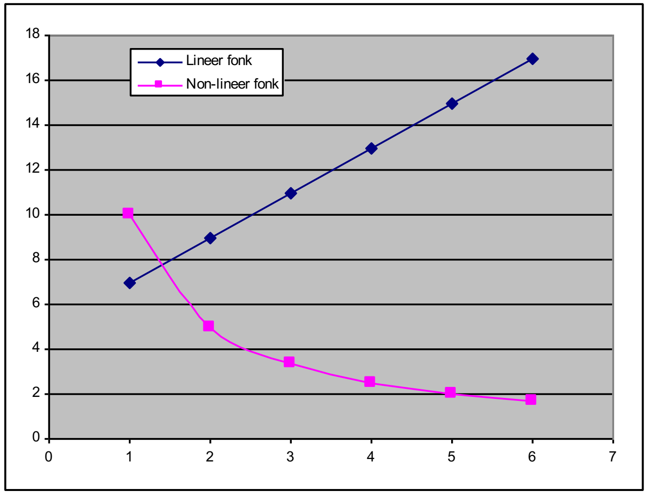
NONLİNEER DENKLEM SİSTEMİ ÇÖZÜMÜ

NEWTON-RAPHSON YÖNTEMİ

NON-LİNEER DENKLEMLER

Lineer denklem; bağımlı değişkenin bağımsız değişken ile doğrusal değişim gösterdiği denklemlerdir. Polinom gösterimde bilinmeyenlerin üzeri 1 ise bu denklemler lineer denklemlerdir.

Bunun dışında kalan polinomlar, üstel, trigonometrik, logaritmik fonksiyonlar ve diğerleri non-lineer denklemlerdir.



NON-LİNEER DENKLEMLER

Non-lineer denklem sistemlerinde denklemlerden en az biri lineer değildir.

Non-lineer denklem sisteminin çözümü, tüm denklemleri aynı zamanda sağlayan bağımsız değişkenlerin değerlerinin bulunmasıdır.

Lineer denklem sisteminde olduğu gibi nonlineer denklem sistemlerinde de çözümünün olması için bağımsız değişken sayısı ile denklem sayısı aynı olmalıdır.

NON-LİNEER DENKLEMLER

İki değişkenli iki nonlineer denklem sisteminin gösterimi aşağıdaki şekildedir.

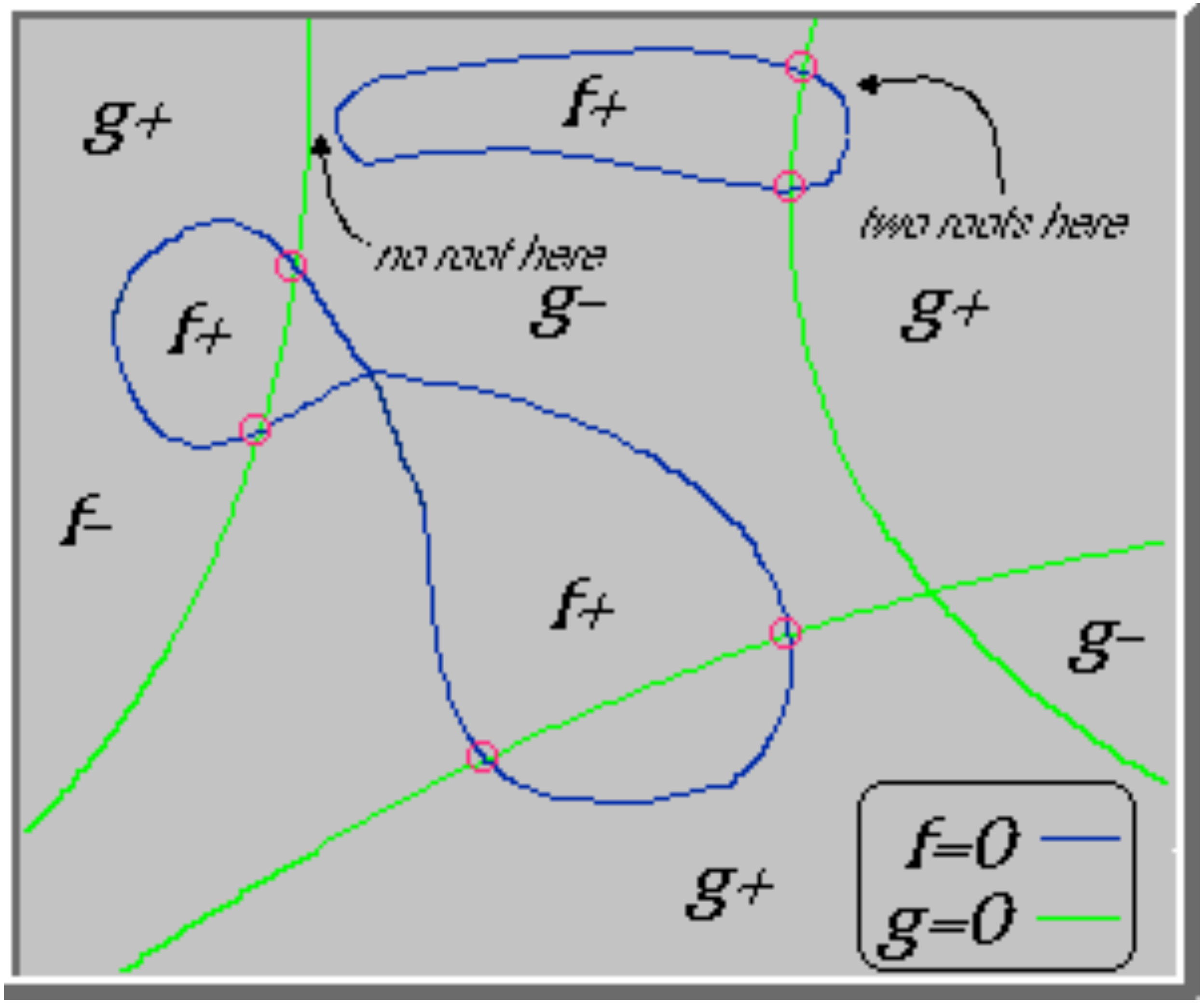
$$f(x, y) = 0$$
$$g(x, y) = 0$$

Nonlineer iki denklemin grafiği; fonksiyonu 0 yapan bağımsız değişenlerin değerlerini veren eğrilerden oluşur. Bu eğriler fonksiyonların negatif ve pozitif değerler aldığı bölgeleri ayırır.

Denklemlerin çözümü eğrilerin kesişim noktalarıdır.

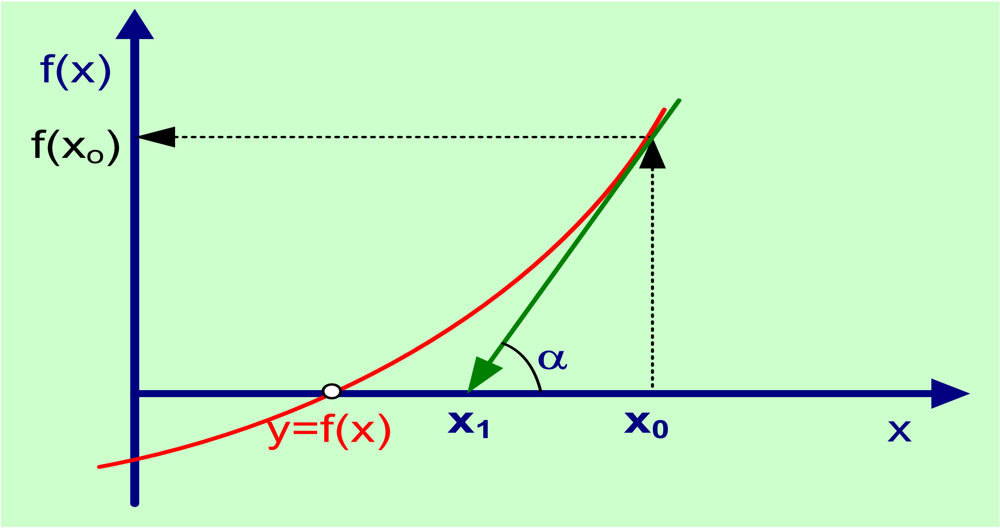
NON-LİNEER DENKLEMLER

$$f(x,y)=0$$
$$g(x,y)=0$$



NEWTON-RAPHSON

Tek boyutlu denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan Newton-Raphson yöntemi çok boyutlu nonlineer denklem sistemlerinin çözümünde de kullanılır.



$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

NEWTON-RAPHSON

Taylor serisi, bir fonksiyonun, bir noktadaki türev değerlerinden hesaplanan sonsuz toplamı şeklindeki gösterimidir.

Bir *f*(*x*) fonksiyonunun x=a için*Taylor serisi* şu şekilde tanımlanmıştır:

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

NEWTON-RAPHSON

Daha düzenli bir gösterim olan *toplam gösterimi*yle ise şu şekilde yazılır:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

<u>*ÖRNEK*</u>

a = 0 noktasında e^x üstel fonksiyonu için Taylor serisi,

$$e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \quad = \quad 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots.$$

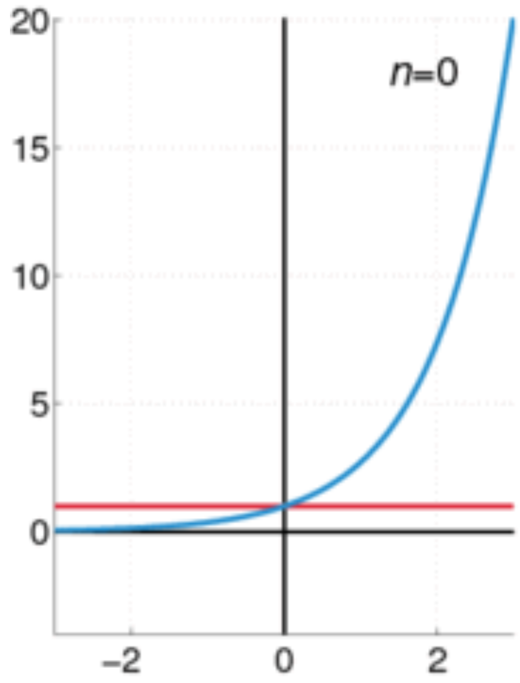
NEWTON-RAPHSON

Taylor serileri, fonksiyonların verilen bir noktadaki sayısal değerlerini bulmak için kullanılabilirler.

Buna ek olarak, Taylor serileri üzerinden cebirsel işlemler yapmak (ör. türev ya da integral) daha kolay olabilmektedir.

NEWTON-RAPHSON

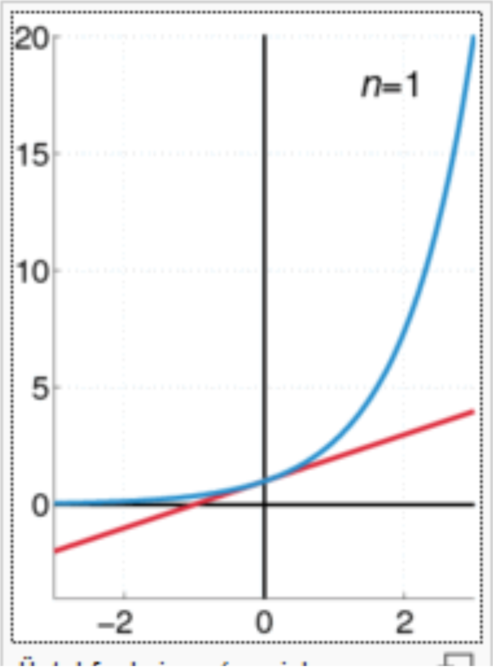
Taylor serisinin ilk terimi fonksiyonun açıklıdğı x=a noktasındaki f(a) sabit fonksiyonunu verir.



NEWTON-RAPHSON

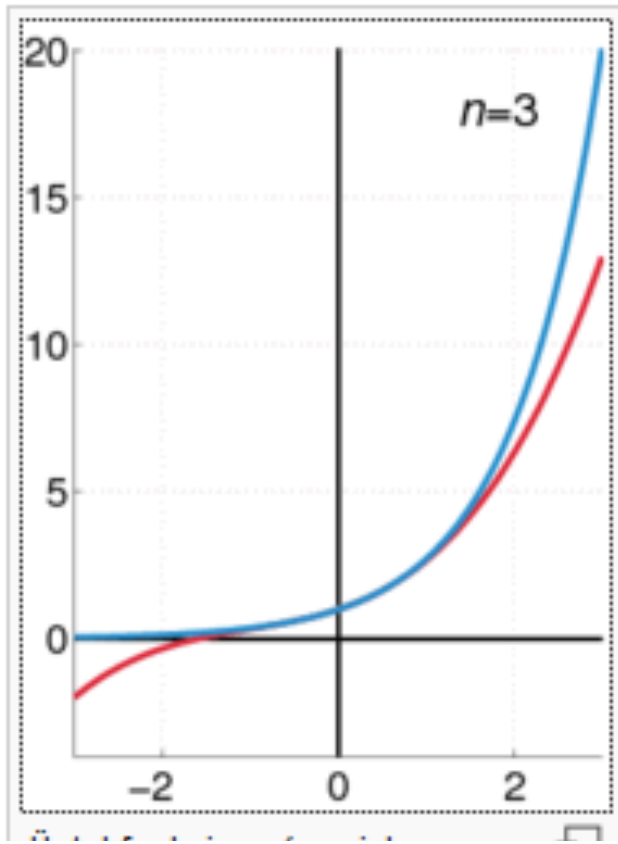
Taylor serisinin ilk iki terimi fonksiyonun açıklıdğı x=a noktasındaki teğet denkleminiverir.

f(x)≈ $f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)$



NEWTON-RAPHSON

Taylor serisinin terim sayısı artıkça fonksiyon ile serinin değerleri birbirine yaklaşır.



NEWTON-RAPHSON

Taylor serisini çok değişkenli fonksiyonlar içinde yazılabilir. İki değişkenli f(x,y) fonksiyonun x=a ve y=b noktaları için taylor serisi;

$$f(x,y) \approx f(a,b) + (x-a)\, f_x(a,b) + (y-b)\, f_y(a,b)$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x-a)^2\, f_{xx}(a,b) + 2(x-a)(y-b)\, f_{xy}(a,b) + (y-b)^2\, f_{yy}(a,b)\right],$$

NEWTON-RAPHSON

Yöntemi 3 değişkenli denklem sistemi için ele alalım.

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = 0$$

NEWTON-RAPHSON

Bu denklemlerin çözümünde uygulanacak işlem basamakları;

1. Bütün terimler sol tarafa alınarak eşitlikler 0'a eşitlenir.

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3) = 0$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3) = 0$$

NEWTON-RAPHSON

2. Bütün bağımsız değişkenler için ilk tahmin değerleri belirlenir.

   x_{1t}

   x_{2t}

   x_{3t}

3. İlk tahmin değerleri fonksiyonda yerine yazılarak değerleri hesaplanır.

$$f_1 = f_1(x_{1t}, x_{2t}, x_{3t})$$

$$f_2 = f_2(x_{1t}, x_{2t}, x_{3t})$$

$$f_3 = f_3(x_{1t}, x_{2t}, x_{3t})$$

NEWTON-RAPHSON

4.Bütün eşitlikler ilk tahmin değerleri için Taylor serisine açılarak birinci dereceden terimler alınır.

$$f_1(x_1,x_2,x_3) \cong f_1(x_{1t},x_{2t},x_{3t}) + \frac{\partial f_1(x_{1t},x_{2t},x_{3t})}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1(x_{1t},x_{2t},x_{3t})}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_1(x_{1t},x_{2t},x_{3t})}{\partial x_3} dx_3 \cong 0$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3) \cong f_2(x_{1t},x_{2t},x_{3t}) + \frac{\partial f_2(x_{1t},x_{2t},x_{3t})}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2(x_{1t},x_{2t},x_{3t})}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_2(x_{1t},x_{2t},x_{3t})}{\partial x_3} dx_3 \cong 0$$

$$f_3(x_1,x_2,x_3) \cong f_3(x_{1t},x_{2t},x_{3t}) + \frac{\partial f_3(x_{1t},x_{2t},x_{3t})}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_3(x_{1t},x_{2t},x_{3t})}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f_3(x_{1t},x_{2t},x_{3t})}{\partial x_3} dx_3 \cong 0$$

Burada dx_1, dx_2 ve dx_3 bilinmeyenlerdir. Yukarıdaki denklem sistemi lineer denklem sistemi olduğundan bu denklem sistemi çözülerek değerler bulunur.

NEWTON-RAPHSON

dx_1, dx_2 ve dx_3 değerleri;

$$dx_1 = x_{1_{t+1}} - x_{1_t}$$
$$dx_2 = x_{2_{t+1}} - x_{2_t}$$
$$dx_3 = x_{3_{t+1}} - x_{3_t}$$

Olup buradan bir sonraki iterasyon değerleri

$$x_{1_{t+1}} = x_{1_t} + dx_1$$
$$x_{2_{t+1}} = x_{2_t} + dx_2$$
$$x_{3_{t+1}} = x_{3_t} + dx_3$$

Elde edilir.

NEWTON-RAPHSON

5. Oluşturulan lineer denklem sisteminin çözümünden dx_1, dx_2 ve dx_3 değerleri elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ -f_3 \end{bmatrix}$$

NEWTON-RAPHSON

6. Elde edilen çözümden bir sonraki iterasyon değerleri

$$x_{1_{t+1}} = x_{1_t} + dx_1$$
$$x_{2_{t+1}} = x_{2_t} + dx_2$$
$$x_{3_{t+1}} = x_{3_t} + dx_3$$

bulunur.

7. Eğer istenen yakınsama sağlanmış ise işlem sonlandırılır. İstenen yakınsama sağlanmadı ise yeni bulunan tahmin değerleri ile 3. basamağa dönülerek işlemler tekrarlanır.

NEWTON-RAPHSON

İşlemleri sonlandırmak için bağıl hatadan yararlanılır. Bağıl hata;

$$\varepsilon = \frac{\left| x_{i+1} - x_i \right|}{x_{i+1}}$$