Gauss denkleminden yararlanılırsa,

$$\bar{k}_T = g(\nabla_T T, \eta) - g\left(\bar{\nabla}_T T, \eta\right) \tag{2.183}$$

ve $\eta \in \chi^{\perp}\left(\bar{M}\right)$ olduğundan $g\left(\bar{\nabla}_T T, \eta\right) = 0$ değeri göz önüne alınarak

$$\bar{k}_T = g\left(\nabla_T T, \eta\right) \tag{2.184}$$

elde edilir. Buradan,

$$\bar{k}_T = \|\nabla_T T\| \, \|\eta\| \cos\gamma = k_g \cos\gamma \tag{2.185}$$

bulunur.

■

Teorem 2.17. *M m—boyutlu Riemann manifoldunun $\bar{M}$ k—boyutlu alt manifoldu verilsin. $\chi\left(\bar{M}\right)$ uzayının 2—boyutlu σ alt uzayında $\bar{M}$ ile M manifoldlarının Riemann eğrilikleri sırasıyla $\bar{K}(\sigma)$ ile $K(\sigma)$ olsun. $\chi^{\perp}\left(\bar{M}\right)$ uzayının bir ξ ortonormal bazına göre $\bar{M}$ manifoldunun i. Weingarten dönüşümü S_i olmak üzere, σ alt uzayının $\{X, Y\}$ ortonormal bazına göre,*

$$K(\sigma) = \bar{K}(\sigma) - \sum_{i=1}^{m-k} g(g\left(S_i(Y), Y\right) S_i(X) - g\left(S_i(X), Y\right) S_i(Y), X) \tag{2.186}$$

şeklindedir [16].

İspat.

$$K(\sigma) = K(X, Y, X, Y) = g\left(R(X, Y)Y, X\right) = g\left(\nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y - \nabla_{[X,Y]} Y, X\right) \tag{2.187}$$

genelleştirilmiş Gauss denklemi yardımıyla,

$$\begin{aligned} K(\sigma) &= g\left(\nabla_X\left(\bar{\nabla}_Y Y + V(Y, Y)\right) - \nabla_Y\left(\bar{\nabla}_X Y + V(X, Y)\right) - \left(\bar{\nabla}_{[X,Y]} Y + V([X, Y], Y)\right), X\right) \\ &= g\left(\nabla_X \bar{\nabla}_Y Y + \nabla_X V(Y, Y) - \nabla_Y \bar{\nabla}_X Y - \nabla_Y V(X, Y) - \bar{\nabla}_{[X,Y]} Y - V([X, Y], Y), X\right) \\ &= g\left(\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Y + V\left(X, \bar{\nabla}_Y Y\right) + \nabla_X V(Y, Y) - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Y\right. \\ &\quad \left. - V\left(Y, \bar{\nabla}_X Y\right) - \nabla_Y V(X, Y) - \bar{\nabla}_{[X,Y]} Y - V([X, Y], Y), X\right. \end{aligned} \tag{2.188}$$

$$= g\left(\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Y - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_{[X,Y]} Y, X\right) + \underbrace{g\left(V\left(X, \bar{\nabla}_Y Y\right) - V\left(Y, \bar{\nabla}_X Y\right), X\right)}_{0}$$

$$+ g\left(\nabla_X V(Y, Y) - \nabla_Y V(X, Y) - V([X, Y], Y), X\right)$$

olup buradan

$$K(\sigma) = \bar{K}(\sigma) + g\left(\nabla_X V(Y, Y) - \nabla_Y V(X, Y), X\right)$$

elde edilir.

Ayrıca, $V(Y,Y) = -\sum_{i=1}^{m-k} g(S_i(Y),Y)\,\xi_i$ olduğundan

$$\nabla_X V(Y,Y) = -\sum_{i=1}^{m-k}\{X[g(S_i(Y),Y)]\,\xi_i + g(S_i(Y),Y)\,\nabla_X \xi_i\} \tag{2.189}$$

yazılabilir. Böylece

$$g(\nabla_X V(Y,Y),X) = -\sum_{i=1}^{m-k} g(S_i(Y),Y)\,g(\nabla_X \xi_i,X) \tag{2.190}$$

elde edilir. O halde, $\nabla_X \xi_i = tan\nabla_X \xi_i + nor\nabla_X \xi_i$ yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} g(\nabla_X \xi_i,X) &= g(tan\nabla_X \xi_i,X) + g(nor\nabla_X \xi_i,X) = g(S_i(X),X) \\ &= -\sum_{i=1}^{m-k} g(S_i(Y),Y)\,g(S_i(X),X) \end{aligned} \tag{2.191}$$

ve

$$g(\nabla_X V(X,Y),X) = -\sum_{i=1}^{m-k} g(S_i(X),Y)\,g(S_i(Y),X) \tag{2.192}$$

bulunur. Böylece,

$$K(\sigma) = \bar{K}(\sigma) - \sum_{i=1}^{m-k} g(g(S_i(Y),Y)S_i(X) - g(S_i(X),Y)S_i(Y),X) \tag{2.193}$$

şeklindedir.

■

Teorem 2.18. *M $m-$boyutlu Riemann manifoldunun $\bar{M}$ $k-$boyutlu alt manifoldu olmak üzere, $\bar{M}$ manifoldunun M manifoldu içindeki geodezik eğrisi α olmak üzere, α eğrisinin birim teğet vektör alanı T ve $\bar{M}$ manifoldunun herhangi X teğet vektör alanı da $\bar{M}$ manifolduna α eğrisi boyunca paralel ve T vektör alanına dik ise $\sigma = S_P\{X,T\}$ olmak üzere,*

1) *α eğrisi boyunca $K(\sigma) \geq \bar{K}(\sigma)$ şeklindedir.*

2) *$\bar{K}(\sigma) = K(\sigma)$ olması için gerek ve yeter koşul M manifoldunda X vektör alanının α eğrisi boyunca paralel olmasıdır [16].*

İspat. 1) M manifoldunda α eğrisi geodezik olduğundan $\nabla_T T = 0$ ve Gauss denkleminden $\bar{\nabla}_T T = V(T,T) = 0$ bulunur. $g(\nabla_X V(T,T),X) = 0$ veya

$-\sum_{i=1}^{m-k} g(S_i(T),T)\,g(S_i(X),X)=0$ dır. O halde,

$$K(\sigma)=\bar{K}(\sigma)+\sum_{i=1}^{m-k} g(S_i(X),T)\,g(S_i(T),X)$$

eşitliği yazılabilir. $g(S_i(T),X)=g(T,S_i(X))$ olduğu bilindiğinden,

$$K(\sigma)=\bar{K}(\sigma)+\sum_{i=1}^{m-k} g(S_i(X),T)^2$$

bulunur. Bu eşitlik, $K(\sigma)\geq\bar{K}(\sigma)$ anlamına gelmektedir.

2) $(\Rightarrow):\bar{K}(\sigma)=K(\sigma)$ olsun. 1) den $\sum_{i=1}^{m-k} g(S_i(X),T)^2=0$ dır.

$V(X,T)=-\sum_{i=1}^{m-k} g(S_i(X),T)\,\xi_i$ eşitliği kullanılırsa, α eğrisi boyunca $V(X,T)=0$ bulunur.

Genelleştirilmiş Gauss denkleminden $\bar{\nabla}_T X=\nabla_T X$ ve X vektör alanı $\bar{M}$ manifoldunda α eğrisi boyunca paralel olduğundan $\bar{\nabla}_T X=0$ dır. $\nabla_T X=0$, yani X vektör alanı manifoldunda α boyunca paralel vektör alanıdır.

$(\Leftarrow)$: X vektör alanı M manifoldunda α boyunca paralel vektör alanı, yani $\nabla_T X=0$ olsun. Genelleştirilmiş Gauss denkleminden $g(S_i(X),T)=0$ bulunur ve $\bar{K}(\sigma)=K(\sigma)$ eşitliği elde edilir.

■

Teorem 2.19. *M $m-$boyutlu Riemann manifoldunun $\bar{M}$ $(n-1)-$hiperyüzeyi olsun. $T_{\bar{M}}(P)$ uzayının $2-$boyutlu alt uzayı $T_{\bar{M}_2}(\sigma)=\sigma$ ve σ uzayının $\bar{M}$ ile M manifoldlarındaki Riemann eğrilikleri sırasıyla $\bar{K}(\sigma)$ ile $K(\sigma)$ olsun. Bir $P\in\bar{M}$ noktasının $V\subset\bar{M}$ komşuluğunda C^∞ birim normal vektör alanı ξ ve $X_P\in T_{\bar{M}}(P)$ için $S(X_P)=\nabla_{X_P}\xi$ olmak üzere, $T_{\bar{M}_2}(P)$ deki ortonormal baz $\{X_P,Y_P\}$ ise ,*

$$K(\sigma)=\bar{K}(\sigma)-g(S(Y),Y)\,g(S(X),X)-g^2(S(X),Y) \tag{2.194}$$

şeklindedir [16].

Teorem 2.20. *M $m-$boyutlu Riemann manifoldunun ve $\bar{M}$ $(n-1)-$hiperyüzeyinde yatan ve M manifoldunda geodezik α eğrisinin birim teğet vektör alanı T, $\bar{M}$ nin herhangi bir X teğet vektör alanı da $\bar{M}$ manifoldunda α boyunca paralel ve T vektör alanına dik olsun. O zaman $\sigma = \chi\left(\bar{M}_2\right) = S_P\{X,T\}$ olmak üzere,*

1) *α eğrisi boyunca $K(\sigma) \geq \bar{K}(\sigma)$*

2) *$\bar{K}(\sigma) = K(\sigma)$ olması için gerek ve yeter koşul M manifoldunda X vektör alanı α eğrisi boyunca paralel olmasıdır,*

koşulları geçerlidir [16].

İspat. 1) $\bar{M}$ manifoldunun bir $P \in \alpha$ noktasının komşuluğu üzerinde ξ birim vektör alanı C^∞ ise $\forall Z \in \chi\left(\bar{M}\right)$ için,

$$S(Z) = \nabla_Z \xi \tag{2.195}$$

yazılabilir. α eğrisi geodezik olduğundan $\nabla_T T = 0$ ve dolayısıyla $\bar{\nabla}_T T = 0$ ve $g(S(T),T) = 0$ dır. Bu ifadeleri

$$K(\sigma) = \bar{K}(\sigma) - \sum_{i=1}^{m-k} g(g(S_i(Y),Y)S_i(X) - g(S_i(X),Y)S_i(Y),X)$$

denkleminde yerine yazar ve $Y = T$ alırsak, $K(\sigma) = \bar{K}(\sigma) + g^2(S(X),T)$ ve $K(\sigma) \geq \bar{K}(\sigma)$ demektir.

2) $(\Rightarrow)$: $\bar{K}(\sigma) = K(\sigma)$ ise, $K(\sigma) = \bar{K}(\sigma) + g(S(X),T)^2$ eşitliğinden $g(S(X),T) = 0$ elde edilir. Genelleştirilmiş Gauss denkleminden $\bar{\nabla}_T X = \nabla_T X$ ve X birim vektör alanı $\bar{M}$ manifoldunda α eğrisi boyunca paralel olduğundan $\bar{\nabla}_T X = \nabla_T X = 0$ bulunur. Bu ise, X birim vektör alanının α eğrisi boyunca M manifoldunda paralel olması demektir.

$(\Leftarrow)$: $K(\sigma) = \bar{K}(\sigma) + g(S(X),T)^2$ eşitliği ile $\bar{\nabla}_T X = \nabla_T X = 0$ ifadeleri genelleştirilmiş Gauss denklemiyle birleştirilirse $g(S(X),T) = 0$ veya $\bar{K}(\sigma) = K(\sigma)$ elde edilir.

■

2.3 Genel Anlamda Konneksiyonlar

Bu bölümde bir C^∞ manifold üzerinde verilebilecek genel anlamda konneksiyonları ele alacağız.

Tanım 2.62. (Konneksiyon ve İnvaryantları) M $m-$boyutlu C^∞ manifold olmak üzere, M manifoldunun bir A kümesi üzerinde diferansiyel konneksiyon

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(A) \times \chi(A) &\to \chi(A) \\ (X, Y) &\to \nabla_X Y \end{aligned} \tag{2.196}$$

ile gösterilen, $\forall X, Y \in \chi(A)$ ve $f \in C^\infty(A, \mathbb{R})$ için,

1) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

2) $\nabla_{(X+Y)} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,

3) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$,

4) $\nabla_X (fY) = X(f) Y + f \nabla_X Y$

koşullarını sağlayan dönüşümdür [16].

Lemma 2.5. *Bir $P \in M$ noktasındaki $\{e_1, ..., e_m\}$ C^∞ baz vektör alanının tanım bölgesinde*

$$X = \sum_{i=1}^{m} a_i e_i$$

ve

$$Y = \sum_{j=1}^{m} b_j e_j$$

iken,

$$\nabla_X Y|_P = \nabla_{X_P} Y = \sum_{j=1}^{m} X_P\left(b_j\right) e_j\big|_P + b_j(P) \sum_{j=1}^{m} a_i(P) \left(\nabla_{e_i} e_j\right)\big|_P$$

eşitliğinden görülebilir ki, $\nabla_X Y|_P$ tanjant vektörü X_P tanjant vektörüne ve Y vektör alanının X vektör alanına ait integral eğrilerinden birinin üzerindeki değerlerine bağlıdır. Yani $a_i(P), b_j(P)$ ve $X_P\left(b_j\right)$ reel sayıları ile $\nabla_{e_i} e_j$ vektör alanları biliniyor iken $\nabla_X Y$ belirlidir [16].

Tanım 2.63. (Torsiyon Tensörü) M $m-$boyutlu C^∞ manifoldu üzerindeki konneksiyon ∇ olmak üzere,

$$\begin{aligned} Tor : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X, Y) &\to Tor(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned} \tag{2.197}$$

olarak tanımlanan vektör değerli tensöre M üzerinde tanımlı ∇ konneksiyonunun ***Torsiyon (burulma) tensörü*** denir [16].

Teorem 2.21. *M m—boyutlu C^∞ manifoldu üzerinde ∇ konneksiyon olmak üzere, M manifoldunun bir O bölgesinde C^∞ sınıfından $\forall X,Y,Z \in \chi(O)$ ve $\forall f \in C^\infty(O,\mathbb{R})$ için,*

1) $Tor(X,Y) = -Tor(Y,X)$,

2) $Tor(X+Y,Z) = Tor(X,Z) + Tor(Y,Z)$,

3) $Tor(fX,Y) = f\,Tor(X,Y)$

özellikleri sağlanır [16].

İspat. 1)

$$\begin{aligned} Tor(X,Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \\ &= -(\nabla_Y X - \nabla_X Y - [Y,X]) \\ &= -Tor(Y,X). \end{aligned} \tag{2.198}$$

2)

$$\begin{aligned} Tor(X+Y,Z) &= \nabla_{X+Y} Z - \nabla_Z (X+Y) - [X+Y,Z] \\ &= (\nabla_X Z - \nabla_Z X - [X,Z]) + (\nabla_Y Z - \nabla_Z Y - [Y,Z]) \\ &= Tor(X,Z) + Tor(Y,Z). \end{aligned} \tag{2.199}$$

3)

$$\begin{aligned} Tor(fX,Y) &= \nabla_{fX} Y - \nabla_Y (fX) - [fX,Y] \\ &= f\nabla_X Y - Y(f)X - f\nabla_Y X - [fX,Y]. \end{aligned} \tag{2.200}$$

$[X,Y] = XY - YX$ tanımından hareketle elde edilen

$$[fX,Y] = -Y(f)X + f[X,Y]$$

değeri yerine yazılırsa,

$$Tor(fX,Y) = f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - Y(f)X + Y(f)X - f[X,Y] = f\,Tor(X,Y)$$

bulunur.

■

Tanım 2.64. M $m-$boyutlu manifoldunun ∇ konneksiyonunun torsiyonu $Tor\nabla = 0$ ise, ∇ konneksiyonuna ***sıfır torsiyonlu*** veya ***simetriktir,*** denir [16].

Tanım 2.65. M ve N, C^∞ Riemann manifoldları arasında $F : M \to N$ C^∞ dönüşüm olsun. h pozitif reel değerli bir dönüşüm olmak üzere, $\forall X_p, Y_p \in T_M(P)$ için,

$$g_N\left(F_*\left(X_P\right), F_*\left(Y_P\right)\right) = h\left(P\right) g_M\left(X_P, Y_P\right)$$

eşitliği mevcut ise, F dönüşümüne ***Konform dönüşüm*** denir.
Eğer h sabit ise, F dönüşümüne ***Homoteti*** ve $h(P)$ değerine de F dönüşümünün ***Homoteti oranı*** denir [16].

Tanım 2.66. M ve N C^∞ manifoldlarının, konneksiyonları sırasıyla ∇ ve ∇' olsun. $F : M \to N$ dönüşümü $\forall X, Y \in \chi\left(M\right)$ için

$$F_*\left(\nabla_X Y\right) = \nabla'_{F_*(X)} F_*\left(Y\right) \tag{2.201}$$

özelliğini sağlıyor ise, F dönüşümüne ***konneksiyon koruyan dönüşüm*** denir.

Bu tanım altında konneksiyon koruyan dönüşümün geodezikleri de koruduğunu inceleyebiliriz [16].

Teorem 2.22. *M ve N C^∞ manifoldları arasındaki konneksiyon koruyan dönüşüm geodezikleri de korur [16].*

İspat. M manifoldu üzerindeki bir $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to M$ geodezik eğrisi $F : M \to N$ dönüşümü altında N manifoldunda bir $\beta = F \circ \alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to N$ eğrisine resmedilirse α eğrisinin birim teğet vektör alanı T iken β eğrisinin birim teğer vektör alanı da $F_*(T)$ olur. Eğer $F : M \to N$ konneksiyon koruyan dönüşüm ise,

$$F_*(\nabla_T T) = \nabla'_{F_* T} F_*(T) \tag{2.202}$$

yazılabilir. Diğer taraftan, α eğrisi M manifoldunda geodezik eğri olduğundan

$$F_*\left(\nabla_T T\right) = F_*\left(0\right) = \nabla'_{F_*(T)} F_*\left(T\right) = 0 \tag{2.203}$$

yani $\beta = F \circ \alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to N$ eğrisi de N manifoldunda geodezik eğri belirtir. ■

Teorem 2.23. *M ve N iki manifold olmak üzere, $F : M \to N$ difeomorfizmi N manifoldunda bir ∇' konneksiyonu verildiğinde $\forall X, Y \in \chi\left(M\right)$ için,*

$$F_*\left(\nabla_X Y\right) = \nabla'_{F_*(X)} F_*\left(Y\right)$$

olacak şekilde M manifoldunda bir tek ∇ konneksiyonu vardır [16].

İspat. $F : M \to N$ dönüşümü difeomorfizm olduğundan $F_* : \chi(M) \to \chi(N)$ birebir ve örten bir dönüşüm olduğundan ${F_*}^{-1}$ vardır. Ayrıca, $\chi(M)$ ve $\chi(N)$ sırasıyla $C^\infty(M,\mathbb{R})$ ve $C^\infty(N,\mathbb{R})$ modül olduğundan $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$F_*(X+Y) = F_*(X) + F_*(Y)$$

ve $\forall f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için,

$$F_*(fX) = \left(f \circ F^{-1}\right) F_*(X)$$

dir. Buna göre $\nabla_X Y = {F_*}^{-1}\left(\nabla'_{F_*(X)} F_*(Y)\right)$ eşitliği ile tanımlanan ∇ operatörünün M manifoldu için bir konneksiyon belirttiğini gösterelim.

1) $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}
\nabla_X(Y+Z) &= {F_*}^{-1}\left(\nabla'_{F_*(X)} F_*(Y+Z)\right) \\
&= {F_*}^{-1}\left(\nabla'_{F_*(X)}(F_*(Y)+F_*(Z))\right) \\
&= {F_*}^{-1}\left(\nabla'_{F_*(X)} F_*(Y) + \nabla'_{F_*(X)} F_*(Z)\right) \\
&= F_*^{-1}\left(\nabla'_{F_*(X)} F_*(Y)\right) + F_*^{-1}\left(\nabla'_{F_*(X)} F_*(Z)\right) \\
&= \nabla_X Y + \nabla_X Z.
\end{aligned} \tag{2.204}$$

2) $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için, $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$ ifadesi benzer düşünceyle gösterilir.

3) $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için, $\nabla_{fX} Y = {F_*}^{-1}\left(\nabla'_{F_*(fX)} F_*(Y)\right)$ dir. Burada, $F_*(fX) = \left(f \circ F^{-1}\right) F_*(X)$ değeri yerine yazılırsa $\left(f \circ F^{-1}\right) \in C^\infty(N,\mathbb{R})$ ve ∇' konneksiyonunun N üzerinde konneksiyon olduğu düşünülürse,

$$\nabla_{fX} Y = {F_*}^{-1}\left(\nabla'_{(f\circ F^{-1})F_*(X)} F_*(Y)\right) = {F_*}^{-1}\left(\left(f \circ F^{-1}\right)\nabla'_{F_*(X)} F_*(Y)\right) \tag{2.205}$$

elde edilir. Diğer taraftan, F_* için bilinen özellikler ${F_*}^{-1} : \chi(N) \to \chi(M)$ için de geçerli olacağından

$$\begin{aligned}
{F_*}^{-1}\left(\left(f \circ F^{-1}\right)\nabla'_{F_*(X)} F_*(Y)\right) &= \left(\left(f \circ F^{-1}\right) \circ F\right) {F_*}^{-1}\left(\nabla'_{F_*(X)} F_*(Y)\right) \\
&= f\,{F_*}^{-1}\left(\nabla'_{F_*(X)} F_*(Y)\right) = f\,\nabla_X Y
\end{aligned} \tag{2.206}$$

ve $\nabla_{fX} Y = f\,\nabla_X Y$ bulunur.

4) $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ için,

$$\begin{aligned}
\nabla_{X} f Y &= {F_*}^{-1}\left(\nabla'_{F_*(X)} F_*(fY)\right) = {F_*}^{-1}\left(\nabla'_{F_*(X)}\left(f \circ F^{-1}\right) F_*(Y)\right) \\
&= {F_*}^{-1}\left(F_*(X)\left[\left(f \circ F^{-1}\right)\right] F_*(Y) + \left(f \circ F^{-1}\right) \nabla'_{F_*(X)} F_*(Y)\right) \\
&= {F_*}^{-1}\left(\left(F_*(X)\left(f \circ F^{-1}\right) F_*(Y)\right) + {F_*}^{-1}\left(\left(f \circ F^{-1}\right) \nabla'_{F_*(X)} F_*(Y)\right)\right) \\
&= \left(\left(F_*(X)\left(f \circ F^{-1}\right) \circ F\right) Y + \left(\left(f \circ F^{-1}\right) \circ F\right) {F_*}^{-1}\left(\nabla'_{F_*(X)} F_*(Y)\right)\right) \\
&= \left(F_*(X)\left(f \circ F^{-1}\right) \circ F\right) Y + f \nabla_{X} Y
\end{aligned} \tag{2.207}$$

şeklindedir. Diğer taraftan $\forall P \in M$ noktası için,

$$\begin{aligned}
\left(F_*(X)\left(f \circ F^{-1}\right) \circ F\right)(P) &= \left(F_*(X)\left(f \circ F^{-1}\right)\right) F(P) \\
&= \left(F_*(X)\Big|_{F(P)}\left(f \circ F^{-1}\right)\right) \\
&= \left(F_*\Big|_{P}(X_P)\left(f \circ F^{-1}\right)\right) \\
&= X_P\left(f \circ F^{-1} \circ F\right) \\
&= X_P(f)
\end{aligned} \tag{2.208}$$

elde edilir. Yani, $F_*(X)\left(f \circ F^{-1}\right) \circ F = X(f)$ dir. O halde, $\nabla_{X} f Y = X(f) Y + f \nabla_{X} Y$ olur. Böylece ∇ operatörü M manifoldu için bir konneksiyondur. ∇ konneksiyonunun tanımı gereğince $F_*(\nabla_{X} Y) = \nabla'_{F_*(X)} F_*(Y)$ yani F konneksiyon koruyan dönüşümdür.

∇ konneksiyonunun tekliğini gösterelim. F konneksiyon koruyan dönüşüm olacak şekilde bir diğer konneksiyon ∇'' olsun. O halde, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$F_*(\nabla_{X} Y) = \nabla'_{F_*(X)} F_*(Y) \tag{2.209}$$

ve

$$F_*\left(\nabla''_{X} Y\right) = \nabla'_{F_*(X)} F_*(Y) \tag{2.210}$$

olur. Böylece, $F_*(\nabla_{X} Y) = F_*\left(\nabla''_{X} Y\right)$ ve F_* dönüşümü birebir olduğundan $\nabla_{X} Y = \nabla''_{X} Y$ dir. Bu ise, $\nabla = \nabla''$ yani konneksiyonun tekliğini gösterir. Bu teoremden, bir manifold üzerindeki α eğrisi bu manifold üzerinde bir geodezik olacak şekilde daima bir tek ∇ konneksiyonu seçilebilir. ■

2.3.1 Konneksiyon 1 Formlar

Cartan konneksiyonların diferansiyel formlar ile birlikte alınması gerektiğini savunmuştur. M $m-$boyutlu manifoldu ∇ konneksiyonuna sahip ve (U, ψ) koordinat

komşuluğu üzerinde $\{e_1,...,e_m\}$ C^∞ vektör alanları bazı ve duali $\{w_1,...,w_m\}$ olsun. Bu durumda w_i fonksiyonları C^∞ 1−formdur.

Diğer taraftan U komşuluğu üzerinde $(1 \leq i,j \leq m)$ için,

$$w_{ij} : U \to \bigcup_{P\in U} T_U^*(P)$$

fonksiyonları m^2 tanedir ve

$$\nabla_{X_P} e_j = \sum_{i=1}^{m} \left\{ w_{ij}\big|_P (X_P) \right\} e_i|_P$$

şeklinde tanımlanırsa, ∇ konneksiyonunun $\mathbb{R}$−lineer özelliklerinden $w_{ij}\big|_P$ fonksiyonları lineerdir. O halde, w_{ij} iyi tanımlıdır. Böylece, M manifoldunun $\{e_1,...,e_m\}$ çatı alanı için aşağıdaki şekilde Frenet formüllerinin genelleştirmek için kullanılan konneksiyon 1−formlarını elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\nabla_X e_1 &= w_{11}(X)\, e_1 + w_{12}(X)\, e_2 + ... + w_{1m}(X)\, e_m \\
\nabla_X e_2 &= w_{21}(X)\, e_1 + w_{22}(X)\, e_2 + ... + w_{2m}(X)\, e_m \\
&\vdots \\
\nabla_X e_m &= w_{m1}(X)\, e_1 + w_{m2}(X)\, e_2 + ... + w_{mm}(X)\, e_m.
\end{aligned} \tag{2.211}$$

$\forall X \in \chi(U)$ için, $w_{ij} : \chi(U) \to C^\infty(U,\mathbb{R})$,

$$\nabla_X e_j = \sum_{i=1}^{m} w_{ij}(X)\ e_i \tag{2.212}$$

veya

$$w_{ij}(X) = w_i\left(\nabla_X e_j\right) \tag{2.213}$$

olacaktır. Ayrıca, $\forall f_1, f_2 \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ ve $\forall X, Y \in \chi(U)$ için,

$$w_{ij}(f_1X + f_2Y) = \nabla_{f_1X+f_2Y} e_i . e_j = (f_1\nabla_X e_i + f_2\nabla_Y e_i)\, e_j = f_1 w_{ij}(X) + f_2 w_{ij}(Y) \tag{2.214}$$

olması nedeniyle w_{ij} fonksiyonu da $C^\infty(U,\mathbb{R})$ modül olan $\chi(U)$ üzerinde $C^\infty(U,\mathbb{R})$ lineerdir. Ayrıca, U üzerinde $X \in \chi(U)$ vektör alanı C^∞ olduğundan $\nabla_X e_j$ dolayısıyla $w_{ij}(X) = w_i\left(\nabla_X e_j\right)$ bir C^∞ fonksiyondur. O halde, w_{ij} fonksiyonları da U üzerinde C^∞ dır [16].

Tanım 2.67. (Konneksiyon 1−formları) M manifoldu üzerindeki konneksiyon ∇ olmak üzere, koordinat komşuluğunu (U,ψ) ile U üzerindeki C^{∞} vektör alanlarının bazını $\{e_1,...,e_m\}$ ile gösterelim. $\chi(U)$ modülünün $\{e_1,...,e_m\}$ bazının dual bazı $\{w_1,...,w_m\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} w_{ij} : \chi(U) &\to C^{\infty}(U,\mathbb{R}) \\ X &\to w_{ij}(X) = w_i\left(\nabla_X e_j\right) \end{aligned} \tag{2.215}$$

şeklinde tanımlı w_{ij} fonksiyonlarına, U üzerinde $\{e_1,...,e_m\}$ baz alanlarına göre ∇ ***konneksiyonunun konneksiyon 1- formları*** denir [16].

2.3.2 Eğrilik Tensörleri

M manifoldunun $\{e_1,...,e_m\}$ baz alan sistemine eşlik eden $\{w_1,...,w_m\}$ diferansiyel 1-formları cinsinden torsiyon tensörü ile eğrilik tensörünü ifade edebiliriz. Bunun için, U komşuluğu üzerinde T_i ile R_{ij} $(1 \le i,j \le m)$ 2-formları tanımlanmalıdır. $\forall X,Y \in \chi(U)$ için,

$$Tor(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} T_i(X,Y)\, e_i,\ T\left(e_i,e_j\right) = T_{ij}{}^{k} e_k, \tag{2.216}$$

$$R(X,Y)\, e_j = \sum_{i=1}^{m} R_{ij}(X,Y)\, e_i R\left(e_i,e_j\right) e_l = R_{ijl}{}^{k} e_k \tag{2.217}$$

ele alınırsa, w_i, w_{ij}, T_i ve R_{ij} formları Cartan yapı denklemleri ile ilgilidir. Bu denklemler Torsiyon tensörü ve eğrilik tensörlerine denktirler. $\forall X, Y \in \chi(U)$ için

$$\begin{aligned}
T_i(X,Y) &= g(T(X,Y), e_i) \\
&= g(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], e_i) \\
&= g\left(\nabla_X\left(\sum_{j=1}^{m} w_j(Y)\, e_j\right) - \nabla_Y\left(\sum_{j=1}^{m} w_j(X)\, e_j\right) - \sum_{j=1}^{m} w_j([X,Y])\, e_j, e_i\right) \\
&= g\left(\sum_{j=1}^{m} \{X\left[w_j(Y)\right] - Y\left[w_j(X)\right] - w_j([X,Y])\} e_j, e_i\right) \\
&\quad + g\left(\{w_j(Y)\nabla_X e_j - w_j(X)\nabla_Y e_j\}, e_i\right) \\
&= X\left[w_j(Y)\right] - Y\left[w_j(X)\right] - w_j([X,Y]) \\
&\quad + g\left(\sum_{j,k=1}^{m} \left\{w_j(Y) w_{kj}(X) - w_j(X) w_{kj}(Y)\right\} e_k, e_j\right) \\
&= X\left[w_j(Y)\right] - Y\left[w_j(X)\right] - w_j([X,Y]) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m} \left\{w_j(Y) w_{ij}(X) - w_j(X) w_{ij}(Y)\right\}
\end{aligned} \tag{2.218}$$

veya

$$T_i(X,Y) - \sum_{j=1}^{m} \left\{w_j(Y) w_{ij}(X) - w_j(X) w_{ij}(Y)\right\} = X\left[w_j(Y)\right] - Y\left[w_j(X)\right] - w_j([X,Y])$$

bulunur.

Son eşitliğin sağ tarafını anlamlandırmak için dış türev tanımını verelim [16].

2.3.3 Cartan Denklemleri

Tanım 2.68. M $m-$boyutlu bir manifold ve M manifoldu üzerindeki bir O bölgesi üzerinde tanımlanan C^∞ fonksiyon f olmak üzere, f 0−formunun

$$df(X) = X[f] = g(\nabla f, X) \tag{2.219}$$

şeklindeki df 1−formuna f ***fonksiyonunun*** O ***bölgesindeki dış türevi*** denir [16].

Eğer O bölgesinde w C^∞ 1−form ise, dw dış türevi

$$dw(X,Y) = X[w(Y)] - Y[w(X)] - w[X,Y]$$

biçiminde tanımlanan bir 2−form olur ve ***Ricci denklemi*** adını alır. Böylece,

$$T_i(X,Y)=\sum_{j=1}^{m}\left(w_{ij}\wedge w_j\right)(X,Y)=dw_i(X,Y)$$

eşitliği yazılabilir. Buradan da,

$$dw_i=-\sum_{j=1}^{m}\left(w_{ij}\wedge w_j\right)+T_i$$

bulunur. Bu denklemler ***I. Cartan yapı denklemleri*** adını alır [16].

Benzer biçimde,

$$\begin{aligned}
R_{ij}(X,Y)&=g\left(R(X,Y)e_j,e_i\right)=g\left(\nabla_X\nabla_Y e_j-\nabla_Y\nabla_X e_j-\nabla_{[X,Y]}e_j,e_i\right)\\
&=g\left(\nabla_X\left(\sum_{k=1}^{m}w_{kj}(Y)e_k\right)-\nabla_Y\left(\sum_{k=1}^{m}w_{kj}(X)e_k\right)-\sum_{k=1}^{m}w_{kj}([X,Y])e_k,e_i\right)\\
&=g\left(\sum_{k=1}^{m}X\left[w_{kj}(Y)\right]-Y\left[w_{kj}(X)\right]-w_{kj}([X,Y])e_k,e_i\right)\\
&\quad+g\left(\sum_{k=1}^{m}\{w_{kj}(Y)\nabla_X e_k-w_{kj}(X)\nabla_Y e_k\},e_i\right)\\
&=X\left[w_{ij}(Y)\right]-Y\left[w_{ij}(X)\right]-w_{ij}([X,Y])\\
&\quad+\sum_{k=1}^{m}\{w_{kj}(Y)w_{ik}(X)-w_{kj}(X)w_{ik}(Y)\}
\end{aligned}\tag{2.220}$$

yazılabilir. Sağ taraftaki birinci terim $dw_{ij}(X,Y)$ olduğundan,

$$R_{ij}(X,Y)=dw_{ij}(X,Y)+\sum_{k=1}^{m}\{w_{kj}(Y)w_{ik}(X)-w_{kj}(X)w_{ik}(Y)\}$$

veya

$$R_{ij}(X,Y)=dw_{ij}(X,Y)+\sum_{k=1}^{m}\left(w_{ik}\wedge w_{kj}\right)(X,Y)$$

elde edilir. Buradan da,

$$dw_{ij}=\sum_{k=1}^{m}w_{ik}\wedge w_{kj}+R_{ij}$$

bulunur. Bu denklemler ***II. Cartan yapı denklemleri*** adını alır [16].

Teorem 2.24. *(Poincare) M $m-$manifold ve $f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ olmak üzere,*

$$d^2 f = d(df) = 0 \tag{2.221}$$

şeklindedir [16].

İspat. $\forall X, Y \in \chi(M)$ C^{∞} vektör alanları için,

$$\begin{aligned} d^2 f(X,Y) &= X[df(Y)] - Y[df(X)] - df[X,Y] \\ &= X[Y(f)] - Y[X(f)] - [X,Y](f) \end{aligned} \tag{2.222}$$

yazılabilir. [,] operatörünün tanımından $d^2 f(X,Y) = 0$ veya $d^2 f = 0$ olur. ■

2.3.4 İki Konneksiyonun Fark Tensörü

M C^{∞} manifoldu üzerinde iki farklı konneksiyon ∇ ve ∇' olsun. M manifoldu üzerindeki vektör alanları uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} B : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X,Y) &\to B(X,Y) = \nabla'_X Y - \nabla_Y X \end{aligned} \tag{2.223}$$

dönüşümü $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ üzerinde $2-$lineerdir. O halde, B $2-$kovaryant tensördür.

B tensörü biri simetrik, diğeri anti-simetrik olmak üzere iki tensör toplamı olarak yazılabilir. Yani,

$$B(X,Y) = S(X,Y) + A(X,Y) \tag{2.224}$$

yazılabilir ise,

$$S(X,Y) = \frac{1}{2}[B(X,Y) + B(Y,X)] \tag{2.225}$$

ve

$$A(X,Y) = \frac{1}{2}[B(X,Y) - B(Y,X)] \tag{2.226}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} 2A(X,Y) &= B(X,Y) - B(Y,X) \\ &= \nabla'_X Y - \nabla_X Y - \nabla'_Y X + \nabla_Y X \\ &= \left(\nabla'_X Y - \nabla'_Y X\right) - (\nabla_X Y - \nabla_Y X) \end{aligned} \tag{2.227}$$

veya

$$2A(X,Y) = Tor_{\nabla'}(X,Y) - Tor_{\nabla}(X,Y) \tag{2.228}$$

eşittir. Yani,

$$A(X,Y) = \frac{1}{2}[Tor_{\nabla'}(X,Y) - Tor_{\nabla}(X,Y)] \tag{2.229}$$

elde edilir [16].

2.4 Simplektik Manifoldlar

2.4.1 Yarı Simetrik Bilineer Dönüşümler

V, $\mathbb{R}$ üzerinde m—boyutlu vektör uzayı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \Omega : V \times V &\mapsto \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto \Omega(u,v) \end{aligned} \tag{2.230}$$

bilineer dönüşüm olsun. $\forall u, v \in V$ için,

$$\Omega(u,v) = -\Omega(v,u) \tag{2.231}$$

ise Ω dönüşümü ***yarı-simetrik*** denir [28].

Teorem 2.25. *(Yarı Simetrik Bilineer Dönüşümlerin Standart Formu) Ω, V üzerinde yarı simetrik bilineer dönüşüm olsun. V vektör uzayının $u_1, ..., u_k, e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n$ bazı*

$$\begin{aligned} &\Omega(u_i, v) = 0, \qquad \forall u_i, v \in V, \\ &\Omega(e_i, e_j) = \Omega(f_i, f_j) = 0, \qquad \forall i, j, \\ &\Omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}, \qquad \forall i, j, \end{aligned}$$

*olacak biçimde vardır. Bu baz tek olmamasına rağmen **kanonik baz** olarak isimlendirilir [28].*

İspat. Gram-Schmidt metodu'nun yarı-simetrik versiyonunu verelim.

$$U := \{u \in V | \Omega(u,v) = 0, \forall u \in V\} \tag{2.232}$$

ile tanımlarsak U uzayının $\{u_1, \ldots, u_k\}$ bazını ve V uzayının U uzayına tamlayan W uzayı alınabilir. O halde

$$V = U \oplus W \tag{2.233}$$

$0 \neq e_1 \in W$ alırsak, bir $f_1 \in W$, $\Omega(e_1, f_1) \neq 0$ olacak şekilde vardır.

$\Omega(e_1, f_1) = 1$ kabul edelim. Böylece,

$$W_1 = span\{e_1, f_1\}$$
$$W_1^{\perp} = \{w \in W | \Omega(w, v) = 0, \forall v \in W_1\}$$

yazılabilir.
Şimdi $W_1 \cap W_1^{\perp} = \{0\}$ olduğunu göstermek için $v = ae_1 + bf_1 \in W_1 \cap W_1^{\perp}$ alalım. Böylece,

$$\Omega(v, e_1) = 0 = b,$$
$$\Omega(v, f_1) = 0 = a,$$
$$v = 0$$

yazılabilir.
Ayrıca, $W = W_1 \oplus W_1^{\perp}$ olduğunu göstermek için, $v \in W$ varsayalım.

$$\Omega(v, e_1) = c,$$
$$\Omega(v, f_1) = d$$

ise, Ω anti simetrik billineer dönüşüm olduğundan

$$v = \underbrace{(-cf_1 + de_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(v + cf_1 - de_1)}_{\in W_1^{\perp}}. \tag{2.234}$$

$0 \neq e_2 \in W_1^{\perp}$ alalım. $f_2 \in W_1^{\perp}$ öyle ki $\Omega(e_2, f_2) \neq 0$ dır.
$\Omega(e_2, f_2) = 1$ varsayalım.
$W_2 = span\{e_2, f_2\}$ olsun. boy$V < \infty$ olduğundan bu durum belli bir noktaya kadar devam eder. Böylece,

$$V = U \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_n \tag{2.235}$$

elde ederiz. Tüm toplamlar Ω ya göre ortogonal ve W_i $\Omega(e_i, f_i) = 1$ olacak şekilde $\{e_i, f_i\}$ bazına sahiptir. Buradan $k = \text{boy}U, k + 2n = m = \text{boy}V$ şeklindedir. ■

2.4.2 Simplektik Vektör Uzayı

Tanım 2.69. V m—boyutlu vektör uzayı ve

$$\begin{aligned} \Omega : V \times V &\to \mathbb{R} \\ (u, v) &\to \Omega(u, v) \end{aligned} \tag{2.236}$$

bilineer dönüşüm olmak üzere,

$$\begin{aligned} \Omega^\flat : V &\to V^* \\ v &\to \Omega^\flat(v)(w) = \Omega(v,w) \end{aligned} \tag{2.237}$$

ile tanımlı dönüşüm verilsin.

Eğer $\Omega^\flat$ birebir-örten yani $U = \{0\}$ ise, Ω yarı simetrik bilineer dönüşümü simplektik ya da non-dejenere dir. V üzerinde Ω dönüşümü ***lineer simplektik yapı*** ve (V,Ω) ***simplektik vektör uzayı*** adını alır [28].

Sonuç 2.1. *Ω lineer simplektik yapısı;*

1) *$\Omega^\flat : V \to V^*$ birebir-örten dönüşüm,*
2) *$boyU = k$ olduğundan $boyV = 2n$ çift sayı,*
3) *(V,Ω) simplektik vektör uzayı*

$$\begin{aligned} \Omega(e_i, e_j) &= \Omega(f_i, f_j) = 0, \\ \Omega(e_i, f_j) &= \delta_{ij}, 1 \le i,j \le n \end{aligned}$$

*özelliklerini sağlayan $\{e_1,\dots,e_n,f_1,\dots,f_n\}$ bazına sahiptir. Bu baza (V,Ω) **simplektik vektör uzayının simplektik bazı** denir.*
Ayrıca,

$$\begin{aligned} \Omega(u,v) &= u^T \Omega v \\ &= [-u-] \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ v \\ | \end{bmatrix} \end{aligned}$$

gösterimi vardır.

4) *Ω anti-simetrik, bilineer, non-dejeneredir [28].*

Tanım 2.70. (V,Ω) simplektik vektör uzayında w, v vektörleri için $\Omega(v,w) = 0$ iken Ω ***ortogonal, ters ortogonal*** ya da kısaca ***ortogonal*** ve $v \perp w$ ile gösterilir [29].

Tanım 2.71. (V_1,Ω_1) ve (V_2,Ω_2) simplektik vektör uzayları olsun. $L : V_1 \to V_2$ lineer dönüşümü, $\forall u, v \in V_1$ için

$$\Omega_1(u,v) = \Omega_2(L(u), L(v)) \tag{2.238}$$

koşulunu gerçeklerse ***simplektik dönüşüm*** denir [29].

$L(U) = 0$ iken Ω_1 non-dejenere olduğundan ve $U = 0$ olması gerektiğinden birebirdir ve $boyV_1 = boyV_2 < \infty$ olduğundan izomorfizm olmalıdır. Simplektik izomorfizmler ***simplektomorfizm*** adını alır. Ayrıca,

$$(V_1, \Omega_1) = (V_2, \Omega_2) = (V, \Omega) \tag{2.239}$$

iken simplektik L dönüşümü otomorfizm belirtir [29].

Tanım 2.72. (Simplektik Grup) Simplektik otomorfizmlerin kolleksiyonu bileşke işlemi altında grup oluşturur. Bu (V, Ω) simplektik vektör uzayının ***simplektik grubu*** adını alır ve $Sp(V)$ ile gösterilir [29]:

$$Sp(V) = \{L | L : V \xrightarrow{\text{simplektik otomorfizm}} V\}. \tag{2.240}$$

2.4.3 Simplektik Alt Vektör Uzayları

(V, Ω) simplektik vektör uzayının $W \subseteq V$ lineer alt uzayının simplektik ortogonal tümleyeni

$$W^{\perp} = \{v \in V | \Omega(v, w) = 0, \forall w \in W\} \tag{2.241}$$

şeklinde tanımlanırsa, boy$W^{\perp}$ + boy$W$ = boy$V$ ve $(W^{\perp})^{\perp} = W$ yazılabilir [29].

Tanım 2.73. Eğer $W \subseteq W^{\perp}$ ise, W alt uzayı ***izotropik***, $W^{\perp} \subseteq W$ ise, W ***coizotropik***, $W^{\perp} \cap W = 0$ ise, ***simplektik alt uzay***, $W^{\perp} = W$ ise, ***Lagrangian alt uzay*** denir [29].

2.4.4 Simplektik Manifold

Tanım 2.74. M $m-$boyutlu dif.bilir manifold olmak üzere, M manifoldu üzerinde

$$\Omega : \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan $2-$formu

1) $d\Omega = 0$ (kapalı),

2) $\Omega_P = T_M(P) \times T_M(P) \to \mathbb{R}$ eğer $\forall Y \in T_M(P)$ için $\Omega_P(X, Y) = 0$ iken $X = 0$ (non-dejenere)

özelliklerini sağlıyorsa (M, Ω) ikilisine ***simplektik manifold*** denir.

Ayrıca, Ω dönüşümünün $\forall P \in M$ noktasında $T_M(P)$ uzayına kısıtlanması, $T_M(P)$ uzayının simplektik vektör uzayı olmasını sağlar ve boy$T_M(P) =$ boy$M = m = 2n$ olmalıdır [29].

Örnek 2.25. $M = \mathbb{R}^{2n}$, $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$ lineer koordinatlarına sahip olmak üzere,

$$\Omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i \tag{2.242}$$

simplektik 2−formdur. Böylece,

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_p\right\} \tag{2.243}$$

$T_M(P)$ uzayının simplektik bazıdır [29].

Örnek 2.26. $M = S^2$, $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim vektörler kümesi olmak üzere, S^2 ye P noktasında teğet vektörler P noktasına dik vektörler ile bağlantılı olacak şekildeki simplektik form, $\forall U, V \in T_{S^2}(P)$ için,

$$\Omega_P(U, V) = g(P, U \times V) \tag{2.244}$$

şeklindedir. boy $S^2 = 2$ olduğundan $d\Omega = 0$, Ω kapalı ve $\forall U, V \in T_{S^2}(P)$ için $\Omega_P(U, V) = 0$ iken

$$g(P, U \times V) = 0 \tag{2.245}$$

olup,

$$U \times V = 0, \tag{2.246}$$

elde edilir. Buradan, $U = 0$ yani, Ω non-dejeneredir [28].

Tanım 2.75. (M_1, Ω_1) ve (M_2, Ω_2) simplektik manifoldlar arasındaki $f : M_1 \to M_2$ diffeomorfizması,

$$f^*\Omega_2 = \Omega_1 \tag{2.247}$$

ise, ***simplektomorfizm*** adını alır. Burada, $f^*\Omega_2$, f'in M_1'e Ω_2 altında ek dönüşümüdür [29].

2.5 Kompleks Manifoldlar

2.5.1 $\mathbb{C}^n$ Uzayında Temel Kavramlar

$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ izomorfizmasının $x+iy \iff (x,y)$ tanımına benzer şekilde $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ izomorfizmasının

$$(x_1+iy_1,\ldots,x_n+iy_n) \Longleftrightarrow (x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n) \tag{2.248}$$

tanımı verilebilir.

Tanım 2.76. $f:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dif.bilir fonksiyonu her değişkene göre holomorfik ise yani $f=u+iv$, $\forall j=1,2,\ldots,n$ için

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial y_j}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y_j} = -\frac{\partial v}{\partial x_j}$$

Cauchy-Riemann koşulları gerçekleniyorsa f fonksiyonuna ***holomorfik fonksiyon*** denir. Eğer diferansiyel operatörler

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

şeklinde tanımlanırsa, Cauchy Riemann koşulları

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0; \qquad j=1,2,...,n \tag{2.249}$$

eşitliğine denktir [30].

Tanım 2.77. M $2n-$reel boyutlu dif.bilir manifold olsun. M manifoldunun holomorfik atlası (ϕ_α, U_α) haritalarının kolleksiyonudur, burada

$$\phi_\alpha : V_\alpha \subset \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n \longrightarrow U_\alpha \subset M \tag{2.250}$$

dönüşümünün

1) $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$,

2) $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta$ geçiş fonksiyonları holomorfik,

özellikleri vardır. Bu şekilde tanımlanan M dif.bilir manifolduna ***kompleks manifold*** denir [30].

Tanım 2.78. (U_α, ϕ_α) ve $(\bar{U}_\alpha, \bar{\phi}_\alpha)$ holomorfik atlaslarına, $\forall \alpha, \beta$ için $\phi_\alpha \circ \bar{\phi}_\beta^{-1}$ holomorfik ise, ***denk atlaslar*** denir [30].

Tanım 2.79. $\phi : V \subset \mathbb{C}^n \to U \subset M$ olmak üzere tüm (U, ϕ) holomorfik haritaları için,

$$f \circ \phi : \phi^{-1}(U) \to \mathbb{C} \tag{2.251}$$

holomorfik ise $f : M \mapsto \mathbb{C}$ fonksiyonuna ***holomorfik fonksiyon*** denir [30].

2.5.2 Vektör Uzayı Üzerinde Almost Kompleks Yapı

Tanım 2.80. V vektör uzayı üzerinde $J^2 = -1$ koşulunu sağlayan $J : V \to V$ yapısına ***almost kompleks yapı*** denir [30].

Lemma 2.6. *Bir V reel vektör uzayı üzerindeki J almost kompleks yapısı kompleks vektör uzayı yapısını gerçekler.*

Vektör uzayları için almost kompleks ve kompleks yapılar denk kavramlardır.

Tanım 2.81. V reel vektör uzayının kompleksleştirilmesi $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V_{\mathbb{C}}$ ile gösterilir. Ek olarak, J endomorfizmasının $\mathbb{C}$ lineer genişlemesi $J : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ endomorfizmidir [30].

Lemma 2.7. *V, J almost kompleks yapıya sahip reel vektör uzayı ise,*

$$V_{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1} \tag{2.252}$$

yazılabilir. Ayrıca, $V_{\mathbb{C}}$ üzerindeki kompleks eşlenik $V^{1,0} \cong V^{0,1}$ şeklinde $\mathbb{R}$ lineer izomorfizmasını gerçekler [30].

İspat. $V^{1,0} \cap V^{0,1} = 0$ olduğundan

$$V^{1,0} \oplus V^{0,1} \to V_{\mathbb{C}} \tag{2.253}$$

kanonik dönüşümü birebirdir. Ters dönüşümden,

$$Z \to \frac{1}{2}(Z - iJ(Z)) \oplus \frac{1}{2}(Z + iJ(Z)) \tag{2.254}$$

eşlenmesi ile $V_{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$ bulunur. $X, Y \in V$ için, $Z = X + iY \in V_{\mathbb{C}}$ elemanını alırsak,

$$(Z - \bar{i}JZ) = (X - iY + iJ(X) + J(Y)) = (\bar{Z} + iJ(\bar{Z})) \tag{2.255}$$

bulunur. Böylece $V^{1,0} \cong V^{0,1}$ izomorfizması elde edilir. ■

Lemma 2.8. *V $2n$—boyutlu reel vektör uzayı üzerinde J almost kompleks yapı tanımlanmış olsun. Bu durumda V uzayının $\{X_1, \ldots, X_n, JX_1, \ldots, JX_n\}$ gibi bir bazı vardır. Ayrıca, $k = 1, \ldots, n$ için*

$$Z_k = \frac{1}{2}(X_k - iJX_k),$$
$$\bar{Z}_k = \frac{1}{2}(X_k + iJX_k)$$

tanımından $\{Z_1, \ldots, Z_n, \bar{Z}_1, \ldots, \bar{Z}_n\}$ $V_{\mathbb{C}}$ uzayının bazını oluşturur. Burada, $k = 1, \ldots, n$ için $JZ_k = iZ_k$ ve $J\bar{Z}_k = -i\bar{Z}_k$ eşitliklerinden

$$\begin{aligned} JZ_k = J\left(\frac{1}{2}X_k - \frac{i}{2}JX_k\right) &= \frac{1}{2}\left(-JiJX_k + JX_k\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-JiJX_k - i^2JX_k\right) \\ &= \frac{i}{2}\left(-\underbrace{J^2}_{-1}X_k - iJX_k\right) \\ &= \frac{i}{2}(X_k - iJX_k) = iZ_k \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
J\bar{Z}_k &= \frac{J}{2}(X_k + iJX_k) \\
&= \frac{1}{2}(JX_k + iJ^2X_k) \\
&= \frac{1}{2}(JX_k - iX_k) \\
&= \frac{1}{2}\left(-i^2JX_k - iX_k\right) \\
&= -\frac{i}{2}(iJX_k + X_k) \\
&= i\bar{Z}_k
\end{aligned}
$$

elde edilir [30].

Böylece şu tanım verilebilir.

Tanım 2.82. V reel vektör uzayı üzerindeki J almost kompleks yapısının $\mathbb{C}$ lineer genişlemesi, $J : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ olmak üzere, $\mp i$ özdeğerlerine karşılık gelen özuzayları sırasıyla $V^{1,0}$ ve $V^{0,1}$ ile gösterirsek,

$$
\begin{aligned}
V^{1,0} &= \{Z \in V_{\mathbb{C}} | J(Z) = iZ\}, \\
V^{0,1} &= \{\bar{Z} \in V_{\mathbb{C}} | J(\bar{Z}) = -i\bar{Z}\}
\end{aligned}
$$

ile tanımlanır.

Ayrıca, $Z \in V^{\mathbb{C}}$ için, $Z = \frac{1}{2}(Z - iJZ) + \frac{1}{2}(Z + iJZ)$ yazılabildiğinden

$$
\begin{aligned}
V^{1,0} &= \{X - iJX : X \in V\}, \\
V^{0,1} &= \{X + iJX : X \in V\}
\end{aligned}
$$

olduğu kolaylıkla görülebilir [30].

2.5.3 Manifold Üzerinde Almost Kompleks Yapı

Tanım 2.83. M reel dif.bilir manifoldunun $\forall P \in M$ noktasında

$$
J_P : T_M(P) \to T_M(P) \tag{2.256}
$$

şeklinde tanımlı $J_P^2 = -I$ koşulunu gerçekleyen $T_M(P)$ tanjant uzay endomorfizmasına, M ***manifoldu üzerinde almost kompleks yapı***, (M, J) ikilisine ***almost kompleks manifold*** denir [31].

Not 2.1. M kompleks manifoldunun, $P \in M$ noktasının bir U koordinat komşuluğunda kompleks yerel koordinat sistemi $(Z_1, \ldots, Z_n)$ olmak üzere, $j = 1, \ldots, n$ için,

$$J\left(\frac{\partial}{\partial X_j}\right) = \frac{\partial}{\partial Y_j}, \qquad J\left(\frac{\partial}{\partial Y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial X_j} \tag{2.257}$$

tanımıyla birlikte her kompleks manifold doğal bir J almost kompleks yapısı içerir [31].

Tanım 2.84. $T_M(P)^{\mathbb{C}}$, M manifoldunun P noktasındaki kompleks tanjant uzay ve J almost kompleks yapıya sahip M manifoldu için,

$$T_M(P)^{\mathbb{C}} = T_M(P)^{1,0} + T_M(P)^{0,1} \tag{2.258}$$

yazılabilir. $T_M(P)^{1,0}$ ve $T_M(P)^{0,1}$ sırasıyla J yapısının i ve $-i$ özdeğerlerine karşılık gelen özuzaylarıdır [31].

Tanım 2.85. $T_M(P)^{1,0}$ $T_M(P)^{0,1}$ uzaylarına ait kompleks tanjant vektör alanları $Z = X - iJX (Z = X + iJX)$ şeklinde $(1,0)-$tipi ($(0,1)-$tipi) ile gösterilir.

Teorem 2.26. *M $2n-$boyutlu J almost kompleks yapıya sahip manifold ve $(Z^1, \ldots, Z^n)$ kompleks yerel koordinat sistemi olmak üzere, $\{\frac{\partial}{\partial Z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial Z_n}\}$ ve $\{\frac{\partial}{\partial \bar{Z}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_n}\}$ sırasıyla $T_M(P)^{1,0}$ ve $T_M(P)^{0,1}$ uzaylarının bazlarıdır. Ayrıca, $\{\frac{\partial}{\partial Z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial Z_n}, \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_n}\}$ $T_M(P)^{\mathbb{C}}$ uzayının bazıdır [31].*

İspat.

$$\begin{aligned}
J\left(\frac{\partial}{\partial Z_j}\right) &= J\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial X_j} - i\frac{\partial}{\partial Y_j}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(J\frac{\partial}{\partial X_j} - Ji\frac{\partial}{\partial Y_j}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial Y_j} + i\frac{\partial}{\partial X_j}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-i^2\frac{\partial}{\partial Y_j} + i\frac{\partial}{\partial X_j}\right) \\
&= \frac{i}{2}\left(\frac{\partial}{\partial X_j} - i\frac{\partial}{\partial Y_j}\right) \\
&= i\frac{\partial}{\partial Z_j}.
\end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$J\left(\frac{\partial}{\partial \bar{Z}_j}\right) = -i\frac{\partial}{\partial \bar{Z}_j} \tag{2.259}$$

bulunur. ■

Teorem 2.27. *$T_M(P)$ uzayının $T_M^*(P)$ dual uzayının kompleksleştirilmesi $T_M^*(P)^{\mathbb{C}}$ olsun. O halde, $j = 1, \ldots, n$ için*

$$\begin{aligned} Z_j &= X_j + iY_j, \\ dZ_j &= dX_j + i dY_j, \\ d\bar{Z}_j &= dX_j - i dY_j \end{aligned}$$

koyarsak

$$J(dX_j) = -dY_j \qquad ve \qquad J(dY_j) = dX_j \tag{2.260}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\{dZ_1, \ldots, dZ_n, d\bar{Z}_1, \ldots, d\bar{Z}_n\} \tag{2.261}$$

sistemi $T_M^*(P)^{\mathbb{C}}$ uzayının bazını oluşturur.

İspat.

$$\begin{aligned} J(dZ_j) &= J(X_j) + iJd(Y_j) \\ &= -dY_j + idX_j \\ &= i(dX_j + idY_j) \\ &= idZ_j \\ J(d\bar{Z}_j) &= J(dX_j) - iJ(dY_j) \\ &= -dY_j - idX_j \\ &= -i(dX_j - idY_j) \\ &= -id\bar{Z}_j. \end{aligned}$$

Böylece, $dZ_1, \ldots, dZ_n$ $T^*M^{1,0}$ ve $d\bar{Z}_1, \ldots, d\bar{Z}_n$ ise $T^*M^{0,1}$ uzayının bazını verir. Ek olarak,

$$\begin{aligned} dZ_j\left(\frac{\partial}{\partial Z_k}\right) = d\bar{Z}_j\left(\frac{\partial}{\partial \bar{Z}_k}\right) = \delta_k^j, j, k = 1, \ldots, n \\ dZ_j\left(\frac{\partial}{\partial \bar{Z}_k}\right) = d\bar{Z}_j\left(\frac{\partial}{\partial Z_k}\right) = 0 \end{aligned}$$

özellikleri sağlanır. ■

Tanım 2.86. (M,J) almost kompleks manifold olsun. Eğer

$$\left[TM^{1,0}, TM^{1,0}\right] \subset TM^{1,0}$$

ise, J ***integrallenebilirdir*** denir [32].

Tanım 2.87. (M,J) almost kompleks manifold ve $\forall X,Y \in \chi(M)$ vektör alanları için, ***Nijenhuis tensör***

$$N(X,Y) \equiv [X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - [JX,JY] \tag{2.262}$$

ile tanımlanır [33].

Teorem 2.28. *M manifoldu üzerindeki J almost kompleks yapının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul $\forall X,Y \in \chi(M)$ için $N(X,Y)=0$ olmasıdır [33].*

İspat. $N=0$ olsun. Nijenhuis tensörün $T_M(P)^{\mathbb{C}}$ uzayına genişletilebileceği açıktır. $Z,W \in TM^{1,0}$ holomorfik vektör alanlarını düşünürsek,

$$\begin{aligned}
N(Z,W) &= [Z,W] + J[\underbrace{JZ}_{iZ},W] + J[Z,\underbrace{JW}_{iW}] - [JZ,JW] \\
&= [Z,W] + J[iZ,W] + J[Z,iW] - [iZ,iW] \\
&= [Z,W] - i^2[Z,W] + 2iJ[Z,W] \\
&= 2([Z,W] + iJ[Z,W]) \\
-[Z,W] &= iJ[Z,W] \\
i^2[Z,W] &= iJ[Z,W]
\end{aligned}$$

yazılabilir.

$$J[Z,W] = i[Z,W] \qquad \text{ve} \qquad [Z,W] \tag{2.263}$$

holomorfiktir ve böylece J integrallenebilirdir.
$\Longrightarrow$: Tersine J integrallenebilir ise, Z,W holomorfik vektör alanları için $[Z,W]$ holomorfik, yani $J[Z,W] = i[Z,W]$ olsun. Herhangi X,Y vektör alanları için,

$$Z = \frac{1}{2}(X - iJX) \qquad W = \frac{1}{2}(Y - iJY),$$

tanımından

$$\bar{Z} = \frac{1}{2}(X + iJX) \qquad \bar{W} = \frac{1}{2}(Y + iJY)$$

ve $Z+\bar{Z}=X, W+\bar{W}=Y$, $N(Z,\bar{W})=N(\bar{Z},W)=0$ ve Nijenhuis tensörünün kalan bileşeni

$$N(X,Y)=N(Z,W)+N(\bar{Z},\bar{W}) \tag{2.264}$$

ve

$$N(Z,W)=2([Z,W]+iJ[Z,W]) \tag{2.265}$$

fakat J integrallenebilir olduğundan $N(X,Y)=0$ şeklindedir. ■

2.6 Hermityen Manifoldlar

Tanım 2.88. (M,J) almost kompleks manifold, g Riemann metrik olsun. $\forall X,Y\in\chi(M)$ için,

$$g(JX,JY)=g(X,Y) \tag{2.266}$$

sağlanırsa, g ***Hermityen metrik*** ve (M,J,g) ***almost Hermityen manifold*** adını alır [33].

Tanım 2.89. (M,J,g) almost Hermityen manifoldunun ϕ temel 2−formu $\forall X,Y\in\chi(M)$ için,

$$\phi(X,Y)=g(X,JY) \tag{2.267}$$

ile tanımlıdır [33].

Sonuç 2.2. *(M,J,g) almost Hermityen manifoldunun ϕ temel 2−formu J yapısı ile uyumludur [33].*

İspat.

$$\phi(JX,JY)=g(JX,J^2Y)=g(J^2X,J^3Y)=g(-X,-JY)=\phi(X,Y). \tag{2.268}$$

Ayrıca,

$$\phi(JX,X)=g(JX,JX)=g(X,X)>0 \tag{2.269}$$

şeklindedir. ■

Lemma 2.9. *Holomorfik ve anti-holomorfik vektör alanları g Hermityen metriğine göre ortogonaldir [33].*

İspat. Z,W holomorfik ve $\bar{Z},\bar{W}$ anti-holomorfik vektör alanları için

$$JZ=iZ, J\bar{Z}=-i\bar{Z},$$
$$JW=iW, J\bar{W}=-i\bar{W}$$

yazılabildiğinden,

$$g(Z,W) = g(JZ,JW) = g(iZ,iW) = -g(Z,W)$$
$$g(Z,W) = 0,$$
$$g(\bar{Z},\bar{W}) = 0$$

bulunur. Böylece sıfırdan farklı elemanlar $g(Z,\bar{W})$ biçimindedir. ■

Teorem 2.29. (M,J) *almost kompleks manifoldu daima Hermityen metrik gerçekler [33].*

İspat. Eğer g, M üzerinde herhangi bir Riemann metrik ise,

$$h(X,Y) \equiv \frac{1}{2}(g(X,Y) + g(JX,JY)) \tag{2.270}$$

tanımından,

$$\begin{aligned} h(JX,JY) &= \frac{1}{2}(g(JX,JY) + g(J^2X,J^2Y)) \\ &= \frac{1}{2}(g(JX,JY) + g(X,Y)) \\ &= h(X,Y) \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca, g pozitif tanımlı olduğundan h pozitif tanımlı hermityen metriktir. ■

Teorem 2.30. *M manifoldunun J almost kompleks yapısı* $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ *için,*

$$\begin{aligned} &1) \quad (\nabla_X J)Y = \nabla_X JY - J\nabla_X Y, \\ &2) \quad (\nabla_X J)JY = -J(\nabla_X J)Y, \\ &3) \quad g((\nabla_X J)Y,Z) = -g((\nabla_X J)Z,Y) \end{aligned}$$

özelliklerine sahiptir [33].

İspat. O halde, $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} 1) \quad &\nabla_X(JY) = J\nabla_X Y + (\nabla_X J)Y, \\ &(\nabla_X J)Y = \nabla_X JY - J\nabla_X Y, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2) \qquad (\nabla_X J)JY &= \nabla_X JJY - J\nabla_X JY \\
&= \nabla_X J^2 Y - J\nabla_X JY \\
&= -\nabla_X Y - J(\nabla_X JY) \\
&= J(J\nabla_X Y - \nabla_X JY) \\
&= -J(\nabla_X J)Y,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3) \qquad g((\nabla_X J)Y, Z) &= g(\nabla_X JY, Z) - g(J\nabla_X Y, Z) \\
&= g(\nabla_X JY, Z) + g(\nabla_X Y, JZ) \\
&= g(\nabla_X JY, Z) - g(JY, \nabla_X Z) + g(\nabla_X Y, JZ) \\
&= g(Y, J(\nabla_X Z)) - g(Y, \nabla_X JZ) \\
&= -g((\nabla_X J)Z, Y)
\end{aligned}
$$

bulunur. ■

2.7 Kaehler Manifoldlar

Tanım 2.90. M kompleks manifoldu g Hermityen metriğe sahip ve ϕ temel 2—form olsun. Eğer $d\phi = 0$ yani ϕ kapalı ise, M ***Kaehler manifold*** ve ϕ ***Kaehler form*** adını alır [34].

Tanım 2.91. (M, J, g) almost Hermityen manifoldu ϕ kapalı temel 2—formuna sahip ise, ***almost Kaehler manifold*** adını alır [34].

Not 2.2. Kaehler form kapalı ve non-dejenere olduğundan tüm Kaehler manifoldlar simplektiktir, fakat tersinin doğru olması gerekmez.

Teorem 2.31. *(M, ϕ, J) uyumlu, integrallenebilir kompleks yapısına sahip simplektik manifold ise, Kaehlerdir [34].*

İspat. Bunu ispatlamak için, ϕ temel 2—formu simplektik form olan Hermityen metriği tanımlamamız gerekir.

$$
g(X, Y) = -\phi(JX, Y) \tag{2.271}
$$

ile tanımlarsak, ϕ ile J uyumlu olduğundan bu metrik simetriktir;

$$
\begin{aligned}
g(Y, X) &= -\phi(JY, X) = -\phi(J^2 Y, JX) = \phi(Y, JX) = -\phi(JX, Y) \\
&= g(X, Y).
\end{aligned}
$$

Metrik aynı zamanda pozitif tanımlıdır:

$$g(X,X) = -\phi(JX,X) = \phi(X,JX) > 0. \tag{2.272}$$

Son olarak,

$$g(JX,JY) = -\phi(J^2X,JY) = -\phi(J^3X,J^2Y) = -\phi(JX,Y) = g(X,Y) \tag{2.273}$$

olduğundan Hermityendir. Böylece,

$$g(JX,Y) = -\phi(J^2X,Y) = \phi(X,Y) \tag{2.274}$$

eşitliğinden ϕ g metriğinin temel formudur. Simplektik form kapalı olduğundan, temel form kapalı ve M Kaehlerdir. ■

2.7.1 Kuaterniyon Kaehler Manifold

$\mathbb{H}^n$ reel kuaterniyon halkası ve $\mathbb{R}^{4n} = \{(x_1,\ldots,x_{4n}) | x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 4n\}$ uzayı arasında birebir eşleme kuralım.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^{4n} \mapsto \mathbb{H}^n \\
(x_1,\ldots,x_{4n}) &\mapsto (x_1,\ldots,x_n) + (x_{n+1},\ldots,x_{2n})\overrightarrow{e}_1 + (x_{2n+1},\ldots,x_{3n})\overrightarrow{e}_2 + (x_{3n+1},\ldots,x_{4n})\overrightarrow{e}_3 \\
&= (x_1 + x_{n+1}\overrightarrow{e}_1 + x_{2n+1}\overrightarrow{e}_2 + x_{3n+1}\overrightarrow{e}_3, \ldots, x_n + x_{2n}\overrightarrow{e}_1 + x_{3n}\overrightarrow{e}_2 + x_{4n}\overrightarrow{e}_3) \\
&= (q_1,\ldots,q_\alpha,\ldots,q_n).
\end{aligned}$$

Burada $\alpha = (1,\ldots,n)$ olmak üzere, $q_\alpha = X_\alpha + X_{n+\alpha}\overrightarrow{e}_1 + X_{2n+\alpha}\overrightarrow{e}_2 + X_{3n+\alpha}\overrightarrow{e}_3$ ile ilişkilendirilebilir.
Bu eşleşme ile birlikte,

$$\begin{aligned}
J_0 &: \mathbb{R}^{4n} \to \mathbb{R}^{4n}, \qquad x \to J_0(x) = \overrightarrow{e}_0 x, \\
J_1 &: \mathbb{R}^{4n} \to \mathbb{R}^{4n}, \qquad x \to J_1(x) = \overrightarrow{e}_1 x, \\
J_2 &: \mathbb{R}^{4n} \to \mathbb{R}^{4n}, \qquad x \to J_2(x) = \overrightarrow{e}_2 x, \\
J_3 &: \mathbb{R}^{4n} \to \mathbb{R}^{4n}, \qquad x \to J_3(x) = \overrightarrow{e}_3 x
\end{aligned}$$

ile tanımlanan ve

$$J_1^2 = J_2^2 = J_3^2 = -I$$
$$J_1 J_2 = -J_2 J_1 = J_3,$$
$$J_2 J_3 = -J_3 J_2 = J_1,$$
$$J_3 J_1 = -J_1 J_3 = J_2$$

bağıntılarını sağlayan kuaterniyonik yapıyı oluşturabiliriz.
$(\mathbb{R}^{4n}, +)$ nın Abel grup yapısına ek modül yapısını verelim.

Tanım 2.92. $q \in \mathbb{H}$ ve $x \in \mathbb{R}^{4n}$ için

$$\cdot : \mathbb{H} \times \mathbb{R}^{4n} \to \mathbb{R}^{4n}, \qquad (q, x) \to q \cdot x = q_0 x + q_1 \overrightarrow{e}_1 x + q_2 \overrightarrow{e}_2 x + q_3 \overrightarrow{e}_3 x$$
$$= q_0 x + q_1 J_1(x) + q_2 J_2(x) + q_3 J_3(x)$$

işlemi ile birlikte $\mathbb{R}^{4n}$, $\mathbb{H}$ üzerinde modül olur [35].

Tanım 2.93. M $n-$boyutlu manifoldu üzerinde tanımlanan $\overrightarrow{J} = \{J_1, J_2, J_3\}$ vektör bundle'ına manifoldun U komşuluğundaki ***kanonik yerel bazı*** denir [35].

Tanım 2.94. M manifoldu üzerinde tanımlanan $\overrightarrow{J}$ bundle'ına almost kuaterniyon yapı, $(M, \overrightarrow{J})$ ikilisine ***almost kuaterniyon manifold*** denir. $(M, \overrightarrow{J})$ almost kuaterniyon manifoldu $m = 4n$ $(n \geq 1)$ boyutludur [35].

Lemma 2.10. *M, $m = 4n$ $(n \geq 1)$ boyutlu reel diferansiyellenebilir manifold olmak üzere, $(M, \overrightarrow{J})$ almost kuaterniyon manifold olsun. M manifoldunun bir U komşuluğunda $\overrightarrow{J}$ yapısının kanonik yerel bazı $\{J_1, J_2, J_3\}$ ise, $P \in U$ için $T_M(P)$ uzayının kuaterniyonik bazı $\{x_1, \ldots, x_m\}$ olmak üzere, q_i'lere $T_M(P)$ reel vektör uzayında karşılık gelen vektörler x_i olsun. Bu durumda,*

$$\{x_1, \ldots, x_n, J_1(x_1), \ldots, J_1(x_n), J_2(x_1), \ldots, J_2(x_n), J_3(x_1), \ldots, J_3(x_n)\} \tag{2.275}$$

$T_M(P)$ uzayının reel bazıdır [35].

İspat. $T_M(P)$ uzayını $n-$boyutlu kuaterniyonik vektör uzayı yapısına dönüştürebiliriz. $T_M(P)$ uzayının $\{x_1, \ldots, x_m\}$ kuaterniyonik bazı olduğundan $\forall Y \in T_M(P)$ elemanı

$\{x_1,\dots,x_m\}$ bazı cinsinden tek türlü yazılabilir.

$$\begin{aligned} Y &= \sum_{\alpha=1}^{n} q_\alpha x_\alpha, \qquad q_\alpha = a_\alpha + b_\alpha i + c_\alpha j + d_\alpha k, \qquad a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha \in \mathbb{R} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha + b_\alpha i + c_\alpha j + d_\alpha k) x_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha x_\alpha + b_\alpha J_1(x_\alpha) + c_\alpha J_2(x_\alpha) + d_\alpha J_3(x_\alpha)). \end{aligned}$$

Bu yazılış $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha \in \mathbb{R}$ olacak şekilde tek türlü olduğundan

$$\{x_1,\dots,x_n, J_1(x_1),\dots,J_1(x_n), J_2(x_1),\dots,J_2(x_n), J_3(x_1),\dots,J_3(x_n)\} \tag{2.276}$$

kümesi reel vektör uzayı olarak $T_M(P)$ uzayını gerer. Ayrıca, $m = 4n$ olduğundan $T_M(P)$ uzayının reel bazıdır [35]. ■

Lemma 2.11. *$(M, \overrightarrow{J})$ almost kuaterniyon manifoldunda g Riemann metrik tensörü ve M manifoldunun cross-section'ı ϕ olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,*

$$g(\phi X, Y) + g(X, \phi Y) = 0 \tag{2.277}$$

olacak şekilde vardır [35].

Tanım 2.95. $(M, \overrightarrow{J})$ almost kuaterniyon manifoldu g Riemann metriğine sahip ise, $(M, \overrightarrow{J}, g)$ ***almost Kuaterniyon metrik manifold*** adını alır [35].

Tanım 2.96. Eğer $\overrightarrow{J}$ yapısının her ϕ cross-section'ı (lokal ve global) için $\nabla_X \phi$ de $\overrightarrow{J}$ yapısının cross-section'ı ise, $(M, \overrightarrow{J}, g)$ ***kuaterniyon Kaehler manifold***, $(\overrightarrow{J}, g)$ ***kuaterniyon Kaehler yapı*** adını alır [35].

Lemma 2.12. *$(M, \overrightarrow{J})$ almost kuaterniyon manifold, $\{J_1, J_2, J_3\}$ ve $\{J_1', J_2', J_3'\}$ bazları da M manifoldunun U ile U' komşuluklarının kesişiminde $\overrightarrow{J}$ yapısının kanonik yerel bazları olsun. $U \cap U'$ kesişiminde tanımlı S_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ fonksiyonları için*

$$\begin{aligned} J_1' &= S_{11} J_1 + S_{12} J_2 + S_{13} J_3, \\ J_2' &= S_{21} J_1 + S_{22} J_2 + S_{23} J_3, \\ J_3' &= S_{31} J_1 + S_{32} J_2 + S_{33} J_3 \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $S_{ij} \in SO(3)$ ve $S_{u,u'} = [S_{ij}]$ şeklindedir [35].

İspat. $\{J_1, J_2, J_3\}$ ve $\{J_1', J_2', J_3'\}$ $\overrightarrow{J}$ bundle'nın kanonik yerel bazları olduğundan biri

diğeri cinsinden yazılabilir. Böylece,

$$\begin{aligned} J_1' &= S_{11}J_1 + S_{12}J_2 + S_{13}J_3, \\ J_2' &= S_{21}J_1 + S_{22}J_2 + S_{23}J_3, \\ J_3' &= S_{31}J_1 + S_{32}J_2 + S_{33}J_3 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} -I = J_1'^2 &= -(S_{11}^2 + S_{12}^2 + S_{13}^2)I, \\ -I = J_2'^2 &= -(S_{21}^2 + S_{22}^2 + S_{23}^2)I, \\ -I = J_3'^2 &= -(S_{31}^2 + S_{32}^2 + S_{33}^2)I \end{aligned}$$

$$S_{11}^2 + S_{12}^2 + S_{13}^2 = S_{21}^2 + S_{22}^2 + S_{23}^2 = S_{31}^2 + S_{32}^2 + S_{33}^2 = 1$$

bulunur. Ayrıca, $J_1' = J_2'J_3'$ eşitliğinden,

$$\begin{aligned} S_{11}J_1 + S_{12}J_2 + S_{13}J_3 = &-(S_{21}S_{31} + S_{22}S_{32} + S_{23}S_{33})I \\ &+ (S_{22}S_{33} - S_{23}S_{32})J_1 \\ &+ (S_{23}S_{31} - S_{21}S_{33})J_2 \\ &+ (S_{21}S_{32} - S_{22}S_{31})J_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= S_{21}S_{31} + S_{22}S_{32} + S_{23}S_{33}, \\ S_{11} &= S_{22}S_{33} - S_{23}S_{32}, \\ S_{12} &= S_{23}S_{31} - S_{21}S_{33}, \\ S_{13} &= S_{21}S_{32} - S_{22}S_{31} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $S_{ij} \in SO[3]$ şeklindedir. ■

Teorem 2.32. *$(M, \overrightarrow{J}, g)$ almost kuaterniyon Hermityen manifold olsun.*

1) *$(M, \overrightarrow{J}, g)$ kuaterniyon Kaehler manifold,*

2) *M manifoldunun U koordinat komşuluğunda $\overrightarrow{J}$ kanonik yerel bazı $\{J_1, J_2, J_3\}$ olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için, U komşuluğunda yerel $1-$formlar a, b, c olmak üzere,*

$$\begin{aligned} \nabla_X J_1 &= c(X)J_2 - b(X)J_3, \\ \nabla_X J_2 &= -c(X)J_1 + a(X)J_3, \\ \nabla_X J_3 &= b(X)J_1 - a(X)J_2 \end{aligned}$$

koşulları denktir [35].

İspat. 1) $\Longrightarrow$ 2) : $(M, \overrightarrow{J}, g)$ kuaterniyon Kaehler manifold olsun. $(M, \overrightarrow{J}, g)$ kuaterniyon Kaehler manifoldunun Riemann konneksiyonu ∇ olduğundan, M manifoldunun bir U komşuluğunda $\overrightarrow{J}$ yapısının $\{J_1, J_2, J_3\}$ kanonik yerel bazı kullanılarak, $\nabla_X \phi$, J yapısının cross-section'ı olduğundan,

$$\begin{aligned}
\nabla_X J_1 &= S_{11} J_1 + S_{12} J_2 + S_{13} J_3, \\
\nabla_X J_2 &= S_{21} J_1 + S_{22} J_2 + S_{23} J_3, \\
\nabla_X J_3 &= S_{31} J_1 + S_{32} J_2 + S_{33} J_3
\end{aligned}$$

eşitliklerini yazabilir, $S_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ U komşuluğunda tanımlı lokal 1−formlar

$$J_2 J_3 = J_1$$

olmak üzere

$$\nabla_X J_1 = \nabla_X (J_2 J_3) = (\nabla_X J_2) J_3 + J_2 (\nabla_X J_3) \tag{2.278}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
S_{11} J_1 + S_{12} J_2 + S_{13} J_3 &= (S_{21} J_1 + S_{22} J_2 + S_{23} J_3) J_3 + J_2 (S_{31} J_1 + S_{32} J_2 + S_{33} J_3) \\
&= S_{21} J_1 J_3 + S_{22} J_2 J_3 + S_{23} J_3^2 + S_{31} J_2 J_1 + S_{32} J_2^2 + S_{33} J_2 J_3 \\
&= -S_{21} J_2 + S_{22} J_1 - S_{23} - S_{31} J_3 - S_{32} + S_{33} J_1 \\
&= -S_{23} - S_{32} + (S_{22} + S_{33}) J_1 - S_{21} J_2 - S_{31} J_3
\end{aligned} \tag{2.279}$$

elde edilir. Böylece,

$$S_{11} = S_{22} + S_{33}, \qquad S_{12} = -S_{21}, \qquad S_{13} = -S_{31} \tag{2.280}$$

elde edilir. ■

2.7.2 Para-Kuaterniyon Kaehler Manifold

$\bar{M}$ dif.bilir manifoldu üzerinde almost para-kuaterniyonik yapı, $End(T\bar{M})$ vektör bundle 'ının rankı 3 olan J_P alt bundle (demeti) dir.

$\forall \alpha \in \{1, 2, 3\}$ için, J_P alt bundle yapısının kesitleri üzerinde $\{J_1, J_2, J_3\}$ lokal (yerel) bazı,

$$J_\alpha^2 = -\varepsilon_\alpha Id, \qquad \varepsilon_1 = 1, \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1, \tag{2.281}$$

olacak şekilde vardır [36].

Tanım 2.97. $(\bar{M}, g)$ semi-Riemann manifoldu üzerinde almost para-kuaterniyonik yapı J_P olsun. Eğer $X, Y \in T\bar{M}$ vektör alanları için $\alpha \in \{1,2,3\}$ olmak üzere,

$$g(J_\alpha X, J_\alpha Y) = \varepsilon_\alpha g(X,Y) \tag{2.282}$$

oluyorsa, g metriği J_P para-kuaterniyonik yapısı ile uyumludur. Bu durumda $(\bar{M}, J_P, g)$ ***almost para-Kuaterniyonik Hermityen manifold*** adını alır [36].

Herhangi almost para-kuaterniyon Hermityen manifold $4m$ $(m \geq 1)$ boyutlu ve uyumlu metrik $(2m, 2m)$ neutral işaretlidir.

$(\bar{M}, g)$ semi-Riemann manifolduna gömülmüş M alt manifoldunun her noktasında $g\big|_{TM}$ non-dejenere ise, M alt manifoldu non-dejeneredir ve $g/M = g$ ile gösterilecektir. Böylece,

$$T\bar{M} = TM \oplus T^\perp M \tag{2.283}$$

ortogonal ayrışımı yazılabilir.
$\bar{M}$ ve M manifoldları üzerindeki Levi Civita konneksiyonları, sırasıyla $\overline{\nabla}$ ve ∇ ile gösterilmek üzere, herhangi $X, Y \in TM$ ve $V \in T^\perp M$ vektör alanları için, Gauss ve Weingarten formülleri

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y), \tag{2.284}$$

$$\overline{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla^\perp_X V \tag{2.285}$$

ile verilir.

Herhangi $X, Y \in TM$ ve $V \in T^\perp M$ vektör alanı için, h ikinci temel formu ve A şekil operatörü arasında

$$g(h(X,Y), V) = g(A_V X, Y) \tag{2.286}$$

eşitliği geçerlidir [10].

Teorem 2.33. *$(\bar{M}, J_P, g)$ almost para-kuaterniyon Hermityen manifolduna, eğer J_P bundle'ı g metriğinin Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel yani $\bar{\nabla} J_P \equiv 0$ ise, **para kuaterniyon Kaehler manifold** denir. Denk olarak, herhangi X vektör alanı için Levi-Civita konneksiyonu aşağıdaki denklemi gerçekler:*

$$\overline{\nabla}_X J_\alpha = -\varepsilon_\alpha [w_{\alpha+2}(X) J_{\alpha+1} - w_{\alpha+1}(X) J_{\alpha+2}]. \tag{2.287}$$

Burada α $(1,2,3)$ ün dairesel permütasyonudur ve $(w_\alpha)_{\alpha=1,2,3}$ herhangi $p \in M$, noktasının U açık komşuluğu üzerindeki yerel 1-formlardır [36].

Tanım 2.98. M $n-$boyutlu dif.bilir manifoldu üzerinde rank k olan dağılım $\forall p \in M$ noktasının U_p yerel komşuluğu üzerinde

$$X_1, \ldots, X_k : U \to TM$$

dif.bilir vektör alanlarına $\forall q \in U$ noktası için, $X_1(q), \ldots, X_k(q)$ D_q uzayının bazını oluşturacak şekildeki $D_P \subseteq T_M(P)$ $k-$boyutlu alt uzaydır. Bu $X_1, \ldots, X_k$ vektör alanları D alt bundle için yerel çatı olarak görülebilir [37].

Örnek 2.26. M manifoldu üzerinde vektör alanı $1-$boyutlu dağılımdır [37].

Tanım 2.99. $\bar{M}$ $n-$boyutlu dif.bilir manifoldu üzerinde D $k-$boyutlu dağılım ve M alt manifold olsun. M manifoldunun $\forall P \in M$ noktası için

$$f : M \to \bar{M}$$

immersiyon olmak üzere, $f_*(T_M(P)) = D_P$ oluyorsa, M manifolduna dağılımın ***integral alt manifoldu*** denir. Eğer D dağılımının M alt manifoldunu örtecek şekilde diğer integral alt manifoldu mevcut değilse, M manifolduna D dağılımının ***maksimal integral alt manifoldu*** adı verilir.
$\forall p \in M$ noktası için D dağılımının P noktasını örten bir maksimal integral manifoldu varsa, D dağılımına ***integrallenebilirdir*** denir [37].

Tanım 2.100. M dif.bilir manifold ve D $k-$boyutlu dağılım olsun. Herhangi $X, Y \in D$ için $[X, Y] \in D$ olur ise, D ***involutif dağılım*** adını alır [37].

Teorem 2.34. *(Yerel Frobenius Teoremi) $\bar{M}$ $n-$boyutlu C^∞ manifoldu üzerinde $k-$boyutlu D dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul D alt bundle'ının $\forall X_1, \ldots, X_k$ yerel çatı alanı için,*

$$[X_i, X_j] = \sum_{s=1}^{k} c_{ij}^s X_s \tag{2.288}$$

olmasıdır, burada c_{ij}^s diferansiyellenebilir fonksiyonlardır [37].
Böylece, D dağılımının involutif olması için gerek ve yeter koşul integrallenebilir olmasıdır.

Tanım 2.101. Manifoldun tanjant bundle'larının integrallenebilir alt demetlerinin oluşturduğu topluluğa ***yapraklanma*** denir.

3
EĞİK MANİFOLDLAR

Bu bölümde, eğik alt manifoldlarla ilgili bazı tanımlar verildikten sonra, para-Hermityen eğik alt manifoldlar ile ilgili çalışmalara yer verilecektir.

3.1 Eğik Alt Manifoldlar

Tanım 3.1. M $n-$boyutlu Riemann, $(\bar{M}, J, g)$ almost Hermityen manifold olmak üzere,

$$f : M \mapsto \bar{M} \tag{3.1}$$

izometrik immersiyonu $\forall P \in M$ noktasında $J(T_M(P)) = T_M(P)$ oluyor ise, M manifolduna ***holomorfik alt manifold***, $J(T_M(P)) \subseteq T_M^{\perp}(P)$ oluyor ise, ***tamamen reel alt manifold*** denir [2].

Herhangi $X \in TM$ tanjant vektör alanı için,

$$JX = TX + FX \tag{3.2}$$

herhangi $\xi \in T^{\perp}M$ normal vektör alanı için,

$$J\xi = t\xi + f\xi \tag{3.3}$$

ayrışımları yazılabilir. Burada, $T : TM \mapsto TM$ tanjant bundle endomorfizmi ve $F : TM \mapsto T^{\perp}M$ normal bundle değerli $1-$formdur. Benzer şekilde $t : T^{\perp}M \mapsto TM$ ve $f : T^{\perp}M \mapsto T^{\perp}M$ dönüşümleri verilebilir [2].

Tanım 3.2. $\bar{M}$ almost Hermityen manifoldunun M alt manifolduna, bir $P \in M$ noktasında $0 \neq X$ teğet vektör alanı için JX ve $T_M(P)$ arasındaki $\theta(X)$ açısı sabit yani, $P \in M$ ve $X \in T_M(P)$ seçilişinden bağımsız ise ***eğik alt manifold*** denir. Bu durumda $\theta(X)$ açısı X vektör alanının Wirtinger açısıdır [1].

Holomorfik ve tamamen reel alt manifoldlar $\theta = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ açılı eğik alt

manifoldlardır. Eğer $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}$ ise has eğik alt manifold olarak isimlendirilir.

Tanım 3.3. Eğer has eğik altmanifoldun T kanonik endomorfizmi paralel yani $\nabla T = 0$ ise, Kaehler eğik alt manifolddur.

Lemma 3.1. *M indefinite metriğe sahip yarı-Riemann manifoldu, $\bar{M}$ Kaehler manifoldunda izometrik olarak gömülmüş eğik alt manifold olsun.*

1) Eğer $X \in TM$ birim space-like vektörleri için $g(TX,TX) = 0$ ise, M tamamen reeldir.

2) Eğer $X \in TM$ birim space-like vektörleri için $g(TX,TX) < 0$ ise, M çift boyutlu ve neutral metriğe sahiptir [23].

İspat. 1) Eğer $X \in TM$ birim space-like tanjant vektörleri için $g(TX,TX) = 0$ ise, eşitlik her $X \in TM$ birim tanjant vektörü için gerçeklenir. Böylece, $g(T^2X,X) = 0$ ve $T^2 = 0 \implies T = 0$ yani M tamamen reel alt manifold belirtir.

2) Eğer $X \in TM$ birim space-like tanjant vektörleri için $g(TX,TX) = k < 0$ ise, T space-like vektörleri time-like vektörlere gönderir.

M eğik olduğundan, X birim time-like vektörleri için,

$$g(TX,TX) = \mp k \tag{3.4}$$

olabilir. Eğer $g(TX_0,TX_0) = -k$, (bazı time-like X_0 vektörleri için) ise, T time-like vektörleri time-like vektörlere gönderir. O halde, süreklilikten $\forall X$ time-like vektör için $g(TX,TX) = -k < 0$ olur, bu durumda T dönüşümü time-like vektörleri time-like vektöre gönderir. Fakat bu olası değildir, çünkü X birim space-like vektörler için TX time-like ve $g(T^2X,X) = k > 0$ dir. Böylece, $\forall X$ birim time-like vektör için, T time-like vektörleri space-like vektörlere götürür. Sonuç olarak, M çift boyutlu ve metrik neutraldir. ■

Lemma 3.2. *M, $\bar{M}$ Pseudo Kaehler manifoldun eğik alt manifoldu olsun. Eğer $X \in TM$ birim space-like vektörleri için $g(TX,TX) = k < 0$ ise, bir θ pozitif reel sayısı ve*

$$TM = D_s \oplus D_t \tag{3.5}$$

ortogonal ayrışımı ($boyD_s = boyD_t$)

1) $T^2 = (\sinh^2\theta)Id$,

2) D_s space-like dağılım ve D_t time-like dağılım,

3) $T(D_s) = D_t$ ve $T(D_t) = D_s$

olacak şekilde vardır [23].

3.2 Para-Hermityen Eğik Alt Manifoldlar

$(\bar{M}, J, g)$ $2n$—boyutlu semi-Riemann manifoldu, $J^2 = I$ almost para-kompleks yapısı ve g semi-tanımlı metriğine sahip iken, $\forall X, Y \in T\bar{M}$ için

$$g(JX, Y) + g(X, JY) = 0 \tag{3.6}$$

koşullarını sağlarsa, ***para- Hermityen manifold*** denir [15].

Tanım 3.4. $(\bar{M}, J, g)$ para-Hermityen manifoldun M alt manifoldu olmak üzere, $\forall X$ space-like (time-like) vektör alanı için,

$$\frac{g(TX, TX)}{g(JX, JX)} \tag{3.7}$$

oranı sabit ise, M alt manifolduna ***eğik*** denir.
M kompleks alt manifoldu için, $T = J$ ve oran 1 iken, M reel alt manifoldu için $T = 0$ ve oran 0 dır.
M kompleks ya da tamamen reel değilse has eğik alt manifold belirtir [15].

Örnek 3.1. $(\bar{M}, J, g)$ para-Hermityen manifoldun 2—boyutlu M alt manifoldunu alalım. TM tanjant uzayının $\{e_1, e_2\}$ yerel ortonormal çatısını e_1 space-like yani

$$g(e_1, e_1) = 1, \tag{3.8}$$

olacak şekilde alalım. (3.6) ve (3.8) denklemlerinden, $Te_1 = \eta e_2$, $\eta \neq 0, \mp 1$ şeklinde alınabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} g(Je_1, Je_1) &= g(\eta e_1, \eta e_1) + g(Fe_1, Fe_1) \\ -1 &= \eta^2 g(e_2, e_2) + g(Fe_1, Fe_1) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$-1 - \eta^2 g(e_2, e_2) = g(Fe_1, Fe_1) \tag{3.9}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$$g(Te_1, Te_1) = \eta^2 g(e_2, e_2)$$

ifadesinden e_2 ile Te_1 aynı karakterlidir. O halde, e_2 time-like yani Te_1 time-like ise $-1+\eta^2 = g(Fe_1, Fe_1)$ dir. Ek olarak,

$|\eta| > 1$ ise,

$$g(Fe_1, Fe_1) = -1+\eta^2 > 0 \tag{3.10}$$

Fe_1 space-like normal vektör alanıdır.
$|\eta| < 1$ ise,

$$g(Fe_1, Fe_1) = -1+\eta^2 < 0 \tag{3.11}$$

Fe_1 time-like normal vektör alanıdır.
Ayrıca, (3.9) eşitliğinden e_2 space-like yani Te_1 space-like ise,

$$g(Fe_1, Fe_1) = -1-\eta^2 \tag{3.12}$$

dir ve Fe_1 time-like normal vektör alanıdır [15].
Böylece, aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.5. $(\bar{M}, J, g)$ para-Hermityen manifoldun M has eğik alt manifoldu olsun. Herhangi X space-like (time-like) vektör alanı için,

1) TX time-like (space-like) ve $\frac{|TX|}{|JX|} > 1$ ise, M 1. tip eğik alt manifold,
2) TX time-like (space-like) ve $\frac{|TX|}{|JX|} < 1$ ise, M 2. tip eğik alt manifold,
3) TX space-like (time-like) ise, M 3.tip eğik alt manifold

şeklinde isimlendirilir [15].

Teorem 3.1. *$(\bar{M}, J, g)$ para-Hermityen manifoldun M eğik alt manifoldunun,*

1) 1. *tip eğik olması için gerek ve yeter koşul herhangi X space-like (time-like) vektör alanı için TX time-like (space-like) ve $\lambda \in (1, \infty)$ sabiti*

$$T^2 = \lambda I = \cosh^2\theta, \theta > 0 \tag{3.13}$$

olacak şekilde vardır.

2) 2. *tip eğik olması için gerek ve yeter koşul X space-like (time-like) vektör alanı için, TX time-like (space-like) ve $\lambda \in (0, 1)$ sabiti*

$$T^2 = \lambda I = \cos^2\theta, 0 < \theta < 2\pi \tag{3.14}$$

olacak şekilde vardır.

3) 3. *tip eğik olması için gerek ve yeter koşul X space-like (time-like) vektör alanı için, TX time-like (space-like) ve $\lambda \in (-\infty, 0)$ sabiti*

$$T^2 = \lambda I = -\sinh^2\theta, \theta > 0 \tag{3.15}$$

olacak şekilde vardır.

Her durumda θ eğik açıdır [15].

İspat. 1) M 1. tip eğik alt manifold iken X space-like teğet vektör alanı olsun. O halde,

$$g(JX, JX) = -J^2 g(X, X) = -g(X, X) \tag{3.16}$$

ifadesinden, JX time-like vektör alanıdır.
TX time-like ve $\frac{|TX|}{|JX|} > 1$ iken bir $\theta > 0$ açısı için,

$$\cosh\theta = \frac{|TX|}{|JX|} = \frac{\sqrt{-g(TX, TX)}}{\sqrt{-g(JX, JX)}} \tag{3.17}$$

yazılabilir. (3.17) denkleminden,

$$\begin{aligned} g(T^2X, X) &= -g(TX, TX) \\ &= -\cosh^2\theta\, g(JX, JX) \\ &= \cosh^2\theta\, g(J^2X, X) \\ &= \cosh^2\theta\, g(X, X) \end{aligned} \tag{3.18}$$

şeklindedir. Eğer X vektör alanı yerine TX alınırsa,

$$\cosh\theta = \frac{|T^2X|}{|JTX|} = \frac{|T^2X|}{|TX|} \tag{3.19}$$

bulunur. O halde,

$$\begin{aligned} g(T^2X, X) = g(JTX, X) &= -g(TX, JX) \\ &= -g(TX, TX) \\ &= |TX|^2 \end{aligned} \tag{3.20}$$

vardır. Böylece, (3.17) ve (3.19) denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} |TX|^2 &= |T^2X||JX| \\ &= |T^2X||X| \end{aligned} \tag{3.21}$$

elde edilir. X ve T^2X aynı karaktere sahip olduğundan bir λ sabitini $\alpha \in \{1,2,3\}$ olmak üzere

$$T^2X = \lambda X, \tag{3.22}$$

alınarak (3.20) ve (3.22) denklemlerinden $\lambda = \cosh^2\theta$ bulunur. Herhangi X time-like vektör alanı için işlemler benzer şekildedir. TX ve JX space-like olduğundan

$$\cosh\theta = \frac{|TX|}{|JX|} = \frac{\sqrt{g(TX,TX)}}{\sqrt{g(JX,JX)}} \tag{3.23}$$

elde edilir. Herhangi X time-like vektör alanı için $T^2X = \lambda X$ ve $\lambda = \cosh^2\theta$ bulunur.
Ters hesaplamalar kolaylıkla gösterilebilir.

2) M 2. tip eğik ise, herhangi X space-like vektör alanı için JX ve TX time-like ve $\frac{|TX|}{|JX|} < 1$ eşitsizliği sağlanır. Böylece $\theta > 0$ için

$$\cos\theta = \frac{|TX|}{|JX|} = \frac{\sqrt{-g(TX,TX)}}{\sqrt{-g(JX,JX)}} \tag{3.24}$$

yazılabilir. (3.24) denkleminden,

$$g(T^2X,X) = -g(TX,TX) = \cos^2\theta\, g(X,X) \tag{3.25}$$

şeklindedir. Benzer şekilde, $g(T^2X,X) = |T^2X||X|$ and $T^2X = \lambda X$ elde edilir. Böylece, $\lambda = \cos^2\theta$ bulunur. Aynı sonuç X time-like vektör alanı için de bulunabilir.

3) Eğer M 3. tip eğik ise, herhangi X space-like vektör alanı için JX space-like vektör alanıdır. Böylece, herhangi $\theta > 0$ için

$$\sinh\theta = \frac{|TX|}{|JX|} = \frac{\sqrt{-g(TX,TX)}}{\sqrt{g(JX,JX)}} \tag{3.26}$$

yazılabilir. O halde,

$$g(T^2X,X) = -\sinh^2\theta\, g(J^2X,X) = \sinh^2\theta\, g(X,X), \tag{3.27}$$

elde edilir. Sonuç olarak, herhangi X space-like vektör alanı için

$$T^2X = (\sinh^2\theta)X$$

bulunur. X time-like iken aynı eşitlik gerçeklenir.

■

Lemma 3.3. $(\bar{M}, J, g)$ *para-Hermityen manifoldun* M *has eğik alt manifoldu olsun.*

1) M *alt manifoldunun* 1. *tip eğik olması için gerek ve yeter koşul* $\forall X$ *space-like (time-like) vektör alanı için*

$$tFX = -\sinh^2 \theta X, \tag{3.28}$$

2) M *alt manifoldunun* 2. *tip eğik olması için gerek ve yeter koşul* $\forall X$ *space-like (time-like) vektör alanı için*

$$tFX = \sin^2 \theta X, \tag{3.29}$$

3) M *alt manifoldunun* 3. *tip eğik olması için gerek ve yeter koşul* $\forall X$ *space-like (time-like) vektör alanı için*

$$tFX = \cosh^2 \theta X \tag{3.30}$$

olmasıdır [15].

İspat. Herhangi X vektör alanı için,

$$X = J^2X = T^2X + FTX + tFX + fFX \tag{3.31}$$

ifadesinde teğet ve normal kısımlar eşitlenirse,

$$X = T^2X + tFX \tag{3.32}$$

$$0 = FTX + fFX \tag{3.33}$$

eşitlikleri yazılabilir.

1) M eğik alt manifoldu 1. tip eğik alt manifold ise, (3.13) ve (3.32) denklemlerinden,

$$tFX = X - T^2X = (1 - \cosh^2 \theta)X = -\sinh^2 \theta X \tag{3.34}$$

elde edilir.

2) M eğik alt manifoldu 2. tip eğik alt manifold ise, (3.14) ve (3.32) denklemlerinden,

$$tFX = X - T^2X = (1 - \cos^2 \theta)X = \sin^2 \theta X \tag{3.35}$$

bulunur.

3) M eğik alt manifoldu 3. tip eğik alt manifold ise, (3.15) ve (3.32) denklemlerinden,

$$tFX = X - T^2X = (1 + \sinh^2\theta)X = \cosh^2\theta X \tag{3.36}$$

elde edilir.

■

M 1. ve 2. tip eğik alt manifoldları neutral eğik olduğundan, çevreleyen manifoldun boyutunun yarısına sahip olan alt manifoldların normal vektör alanlarıyla ilgili aşağıdaki bağıntıyı verelim.

Teorem 3.2. *$(\bar{M}^{4s}_{2s}, J, g)$ para-Hermityen manifoldun M^{2s}_{s} eğik alt manifoldu olsun.*

1) *M^{2s}_{s} eğik alt manifoldunun 1. tip eğik olması için gerek ve yeter koşul $\forall\xi$ space-like (time-like) normal vektör alanı için*

$$f^2\xi = \cosh^2\theta\,\xi, \tag{3.37}$$

2) *M^{2s}_{s} eğik alt manifoldunun 2. tip eğik alt manifold olması için gerek ve yeter koşul $\forall\xi$ space-like (time-like) normal vektör alanı için*

$$f^2\xi = \cos^2\theta\,\xi \tag{3.38}$$

olmasıdır [15].

İspat. 1) M 1. tip eğik iken, $\forall\xi$ space-like (time-like) normal vektör alanı için, $FX = \xi$ olacak şekilde X time-like (space-like) teğet vektör alanı olduğundan (3.32) ve (3.33) denklemlerinden,

$$f^2\xi = f^2FX = f(fFX) = f(-FTX) = FT^2X,$$

ve (3.9) denkleminden,

$$f^2\xi = F\cosh^2\theta X = \cosh^2\theta FX = \cosh^2\theta\,\xi$$

yazılabilir.

2) Bir önceki ispata benzer şekildedir.

■

M 3. tip eğik alt manifoldu daima neutral olmadığından, ayrı incelenmesi gerekmektedir.

Teorem 3.3. *$(\bar{M}^{4s}_{2s}, J, g)$ para-Hermityen manifoldun M^{2s}_{2i} $(0 < i < s)$ alt manifoldunun 3. tip eğik alt manifold olması için gerek ve yeter koşul $\forall \xi$ normal vektör alanı için*

$$f^2\xi = -\sinh^2\theta\,\xi, \tag{3.39}$$

olmasıdır [15].

İspat. X space-like (time-like) teğet vektör alanı için, TX space-like (time-like) ve FX time-like (space-like) olmaktadır. $\bar{M}$ manifoldunun boyutunun yarısına eşit M manifoldu verildiğinde, ξ time-like (space-like) normal vektör alanı ise, X teğet vektör alanı $FX = \xi$ olacak şekilde vardır. Böylece,

$$C^2\xi = F(-\sinh^2\theta X) = -\sinh^2\theta\,\xi \tag{3.40}$$

elde edilir. ■

3.3 Para- Kaehler Manifoldun Eğik Alt Manifoldu

Almost Hermityen manifoldun denklik problemi ile ilgilenirken, has eğik alt manifoldun g metriği uyumlu almost kompleks yapı ile donatılabilir.

Tanım 3.6. $(\bar{M}, J, g)$ almost para-Hermityen manifoldun M has eğik alt manifoldu olsun. Eğer

1) M 1. tip eğik alt manifold ise,

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\cosh\theta}T \tag{3.41}$$

almost para-Hermityen yapı tanımlar,

2) M 2. tip eğik alt manifold ise,

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\cos\theta}T \tag{3.42}$$

almost para-Hermityen yapı tanımlar,

3) M 3. tip eğik alt manifold ise,

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\sinh\theta}T \tag{3.43}$$

almost Hermityen yapı tanımlar [15].

Teorem 3.4. *$\bar{M}_2^4$ para-Hermityen manifoldun M has eğik yüzeyi tamamen reel ya da kompleks değil ise,*

1) M eğik alt manifold,

2) $\nabla T \equiv 0$,

3) $\nabla T^2 \equiv 0$,

koşulları denktir [15].

İspat. M has eğik yüzey iken, TM uzayının $\{e_1, e_2\}$ yerel ortonormal bazını e_1 space-like yani $g(e_1, e_1) = 1$ olacak şekilde alalım. O halde, $e_2 = \frac{1}{\eta} Te_1$ bağıntısında M eğik alt manifoldu 1. tip, 2. tip ve 3. tip iken, sırasıyla $\eta = (\cosh\theta, \cos\theta, \sinh\theta)$ şeklindedir. Ayrıca, $g(Te_1, e_1) = 0$ eşitliğinden,

$$g(\nabla_X Te_1, e_1) = -g(Te_1, \nabla_X e_1) \tag{3.44}$$

yazılabilir.

Herhangi $X \in TM$ vektör alanı için

$$(\nabla_X T)e_j = \nabla_X(Te_j) - T(\nabla_X e_j) \tag{3.45}$$

eşitliğinden $j = 1$ için M 1. tip eğik olduğunu kabul edelim. O halde, $Te_1 = \cosh\theta e_2$ alınırsa,

$$\begin{aligned}(\nabla_X T)e_1 &= \nabla_X(Te_1) - T(\nabla_X e_1) \\ &= \nabla_X(\cosh\theta e_2) - T(w_1^2(X)e_2) \\ &= X(\cosh\theta)e_2 + \cosh\theta w_2^1(X)e_1 - w_1^2(X)Te_2 \\ &= X(\cosh\theta)e_2 + \cosh\theta(w_2^1(X) - w_1^2(X))e_1 \\ &= 0\end{aligned} \tag{3.46}$$

elde edilir. Ayrıca, $j = 2$ için, $Te_2 = \cosh\theta e_1$ alarak benzer işlemlerle $(\nabla_X T_\alpha)e_2 \equiv 0$ bulunur. O halde $\nabla T \equiv 0$ yani, $\nabla T^2 \equiv 0$ dır.
Tersine, $\nabla T_\alpha^2 \equiv 0$ ise, herhangi $X \in TM$ vektör alanı için $T^2X = \lambda X$ bulunur.

Eğer Y birim tanjant vektör alanı ise,

$$\begin{aligned} X(\lambda) &= X\,g(T^2Y,Y) \\ &= g(\nabla_X T^2Y,Y)+g(T^2Y,\nabla_X Y) \\ &= g(T^2\nabla_X Y,Y)+g(T^2Y,\nabla_X Y) \\ &= 2\lambda g(\nabla_X Y,Y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sonuç olarak, λ sabittir ve M eğik alt manifolddur.

$g(Te_1,Te_1)$ sabiti göz önüne alınırsa,

$$g(\nabla_X Te_1,e_2)=\frac{1}{\eta}g(\nabla_X Te_1,Te_1)=0 \tag{3.47}$$

ve

$$g(\nabla_X e_1,Te_2)=\frac{1}{\eta}g(\nabla_X e_1,T^2e_1)=\frac{1}{\eta}g(\nabla_X e_1,\eta^2e_1)=\eta g(\nabla_X e_1,e_1)=0 \tag{3.48}$$

yazılabilir. Böylece, herhangi $X\in TM$ için,

$$\nabla_X Te_1=T\nabla_X e_1 \tag{3.49}$$

bulunur.
Aynı zamanda,

$$\nabla_X Te_2=T\nabla_X e_2 \tag{3.50}$$

gerçeklendiğinden, a,b fonksiyonları için, $Y=ae_1+be_2$ teğet vektör alanı olmak üzere,

$$\begin{aligned} T\nabla_X Y &= T\nabla_X(ae_1+be_2) \\ &= T(X(a)e_1+a\nabla_X e_1+X(b)e_2+b\nabla_X e_2) \\ &= X(a)Te_1+aT\nabla_X e_1+X(b)Te_2+bT\nabla_X e_2 \\ &= X(a)Te_1+a\nabla_X Te_1+X(b)Te_2+b\nabla_X Te_2 \\ &= \nabla_X TY \end{aligned}$$

$\nabla T\equiv 0$ yani, $\nabla T^2\equiv 0$ dır. Tersine, $\nabla T^2\equiv 0$ iken, $\{e_1,e_2\}$ yerel ortonormal bazı kullanılarak, $g(Te_1,e_1)=0$ ve $Te_1=\eta e_2$ yani $T^2e_1=\eta Te_2=\eta^2e_1=\lambda e_1$, bir λ fonksiyonu için yazılabilir. Ayrıca,

$$T^2e_2=T^2\left(\frac{1}{\eta}Te_1\right)=\frac{\lambda}{\eta}Te_1=\lambda e_2 \tag{3.51}$$

şeklindedir. Böylece $T^2X = \lambda X$, herhangi X teğet vektör alanı için gerçeklenir.
Bir Y birim tanjant vektör alanını düşünürsek,

$$\begin{aligned} X(\lambda) &= X\,g(T^2Y, Y) \\ &= g(\nabla_X T^2Y, Y) + g(T^2Y, \nabla_X Y) \\ &= g(T^2\nabla_X Y, Y) + g(T^2Y, \nabla_X Y) \\ &= 2\lambda g(\nabla_X Y, Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece λ sabit ve M eğik alt manifold olmaktadır. ■

Not 3.1. Eğer çevreleyen uzay para-Kaehler ve $\nabla T \equiv 0$ ise, alt manifold üzerinde üretilen yapı Teoremin farklı koşullarına göre para-Kaehler ya da Kaehler dir. 1. eğik ve 2. eğik tüm alt manifoldlar neutral semi-Riemann manifold, fakat 3. eğik alt manifoldlar için aynı durum geçerli olmadığından, bu alt manifoldları ayrı inceleyelim.

Teorem 3.5. *$\bar{M}^{4s}_{2s}$ para-Kaehler manifoldun M^{2s}_{2i} 3. tip eğik alt manifoldu olsun. Eğer $\nabla F \equiv 0$ ise, alt manifold minimaldir [15].*

İspat. M^{2s}_{2i} alt manifoldu için, $\{e_1, \ldots, e_s, e_1^*, \ldots, e_s^*\}$ uyumlu ortonormal eğik çatı

$$e_j^* = \frac{1}{\sinh\theta} Te_j \tag{3.52}$$

olacak şekilde alınabilir. e_j ve e_j^* aynı karaktere sahip olduğunu biliyoruz. Eğer alt manifold boyutu ile ek boyut çakışır ise, $\left\{\frac{1}{\cosh\theta}Fe_1, \ldots, \frac{1}{\cosh\theta}Fe_s, \frac{1}{\cosh\theta}Fe_1^*, \ldots, \frac{1}{\cosh\theta}Fe_s^*\right\}$ $T^\perp M$ uzayında uyumlu ortonormal çatıdır.
Para-Kaehler manifold için $\bar{\nabla}J \equiv 0$ olduğundan, $\forall X, Y \in T\bar{M}$ için, $\bar{\nabla}_X JY = J\bar{\nabla}_X Y$ eşitliği ve Gauss-Weingarten formülleri kullanılarak,

$$h(X, TY) + \nabla^\perp_X FY - F\nabla_X Y - f\,h(X, Y) = 0 \tag{3.53}$$

elde edilir. $\nabla F \equiv 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$h(X, TY) = f\,h(X, Y) \tag{3.54}$$

olmasıdır.
Böylece, $\{e_1, \ldots, e_s, e_1^*, \ldots, e_s^*\}$ uyumlu ortonormal çatısını alarak, (3.52)

denkleminden

$$\begin{aligned} h(e_j^*, e_j^*) &= h\left(\frac{1}{\sinh\theta} Te_j, \frac{1}{\sinh\theta} Te_j\right) \\ &= \frac{1}{\sinh^2\theta} f^2 h(e_j, e_j) \\ &= -h(e_j, e_j) \end{aligned}$$

bulunur.
Sonuç olarak, $H = \sum_{j=1}^{s} \varepsilon_j (h(e_j, e_j) + h(e_j^*, e_j^*)) = 0$, $\varepsilon_j = g(e_j, e_j)$ ve M minimal alt manifold olmaktadır. ■

Teorem 3.6. *$\bar{M}_2^4$ para-Kaehler manifoldun 3. tip M eğik yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter koşul $\nabla F \equiv 0$ olmasıdır [15].*

İspat. M manifoldunun space-like olduğunu kabul edelim. TM ve $T^\perp M$ uzaylarının $\{e_1, e_2\}$ ve $\{e_3, e_4\}$ ortonormal bazlarını

$$e_2 = \frac{1}{\sinh\theta} Te_1, \tag{3.55}$$

$$e_3 = \frac{1}{\cosh\theta} Fe_1, \tag{3.56}$$

ve

$$e_4 = \frac{1}{\cosh\theta} Fe_2 \tag{3.57}$$

olacak şekilde alalım.
$X, Y \in TM$ teğet ve $V \in T^\perp M$ normal vektörler olmak üzere, $\nabla F \equiv 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$h(X, TY) = f h(X, Y) \tag{3.58}$$

ve

$$A_{fV} X = -A_V TX \tag{3.59}$$

olması gerektiğinden, verilen bazlar için gösterelim. Bu bazlar

$$\begin{aligned} te_3 &= \cosh\theta e_1, \qquad & fe_3 &= -\sinh\theta e_4 \\ te_4 &= \cosh\theta e_2, \qquad & fe_4 &= \sinh\theta e_3 \end{aligned}$$

eşitliklerine sahip olduğundan, $V = e_3$ iken, $(\nabla_X T)Y = A_{FY}X + th(X, Y) = 0$ ifadesi

de kullanılarak,

$$A_{fV}X = A_{fe_3}X = \frac{1}{\cosh\theta}A_{fFe_1}X = -\frac{1}{\cosh\theta}A_{FTe_1}X \tag{3.60}$$

$$= \frac{1}{\cosh\theta}th(X, Te_1) = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}th(X, e_2) \tag{3.61}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$A_{e_3}TX = \frac{1}{\cosh\theta}A_{Fe_1}TX = \frac{-1}{\cosh\theta}th(TX, e_1) \tag{3.62}$$

elde edildiğinden, (3.55) ve (3.62) denklemlerinden $X = e_1$ ise,

$$\begin{aligned} A_{e_3}Te_1 &= \frac{-1}{\cosh\theta}th(Te_1, e_1) \\ &= -\frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}th(e_2, e_1) \\ &= -A_{fe_3}e_1 \end{aligned}$$

dir. Eğer $X = e_2$ ise,

$$\begin{aligned} A_{e_3}Te_2 &= \frac{-1}{\cosh\theta}th(Te_2, e_1) \\ &= -\frac{1}{\cosh\theta}th\left(\frac{1}{\sinh\theta}T^2e_1, e_1\right) \\ &= \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}th(e_1, e_1) \end{aligned}$$

ve

$$A_{fe_3}e_2 = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}th(e_2, e_2) \tag{3.63}$$

bulunur. M minimal olduğundan son denklemlerden, $A_{fe_3}e_2 = -A_{e_3}Te_2$ dir. O halde herhangi X tanjant vektör alanı için $A_{fe_3}X = -A_{e_3}TX$ yazılabilir. Benzer işlemler $V = e_4$ iken de elde edilebilir. Böylece, X tanjant ve V normal vektör alanı için

$$A_{fV}X = -A_VTX \tag{3.64}$$

şeklindedir. ■

4
PARA KUATERNİYON EĞİK ALT MANİFOLD

Bu bölüm tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde, para-kuaterniyon Hermityen manifoldlar için özel koşullar dikkate alınarak eğik alt manifoldlar çalışılmıştır [38].

Tanım 4.1. $(\bar{M}, J_p, g)$ almost para-kuaterniyon Hermityen manifolduna gömülmüş semi-Riemann alt manifold M olsun.
Herhangi $X \in TM$ vektör alanı için $J_\alpha X \in T\bar{M}$ olduğundan,

$$J_\alpha X = T_\alpha X + F_\alpha X \tag{4.1}$$

ortogonal ayrışımı vardır. Burada $T_\alpha X$ ve $F_\alpha X$ sırasıyla $J_\alpha X \in T\bar{M}$ dönüşümünün teğet ve normal bileşenleridir. Ayrıca,

$$T_\alpha : TM \longrightarrow TM \qquad \text{ve} \qquad F_\alpha : TM \longrightarrow T^\perp M \tag{4.2}$$

gösterimi yazılabilir.
Benzer biçimde, herhangi $V \in T^\perp M$ normal vektör alanı için,

$$J_\alpha V = t_\alpha V + f_\alpha V \tag{4.3}$$

ayrışımı, $t_\alpha : T^\perp M \longrightarrow TM$ ve $f_\alpha : T^\perp M \longrightarrow T^\perp M$ olacak şekilde yazılabilir.

O halde t_α tanjant bundle değerli 1−form ve f_α normal bundle endomorfizmidir.
M almost para-kuaterniyon Hermityen olduğundan, $X, Y \in TM$ için,

$$g(T_\alpha X, Y) + g(X, T_\alpha Y) = 0 \tag{4.4}$$

eşitliği yazılabilir.

Tanım 4.2. $(\bar{M}, J_p, g)$ para-kuaterniyon Hermityen manifoldun M semi-Riemann alt manifold olsun. $\forall X \in TM$ space-like ya da time-like vektör alanı için

$$\frac{g(T_\alpha X, T_\alpha X)}{g(J_\alpha X, J_\alpha X)} \tag{4.5}$$

oranı sabit ise, M manifolduna eğik alt manifold denir.

Yorum 4.1. Eğer M para-kuaterniyonik alt manifold ise, $T_\alpha = J_\alpha$ ve

$$\frac{g(T_\alpha X, T_\alpha X)}{g(J_\alpha X, J_\alpha X)} = 1 \tag{4.6}$$

yazılabilir. Eğer M tamamen reel ise, $T_\alpha = 0$ ve

$$\frac{g(T_\alpha X, T_\alpha X)}{g(J_\alpha X, J_\alpha X)} = 0 \tag{4.7}$$

ile verilen durumlar, eğik alt manifoldun özel durumlarıdır. Eğik alt manifold para-kuaterniyonik ya da tamamen reel değil ise, has eğik olarak isimlendirilir.

Örnek 4.1. $\bar{M}$ para-kuaterniyon Hermityen manifoldunun 2−boyutlu alt manifoldu M_1^2 olsun. M üzerinde tanjant vektör alanlarının $\{e_1, e_2\}$ yerel ortonormal çatısını e_1 space-like yani

$$g(e_1, e_1) = 1, g(e_1, e_2) = 0, g(e_2, e_2) = -1 \tag{4.8}$$

olacak şekilde alalım. (4.5) ve (4.8) denklemlerinden, sıfır olmayan reel değerli $\mu \neq 0, \mp 1$ fonksiyonları için,

$$T_\alpha e_1 = \mu e_2 \tag{4.9}$$

yazılabilir, burada $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ dir. O halde, (4.9) denkleminden

$$g(T_\alpha e_1, T_\alpha e_1) = \mu^2 g(e_2, e_2) \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.10) denkleminden $T_\alpha e_1$ ve e_2 aynı karaktere sahiptir. Böylece (4.1) ve (4.9) denklemlerinden

$$g(J_\alpha e_1, J_\alpha e_1) = g(T_\alpha e_1, T_\alpha e_1) + g(F_\alpha e_1, F_\alpha e_1), \tag{4.11}$$

ve

$$\varepsilon_\alpha + \mu^2 = g(F_\alpha e_1, F_\alpha e_1) \tag{4.12}$$

bulunur. Buradan, μ fonksiyonu ve ε_α değerine bağlı olarak aşağıdaki sınıflandırma verilebilir.

1) Eğer $\varepsilon_\alpha = -1$ ve $|\mu| > 1$ ise, $g(F_\alpha e_1, F_\alpha e_1) = -1 + \mu^2$ ve aynı zamanda $F_\alpha e_1$ space-like vektör alanı.

2) Eğer $\varepsilon_\alpha = -1$ ve $|\mu| < 1$ ise $g(F_\alpha e_1, F_\alpha e_1) = -1 + \mu^2$ ve aynı zamanda $F_\alpha e_1$ time-like vektör alanı.

3) Eğer $\varepsilon_\alpha = +1$ ise, $g(F_\alpha e_1, F_\alpha e_1) = 1 + \mu^2$ ve aynı zamanda $F_\alpha e_1$ space-like vektör alanıdır.

Burada, para-kuaterniyon manifoldların tanımından iki olası durum vardır:

(i) Eğer ε_α -1 'e eşit ise, α 2 ya da 3 olabilir.

(ii) Eğer ε_α 1 'e eşit ise, α 1 dir.

Böylece, para-kuaterniyon Hermityen manifoldların has eğik alt manifoldlarının 3-durumunu elde edebiliriz.

Tanım 4.3. $(\bar{M}, J_P, g)$ para-kuaterniyon Hermityen manifoldun has eğik alt manifoldu M olsun. O halde,

1) Herhangi X space-like (time-like) vektör alanı için $T_\alpha X$ time-like (space-like), $J_\alpha X$ time-like (space-like) ve $\frac{|T_\alpha X|}{|J_\alpha X|} > 1, \alpha \in \{2,3\}$ ise, M 1. tip eğik alt manifold

2) Herhangi X space-like (time-like) vektör alanı için $T_\alpha X$ time-like (space-like), $J_\alpha X$ time-like (space-like) ve $\frac{|T_\alpha X|}{|J_\alpha X|} < 1, \alpha \in \{2,3\}$ ise, M 2. tip eğik alt manifold

3) Herhangi X space-like (time-like) vektör alanı için $J_\alpha X$ space-like (time-like), $T_\alpha X$ time-like (space-like), $\alpha \in \{1\}$ ise, M 3. tip eğik alt manifold

olarak isimlendirilir.

Teorem 4.1. *$(\bar{M}, J_P, g)$ para-kuaterniyon Hermityen manifoldun has eğik alt manifoldu M olsun. O halde,*

1) M manifoldunun 1. tip eğik olması için gerek ve yeter koşul herhangi X space-like (time-like) vektör alanı için $J_\alpha X$ time-like (space-like), $T_\alpha X$ time-like (space-like) ve bir $\lambda \in (1, \infty)$ sabiti

$$T_\alpha^2 = \lambda Id \tag{4.13}$$

olacak şekilde olmasıdır. Eğer M 1. tip eğik ise $\lambda = \cosh^2\theta$, $\theta > 0$.

2) *M manifoldunun 2. tip eğik olması için gerek ve yeter koşul herhangi X space-like (time-like) vektör alanı için $J_\alpha X$ time-like (space-like), $T_\alpha X$ time-like (space-like) ve bir $\lambda \in (0,1)$ sabiti*

$$T_\alpha^2 = \lambda Id \tag{4.14}$$

olacak şekilde olmasıdır. Eğer M 2. tip eğik ise, $\lambda = \cos^2\theta$, $\theta \in (0, 2\pi)$.

3) *M manifoldunun 3. tip eğik olması için gerek ve yeter koşul herhangi X space-like (time-like) vektör alanı için $J_\alpha X$ space-like (time-like), $T_\alpha X$ time-like (space-like) ve bir $\lambda \in (0, \infty)$ sabiti*

$$T_\alpha^2 = \lambda Id \tag{4.15}$$

olacak şekilde olmasıdır. Eğer M 3. tip eğik ise, $\lambda = \sinh^2\theta$, $\theta > 0$.

İspat. Herhangi X space-like (time-like) vektör alanı için $\alpha \in \{1,2,3\}$ olmak üzere $T_\alpha X$ dönüşümünün time-like (space-like) olduğunu biliyoruz.

1) M manifoldu 1. tip eğik ise, herhangi space-like X vektör alanı için $J_\alpha X$ time-like ve $T_\alpha X$ time-like'tır. Ayrıca, $\frac{|T_\alpha X|}{|J_\alpha X|} > 1$ sağlandığından, bir $\theta > 0$ fonksiyonu için

$$\cosh\theta = \frac{|T_\alpha X|}{|J_\alpha X|} = \frac{\sqrt{-g(T_\alpha X, T_\alpha X)}}{\sqrt{-g(J_\alpha X, J_\alpha X)}} \tag{4.16}$$

yazılabilir. O halde, (4.16) denkleminden her X space-like vektör alanı için

$$\begin{aligned} g(T_\alpha^2 X, X) &= -g(T_\alpha X, T_\alpha X) = -\cosh^2\theta\, g(J_\alpha X, J_\alpha X) \\ &= \cosh^2\theta\, g(J_\alpha^2 X, X) = -\varepsilon_\alpha \cosh^2\theta\, g(X, X), \end{aligned} \tag{4.17}$$

yazılabilir, burada $\varepsilon_\alpha = -1$ dir.
Eğer X vektör alanı yerine $T_\alpha X$ alınırsa,

$$\cosh\theta = \frac{|T_\alpha^2 X|}{|J_\alpha T_\alpha X|} = \frac{|T_\alpha^2 X|}{|T_\alpha X|} \tag{4.18}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} g(T_\alpha^2 X, X) &= g(J_\alpha T_\alpha X, X) = -g(T_\alpha X, J_\alpha X) \\ &= -g(T_\alpha X, T_\alpha X) = |T_\alpha X|^2 \end{aligned} \tag{4.19}$$

vardır. Böylece, (4.16) ve (4.18) denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} |T_\alpha X|^2 &= |T_\alpha^2 X||J_\alpha X| \\ &= |T_\alpha^2 X||X| \end{aligned} \tag{4.20}$$

bulunur. X ve $T_\alpha^2 X$ aynı karaktere sahip olduğundan bir λ sabitini $\alpha \in \{1,2,3\}$ olmak üzere

$$T_\alpha^2 X = \lambda X, \tag{4.21}$$

alabiliriz.
(4.19) ve (4.21) denklemlerinden $\lambda = \cosh^2\theta$ bulunur. Herhangi X time-like vektör alanı için işlemler benzer şekildedir. $T_\alpha X$ ve $J_\alpha X$ space-like olduğundan (4.16) denkleminden,

$$\cosh\theta = \frac{|T_\alpha X|}{|J_\alpha X|} = \frac{\sqrt{g(T_\alpha X, T_\alpha X)}}{\sqrt{g(J_\alpha X, J_\alpha X)}} \tag{4.22}$$

elde edilir. Herhangi X time-like vektör alanı için $T_\alpha^2 X = \lambda X$ ve $\lambda = \cosh^2\theta$ bulunur.
Ters hesaplamalar kolaylıkla gösterilebilir.

2) M manifoldu 2. tip eğik ise, herhangi X space-like vektör alanı için $J_\alpha X$ ve $T_\alpha X$ time-like vektör alanıdır. Aynı zamanda $\frac{|T_\alpha X|}{|J_\alpha X|} < 1$ sağlanır. Böylece, $\theta > 0$ için

$$\cos\theta = \frac{|T_\alpha X|}{|J_\alpha X|} = \frac{\sqrt{-g(T_\alpha X, T_\alpha X)}}{\sqrt{-g(J_\alpha X, J_\alpha X)}} \tag{4.23}$$

yazılabilir. (4.23) denkleminden,

$$g(T_\alpha^2 X, X) = -g(T_\alpha X, T_\alpha X) = -\varepsilon_\alpha \cos^2\theta\, g(X,X) \tag{4.24}$$

dir, burada $\varepsilon_\alpha = -1$ dir. Benzer şekilde, $g(T_\alpha^2 X, X) = |T_\alpha^2 X||X|$ and $T_\alpha^2 X = \lambda X$ elde edilir. Böylece, $\lambda = \cos^2\theta$ bulunur. Aynı sonuç X time-like vektör alanı için de bulunabilir.

3) Eğer M manifoldu 3. tip eğik ise, herhangi X space-like vektör alanı için $J_\alpha X$ space-like 'tır. Böylece, herhangi $\theta > 0$ için

$$\sinh\theta = \frac{|T_\alpha X|}{|J_\alpha X|} = \frac{\sqrt{-g(T_\alpha X, T_\alpha X)}}{\sqrt{g(J_\alpha X, J_\alpha X)}} \tag{4.25}$$

yazılabilir. Böylece,

$$g(T_\alpha^2 X, X) = -\sinh^2\theta\, g(J_\alpha^2 X, X) = \varepsilon_\alpha \sinh^2\theta\, g(X,X), \tag{4.26}$$

elde edilir. Burada $\varepsilon_\alpha = 1$ dir. Sonuç olarak, herhangi X space-like vektör alanı için

$$T_\alpha^2 X = (\sinh^2\theta)X$$

bulunur. X time-like iken aynı eşitlik gerçeklenir.
Ters durumlar kolaylıkla gösterilebilir.

Tezin kalan kısmında $\alpha = 2,3$ iken 1. tip ve 2. tip eğik alt manifoldlar, $\alpha = 1$ iken 3. tip eğik alt manifoldlar kastedilmektedir. ■

Teorem 4.2. *$(\bar{M}, J_P, g)$ para-kuaterniyon Hermityen manifoldun has eğik alt manifoldu M olsun. O halde, $\alpha \in \{1,2,3\}$ olmak üzere,*

1) *M manifoldunun 1. tip eğik olması için gerek ve yeter koşul her X space-like (time-like) vektör alanı için $t_\alpha F_\alpha X = -\sinh^2\theta X$ olmasıdır,*

2) *M manifoldunun 2. tip eğik olması için gerek ve yeter koşul her X space-like (time-like) vektör alanı için $t_\alpha F_\alpha X = \sin^2\theta X$ olmasıdır,*

3) *M manifoldunun 3. tip eğik olması için gerek ve yeter koşul her X space-like (time-like) vektör alanı için $t_\alpha F_\alpha X = (\sinh^2\theta - 1)X$ olmasıdır.*

İspat. Her X space-like (time-like) vektör alanı için, (4.1) ve (4.3) denklemlerinden

$$X = -\varepsilon_\alpha J_\alpha^2 X = -\varepsilon_\alpha (T_\alpha^2 X + F_\alpha(T_\alpha X) + t_\alpha(F_\alpha X) + f_\alpha(F_\alpha X))$$

eşitliği yazılabilir. Teğet ve normal kısımları eşitleyerek, sırasıyla

$$X = -\varepsilon_\alpha (T_\alpha^2 X + t_\alpha(F_\alpha X)) \tag{4.27}$$

ve

$$0 = -\varepsilon_\alpha (F_\alpha(T_\alpha X) + f_\alpha(F_\alpha X)), \tag{4.28}$$

elde edilir.
Eğer M manifoldu 1. tip eğik ise, (4.13) ve (4.27) denklemleri kullanılarak,

$$t_\alpha(F_\alpha X) = -\varepsilon_\alpha(X - T_\alpha^2 X) = -\varepsilon_\alpha(1 - \cosh^2\theta)X = \varepsilon_\alpha \sinh^2\theta X,$$

ve burada $\varepsilon_\alpha = -1$.
Eğer M manifoldu 2. tip eğik ise, (4.14) ve (4.27) kullanılarak,

$$t_\alpha(F_\alpha X) = -\varepsilon_\alpha(X - T_\alpha^2 X) = -\varepsilon_\alpha(1 - \cos^2\theta)X = -\varepsilon_\alpha \sin^2\theta X$$

elde edilir, burada $\varepsilon_\alpha = -1$ dir.
Eğer M manifoldu 3. tip eğik ise, (4.15) ve (4.27) denklemleri kullanılarak,

$$t_\alpha(F_\alpha X) = -\varepsilon_\alpha(X - T_\alpha^2 X) = -\varepsilon_\alpha(1-\sinh^2\theta)X = \varepsilon_\alpha(\sinh^2\theta - 1)X$$

bulunur, burada $\varepsilon_\alpha = +1$ dir. Ters hesaplamalar aynı denklemlerden elde edilebilir. Para-kuaterniyon Hermityen manifoldların neutral olduğunu biliyoruz. Böylece normal vektör alanları kullanılarak aşağıdaki karakterizasyon verilebilir. ■

Teorem 4.3. *$(\bar{M}, J_P, g)$ para-kuaterniyon Hermityen manifoldun has eğik alt manifoldu M olsun. O halde,*

1) *M manifoldunun 1. tip eğik olması için gerek ve yeter koşul her ζ space-like (time-like) normal vektör alanı için*

$$f_\alpha^2\zeta = \cosh^2\theta\zeta, \tag{4.29}$$

olmasıdır,

2) *M manifoldunun 2. tip eğik olması için gerek ve yeter koşul her ζ space-like (time-like) normal vektör alanı için*

$$f_\alpha^2\zeta = \cos^2\theta\zeta, \tag{4.30}$$

olmasıdır,

3) *M manifoldunun 3. tip eğik olması için gerek ve yeter koşul her ζ space-like (time-like) normal vektör alanı için*

$$f_\alpha^2\zeta = \sinh^2\theta\zeta \tag{4.31}$$

olmasıdır.

İspat. 1) M manifoldu 1. tip eğik olsun. Her ζ space-like (time-like) normal vektör alanı için, bir X space-like (time-like) vektör alanı $F_\alpha X = \zeta$ olacak şekilde vardır. (4.13) ve (4.27) denklemlerinden,

$$f_\alpha^2\zeta = f_\alpha^2 F_\alpha X = F_\alpha T_\alpha^2 X = F_\alpha \cosh^2\theta X = \cosh^2\theta\zeta$$

bulunur.

2) M manifoldunun 2. tip eğik olması durumunda her ζ space-like (time-like) normal vektör alanı için, X time-like (space-like) vektör alanı $F_\alpha X = \zeta$ olacak şekilde vardır. (4.14) ve (4.27) denklemlerinden

$$f_\alpha^2\zeta = f_\alpha^2 F_\alpha X = F_\alpha T_\alpha^2 X = F_\alpha \cos^2\theta X = \cos^2\theta\zeta$$

elde edilir.

3) M manifoldunun 3. tip eğik olması durumunda, her ζ space-like (time-like) normal vektör alanı için, benzer şekilde, (4.15) ve (4.27) denklemlerini kullanırsak,

$$f_\alpha^2\zeta = f_\alpha^2 F_\alpha X = F_\alpha T_\alpha^2 X = F_\alpha \sinh^2\theta X = \sinh^2\theta\zeta$$

bulunur.

■

5
PARA KUATERNİYON KAEHLER MANİFOLD

Bu orijinal bölüm, önceki bölümde oluşturulan para-kuaterniyon manifoldların eğik alt manifoldları dikkate alınarak para-kuaterniyon Kaehler manifoldlar üzerindeki yapılarla ilgili bazı teorem ve kanonik yapı karakterizasyonlarını içermektedir [38].

Tanım 5.1. $(\bar{M}, J_P, g)$ almost para-kuaterniyon Hermityen manifoldun has eğik alt manifoldu M olsun. M eğik alt manifold iken $\dot{J}_\alpha = \nu T_\alpha$ yapısı M üzerinde almost para-Hermityen yapı tanımlar, burada M 1. tip, 2. tip ve 3. tip eğik iken, sırasıyla $\nu = (\frac{1}{\cosh\theta}, \frac{1}{\cos\theta}, \frac{1}{\sinh\theta})$ şeklindedir.

Teorem 5.1. *$M, (\bar{M}_2^4, J_P, g)$, 4−boyutlu para-kuaterniyon Hermityen manifoldunda has eğik bir yüzey olsun. O halde, aşağıdaki koşullar denktir:*

1) M bir eğik alt manifold,

2) $\nabla T_\alpha \equiv 0$,

3) $\nabla T_\alpha^2 \equiv 0$

burada $\alpha \in \{1,2,3\}$ şeklindedir.

İspat. M_1^2, $\bar{M}_2^4$ manifoldunda θ eğik açılı has eğik yüzey olsun. TM tanjant uzayında $\{e_1, e_{1^*}\}$ ortonormal çatısını e_1 space-like olmak üzere μ, sıfırdan farklı reel değerli fonksiyonu için $T_\alpha e_1 = \mu e_{1^*}$ şeklinde alalım. Burada, 1. tip, 2. tip ve 3. tip için sırasıyla

$$\mu = (\cosh\theta, \cos\theta, \sinh\theta) \tag{5.1}$$

şeklindedir.
Herhangi $X \in TM$, vektör alanı için

$$(\nabla_X T_\alpha)e_j = \nabla_X(T_\alpha e_j) - T_\alpha(\nabla_X e_j) \tag{5.2}$$

gerçeklendiğini biliyoruz. M eğik yüzeyini 1. tip eğik kabul edelim. Eğer

$$T_\alpha e_1 = \cosh\theta e_{1^*} \tag{5.3}$$

alırsak,

$$\begin{aligned}(\nabla_X T_\alpha)e_1 &= \nabla_X(T_\alpha e_1) - T_\alpha(\nabla_X e_1)\\ &= \nabla_X(\cosh\theta e_{1^*}) - T_\alpha(w_1^2(X)e_{1^*})\\ &= X(\cosh\theta)e_{1^*} + \cosh\theta w_2^1(X)e_1 - w_1^2(X)T_\alpha e_{1^*}\\ &= X(\cosh\theta)e_{1^*} + \cosh\theta(w_2^1(X) - w_1^2(X))e_1\\ &= 0\end{aligned} \tag{5.4}$$

elde ederiz. Aynı zamanda $T_\alpha e_{1^*} = \cosh\theta e_1$ alarak, $(\nabla_X T_\alpha)e_{1^*} \equiv 0$ bulunur, yani $\nabla T_\alpha \equiv 0$ dir. Bu ise, $\nabla T_\alpha^2 \equiv 0$ olduğunu gösterir.
Tersine, eğer $\nabla T_\alpha^2 \equiv 0$ ise, herhangi $X \in TM$ için $T_\alpha^2 X = \lambda X$ bulunur.
Eğer Y birim tanjant vektör alanı ise,

$$\begin{aligned}X(\lambda) &= X\,g(T_\alpha^2 Y, Y)\\ &= g(\nabla_X T_\alpha^2 Y, Y) + g(T_\alpha^2 Y, \nabla_X Y)\\ &= g(T_\alpha^2 \nabla_X Y, Y) + g(T_\alpha^2 Y, \nabla_X Y)\\ &= 2\lambda g(\nabla_X Y, Y)\\ &= 0\end{aligned}$$

dir. Eğer M manifoldu 2. tip ya da 3. tip eğik ise, λ sabittir ve M eğik alt manifolddur.

■

Teorem 5.2. *$\bar{M}_{2n}^{4n}$ para-kuaterniyon Hermityen manifoldun θ eğik alt manifoldu M_n^{2n} olsun. D_s^n space-like dağılımın ortonormal çatısı $\{e_1,\dots,e_n\}$ ve D_t^n time-like dağılımın ortonormal çatısı $\{e_{1^*},\dots,e_{n^*}\}$ olmak üzere, bir $\{\zeta_1,\dots,\zeta_n,\zeta_{1^*},\dots,\zeta_{n^*}\}$ ortonormal çatısı için,*

1) *Eğer M θ eğik açılı 1. tip eğik manifold ise, $J_\alpha e_i = \cosh\theta e_{i^*} + \sinh\theta\zeta_i$,*
2) *Eğer M θ eğik açılı 2. tip eğik manifold ise, $J_\alpha e_i = \cos\theta e_{i^*} + \sin\theta\zeta_{i^*}$,*
3) *Eğer M θ eğik açılı 3. tip eğik manifold ise, $J_\alpha e_i = \sinh\theta e_{i^*} + \cosh\theta\zeta_i$,*

şeklindedir. Bu $\{e_1,\dots,e_n,e_{1^*},\dots,e_{n^*},\zeta_1,\dots,\zeta_n,\zeta_{1^*},\dots,\zeta_{n^*}\}$ uyumlu eğik çatıdır.

Lemma 5.1. *$\bar{M}_{2n}^{4n}$ para-kuaterniyon Hermityen manifoldun θ eğik alt manifoldu M_n^{2n} olsun.*

$$\{e_1,\ldots,e_n,e_{1^*},\ldots,e_{n^*},\zeta_1,\ldots,\zeta_n,\zeta_{1^*},\ldots,\zeta_{n^*}\},$$

uyumlu eğik çatısı olmak üzere, M_n^{2n} manifolduna teğet X yerel vektör alanı için

$$\nabla_X e_i=\sum_{j=1}^{n}w_i^j(X)e_j+\sum_{j=1}^{n}w_i^{j^*}(X)e_{j^*}, \tag{5.5}$$

$$\nabla_X e_{i^*}=\sum_{j=1}^{n}w_{i^*}^{j}(X)e_j+\sum_{j=1}^{n}w_{i^*}^{j^*}(X)e_{j^*}, \tag{5.6}$$

yazılabilir.

Teorem 5.3. *Bir $\bar{M}_{2n}^{4n}$ para-kuaterniyon Hermityen manifoldun θ eğik alt manifoldu M_n^{2n} olsun. Herhangi X space-like (time-like) vektör alanı için*

1) Eğer M 1. tip eğik manifold ise,
$(\nabla_X T_\alpha)e_i=\cosh\theta\sum_{j=1}^{n}\left\{w_{i^*}^{j^*}(X)-w_i^j(X)\right\}e_{j^*}$,
$(\nabla_X T_\alpha)e_{i^*}=\cosh\theta\sum_{j=1}^{n}\left\{w_i^j(X)-w_{i^*}^{j^*}(X)\right\}e_j$.

2) Eğer M 2. tip eğik manifold ise,
$(\nabla_X T_\alpha)e_i=\cos\theta\sum_{j=1}^{n}\left\{w_{i^*}^{j^*}(X)-w_i^j(X)\right\}e_{j^*}$,
$(\nabla_X T_\alpha)e_{i^*}=\cos\theta\sum_{j=1}^{n}\left\{w_i^j(X)-w_{i^*}^{j^*}(X)\right\}e_j$.

3) Eğer M 3. tip eğik manifold ise,
$(\nabla_X T_\alpha)e_i=\sinh\theta\sum_{j=1}^{n}\left\{w_{i^*}^{j^*}(X)-w_i^j(X)\right\}e_{j^*}$,
$(\nabla_X T_\alpha)e_{i^*}=\sinh\theta\sum_{j=1}^{n}\left\{w_i^j(X)-w_{i^*}^{j^*}(X)\right\}e_j$.

yazılabilir.

İspat. $\{e_1,\ldots,e_n,e_{1^*},\ldots,e_{n^*}\}$ yerel ortonormal çatısı için,

$$g(e_i,e_{j^*})=0 \tag{5.7}$$

yazılabilir. (5.5), (5.6) ve (5.7) denklemlerinden,

$$w_i^{j^*}=w_{i^*}^{j},\qquad i,j=1,2,...,n \tag{5.8}$$

elde edilir. Aynı zamanda, M_n^{2n} manifolduna teğet X,Y yerel vektör alanları için

$$\nabla_X(T_\alpha Y)=(\nabla_X T_\alpha)Y+T_\alpha(\nabla_X Y) \tag{5.9}$$

yazılabilir.

1) Eğer M 1. tip eğik manifold ise, Teorem 5.2 kullanarak

$$T_\alpha e_i = \cosh\theta e_{i^*}, \qquad i = 1,2,...,n \tag{5.10}$$

biliyoruz. Böylece, (5.5), (5.6), (5.8), (5.9) ve (5.10) denklemlerinden,

$$\begin{aligned}(\nabla_X T_\alpha)e_i &= \nabla_X(\cosh\theta e_{i^*}) - T_\alpha(\sum_{j=1}^{n} w_i^j(X)e_j + \sum_{j=1}^{n} w_i^{j^*}(X)e_{j^*}) \\ &= X(\cosh\theta)e_{i^*} + \cosh\theta\nabla_X e_{i^*} - \sum_{j=1}^{n} w_i^j(X)T_\alpha e_j \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n} w_i^{j^*}(X)T_\alpha e_{j^*} \\ &= \cosh\theta\sum_{j=1}^{n}\left\{w_{i^*}^{j^*}(X) - w_i^j(X)\right\}e_{j^*}.\end{aligned} \tag{5.11}$$

yazılabilir. Benzer şekilde, eğer

$$T_\alpha e_{i^*} = \cosh\theta e_i,$$

kullanılırsa benzer işlemlerden

$$(\nabla_X T_\alpha)e_{i^*} = \cosh\theta\sum_{j=1}^{n}\left\{w_i^j(X) - w_{i^*}^{j^*}(X)\right\}e_j$$

bulunur.

2) Eğer M 2. tip eğik manifold ise, Teorem 5.2 kullanılarak

$$T_\alpha e_i = \cos\theta e_{i^*}, T_\alpha e_{i^*} = \cos\theta e_i, \tag{5.12}$$

yazılırsa (5.5), (5.6), (5.8), (5.9) ve (5.12) denklemlerinden benzer işlemleri uygulayarak, sırasıyla

$$\begin{aligned}(\nabla_X T_\alpha)e_i &= \cos\theta\sum_{j=1}^{n}\left\{w_{i^*}^{j^*}(X) - w_i^j(X)\right\}e_{j^*} \\ (\nabla_X T_\alpha)e_{i^*} &= \cos\theta\sum_{j=1}^{n}\left\{w_i^j(X) - w_{i^*}^{j^*}(X)\right\}e_j,\end{aligned} \tag{5.13}$$

elde edilir.

3) Son olarak, eğer M 3. tip eğik manifold ise, $T_\alpha e_i = \sinh\theta e_{i^*}$ ve $T_\alpha e_{i^*} = \sinh\theta e_i$ kullanarak, benzer işlemlerden, sırasıyla,

$$\begin{aligned}(\nabla_X T_\alpha)e_i &= \sinh\theta \sum_{j=1}^{n}\left\{w_{i^*}^{j^*}(X) - w_i^j(X)\right\} e_{j^*},\\ (\nabla_X T_\alpha)e_{i^*} &= \sinh\theta \sum_{j=1}^{n}\left\{w_i^j(X) - w_{i^*}^{j^*}(X)\right\} e_j,\end{aligned} \tag{5.14}$$

elde edilir. O halde, $\{e_1,\ldots,e_n,e_{1^*},\ldots,e_{n^*},\zeta_1,\ldots,\zeta_n,\zeta_{1^*},\ldots,\zeta_{n^*}\}$ uyumlu eğik çatıya göre $\nabla T_\alpha \equiv 0$ özelliğine sahip eğik alt manifoldlarla ilgili aşağıdaki sonuç verilebilir: ■

Yorum 5.1. $\bar{M}_{2n}^{4n}$ para-kuaterniyon Hermityen manifoldun θ eğik alt manifoldu M_n^{2n} olsun. O halde, $\nabla T_\alpha \equiv 0$ olması için gerek ve yeter koşul M_n^{2n} eğik alt manifoldu için $w_{i^*}^{j^*} = w_i^j \quad i,j = 1,2,...,n$ olmasıdır.

Lemma 5.2. *$\bar{M}_{2n}^{4n}$ para-kuaterniyon Hermityen manifoldun θ eğik alt manifoldu M_n^{2n} olsun. Uyumlu eğik çatısı*

$$\{e_1,\ldots,e_n,e_{1^*},\ldots,e_{n^*},\zeta_1,\ldots,\zeta_n,\zeta_{1^*},\ldots,\zeta_{n^*}\},$$

olmak üzere, X yerel vektör alanı için

$$\nabla_X^\perp \zeta_i = \sum_{j=1}^{n}\Phi_i^j(X)\zeta_j + \sum_{j=1}^{n}\Phi_i^{j^*}(X)\zeta_{j^*}, \tag{5.15}$$

$$\nabla_X^\perp \zeta_{i^*} = \sum_{j=1}^{n}\Phi_{i^*}^j(X)\zeta_j + \sum_{j=1}^{n}\Phi_{i^*}^{j^*}(X)\zeta_{j^*} \tag{5.16}$$

şeklindedir.

Teorem 5.4. *$\bar{M}_{2n}^{4n}$ para-kuaterniyon Hermityen manifoldun θ eğik alt manifoldu M_n^{2n} olsun. M_n^{2n} manifolduna teğet herhangi X space-like (time-like) vektör alanı için*

1) Eğer M 1. tip eğik manifold ise,

$$(\nabla_X F_\alpha)e_i = \sinh\theta\left\{\sum_{j=1}^{n}(\Phi_i^j(X) - w_i^j(X))\zeta_j + \sum_{j=1}^{n}(\Phi_i^{j^*}(X) - w_i^{j^*}(X))\zeta_{j^*}\right\},$$

2) Eğer M 2. tip eğik manifold ise,

$$(\nabla_X F_\alpha)e_i = \sin\theta\left\{\sum_{j=1}^{n}(\Phi_{i^*}^j(X) - w_i^{j^*}(X))\zeta_j + \sum_{j=1}^{n}(\Phi_{i^*}^{j^*}(X) - w_i^j(X))\zeta_{j^*}\right\}.$$

3) Eğer M 3. tip eğik manifold ise,

$$(\nabla_X F_\alpha)e_i = \cosh\theta\left\{\sum_{j=1}^{n}(\Phi_i^j(X)-w_i^j(X))\zeta_j+\sum_{j=1}^{n}(\Phi_i^{j^*}(X)-w_i^{j^*}(X))\zeta_{j^*}\right\}$$

şeklindedir.

İspat. F_α normal bundle değerli 1−formlar ve $\{e_1,\ldots,e_n,e_{1^*},\ldots,e_{n^*}\}$ yerel ortonormal çatısı için

$$\nabla_X^\perp(F_\alpha e_i) = (\nabla_X F_\alpha)e_i + F_\alpha(\nabla_X e_i), \qquad i=1,2,...,n, \tag{5.17}$$

biliyoruz, burada X M_n^{2n} manifolduna teğet space-like (time-like) vektör alanıdır.

1) İlk olarak, eğer M 1. tip eğik manifold ise, Teorem 5.2 gereğince

$$F_\alpha e_i = \sinh\theta\zeta_j, \qquad F_\alpha e_{j^*} = \sinh\theta\zeta_{j^*} \tag{5.18}$$

olduğu açıktır. (5.5), (5.15), (5.17) ve (5.18) denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}(\nabla_X F_\alpha)e_i &= \nabla_X^\perp(\sinh\theta\zeta_i) - F_\alpha(\sum_{j=1}^{n}(w_i^j(X)e_j+\sum_{j=1}^{n}w_i^{j^*}(X)e_{j^*})\\ &= X(\sinh\theta)\zeta_i+\sinh\theta\nabla_X^\perp\zeta_i-\sum_{j=1}^{n}w_i^j(X)F_\alpha e_j\\ &\quad-\sum_{j=1}^{n}w_i^{j^*}(X)F_\alpha e_{j^*}\\ &= \sinh\theta\left\{\sum_{j=1}^{n}\Phi_i^j(X)\zeta_j+\sum_{j=1}^{n}\Phi_i^{j^*}(X)\zeta_{j^*}\right\}\\ &\quad-\sinh\theta\left\{\sum_{j=1}^{n}w_i^j(X)\zeta_j-\sum_{j=1}^{n}w_i^{j^*}(X)\zeta_{j^*}\right\}\\ &= \sinh\theta\left\{\sum_{j=1}^{n}(\Phi_i^j(X)-w_i^j(X))\zeta_j+\sum_{j=1}^{n}(\Phi_i^{j^*}(X)-w_i^{j^*}(X))\zeta_{j^*}\right\}\end{aligned} \tag{5.19}$$

elde edilir.

2) Eğer M 2. tip eğik alt manifold ise, Teorem 5.2 gereğince,

$$F_\alpha e_i = \sin\theta\zeta_{i^*}, \qquad F_\alpha e_{i^*} = \sin\theta\zeta_i, \tag{5.20}$$

vardır. Böylece, (5.5), (5.15), (5.17) ve (5.20) denklemleri kullanılarak,

$$(\nabla_X F_\alpha)e_i = \sin\theta \left\{ \sum_{j=1}^{n} (\Phi_{i^*}^{j}(X) - w_i^{j^*}(X))\zeta_j + \sum_{j=1}^{n} (\Phi_{i^*}^{j^*}(X) - w_i^{j}(X))\zeta_{j^*} \right\}$$

elde edilir.

3) Eğer M 3. tip eğik manifold ise, $F_\alpha e_i = \cosh\theta\,\zeta_i$ ve $F_\alpha e_{i^*} = \cosh\theta\,\zeta_{i^*}$ eşitliklerinden

$$(\nabla_X F_\alpha)e_i = \cosh\theta \left\{ \sum_{j=1}^{n} (\Phi_{i}^{j}(X) - w_i^{j}(X))\zeta_j + \sum_{j=1}^{n} (\Phi_{i}^{j^*}(X) - w_i^{j^*}(X))\zeta_{j^*} \right\}$$

bulunur.

■

Teorem 5.5. *$\bar{M}_{2n}^{4n}$ para-kuaterniyon Kaehler manifoldunun θ eğik alt manifoldu M_n^{2n} olsun.*
Eğer $\nabla F_\alpha \equiv 0$ ise, $\{e_1, \ldots, e_n, e_{1^*}, \ldots, e_{n^*}\}$ yerel ortonormal çatısı için,

$$h(e_j, e_j) = h(e_{j^*}, e_{j^*}), \qquad j = 1, 2, ..., n$$

ve M_n^{2n} alt manifoldu minimaldir.

İspat. Herhangi $X, Y \in TM$ vektör alanları için, $(\bar{\nabla}_X J_\alpha)Y \equiv 0$ Kaehler koşulundan

$$\bar{\nabla}_X(J_\alpha Y) = J_\alpha(\bar{\nabla}_X Y) \tag{5.21}$$

yazılabilir. (2.284), (2.285), (4.1), (4.3) ve (5.21) denklemlerinden normal kısımlar eşitlenirse,

$$h(X, T_\alpha Y) + \nabla_X^\perp F_\alpha Y - F_\alpha \nabla_X Y - f_\alpha h(X, Y) = 0 \tag{5.22}$$

bulunur. O halde, $\nabla F_\alpha \equiv 0$ eşitliğinin gerçeklenmesi için gerek ve yeter koşul

$$h(X, T_\alpha Y) = f_\alpha h(X, Y), \qquad \alpha \in \{1, 2, 3\} \tag{5.23}$$

olmasıdır. Bir $\{e_1, \ldots, e_n, e_{1^*}, \ldots, e_{n^*}\}$ yerel ortonormal çatısı için,

$$e_{j^*} = \frac{1}{\mu} T_\alpha e_j, \qquad j = 1, 2, ...n \tag{5.24}$$

vardır. Burada, sırasıyla 1. tip, 2. tip ve 3. tip için ($\mu = \cosh\theta, \cos\theta, \sinh\theta$)

şeklindedir. (5.24) denkleminden

$$h(e_{j^*},e_{j^*})=h(\frac{1}{\mu}T_\alpha e_j,\frac{1}{\mu}T_\alpha e_j)=\frac{1}{\mu^2}f_\alpha^2 h(e_j,e_j)=h(e_j,e_j) \tag{5.25}$$

gerçeklenir. Böylece,

$$H=\sum_{j=1}^{n} g(e_j,e_j)h(e_j,e_j)+g(e_{j^*},e_{j^*})h(e_{j^*},e_{j^*})=0 \tag{5.26}$$

bulunur. Sonuç olarak, M eğik alt manifoldunun minimal olduğu bulunur.

■

Teorem 5.6. *$(\bar{M},J_P,g)$ para-kuaterniyon Kaehler manifoldun alt manifoldu M olsun. Herhangi $X,Y\in TM$ için,*

1) $(\nabla_X T_\alpha)Y=t_\alpha h(X,Y)+A_{F_\alpha Y}X,$

2) $(\nabla_X F_\alpha)Y=f_\alpha h(X,Y)-h(X,T_\alpha Y)$

eşitlikleri verilebilir.

İspat. Kaehler koşulundan $X,Y\in TM$ için,

$$(\bar{\nabla}_X J_\alpha)Y\equiv 0 \tag{5.27}$$

ve (5.27) denkleminden,

$$\bar{\nabla}_X(J_\alpha Y)=J_\alpha(\bar{\nabla}_X Y),$$

yazılabilir. Gauss-Weingarten denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\nabla_X(T_\alpha Y)+h(X,T_\alpha Y)-A_{F_\alpha Y}X+\nabla^\perp_X F_\alpha Y=T_\alpha(\nabla_X Y)+F_\alpha(\nabla_X Y)\\ +t_\alpha h(X,Y)+f_\alpha h(X,Y)\end{aligned} \tag{5.28}$$

elde edilir. Teğet ve normal kısımlar eşitlenirse,

$$\nabla_X(T_\alpha Y)-A_{F_\alpha Y}X=T_\alpha(\nabla_X Y)+t_\alpha h(X,Y), \tag{5.29}$$

$$h(X,T_\alpha Y)+\nabla^\perp_X F_\alpha Y=F_\alpha(\nabla_X Y)+f_\alpha h(X,Y) \tag{5.30}$$

elde edilir. O halde, (5.29) ve (5.30) denklemlerinden,

$$(\nabla_X T_\alpha)Y=A_{F_\alpha Y}X+t_\alpha h(X,Y),$$

$$(\nabla_X F_\alpha)Y = f_\alpha h(X,Y) - h(X, T_\alpha Y)$$

bulunur.

■

Teorem 5.7. $(\bar{M}, J_P, g)$ *para-kuaterniyon Kaehler manifoldun* M *alt manifoldu olmak üzere,*

1) $\nabla T_\alpha \equiv 0$ *olması için gerek ve yeter koşul* $A_{F_\alpha X} Y = A_{F_\alpha Y} X$,

2) $\nabla F_\alpha \equiv 0$ *olması için gerek ve yeter koşul* $A_{f_\alpha \zeta} X = -A_\zeta T_\alpha X$

olmasıdır. Burada ζ, M *manifolduna normal ve* X, Y *vektör alanları* M *ye teğettir.*

6
PARA KUATERNİYON EĞİK DAĞILIMLAR

Bu orijinal bölümde, önceki bölümde ele alınan para-kuaterniyon manifoldların eğik alt manifoldlar çalışmamıza benzer şekilde para-kuaterniyonik eğik dağılımlar tanımlanarak, bazı teoremler incelenecektir [39].

Tanım 6.1. $(\bar{M}, J_P, g)$ para-kuaterniyon Hermityen manifoldu üzerinde D dif.bilir dağılımı, $\forall X \in D$ time-like ya da space-like vektör alanı için,

$$\frac{g((T_\alpha)_D X, (T_\alpha)_D X)}{g(J_\alpha X, J_\alpha X)} \tag{6.1}$$

oranı sabit iken eğik dağılım adını alır. Burada $(T_\alpha)_D X$ $J_\alpha X$ in D dağılımı üzerine izdüşümü ve $\alpha \in \{1,2,3\}$ şeklindedir.

Eğer (6.1) oranı 1 değerine eşit ise, D dağılımı J_α ya göre invaryant, (6.1) oranı 0 değerine eşit ise, J_α ya göre anti-invaryant denir. D dağılımı invaryant ya da anti-invaryant değilse, has eğik dağılım denir.

Tanım 6.2. $(\bar{M}, J_P, g)$ para-kuaterniyon Hermityen manifoldun D dağılımı için,

$$J_\alpha D = D$$

oluyorsa, para-kuaterniyonik dağılımdır ve $\forall \alpha \in \{1,2,3\}$ için, $|(T_\alpha)_D X| = |J_\alpha X|$ gerçeklenir.
D dağılımı için

$$J_\alpha D \subseteq T^\perp M$$

oluyorsa, tamamen reel dağılımdır ve $\forall \alpha \in \{1,2,3\}$ için $|(T_\alpha)_D X| = 0$ dır.

Tanım 6.3. $(\bar{M}, J_P, g)$ para-kuaterniyon Hermityen manifoldun D has eğik dağılımı olsun.

1) Herhangi $X \in D$ space-like (time-like) vektör alanı için, $J_\alpha X$ time-like (space-like), $T_\alpha X$ time-like (space-like) ve

$$\frac{|(T_\alpha)_D X|}{|J_\alpha X|} > 1 \tag{6.2}$$

ise, D 1. tip eğik dağılım

2) Herhangi $X \in D$ space-like (time-like) vektör alanı için, $J_\alpha X$ time-like (space-like), $T_\alpha X$ time-like (space-like) ve

$$\frac{|(T_\alpha)_D X|}{|J_\alpha X|} < 1 \tag{6.3}$$

ise, D 2. tip eğik dağılım

3) Herhangi $X \in D$ space-like (time-like) vektör alanı için, $J_\alpha X$ space-like (time-like) ve $T_\alpha X$ time-like (space-like) ise, D 3. tip eğik dağılım

olarak isimlendirilir.

Teorem 6.1. *$(\bar{M}, J_P, g)$ para-kuaterniyon Hermityen manifoldun D has eğik dağılımı olsun. O halde,*

1) D dağılımının 1. tip olması için gerek ve yeter koşul herhangi X space-like (time-like) vektör alanı için $J_\alpha X$ time-like (space-like), $T_\alpha X$ time-like (space-like) ve bir $\lambda \in (1, \infty)$ sabiti

$$(T_\alpha)_D{}^2 = \lambda Id \tag{6.4}$$

olacak şekilde olmasıdır. Eğer D dağılımı 1. tip ise $\lambda = \cosh^2\theta$, $\theta > 0$ şeklindedir.

2) D dağılımının 2. tip olması için gerek ve yeter koşul herhangi X space-like (time-like) vektör alanı için $J_\alpha X$ time-like(space-like), $T_\alpha X$ time-like (space-like) ve bir $\lambda \in (0, 1)$ sabiti

$$(T_\alpha)_D{}^2 = \lambda Id \tag{6.5}$$

olacak şekilde olmasıdır. Eğer D dağılımı 2. tip ise, $\lambda = \cos^2\theta$, $\theta \in (0, 2\pi)$ şeklindedir.

3) D dağılımının 3. tip olması için gerek ve yeter koşul herhangi X space-like (time-like) vektör alanı için $J_\alpha X$ space-like(time-like), $T_\alpha X$ time-like (space-like) ve bir

λ sabiti

$$(T_\alpha)_D{}^2 = \lambda Id \tag{6.6}$$

olacak şekilde olmasıdır. Eğer D dağılımı 3. tip ise, $\lambda = \sinh^2\theta$, $\theta > 0$ şeklindedir.

İspat. Herhangi X space-like (time-like) vektör alanı için $(T_\alpha)_D X$ time-like (space-like) vektör alanıdır, burada $\alpha \in \{1,2,3\}$.

1) Eğer D dağılımı 1. tip eğik ise, herhangi X space-like vektör alanı için $J_\alpha X$ ve $(T_\alpha)_D X$ time-like vektör alanıdır. Ayrıca,

$$\frac{|(T_\alpha)_D X|}{|J_\alpha X|} > 1$$

eşitsizliği sağlandığından, bir $\theta > 0$ fonksiyonu için

$$\cosh\theta = \frac{|(T_\alpha)_D X|}{|J_\alpha X|} = \frac{\sqrt{-g((T_\alpha)_D X,(T_\alpha)_D X)}}{\sqrt{-g(J_\alpha X, J_\alpha X)}} \tag{6.7}$$

yazılabilir. Böylece, (6.7) denkleminden her X space-like vektör alanı için

$$\begin{aligned} g((T_\alpha)_D^2 X, X) &= -g((T_\alpha)_D X,(T_\alpha)_D X) \\ &= -\cosh^2\theta\, g(J_\alpha X, J_\alpha X) \\ &= \cosh^2\theta\, g(J_\alpha^2 X, X) \\ &= -\varepsilon_\alpha \cosh^2\theta\, g(X,X) \end{aligned} \tag{6.8}$$

yazılabilir, burada $\varepsilon_\alpha = -1$ dir.
Eğer X vektör alanı yerine $(T_\alpha)_D X$ alırsak,

$$\cosh\theta = \frac{|(T_\alpha)_D^2 X|}{|J_\alpha (T_\alpha)_D X|} = \frac{|(T_\alpha)_D^2 X|}{|(T_\alpha)_D X|} \tag{6.9}$$

ve buradan,

$$\begin{aligned} g((T_\alpha)_D^2 X, X) &= g(J_\alpha (T_\alpha)_D X, X) \\ &= -g((T_\alpha)_D X, J_\alpha X) \\ &= -g((T_\alpha)_D X,(T_\alpha)_D X) \\ &= |(T_\alpha)_D X|^2 \end{aligned} \tag{6.10}$$

elde edilir. Böylece, (6.7) ve (6.9) denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} |(T_\alpha)_D X|^2 &= |(T_\alpha)_D^2 X|.|J_\alpha X| \\ &= |(T_\alpha)_D^2 X||X| \end{aligned} \tag{6.11}$$

elde edilir. Ayrıca, X ile $(T_\alpha)_D^2 X$ aynı karakterli olduğundan bir λ sabiti $\alpha \in \{1,2,3\}$ olmak üzere

$$(T_\alpha)_D^2 X = \lambda X, \tag{6.12}$$

olacak şekilde alınabilir. O halde, (6.10) ve (6.12) denklemlerinden $\lambda = \cosh^2\theta$ bulunur. Herhangi X time-like vektör alanı için benzer işlemler gerçeklenir.

2) D dağılımı 2. tip eğik ise, herhangi X space-like vektör alanı için $J_\alpha X$ ve $(T_\alpha)_D X$ time-like vektör alanıdır. Aynı zamanda

$$\frac{|(T_\alpha)_D X|}{|J_\alpha X|} < 1$$

sağlandığından bir $\theta > 0$ fonksiyonu için

$$\cos\theta = \frac{|(T_\alpha)_D X|}{|J_\alpha X|} = \frac{\sqrt{-g((T_\alpha)_D X,(T_\alpha)_D X)}}{\sqrt{-g(J_\alpha X, J_\alpha X)}} \tag{6.13}$$

yazılabilir. O halde, (6.13) denkleminden,

$$g((T_\alpha)_D^2 X, X) = -g((T_\alpha)_D X,(T_\alpha)_D X) = -\varepsilon_\alpha \cos^2\theta\, g(X,X) \tag{6.14}$$

şeklinde olup burada $\varepsilon_\alpha = -1$ dir. Ayrıca, $g((T_\alpha)_D^2 X, X) = |(T_\alpha)_D^2 X||X|$ ve $(T_\alpha)_D^2 X = \lambda X$ elde edilir. O halde, $\lambda = \cos^2\theta$ bulunur. Benzer işlemler herhangi X time-like vektör alanı için de bulunabilir.

3) D dağılımı 3. tip eğik ise, herhangi X space-like vektör alanı için $(T_\alpha)_D X$ time-like, $J_\alpha X$ space-like ve herhangi $\theta > 0$ için

$$\sinh\theta = \frac{|(T_\alpha)_D X|}{|J_\alpha X|} = \frac{\sqrt{-g((T_\alpha)_D X,(T_\alpha)_D X)}}{\sqrt{g(J_\alpha X, J_\alpha X)}} \tag{6.15}$$

yazılabilir. Böylece,

$$g((T_\alpha)_D^2 X, X) = -\sinh^2\theta\, g(J_\alpha^2 X, X) = \varepsilon_\alpha \sinh^2\theta\, g(X,X), \tag{6.16}$$

elde edilir ve burada $\varepsilon_\alpha = 1$. Buradan, herhangi X space-like vektör alanı için

$$(T_\alpha)_D^2 X = (\sinh^2\theta) X$$

bulunur. Benzer işlemler herhangi X time-like vektör alanı için de gerçeklenir.

■

7
PARA KUATERNİYON YARI EĞİK ALT MANİFOLDLAR

Tezin bu orijinal bölümünde önceki bölümde verilen $(\bar{M}, J_P, g)$ para-kuaterniyon Hermityen manifoldu üzerindeki D dif.bilir dağılımının eğiklik durumları göz önüne alınarak yarı-eğik alt manifoldlar incelenecektir [39].

Tanım 7.1. $(\bar{M}, J_P, g)$ almost para-kuaterniyon Hermityen manifoldun M alt manifoldunun TM tanjant uzayı, D_1 ve D_2 ortogonal dağılımları için

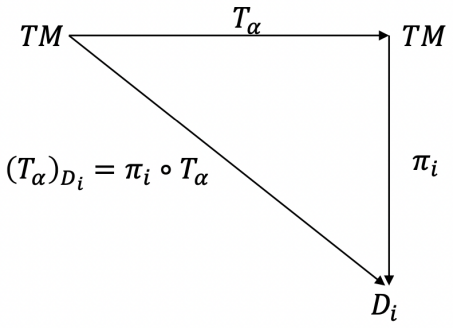
(i) $TM = D_1 \oplus D_2$,

(ii) D_1 J_α ya göre invaryant yani $J_\alpha(D_1) = D_1$,

(iii) D_2 J_α ya göre eğik dağılım

$(\alpha \in \{1, 2, 3\})$ özelliklerini sağlıyorsa, M yarı-eğik alt manifold adını alır.

π_i leri D_i $(i = 1, 2)$ dağılımları üzerine ortogonal izdüşümler olarak alalım.



Şekil 7.1 Dağılım diyagramı

diyagramı kullanılarak, herhangi $X \in TM$ space-like (time-like) vektör alanı için

$$J_\alpha X = (T_\alpha)_{D_1} X + (T_\alpha)_{D_2} X + F_\alpha X \tag{7.1}$$

eşitliği yazılabilir.

Teorem 7.1. *M yarı-eğik alt manifold olmak üzere, D_1 para-kuaterniyonik dağılımı ve D_2 eğik dağılımı T_α invaryanttır.*

İspat. $TM = D_1 \oplus D_2$ ortogonal ayrışımı ve $J_\alpha D_1 = D_1$ kullanılarak, $T_\alpha D_1 = D_1$ elde edilir.
Herhangi $X \in D_2$ için, eşitliğinden

$$J_\alpha X = (T_\alpha)_{D_1} X + (T_\alpha)_{D_2} X + F_\alpha X \tag{7.2}$$

yazılabileceğinden, $Y \in D_1$ alınırsa, $D_1 \perp D_2$ ortogonalliği ve metrik özelliklerinden

$$g((T_\alpha)_{D_1} X, Y) = g(J_\alpha X, Y) = -g(X, J_\alpha Y) = 0 \tag{7.3}$$

bulunur.
Herhangi $Z \in D_2$ için,

$$g((T_\alpha)_{D_1} X, Z) = 0$$

olduğundan, $(T_\alpha)_{D_1} X = 0$ şeklindedir.
O halde, (7.1) eşitliği

$$J_\alpha X = (T_\alpha)_{D_2} X + F_\alpha X \tag{7.4}$$

ifadesine indirgenir. Dolayısıyla, $T_\alpha X = (T_\alpha)_{D_2} X$ yani, $T_\alpha D_2 \subseteq D_2$ şeklindedir.

■

Teorem 7.2. *$(\bar{M}, J_P, g)$ para-kuaterniyon Kaehler manifoldun M yarı-eğik alt manifoldu üzerindeki D_1 para-kuaterniyonik dağılımın integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul $\forall X, Y \in D_1$ için*

$$h(X, J_\alpha Y) = h(J_\alpha X, Y) \tag{7.5}$$

$(\alpha \in \{1, 2, 3\})$ olmasıdır.

İspat. $\forall X, Y \in D_1$ için, $J_\alpha X = T_\alpha X$, $F_\alpha X = 0$ ve $J_\alpha Y = T_\alpha Y$, $F_\alpha Y = 0$ biliyoruz. D_1 dağılımı integrallenebilir olduğundan, $[X, Y] \in D_1$ ve $F_\alpha [X, Y] = 0$ şeklindedir.
Ayrıca, $\forall X, Y \in TM$ için

$$(\nabla_X F_\alpha) Y = \nabla^\perp_X (F_\alpha Y) - F_\alpha \nabla_X Y = -h(X, T_\alpha Y) + f_\alpha h(X, Y) \tag{7.6}$$

ve

$$(\nabla_X T_\alpha)Y = \nabla_X(T_\alpha Y) - T_\alpha(\nabla_X Y) = A_{F_\alpha Y}X + t_\alpha h(X,Y) \tag{7.7}$$

yazılabileceğinden,
$F_\alpha[X,Y] = F_\alpha(\nabla_X Y - \nabla_Y X)$ ifadesinde (7.6) ve (7.7) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} F_\alpha[X,Y] &= [h(X,T_\alpha Y) - f_\alpha h(X,Y)] - [h(Y,T_\alpha X) - f_\alpha h(Y,X)] \\ &= h(X,T_\alpha Y) - h(Y,T_\alpha X) \\ 0 &= h(X,J_\alpha Y) - h(Y,J_\alpha X) \end{aligned} \tag{7.8}$$

bulunur. Böylece

$$h(X,J_\alpha Y) = h(J_\alpha X,Y)$$

elde edilir.

■

Teorem 7.3. *$\bar{M}$ para-kuaterniyon Kaehler manifoldun M yarı-eğik alt manifoldu üzerindeki D_2 dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul $\forall X, Y \in D_2$ için,*

$$\pi_1(\nabla_X T_\alpha Y - \nabla_Y T_\alpha X) = \pi_1(A_{F_\alpha Y}X - A_{F_\alpha X}Y) \tag{7.9}$$

olmasıdır.
Burada π_1, D_1 para-kuaterniyon dağılımı üzerine iz düşümdür.

İspat. $\forall\ \alpha \in \{1,2,3\}$ için, $(T_\alpha)_{D_1} = \pi_1 \circ T_\alpha$ olduğundan (7.6) ve (7.7) denklemleri kullanılarak,

$$(T_\alpha)_{D_1}(\nabla_X Y) = (\pi_1 \circ T_\alpha)(\nabla_X Y) = \pi_1(T_\alpha(\nabla_X Y)) = \pi_1(\nabla_X T_\alpha Y - A_{F_\alpha Y}X - t_\alpha h(X,Y)) \tag{7.10}$$

$$(T_\alpha)_{D_1}(\nabla_Y X) = (\pi_1 \circ T_\alpha)(\nabla_Y X) = \pi_1(T_\alpha(\nabla_Y X)) = \pi_1(\nabla_Y T_\alpha X - A_{F_\alpha X}Y - t_\alpha h(Y,X)) \tag{7.11}$$

$$\begin{aligned} (T_\alpha)_{D_1}[X,Y] &= (T_\alpha)_{D_1}\nabla_X Y - (T_\alpha)_{D_1}\nabla_Y X \\ &= \pi_1(\nabla_X T_\alpha Y - A_{F_\alpha Y}X - t_\alpha h(X,Y) \\ &\quad - \nabla_Y T_\alpha X + A_{F_\alpha X}Y + t_\alpha h(Y,X)) \\ &= \pi_1(T_\alpha[X,Y]) \end{aligned} \tag{7.12}$$

ve D_2 integrallenebilir olduğundan, $\forall X, Y \in D_2$ için $[X,Y] \in D_2$ şeklindedir.
Böylece, $(T_\alpha)_{D_1}[X,Y] = 0$ ve $\pi_1(\nabla_X T_\alpha Y - \nabla_Y T_\alpha X) = \pi_1(A_{F_\alpha Y}X - A_{F_\alpha X}Y)$ istenilen eşitliği elde edilmiş olur.
Tersine, $(T_\alpha)_{D_1}[X,Y] = 0$ ve $[X,Y] \in D_2$ yani D_2 integrallenebilirdir.

■

Dağılımların tamamen geodezik olması ile ilgili durumları inceleyelim.

Teorem 7.4. *M manifoldu $\bar{M}$ para-kuaterniyon Kaehler manifoldun yarı-eğik alt manifoldu olsun. D_1 para-kuaterniyonik dağılımı tamamen geodezik ise, $\forall X, Y \in D_1$ için,*

$$(\nabla_X T_\alpha)Y = 0 \tag{7.13}$$

ve

$$\nabla_X Y \in D_1 \tag{7.14}$$

şeklindedir.

İspat. D_1 tamamen geodezik dağılım olduğundan, $\forall X, Y \in D_1$ için, $h(X,Y) = 0$ ve para-kuaterniyonik dağılım için $F_\alpha X = 0$, $F_\alpha Y = 0$ olduğundan (7.6), (7.7) denklemleri kullanılarak,

$$(\nabla_X T_\alpha)Y = \nabla_X(T_\alpha Y) - T_\alpha(\nabla_X Y) = A_{F_\alpha Y}X + t_\alpha h(X,Y) = 0 \tag{7.15}$$

ve

$$(\nabla_X F_\alpha)Y = \nabla^\perp_X(F_\alpha Y) - F_\alpha \nabla_X Y = -h(X, T_\alpha Y) + f_\alpha h(X,Y) = 0 \tag{7.16}$$

$$-F_\alpha(\nabla_X Y) = -h(X, T_\alpha Y) + f_\alpha h(X,Y) = 0 \tag{7.17}$$

elde edilir. Yani,

$$(\nabla_X T_\alpha)Y = 0 \tag{7.18}$$

ve

$$F_\alpha(\nabla_X Y) = 0 \tag{7.19}$$

bulunur. Böylece, $\forall X, Y \in D_1$ için, $(\nabla_X T_\alpha)Y = 0$ ve $\nabla_X Y \in D_1$ elde edilir.

■

Teorem 7.5. *$\bar{M}$ para-kuaterniyon Kaehler manifoldun M yarı-eğik alt manifoldu üzerindeki D_2 dağılımının tamamen geodezik olması için gerek ve yeter koşul $\forall X, Y \in D_2$ için*

$$(\nabla_X F_\alpha)Y = 0$$

ve

$$(\nabla_X T_\alpha)Y = A_{F_\alpha Y}X$$

olmasıdır.

İspat. D_2 dağılımı tamamen geodezik ise, $\forall X, Y \in D_2$ için $h(X,Y)=0$ olduğundan, (7.6) ve (7.7) denklemleri yardımıyla

$$(\nabla_X T_\alpha)Y = \nabla_X(T_\alpha Y) - T_\alpha(\nabla_X Y) = A_{F_\alpha Y}X \tag{7.20}$$

ve

$$(\nabla_X F_\alpha)Y = \nabla^\perp_X(F_\alpha Y) - F_\alpha \nabla_X Y = -h(X, T_\alpha Y) + f_\alpha h(X,Y) = 0 \tag{7.21}$$

bulunur. Yani, sırasıyla

$$(\nabla_X T_\alpha)Y = A_{F_\alpha Y}X \tag{7.22}$$

ve

$$(\nabla_X F_\alpha)Y = 0$$

elde edilir.
Tersine, $(\nabla_X T_\alpha)Y = A_{F_\alpha Y}X$ ve $(\nabla_X F_\alpha)Y = 0$ şeklinde ise,

$$T_\alpha(\nabla_X Y) = A_{F_\alpha Y}X + t_\alpha h(X,Y) \tag{7.23}$$

eşitliğinden, $t_\alpha h(x,Y) = 0$ elde edilir. O halde, $J_\alpha h(X,Y) = t_\alpha h(X,Y) + f_\alpha h(X,Y)$ ifadesi

$$J_\alpha h(X,Y) = f_\alpha h(X,Y) \tag{7.24}$$

eşitliğine indirgenir.
$\alpha \in \{1,2,3\}$ indisleri ve $\forall X, Y \in TM$ için $\nabla F_\alpha = 0$ olduğundan

$$(\nabla_X F_\alpha)Y = -h(X, T_\alpha Y) + f_\alpha h(X,Y) \tag{7.25}$$

eşitliği kullanılırsa,

$$h(X, T_\alpha Y) = f_\alpha h(X,Y) \tag{7.26}$$

elde edilir.
D_2 θ açılı has eğik dağılımının, 1. tip eğik, 2. tip eğik, 3. tip eğik durumlarında, sırasıyla $\lambda = (\cosh^2\theta, \cos^2\theta, \sinh^2\theta)$ olduğundan, $\forall X, Y \in D_2$ için (7.24) ve (7.26) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \lambda h(X,Y) = h(X, \lambda Y) &= h(X, T_\alpha^2 Y) \\ &= f_\alpha^2 h(X,Y) \\ &= J_\alpha^2 h(X,Y) \\ &= -\varepsilon_\alpha h(X,Y) \end{aligned} \tag{7.27}$$

elde edilir. D_2 has eğik dağılım olduğundan, $\theta \neq 0$ $\lambda \neq +1, -1$ dir. Böylece, $\forall X, Y \in D_2$ için $h(X,Y)=0$ yani, D_2 tamamen geodezik dağılımdır. ■

Tanım 7.2. M alt manifoldu üzerinde D_1 ve D_2 ortogonal dağılımlar olmak üzere, $X \in D_1$ ve $Y \in D_2$ için, $h(X,Y) = 0$ ise, M $(D_1; D_2)$ tamamen karışık geodezik alt manifold olarak isimlendirilir.

Teorem 7.6. *$\bar{M}$ para-kuaterniyon Hermityen manifoldunun M yarı-eğik alt manifoldunun tamamen karışık geodezik olması için gerek ve yeter koşul herhangi $X \in D_i$, $N \in T^{\perp}M$ iken, $A_N X \in D_i$ $(i = 1, 2)$ olmasıdır.*

İspat. Eğer M $(D_1; D_2)$ tamamen karışık geodezik alt manifold ise, herhangi $X \in D_1$ ve $Y \in D_2$ vektör alanları için ortalama eğrilik $h(X,Y) = 0$ dır. O halde, $N \in T^{\perp}M$ normal vektör alanı için

$$g(A_N X, Y) = g(h(X,Y), N) \tag{7.28}$$

eşitliğinden $g(A_N X, Y) = 0$ yani $\forall Y \in D_2$ için $A_N X = 0$ dır. Böylece, $A_N X \in D_1$ bulunur. Tersine, $X \in D_1$ ve $Y \in D_2$ iken $A_N X \in D_1$ ise, $g(A_N X, Y) = g(h(X,Y), N) = 0$ dır. O halde, $N \in T^{\perp}M$ normal vektör alanı iken $h(X,Y) = 0$ yani M $(D_1; D_2)$ tamamen karışık geodezik alt manifold bulunur.
Benzer işlemler M yarı-eğik alt manifoldu $(D_2; D_1)$ tamamen karışık geodezik alt manifold iken, $X \in D_2$ ve $Y \in D_1$ için de yapılabilir. ■

Teorem 7.7. *$(\bar{M}, J_P, g)$ para-kuaterniyon Kaehler manifoldun M yarı-eğik alt manifoldu olsun. $\forall X, Y \in TM$ için $\nabla F_\alpha = 0$ ise, M alt manifoldu $(D_1; D_2)$ karışık tamamen geodezik yada $X \in D_1, Y \in D_2$ vektör alanları için $h(X,Y)$ f_α^2 endomorfizminin ± 1 özdeğerlerine karşılık gelen öz vektördür.*

İspat. $X, Y \in TM$ vektör alanları için, $\nabla F_\alpha = 0$ iken

$$\nabla^{\perp}_X (F_\alpha Y) - F_\alpha \nabla_X Y = -h(X, T_\alpha Y) + f_\alpha h(X,Y) \tag{7.29}$$

denkleminden

$$h(X, T_\alpha Y) = f_\alpha h(X,Y) \tag{7.30}$$

elde edilir. O halde, $X \in D_1$ ve $Y \in D_2$ iken,

$$f_\alpha^2 h(X,Y) = f_\alpha h(X, T_\alpha Y) = h(X, T_\alpha^2 Y) \tag{7.31}$$

yazılabilir.
$\forall Y \in D_2$ için $T_\alpha Y = (T_\alpha)_{D_2} Y$ olduğundan, denkleminden

$$f_\alpha^2 h(X,Y) = h(X, (T_\alpha)^2_{D_2} Y) = \lambda h(X,Y) \tag{7.32}$$

şeklindedir. Burada, D_2 has eğik dağılım olduğundan, 1.tip eğik, 2.tip eğik, 3.tip eğik

durumlarında, sırasıyla $\lambda = (\cosh^2\theta, \cos^2\theta, \sinh^2\theta)$ şeklinde olduğunu biliyoruz. Ayrıca, $X \in D_1$ ve $Y \in D_2$ için

$$f_\alpha^2 h(Y,X) = f_\alpha h(Y, T_\alpha X) = h(Y, T_\alpha^2 X) = h(Y,X) \tag{7.33}$$

ve D_1 para-kuaterniyonik dağılım olduğundan (7.33) denklemi

$$f_\alpha^2 h(Y,X) = -\varepsilon_\alpha h(Y,X)$$

indirgenir. Burada, $\varepsilon_\alpha \pm 1$ dir. O halde, $h(X,Y) = 0$ yani M tamamen karışık geodezik alt manifold ya da f_α^2 endomorfizminin ± 1 özdeğerlerine karşılık gelen özvektördür.

■

Teorem 7.8. *$(\bar{M}, J_P, g)$ para-kuaterniyon Kaehler manifoldun M karışık tamamen geodezik yarı-eğik alt manifoldunun D_1 para-kuaterniyonik dağılımı integrallenebilir ise, $\forall X \in D_1$ ve $N \in T^\perp M$ vektör alanları için,*

$$A_N T_\alpha X = -T_\alpha A_N X$$

şeklindedir.

İspat. D_1 dağılımı integrallenebilir iken, $\forall X, Y \in D_1$ için $F_\alpha X = 0$, $F_\alpha Y = 0$ durumları, (7.28) eşitliği ve metrik özellikleri kullanılarak, herhangi $N \in T^\perp M$ normal vektör alanı için

$$\begin{aligned} g(J_\alpha A_N X, Y) &= -g(A_N X, J_\alpha Y) \\ &= -g(A_N X, T_\alpha Y) \\ &= -g(h(X, T_\alpha Y), N) \\ &= -g(h(T_\alpha X, Y), N) \\ &= -g(A_N T_\alpha X, Y) \end{aligned} \tag{7.34}$$

bulunur.
Böylece, $g(T_\alpha A_N X, Y) = -g(A_N T_\alpha X, Y)$ eşitliğinden $\forall Y \in D_1$ vektör alanı için

$$A_N T_\alpha X = -T_\alpha A_N X$$

elde edilir. ■

8
SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, para-kuaterniyon Hermityen manifoldların eğik alt manifoldları farklı karakterizasyonlar ve semi-Riemann geometri özellikleri kullanılarak verilmiştir. T ve F kanonik yapıları ile ilgili bazı eşitlik ve teoremler elde edildikten sonra, dağılımların eğiklik durumları benzer biçimde incelenmiş ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Para-kuaterniyonlar metrik yapısı bakımından özel bir manifold çeşididir ve bazı sonuçlara ulaşmamızda dayanak teşkil etmiştir. Eğik alt manifoldların farklı metrik yapısına sahip manifoldlar üzerinde incelenmesi adına bu çalışma önemli ve geniş bir kaynak oluşturma niteliği taşımaktadır.

KAYNAKÇA

[1] B. Chen, "Geometry of slant submanifolds, Katholieke univ," *Leuven, Louvain, v. 1*, 1990.

[2] B.-Y. Chen, "Slant immersions," *Bulletin of the Australian Mathematical Society, v. 41, n. 1, ss. 135–147*, 1990.

[3] G. Li, C. Wu, "Slant immersions of complex space forms and chen's inequality," *Acta Mathematica Scientia, v. 25, n. 2, ss. 223–232*, 2005.

[4] N. Papaghiuc, "Semi-slant submanifolds of kaehlerian manifolds," *Ann. St. Univ. Iasi. tom., v. 9, ss. 55–61*, 1994.

[5] J. Cabrerizo, A. Carriazo, L. Fernandez, M. Fernandez, "Slant submanifolds in sasakian manifolds," *Glasgow Mathematical Journal, v. 42, n. 1, ss. 125–138*, 2000.

[6] B. Sahin, "Slant submanifolds of an almost product riemannian manifold," *Journal of the Korean Mathematical Society, v. 43, n. 4, ss. 717–732*, 2006.

[7] B. Sahin, "Slant submanifolds of quaternion kaehler manifolds," *Communications of the Korean Mathematical Society, v. 22, n. 1, ss. 123–135*, 2007.

[8] B. Chen, I. Mihai, "Classification of quasi-minimal slant surfaces in lorentzian complex space forms," *Acta Mathematica Hungarica, v. 122, n. 4, ss. 307–328*, 2009.

[9] B.-Y. Chen, O. J. Garay, "Classification of quasi-minimal surfaces with parallel mean curvature vector in pseudo-euclidean 4-space $\mathbf{E}_2^4$," *Results in Mathematics, v. 55, n. 1, ss. 23–38*, 2009.

[10] K. Arslan, A. Carriazo, B.-Y. Chen, C. Murathan, *et al.*, "On slant submanifolds of neutral kaehler manifolds," *Taiwanese Journal of Mathematics, v. 14, n. 2, ss. 561–584*, 2010.

[11] A. Carriazo, M. J. Pérez-Garcıa, "Slant submanifolds in neutral almost contact pseudo-metric manifolds," *Differential Geometry and its Applications, v. 54, ss. 71–80*, 2017.

[12] M. Khan, K. Singh, V. Khan, "Slant submanifolds of lp-contact manifolds," *Differential Geometry Dynamical Systems, v. 12, ss. 102–108*, 2010.

[13] P. Alegre, "Slant submanifolds of lorentzian sasakian and para sasakian manifolds," *Taiwanese Journal of Mathematics, v. 17, n. 3, ss. 897–910*, 2013.

[14] Y. Gündüzalp, "Neutral slant submanifolds of a para-kaehler manifold," in *Abstract and Applied Analysis*, Hindawi, 2013.

[15] P. Alegre, A. Carriazo, "Slant submanifolds of para-hermitian manifolds," *Mediterranean Journal of Mathematics, v.14, n.5, ss. 1–14*, 2017.

[16] H. Hacısalihoğlu, *Diferansiyel Geometri*. Nobel Basım Evi, 2004.

[17] H. H. Hacısalihoğlu, *Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş*. Fırat Üniversitesi, 1980.

[18] W. A. Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces*. Oxford University Press, 2009.

[19] P. M. Gadea, J. M. Masqué, I. V. Mykytyuk, *Analysis and algebra on differentiable manifolds: a workbook for students and teachers*. Springer, 2013.

[20] Q. Khan, *Differential Geometry of Manifolds*. PHI Learning Pvt. Ltd., 2012.

[21] R. Mohseni, R. A. Wolak, "Cohomology of quaternionic foliations and orbifolds," *arXiv preprint arXiv:2202.02733*, 2022.

[22] A. F. Swann, "Hyperkähler and quaternionic kähler geometry," Ph.D. dissertation, University of Oxford, 1990.

[23] B.-Y. Chen, *Pseudo-Riemannian Geometry,[δ]-Invarints and Applications*. World Scientific.

[24] K. L. Duggal, A. Bejancu, *Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications*. Springer Science & Business Media, v. 364, 2013.

[25] K. L. Duggal, R. Sharma, *Symmetries of spacetimes and Riemannian manifolds*. Springer Science & Business Media, v. 487, 2013.

[26] B. O'neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativty*. Academic press, 1983.

[27] N. J. Hicks, *Notes on Differential Geometry*. van Nostrand Princeton, v. 1, 1965.

[28] A. C. Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*. Springer, 2001.

[29] R. Berndt, *An Introduction to Symplectic Geometry*. American Mathematical Soc., n. 26, 2001.

[30] D. Huybrechts, *Complex Geometry: An Introduction*. Springer, v. 78, 2005.

[31] M. Kon, K. Yano, *Structures on Manifolds*. World scientific, v. 3, 1985.

[32] N. Kumar, "Notes on symplectic geometry," 2015.

[33] S. Vandoren, "Lectures on riemannian geometry, part ıı: Complex manifolds," *Fulltext on Stefan Vandoren's personal page*, 2008.

[34] B.-Y. Chen, M. H. Shahid, F. R. Al-Solamy, *Complex geometry of slant submanifolds*, 2021.

[35] E. Ata, "Simplektik diferensiyel geometri üzerine," Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, 2004.

[36] S. Ianuş, R. Mazzocco, G. E. Vılcu, "Real lightlike hypersurfaces of paraquaternionic kähler manifolds," *Mediterranean Journal of Mathematics, v. 3, n. 3, ss. 581–592*, 2006.

[37] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, ss. 1–31, 2013.

[38] Ç. Ay, S. Yüce, "On slant submanifolds of para-quaternion kaehler manifolds," *TWMS J. Pure Appl. Math.*, Basım aşamasında.

[39] Ç. Ay, S. Yüce, "Semi-slant submanifolds of para-quaternion manifolds," Hazırlık aşamasında.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Makale

1. Ç. Ay, S. Yüce, “On slant submanifolds of para-quaternion kaehler manifolds,” TWMS J. Pure Appl. Math., Basım aşamasında