T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİRLEŞTİRİLMİŞ CEBİR

Esra TARAKCI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Prof. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Mayıs, 2024

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİRLEŞTİRİLMİŞ CEBİR

Esra TARAKCI tarafından hazırlanan tez çalışması 31.05.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Gürsel YEŞİLOT
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Gürsel YEŞİLOT, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Erdoğan Mehmet ÖZKAN, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Ünsal TEKİR, Üye
Marmara Üniversitesi _____

Danışmanım Prof. Dr. Gürsel YEŞİLOT sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Birleştirilmiş Cebir başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Esra TARAKCI

Bu çalışma, 2210-A Yurt İçi Genel Yüksek Lisans Burs Programı ile desteklenmiştir.

Sevdiklerime

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın yürütülmesi sırasında destek ve emeklerini benden esirgemeyen, bilgi birikimiyle bana çok şey katan, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyacağım değerli hocam Prof. Dr. Gürsel YEŞİLOT'a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca Genel Yurt İçi Burs Programı kapsamında sağladığı destek için TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunmak isterim.

Tez yazma sürecimin her aşamasında yanımda olan, desteklerini benden esirgemeyen Oğuz AYLIKCI'ya ve her daim bana güvenen arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım. Son olarak eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle yanımda olan çok sevgili aileme sevgi ve saygılarımı sunarım.

Esra TARAKCI

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ **vii**

ÖZET **viii**

ABSTRACT **ix**

1 GİRİŞ **1**

1.1 Literatür Özeti 1

1.2 Tezin Amacı 3

1.3 Hipotez 3

2 TEMEL KAVRAMLAR **4**

2.1 Halkalar ve İdealler 4

2.2 Modüller ve Alt Modüller 9

3 BİRLEŞTİRİLMİŞ CEBİR YAPISI **12**

4 BİRLEŞTİRİLMİŞ CEBİR YAPISININ ÖZEL HALLERİ **26**

5 SONUÇ **41**

KAYNAKÇA **42**

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR **44**

SİMGE LİSTESİ

$Var(I)$	A halkasının I idealini içeren tüm asal ideallerinin kümesi
$Spec(A)$	A halkasının tüm asal ideallerinin kümesi
$J(A)$	A halkasının tüm maksimal ideallerinin kesişimi
$<$	Alt halka
$\subseteq$	Alt kümesidir
$\nsubseteq$	Alt kümesi değildir
$\emptyset$	Boş küme
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$\neq$	Eşit değildir
Çek(f)	f homomorfizmasının çekirdeği
$\Rightarrow$	Gerek koşul
$\forall$	Her
$\trianglelefteq$	İdealidir
$\cong$	İzomorftur
$Ann(J)$	J idealinin anhilatörü
$\cap$	Kesişim
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif Tam Sayılar Kümesi
$\Leftarrow$	Yeter koşul

ÖZET

Birleştirilmiş Cebir

Esra TARAKCI

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Bu çalışma 5 bölümden oluşmaktadır, tez boyunca tüm halkalar aksi belirtilmedikçe birimli, değişmeli ve tüm modüller birimlidir.
Tezin Giriş kısmında birleştirilmiş cebir kavramı ile ilgili günümüze kadar yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. Sonrasında tezin amacı ve hipotez verilmiştir. İkinci bölüm olan Temel Kavramlar kısmında tez boyunca konunun anlaşılabilirliği için gerekli olan temel cebir konuları sırasıyla verilmiştir. Tezin üçüncü bölümünde birleştirilmiş cebir kavramının tanımı yapılmış olup bu kümenin sağladığı temel halka özellikleri ve bu kümenin idealleri incelenmiştir. Tezin dördüncü bölümünde ise birleştirilmiş cebir yapısında modülleri kullanarak oluşturulan yapıların sağladığı halka özelliklerine ve ispatlarına değinilmiştir. Beşinci bölümde ise sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Birleştirilmiş cebir, birleştirilmiş kopya, birleştirilmiş modül.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

Amalgamated Algebra

Esra TARAKCI

Department of Mathematics
Master of Science Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Gürsel YEŞİLOT

This study consists of 5 chapters; throughout the thesis, unless otherwise stated, all rings are commutative with identity and all modules are unital.
In the introduction section of the thesis, the studies carried out to date on the notion of the amalgamated algebra is mentioned. Afterwards, the purpose of the thesis and the hypothesis are given. In the second section, preliminaries section, throughout the thesis, basic algebra topics that are necessary for the understandability of the subject are given respectively. In the third chapter of the thesis, the notion of the amalgamated algebra is defined and the basic ring properties provided by this set and ideals of this set are examined. In the fourth chapter of the thesis, the ring properties and proofs provided by the structures formed using modules in the amalgamated algebra structure are mentioned. In the fifth section, the results are given.

Keywords: Amalgamated algebra, duplication of amalgamated algebra, amalgamated modules.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Bu kısımda birleştirilmiş cebir tanımı ele alınmış ve tanımın ortaya çıktığı ilk günden günümüze kadar yapılan çalışmalarda nasıl yer aldığından bahsedilmiştir.

Dorroh 1932'de [1] birimli olmayan bir A halkasından hareketle ile $\{(n,r)|n \in \mathbb{Z}, r \in A\}$ kümesini ele aldı. Bu kümenin, $(n,r)(m,s) = (nm, ns + rm + rs)$ ile tanımlı çarpma işlemi ile bir halka olduğunu gösterdi. $r \mapsto (0,r)$ fonksiyonu ile de bu kümenin A'nın içine gömüldüğü birimi $(1,0)$ olan bir halka olduğunu elde etti. Bu yeni halkaya Dorroh halkası denir. $A \cong \{(0,r)|r \in A\}$'nın bu yeni halkanın ideali olduğu da kolayca görülür.

1956'da Hilbert'in $14.$ problemini [2] çözmesiyle tanınan matematikçi M. Nagata, bir modülün idealleştirilmesini tanıtarak Dorroh yapısının özel bir halini ele aldı. İdealleştirmeyi ilk kimin düşündüğünü bilmesek de, idealleştirmeyi ideallerle ilgili sonuçları modüllere genişletmek için kullanma fikri Nagata'ya [3] aittir. İdealleştirme, çok sayıda farklı halka yapısının örneklerini ve karşı örneklerini oluşturmak için cebirde paha biçilmez bir araç haline geldi. A birimli bir halka ve M bir A-modül olmak üzere her $a_1, a_2 \in A$ ve $m, n \in M$ için $(a_1, m) + (a_2, n) = (a_1 + a_2, m + n)$ ve $(a_1, m)(a_2, n) = (a_1a_2, a_1n + ma_2)$ sırasıyla $A \oplus M$ üzerinde toplama ve çarpma işlemleri olarak tanımlansın. $A \oplus M$ halkası M'nin A üzerinde idealleştirilmesi veya A'nın M tarafından aşikar genişlemesi olarak adlandırılır ve $A \ltimes M = A \oplus M$ ile ifade edilir. Birim elemanı $(1,0)$ olan bir halka yapısı oluşturur. Burada görüldüğü üzere A, $a \mapsto (a,0)$ fonksiyonuyla ve M de $m \mapsto (0,m)$ fonksiyonuyla $A \ltimes M$ içine gömülür; M'nin görüntüsü $A \ltimes M$'nin karesi sıfır olan bir idealidir.

2007'de M. D'Anna ve M. Fontana [4] makalesinde bir ideal boyunca bir halkanın birleştirilmiş kopyası olarak adlandırılan çok benzer bir yapıyı incelediler. I, birimli

ve değişmeli A halkasının ideali olmak üzere

$$A \bowtie I := \{(a, a+i) | a \in A, i \in I\} \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanır. A halkası $a \mapsto (a, a)$ fonksiyonuyla $A \bowtie I$'nın içine gömülür ve bu yeni halka A'nın bir genişlemesi olarak düşünülebilir.

$A \bowtie I$ halkasını tanımlamanın başka bir yolu, A-modül $A \oplus I$'da olduğu gibi bileşen bileşene toplama ve $(a_1, i_1)(a_2, i_2) = (a_1a_2, a_1i_2 + i_1a_2 + i_1i_2)$ ile verilen çarpma işlemiyle $\{(a, i) | a \in A, i \in I\}$ kümesini ele almaktır. Görüldüğü üzere $g : A \bowtie I \to A \oplus I$ fonksiyonu $g(a, a+i) = (a, i)$ şeklinde tanımlandığında bu iki halka birbirlerine izomorftur. İkinci formda, eğer $I^2 = 0$ ise $A \bowtie I$ halkasının A-modül I'nın Nagata idealleştirmesine izomorf olduğu görülür. Örnek olarak $A = \mathbb{Z}$ ve I, A'nın öz ideali olarak alınırsa $A \bowtie I$ halkasının $(a, a+i) \mapsto (a, i)$ fonksiyonuyla I birimsiz halkasının Dorroh genişlemesi olan $A \oplus I$ halkasına izomorf olduğu görülür.

2009 yılında D'Anna, Finocchiaro ve Fontana'nın tanımladıkları [5] bu yeni küme, bir halkanın bir ideal boyunca birleştirilmiş kopyası ve diğer klasik yapıları incelemek için genel bir çerçeve sağlar. A ve B iki halka ve J, B halkasının bir ideali ve $f : A \to B$ bir halka homomorfizması olsun. $A \times B$ kartezyen çarpım kümesinin bir alt kümesi olan

$$A \bowtie^f J = \{(a, f(a) + j) | a \in A, j \in J\} \tag{1.2}$$

kümesi A ve B'nin f homomorfizmasına göre J ideali boyunca birleşmesi olarak adlandırılır.
Zira bu kavram sayesinde $A + XB[X]$ inşası, $D + M$ inşası ve özel durumlarda Nagata'nın idealizasyonu gibi birçok cebirsel yapının genelleştirilmesi yapılabilir.

2018 yılında ise E. M. Bouba, N. Mahdou ve M. Tamekkante [6] makalesinde modüller ile birleştirilmiş cebir yapısı üzerine çalışmışlardır. I, A halkasının ideali olmak üzere A-modül M alalım.

$$M \bowtie I = \{(m_1, m_2) \in M \times M | m_1 - m_2 \in IM\} \tag{1.3}$$

kümesi bu biçimde tanımlanır ve I ideali boyunca A-modül M'nin birleştirilmiş

kopyası olarak isimlendirilir.

2021 yılına gelindiğinde ise "Amalgamated Modules Along an Ideal" [7] adlı makalede $M \bowtie I$ halkasının daha genel bir tanımı üzerine çalışıldı. $f : A \longrightarrow B$ bir halka homomorfizması; J, B'nin ideali olsun. Ayrıca M, A-modül ve N, B-modül olsun. $\phi : M \longrightarrow N, A$-modül homomorfizması olmak üzere

$$M \bowtie^{\phi} JN := \{(m, \phi(m) + n) | m \in M, n \in JN\} \tag{1.4}$$

biçiminde tanımlanır ve ϕ'ye göre J ideali boyunca M ve N'nin birleştirilmesi olarak isimlendirilir.

Bu halkaların ve homomorfizmanın özellikleriyle bağlantılı olarak $A \bowtie^{f} J$ kümesinin çeşitli özellikleri için tanımlar vermeye olanak sağlamaktadır. Yani [5]'de yazarlar bu yapının temel özelliklerini incelediler. Bu özellikler arasında $A \bowtie^{f} J$'in bir Noetherian halkası, tamlık bölgesi ve indirgenmiş halka olması gibi sınıflandırmalar bulunuyor.

Günümüzde matematikçiler birleştirilmiş cebir kavramında yeni çalışmalar ortaya koymaya devam etmektedir. M. D'Anna ve diğerleri "Properties of chains of prime ideals in an amalgamated algebra along an ideal" makalesinde [8] $A \bowtie^{f} J$ birleşmesinde asal idealleri çalışmışlardır. Son zamanlarda yayınlanan bir makalede [9] $A \bowtie^{f} J$ birleşmesinde zayıf asal idealleri incelenmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışma birleştirilmiş cebir üzerine yayınlanmış makaleleri detaylı bir biçimde irdeleyerek bu yapının özelliklerini geniş bir biçimde ortaya koymak üzere hazırlanmıştır. Birleştirilmiş cebir ile ilgili literatürde mevcut temel tanım ve sonuçları araştırmak ve eğer ispatı mevcut olmayan sonuçlar varsa ispatını ortaya koyarak literatüre katkıda bulunmaya çalışılmıştır. Bu çalışma modüller teorisi ve cebirin ilgili alt alanlarında çalışacak araştırmacılara yardımcı olmayı amaçlamaktadır.

1.3 Hipotez

Birleştirilmiş cebir yapısının bir takım halka özelliklerini sağladığı öngörülmektedir.

2
TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Halkalar ve İdealler

Tanım 2.1.1. Bir A halkası, aşağıdaki aksiyomları karşılayan iki ikili işlem $+$ ve $\cdot$ (toplama ve çarpma) ile birlikte bir kümedir [10]:

1. $(A, +)$ bir değişmeli grup,
2. $\cdot$ işlemi birleşme özelliğini sağlar: yani her $p_1, p_2, p_3 \in A$ için $(p_1.p_2).p_3 = p_1.(p_2.p_3)$,
3. A'da " $\cdot$ ", " $+$ " işlemi üzerine hem sağdan hem de soldan dağılma özelliğini sağlar: yani her $p_1, p_2, p_3 \in A$ için $(p_2 + p_3).p_1 = (p_2.p_1) + (p_3.p_1)$ ve $p_1.(p_2 + p_3) = (p_1.p_2) + (p_1.p_3)$

Eğer " $\cdot$ " değişme özelliğini sağlar ise A halkasına değişmeli halka (Abelyen) halka denir [10] .

Eğer her $d \in A$ için $d.1_A = 1_A.d = d$ özelliğini sağlayan $1_A \in A$ varsa $(A, +, \cdot)$'ya birimli halka denir [10].

Tanım 2.1.2. A halka olmak üzere

1. $0 \neq p \in A$ olmak üzere eğer A'da $p.t = 0$ veya $t.p = 0$ özelliğini sağlayan $0 \neq t \in A$ elemanı mevcutsa p sıfır bölen eleman olarak adlandırılır.
2. A birimli halka ve $1_A \neq 0_A$ olsun. Eğer A'da $r.s = s.r = 1_A$ olacak şekilde bir $s \in A$ varsa, r elemanına A halkasında bir birimsel eleman (terslenebilir eleman) denir. $r \in A$, bir birimsel eleman olduğunda, A'da $r.s = 1_A$ özelliğine sahip tam olarak bir s elemanı vardır; bu elemana r'nin tersi denir ve $s = r^{-1}$ ile gösterilir [10].

Tanım 2.1.3. Birimli, değişmeli A halkasında $1_A \neq 0_A$ olsun. Eğer halkanın sıfır böleni elemanı yoksa, bu halka tamlık bölgesi olarak adlandırılır [11].

Tanım 2.1.4. A değişmeli, birimli halka ve $1_A \neq O_A$ olsun. A'daki sıfırdan farklı her elemanın çarpımsal tersi varsa, yani $p \neq 0$ için $p.q = q.p = 1_A$ olacak şekilde bir $q \in A$ mevcut ise, A'ya cisim denir [12].

Tanım 2.1.5. A bir halka ve $\emptyset \neq A' \subseteq A$ olsun. A', A'nın bir alt halkasıdır ancak ve ancak

1. $b_1, b_2 \in A'$ için $b_1 - b_2 \in A'$
2. $b_1, b_2 \in A'$ için $b_1.b_2 \in A'$

olarak bu iki koşulun sağlanmasıdır [13].

Tanım 2.1.6. A bir halka olsun. $\emptyset \neq I_1 \subseteq A$'ya aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa "ideal" denir [14]:

1. $c_1, c_2 \in I_1$ için $c_1 - c_2 \in I_1$ ve
2. $c_1 \in I_1$ ve $a \in A$ için $a.c_1 \in I_1$

Tanım 2.1.7. A bir değişmeli halka ve I_1, I_2 de iki ideali olsun.
$(I_1 : I_2) = \{a \in A : aI_2 \subseteq I_1\}$ kümesini tanımlayalım. $(I_1 : I_2)$ de bir idealdir ve $I_1 \subseteq (I_1 : I_2)$'dir. Özel olarak $I_1 = 0$ ise $(0 : I_2) = \{a \in A : aI_2 = 0\} = \{a \in A : \forall b \in I_2, ab = 0\}$ idealine I_2'nin anhilatörü denir. $Ann(I_2)$ ile sembolize edilir [12].

Tanım 2.1.8. A halkasında $t \in A$ için $t^m = 0$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{Z}^+$ bulunursa t elemanına nilpotent eleman denir. Ayrıca A halkasının bütün nilpotent elemanlarının kümesi $N(A)$ ile gösterilir. $N(A)$ kümesi, A halkasının bir idealidir [15].

Tanım 2.1.9. A bir halka olsun. A'nın sıfırdan başka nilpotent elemanı yoksa bu halkaya indirgenmiş halka denir. Eğer A indirgenmiş halka ise $N(A) = 0$'dır. Örneğin, $\mathbb{Z}$ bir indirgenmiş halkadır. Daha genel olarak her tamlık bölgesi bir indirgenmiş halka örneğidir [15].

Tanım 2.1.10. $(T, +, \cdot)$ ve $(Y, \oplus, \odot)$ iki halka ve $\sigma : T \longrightarrow Y$ bir tasvir olsun. $\forall t, s \in T$ için

1. $\sigma(t + s) = \sigma(t) \oplus \sigma(s)$
2. $\sigma(t \cdot s) = \sigma(t) \odot \sigma(s)$

3. $\sigma(1_T) = 1_Y$

sağlanıyorsa σ'ya T'dan Y'ye bir halka homomorfizması denir.
σ birebir ise σ'ya monomorfizma, örten ise σ'ya epimorfizma denir. Hem birebir hem de örten σ'ya izomorfizma denir [11].

Tanım 2.1.11. $\sigma : A \longrightarrow B$ halka homomorfizması olsun. O zaman aşağıdaki maddeler sağlanır [13]:

1. $\sigma(0_A) = 0_B$
2. $\forall a \in A$ için $\sigma(-a) = -\sigma(a)$
3. A'daki her terslenebilir eleman için $\sigma(a^{-1}) = \sigma(a)^{-1}$

Tanım 2.1.12. $\sigma : A \longrightarrow B$ homomorfizma olsun. σ'nın çekirdeği Çekσ ile gösterilir ve Çek$\sigma = \{t \in A | \sigma(t) = 0_B\}$ olarak tanımlanır [13].

Teorem 2.1.1. $\vartheta : A \longrightarrow B$ homomorfizma olsun. ϑ izomorfizmadır $\Leftrightarrow$ Çek$\vartheta = \{0_A\}$ [11].

Teorem 2.1.2. $\phi : \mathbb{Z}_m \longrightarrow \mathbb{Z}_k$ bir halka homomorfizmasıdır ancak ve ancak $f(\bar{r}) = \bar{b}\bar{r}$ ve $k|bm$ olacak şekilde bir idempotent $\bar{b} \in \mathbb{Z}_k$ vardır [16].

Tanım 2.1.13. A ve A' iki halka olsun. Eğer A'nün bir S' alt halkası için $A \cong S'$ ise A halkası A' içine gömülebilir denir [14].

Teorem 2.1.3. (Dorroh Genişleme Teoremi) Herhangi bir A halkası birimli bir halka içine gömülebilir [14].

ispat. $A \times \mathbb{Z} = \{(a, n) | a \in A, n \in \mathbb{Z}\}$ kümesi
$(a, n) + (b, m) = (a+b, n+m)$ ve $(a, n).(b, m) = (a.b+m.a+n.b, n.m)$ işlemleri ile bir halkadır. $(A \times \mathbb{Z}, +)$ bir değişmeli gruptur. " $\cdot$ " birleşme özelliğini sağlar ve " $\cdot$ " işleminin " $+$ " işlemi üzerine dağılma özelliği vardır. $\forall (a, n) \in A \times \mathbb{Z}$ için
$(a, n).(0, 1) = (a.0 + a.1 + n.0, n.1) = (a, n)$
$(0, 1).(a, n) = (0.a + n.0 + 1.a, 1.n) = (a, n)$ eşitliklerinde $(0, 1)$, $A \times \mathbb{Z}$'nin birimidir. Şimdi $A \times \{0\} = \{(a, 0) | a \in \mathbb{Z}\}$, $A \times \mathbb{Z}$'nin alt kümesi olduğundan
$A \cong S' < A \times \mathbb{Z}$ olarak S' yerine $A \times \mathbb{Z}$'nin $A \times \{0\}$ alt halkası yazılabilir.
$f : A \longrightarrow A \times \{0\}$, $f(a) = (a, 0)$ şeklinde tanımlanan f bir izomorfizma olduğundan sonuç olarak $A \cong A \times \{0\}$ elde edilir.

Tanım 2.1.14. I,A halkasının ideali olmak üzere $\forall b_1, b_2 \in A$ için $b_1 \sim b_2 \Leftrightarrow b_1 - b_2 \in I$ denklik bağıntısına göre elde edilen A/I toplamsal bölüm grubu $(b_1 + I) +$

$(b_2+I) = (b_1+b_2)+I$ ve $(b_1+I).(b_2+I) = b_1.b_2+I$ işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya A'nın I'ya göre bölüm halkası denir ve $A/I = \{b_1 + I : b_1 \in A\}$'dır [14].

Örnek 2.1.1. $n \in \mathbb{N}$ ve $n > 1$ olsun. n$\mathbb{Z} = \{nb_1 : b_1 \in \mathbb{Z}\}$ kümesi $\mathbb{Z}$'nin bir idealidir. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{b_1 + n\mathbb{Z} : b_1 \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$

Lemma 2.1.1. I, A'nın bir ideali olsun. $\forall t \in A$ için $\alpha(t) = t+I$ ile $\alpha : A \longrightarrow A/I$ fonksiyonu Çek$\alpha = I$ olan bir epimorfizmadır. α doğal (kanonik) homomorfizma olarak adlandırılır [11].

Teorem 2.1.4. (Birinci İzomorfizma) $\sigma : A \longrightarrow B$ bir halka homomorfizma ise A/Çek$\sigma \cong \sigma(A)$ dır [11].

Tanım 2.1.15. I_1, A halkasında ideal olmak üzere I_1'nın radikali $\sqrt{I_1} = \{k \in A : k^n \in I_1\}$ ile tanımlanır. Özel olarak $\sqrt{(0)}$'a A'nın nil radikali denir [15].

Lemma 2.1.2. A halka ve I_1, I_2 de A'nın iki ideali olsun. Aşağıdakiler ifadeler sağlanır [12]:

1. $\sqrt{I_1 + I_2} = \sqrt{\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}}$
2. $\sqrt{\sqrt{I_1}} = \sqrt{I_1}$
3. $\sqrt{I_1} = A \Leftrightarrow I_1 = A$
4. $\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2} = A \Leftrightarrow I_1 + I_2 = A$
5. $\sqrt{I_1 I_2} = \sqrt{I_1 \cap I_2} = \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2}$

Tanım 2.1.16. A halka olsun. $d \in A$ alalım, $dA := \{da | a \in A\}$ kümesi A'nın bir idealidir. Bu ideale A'nın d ile üretilen esas (temel) ideali denir. Bazen (d) veya Ad şeklinde de ifade edilebilir [15].

Tanımdaki gösterimiyle, A'nın $1_A A$ temel idealinin A'nın kendisi olduğu, A'nın $O_A A$ temel idealinin ise sıfır ideal olduğu açıktır.

Tanım 2.1.17. P_1, A halkasının ideali olsun. P_1 ideali aşağıdaki koşulları sağlarsa P_1'ye A'nın bir asal ideali denir [17]:

1. $P_1 \subset A$ yani P_1 bir öz idealdir.
2. $n, m \in A$ için $nm \in P_1$ ise $n \in P_1$ ya da $m \in P_1$'dir.

Uyarı 2.1.1. A bir tamlık bölgesi olduğunda, sıfır ideali (0), A'nın bir asal idealidir [15].

Lemma 2.1.3. I, A halkasının ideali olsun. O zaman I asaldır $\Leftrightarrow$ A/I bir tamlık bölgesidir [15].

Tanım 2.1.18. A değişmeli halka olsun. A'nın bütün asal idealleri kümesine A'nın spektrumu denir ve $Spec(A)$ ile sembolize edilir [12].

Lemma 2.1.4. I_1, A halkasının ideali olsun. $\{P \in Spec(A) : P \supseteq I_1\}$ kümesi $Var(I_1)$ ile gösterilir. I_1'yı kapsayan tüm asal ideallerin kesişimi I_1 idealinin radikalidir. $\sqrt{I_1} = \cap_{P \in Var(I_1)} P$ [12].

Tanım 2.1.19. M, A halkasının bir ideali olsun. M ideali kapsama bağıntısına göre A'nın öz idealleri kümesinin bir maksimal elemanı ise M'ye A'nın bir maksimal ideali denir veya denk olarak [11]:

1. $M \neq A$ ve
2. I_1, A'nın $M \subset I_1 \subset A$ sağlayan ideali ise $I_1 = M$ veya $I_1 = A$'dır.

Lemma 2.1.5. I, A halkasının ideali olsun. I maksimaldir $\Leftrightarrow$ A/I bir cisimdir [15].

Uyarı 2.1.2. A bir halka olsun.

(i) Her cisim tamlık bölgesi olduğundan, A'nın her maksimal ideali asal idealdir.

(ii) Ancak (i)'nin karşıtı doğru değildir, çünkü örneğin $\mathbb{Z}$'nin sıfır ideali (0) asaldır, fakat $0 \subset 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ maksimal ideal değildir [12].

Örnek 2.1.2. $p \in \mathbb{Z}$ asal olsun. $p\mathbb{Z} = (p)$ ideali $\mathbb{Z}$ de maksimal idealdir. $1 \notin p\mathbb{Z}$ olduğundan $p\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$ dır. $p\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$ olsun. Buradan $n|p$ olduğundan $n = 1$ veya $n = p$ olur. $n = 1$ ise $n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ve $n = p$ ise $n\mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$ bulunur [11].

Lemma 2.1.6. A halka ve $a \in A$ olsun. $a \in A$ birimseldir $\Leftrightarrow$ $a \in M$ olacak şekilde hiçbir M maksimal ideali mevcut değildir [12].

Tanım 2.1.20. A halkasının biricik maksimal ideali mevcutsa A kuazi-lokal halka olarak adlandırılır [12].

Lemma 2.1.7. A kuazi-lokal halkadır $\Leftrightarrow$ A'nın birimsel olmayan elemanları bir ideal oluşturur [12].

Tanım 2.1.21. A bir halka olsun. A'nın bütün maksimal ideallerinin kesişimi A'nın Jacobson radikali olarak adlandırılır ve $J(A)$ ile sembolize edilir [12].

1. $J(A)$ bir idealdir.

2. A kuazi-lokal halka ise $J(A)$ tek maksimal ideal olur.

Tanım 2.1.22. A halkasının ideallerinin, her artan $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots \subseteq T_n \subseteq \ldots$ zincirinde $\forall t \in \mathbb{N}$ için $T_m = T_{m+t}$ olacak biçimde bir $m \in \mathbb{N}$ mevcutsa, A'ya Noetherian halka denir [12].

Lemma 2.1.8. A Noetherian halka olsun. A'nın her homomorf görüntüsü de Noetheriandır [15].

Tanım 2.1.23. A'nın ideallerinin her azalan $T_1 \supseteq T_2 \supseteq \ldots \supseteq T_n \supseteq \ldots$ zincirinde $\forall t \in \mathbb{N}$ için $T_m = T_{m+t}$ olacak biçimde bir $m \in \mathbb{N}$ mevcutsa, A'ya Artinian halka veya Artin halkası denir [12].

2.2 Modüller ve Alt Modüller

Tanım 2.2.1. A, birimi olan değişmeli halka ve $(M', +)$ değişmeli grup olsun. M''nin elemanlarının A'daki elemanlar ile skaler çarpımı $\cdot : A \times M' \longrightarrow M'$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa M''ye A-modül denir [15] :

1. Her $a \in A$ ve her $m_1, m_2 \in M'$ için $a \cdot (m_1 + m_2) = a \cdot m_1 + a \cdot m_2$

2. Her $a_1, a_2 \in A$ ve her $m \in M'$ için $(a_1 + a_2) \cdot m = a_1 \cdot m + a_2 \cdot m$

3. Her $a_1, a_2 \in A$ ve her $m_1 \in M'$ için $a_1 \cdot (a_2 \cdot m_1) = (a_1 a_2) \cdot m_1$

4. Her $m_1 \in M'$ için $1_A \cdot m_1 = m_1$

Tanım 2.2.2. A halka ve M_1, A-modül olsun. $\emptyset \neq N_1 \subseteq M_1$ alalım. N_1'nin kendisi M_1'deki işlemlere göre bir A-modül ise N_1'ye M_1'nin alt modülü veya kısaca alt A-modülü denir [15].

Örnek 2.2.1. M_1 bir A- modül olsun. M_1'nin kendisi ve $\{0\}$ alt modülleridir.

Teorem 2.2.1. M_1 bir A-modül ve $\emptyset \neq N_1 \subseteq M_1$ olsun. N_1, M_1'nin bir alt modülüdür $\Leftrightarrow \forall t_1, t_2 \in A$ ve $\forall n_1, n_2 \in N_1$ için $t_1 n_1 + t_2 n_2 \in N_1$ dır [12].

Lemma 2.2.1. I, A'nın ideali ve M' bir A-modül olsun. $i = 1, 2 \ldots, n$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $IM' = \{\sum_{i=1}^{n} a_i m_i' : a_i \in I, m_i' \in M'\}$ şeklinde tanımlanır ve

1. IM', M''nin bir A-alt modülüdür.

2. I_1 ve I_2, A'nın iki ideali ise $I_1(I_2 M') = (I_1 I_2)M'$ dir.

3. $I = dA$ temel ideal ise $IM' = (dA)M' = \{dm_1' : m_1' \in M'\}$ dir [12].

Tanım 2.2.3. M_1, A-modül olsun. $(0 : M_1) = \{a' \in A | a'M_1 = 0\}$, M_1'in anhilatörü olarak adlandırılır, $Ann(M_1)$ ile sembolize edilir. Şayet $Ann(M_1) = 0$ ise M_1 sadık (faithfull) modül olarak isimlendirilir [15].

Tanım 2.2.4. M_1 ve N_1 A-modül olsun. Bir $\vartheta : M_1 \longrightarrow N_1$ fonksiyonu

1. $\forall m_1, m_1' \in M_1$ için $\vartheta(m_1 + m_1') = \vartheta(m_1) + \vartheta(m_1')$ ve
2. $\forall a' \in A$ için $\vartheta(a'm_1) = a'\vartheta(m_1)$

koşullarını sağlıyorsa, ϑ ya bir modül homomorfizması veya A-modül homomorfizması denir [12].

Teorem 2.2.2. (Homomorfizma Teoremi)
M' ve N', A-modül olmak üzere $\vartheta : M' \longrightarrow N'$ bir A-modül homomorfizması ise $M'/$Çek$\vartheta \cong \vartheta(M') = Im\vartheta$ dir [12].

Tanım 2.2.5. $\{N_i\}$ ailesi A-modüller ailesi olsun. $\forall i \in I$ bileşeni için $n_i \in N_i$ olmak üzere $\prod N_i = \{(n_i) : n_i \in N_i, i \in I\}$ kartezyen çarpım kümesini ele alalım. $(n_i) + (n_i') = (n_i + n_i')$ ve $a \in A$ için $a(n_i) = (an_i)$ bileşen bileşene tanımlanan işlemler altında $\prod N_i$ bir A-modüldür. $\prod N_i$, $\{N_i\}$ ailelerinin direkt çarpımı olarak adlandırılır [12].

Tanım 2.2.6. $\{N_i\}$ ailesi A-modüller ailesi olsun. $\forall j \in I$ için $p_j : \prod N_i \longrightarrow N_j$, $p_j((n_i)) = n_j$ şeklinde tanımlı tasvire j. izdüşüm ve $\forall i \neq j$ için $n_i = 0$ olmak üzere $i_j(n_j) = (n_i)$ olarak tanımlı $i_j : N_j \longrightarrow \prod N_i$ tasvirine de j. içerme tasviri denir [12].

Tanım 2.2.7. $\{M_i\}$, A-modüllerinin dizisi ve M_i'ler arasında da γ_i, A-homomorfizması şu şekilde verilsin:

$$\rightarrow M_{n-1} \xrightarrow{\gamma_{n-1}} M_n \xrightarrow{\gamma_n} M_{n+1} \xrightarrow{\gamma_{n+1}} \tag{2.1}$$

Eğer her $n \geq 0$ için $Im(\gamma_{n-1}) =$ Çek(γ_n) ise bu diziye tam dizi denir. Eğer belli bir yerden sonra modüllerin hepsi sıfıra yani

$$\rightarrow M_{n-1} \xrightarrow{\gamma_{n-1}} M_n \xrightarrow{\gamma_n} 0 \tag{2.2}$$

veya belli bir yerden önce modüllerin hepsi sıfırsa

$$0 \rightarrow M_{n-1} \xrightarrow{\gamma_{n-1}} M_n \xrightarrow{\gamma_n} M_{n+1} \xrightarrow{\gamma_{n+1}} \tag{2.3}$$

biçiminde yazılır. Eğer özel olarak

$$0 \xrightarrow{k'} L \xrightarrow{f'} M \xrightarrow{g'} N \xrightarrow{s'} 0 \tag{2.4}$$

biçimindeki tam dizi, kısa tam dizi olarak adlandırılır. Kısa tam dizide $Im(f') =$ Çek(g'), $Im(k') = k'(0) = 0 =$ Çek(f') ve $g'(M) =$ Çek$(s') = N$ olur [12].

Tanım 2.2.8. M_1, A-modül olsun. Eğer $\forall a_1 \in A$ ve $m' \in M_1$ için $a_1 m' = 0$ iken $m' = 0$ veya $a_1 M_1 = 0$ oluyorsa M_1'ye asal modül denir [18].

Tanım 2.2.9. M_1, A-modül ve N_1, M_1'nin bir öz alt modülü olsun. Her $b \in A$ ve $m' \in M_1$ için $bm' \in N_1$ iken $m' \in N_1$ veya $b \in (N_1 : M_1)$ oluyorsa N_1'ye A-modül M_1'nin asal alt modülü denir [12].

Özel olarak A halkası asal A-modüldür ancak ve ancak A tamlık bölgesidir.

Lemma 2.2.2. N_1, M_1'nin asal alt modülüdür ancak ve ancak M_1/N_1 asal modüldür [18].

Tanım 2.2.10. M_1, A-modül olmak üzere M_1'nin alt modüllerinin her artan $L_1 \subseteq L_2 \subseteq \ldots \subseteq L_n \ldots$ zincirinde $\forall k \in \mathbb{N}$ için $L_m = L_{m+k}$ olacak biçimde bir $m \in \mathbb{N}$ mevcutsa, M_1'e Noetherian modül denir [15].

Lemma 2.2.3. M_1, A-modül olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir [12]:

1. M_1 Noetherian modüldür.
2. M_1'nin her alt modülü sonlu üretilmiştir.
3. M_1'nin alt modüllerinin herhangi boştan farklı bir ailesinin maksimal elemanı vardır.(Maksimal eleman koşulu)

Teorem 2.2.3. M_1 bir A-modül ve N_1, M_1'nin alt modülü olsun. M_1 Noetherian modüldür ancak ve ancak N_1 ve M_1/N_1 Noetherian A-modüldür [12].

Lemma 2.2.4. $\sigma : A \longrightarrow B$ örten homomorfizma olsun. B-modül M Noetheriandır ancak ve ancak A-modül olarak Noetheriandır [12].

Tanım 2.2.11. M_1, A-modül olmak üzere M_1'nin alt modüllerinin her azalan $L_1 \supseteq L_2 \supseteq \ldots \supseteq L_n \ldots$ zincirinde $\forall k \in \mathbb{N}$ için $L_m = L_{m+k}$ olacak biçimde bir $m \in \mathbb{N}$ mevcutsa, M_1'e Artinian modül denir [15].

3
BİRLEŞTİRİLMİŞ CEBİR YAPISI

Tanım 3.1. A ve B iki halka ve J, B'nin bir ideali ve $f : A \to B$ bir halka homomorfizması olsun. $A \times B$'nin alt kümesi olan

$$A \bowtie^f J := \{(a, f(a) + j) \in A \times B | a \in A, j \in J\} \tag{3.1}$$

kümesi A ve B'nin f homomorfizmasına göre J ideali boyunca birleştirilmesi olarak adlandırılır [5].

$A \bowtie^f J$ kümesi üzerinde toplama ve çarpma aşağıdaki şekilde tanımlanır:
Her $a_1, a_2 \in A$ ve her $j_1, j_2 \in J$ için

(i) $(a_1, f(a_1) + j_1) + (a_2, f(a_2) + j_2) = (a_1 + a_2, f(a_1 + a_2) + j_1 + j_2)$ ve

(ii) $(a_1, f(a_1) + j_1).(a_2, f(a_2) + j_2) = (a_1.a_2, f(a_1.a_2) + f(a_1).j_2 + j_1.f(a_2) + j_1.j_2)$

Teorem 3.1. $(A \bowtie^f J, +, \cdot)$ yukarıdaki işlemler ile değişmeli halkadır:

1. Değişme özelliği: Her $(a'_1, f(a'_1) + j'_1), (a'_2, f(a'_2) + j'_2) \in A \bowtie^f J$ için
   $(a'_1, f(a'_1) + j'_1) + (a'_2, f(a'_2) + j'_2) = (a'_1 + a'_2, f(a'_1 + a'_2) + (j'_1 + j'_2)) = (a'_2 + a'_1, f(a'_2 + a'_1) + (j'_2 + j'_1)) = (a'_2, f(a'_2) + j'_2) + (a'_1, f(a'_1) + j'_1)$

2. Birleşme özelliği: Her $(a'_1, f(a'_1) + j'_1), (a'_2, f(a'_2) + j'_2), (a'_3, f(a'_3) + j'_3) \in A \bowtie^f J$ için
   $(a'_1, f(a'_1) + j'_1) + ((a'_2, f(a'_2) + j'_2) + (a'_3, f(a'_3) + j'_3)) = ((a'_1, f(a'_1) + j'_1) + (a'_2, f(a'_2) + j'_2)) + (a'_3, f(a'_3) + j'_3)$

3. Halkanın sıfırı: Her $(a'_1, f(a'_1) + j'_1) \in A \bowtie^f J$ için
   $(a'_1, f(a'_1)+j'_1)+(0, f(0)+0) = (0, f(0)+0)+(a'_1, f(a'_1)+j'_1) = (a'_1, f(a'_1)+j'_1)$ olacak biçimde $A \bowtie^f J$'nin tek bir elemanı vardır.

4. Toplamaya göre ters eleman: Her $(a'_1, f(a'_1) + j'_1) \in A \bowtie^f J$ için $(a'_1, f(a'_1) + j'_1) + (-a'_1, f(-a'_1) + (-j'_1)) = (0, f(0) + 0)$ olacak biçimde $(-a'_1, f(-a'_1) + (-j'_1)) \in A \bowtie^f J$ elemanı vardır.

5. Çarpmanın birleşme özelliği: $\forall (a'_1, f(a'_1) + j'_1), (a'_2, f(a'_2) + j'_2), (a'_3, f(a'_3) + j'_3) \in A \bowtie^f J$ için $(a'_1, f(a'_1) + j'_1).((a'_2, f(a'_2) + j'_2).(a'_3, f(a'_3) + j'_3)) = ((a'_1, f(a'_1) + j'_1).(a'_2, f(a'_2) + j'_2)).(a'_3, f(a'_3) + j'_3)$

6. Sağdan ve soldan dağılma özelliği: Her $(a'_1, f(a'_1) + j'_1), (a'_2, f(a'_2) + j'_2), (a'_3, f(a'_3) + j'_3) \in A \bowtie^f J$ için $(a'_1, f(a'_1) + j'_1).((a'_2, f(a'_2) + j'_2) + (a'_3, f(a'_3) + j'_3)) = (a'_1, f(a'_1) + j'_1).(a'_2, f(a'_2) + j'_2) + (a'_1, f(a'_1) + j'_1).(a'_3, f(a'_3) + j'_3)$

   $((a'_2, f(a'_2) + j'_2) + (a'_3, f(a'_3) + j'_3)).(a'_1, f(a'_1) + j'_1) = (a'_2, f(a'_2) + j'_2).(a'_1, f(a'_1) + j'_1) + (a'_3, f(a'_3) + j'_3).(a'_1, f(a'_1) + j'_1)$

7. Çarpmaya göre değişme özelliği: $\forall (a'_1, f(a'_1) + j'_1), (a'_2, f(a'_2) + j'_2) \in A \bowtie^f J$ için $(a'_1, f(a'_1) + j'_1).(a'_2, f(a'_2) + j'_2) = (a'_1 a'_2, f(a'_1 a'_2) + f(a'_1) j'_2 + j'_1 f(a'_2) + j'_1 j'_2) = (a'_2 a'_1, f(a'_2 a'_1) + f(a'_2) j'_1 + j'_2 f(a'_1) + j'_2 j'_1) = (a'_2, f(a'_2) + j'_2).(a'_1, f(a'_1) + j'_1)$

Birleştirilmiş halka yapısının birimli olup olmadığını araştırmadan önce aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 3.1. $f : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_6$ halka homomorfizmasını $f(\bar{1}) = \bar{3}$ olarak ele alalım. Burada $A = \mathbb{Z}_2$ ve $J = 3\mathbb{Z}_6$ alındığında $\mathbb{Z}_2 \bowtie^f 3\mathbb{Z}_6 = \{(a, f(a) + j) | a \in \mathbb{Z}_2, j \in 3\mathbb{Z}_6\} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{0})\}$ dört elemanlı bir halkadır ve $(\bar{1}, \bar{3})$ halkanın birimidir.

Şimdi bir başka birleştirilmiş halka örneği verelim.

Örnek 3.2. $\varphi : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$ halka homomorfizmasını $f(\bar{1}) = \bar{4}$ olarak ele alalım. $A = \mathbb{Z}_6$ ve $J = 6\mathbb{Z}_{12}$ alındığında $\mathbb{Z}_6 \bowtie^f 6\mathbb{Z}_{12} = \{(a, f(a) + j) | a \in \mathbb{Z}_6, j \in 6\mathbb{Z}_{12}\} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{4}), (\bar{1}, \bar{10}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{8}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{6}), (\bar{4}, \bar{4}), (\bar{4}, \bar{10}), (\bar{5}, \bar{2}), (\bar{5}, \bar{8})\}$ on iki elemanlı bir halkadır ve halkanın birim elemanı mevcut değildir.

Aşağıdaki teorem hangi koşullar altında birleştirilmiş halka yapısının birim elemanının var olabileceğini göstermektedir.

Uyarı 3.1. $A \times (f(A) + J)$ küme tanımına bakıldığında $A \bowtie^f J$ halkasının bir alt halkasıdır.

Teorem 3.2. $f(A)+J$ birimli halkadır $\Longleftrightarrow$ öyle bir $t' \in J$ mevcuttur ki $t'f(1)=0$ dır ve her $j_1 \in J$ için $(f(1)+t')j_1 = j_1$ sağlanır. Bu durumda $f(A)+J$'nin birim elemanı $f(1)+t'$ dir [16].

$ispat.$ $(\Rightarrow)$: $f(A)+J$ birimli halka olsun. $a \in A$ ve $c \in J$ için $f(a)+c$ birim elemanı olarak alalım. Buradan $f(1) \in f(A)+J$ için $(f(a)+c)f(1) = f(1)$ sağlanır. $f(a)+cf(1) = f(1)$ ve $f(a) = f(1)-cf(1)$ elde edilir. Buradan $f(a)+c = f(1)+c-cf(1)$ yazıldığında $c-cf(1) \in J$ bulunur. Böylece $c-cf(1) = t'$ denildiğinde $f(a)+c = f(1)+t'$, $f(A)+J$'nin birim elemanı bulunur. Ayrıca, $(f(1)+t')f(1) = f(1)$ olmak üzere $t'f(1)=0$ ve her $j_1 \in J$ için $(f(1)+t')j_1 = j_1$ elde edilir.
$(\Leftarrow)$: Bir $t' \in J$ için $t'f(1)=0$ ve her $j_1 \in J$ için $(f(1)+t')j_1 = j_1$ sağlansın. $f(b)+j \in f(A)+J$ için $(f(1)+t')(f(b)+j) = (f(b)+f(1)j+t'f(b)+t'j) = f(b)+(f(1)+t')j+t'bf(1) = f(b)+j$ elde edilir. Görüldüğü üzere, $f(1)+t'$ birim elemanı olarak bulunur.

Sonuç 3.1. $A \bowtie^f J$ birimli halkadır $\Longleftrightarrow$ öyle bir $t \in J$ mevcuttur ki $tf(1)=0$ dır ve her $j \in J$ için $(f(1)+t)j = j$ sağlanır. Bu durumda $A \bowtie^f J$ halkasının birim elemanı $(1, f(1)+t)$ dir [16].

$ispat.$ $(\Rightarrow)$: $A \bowtie^f J$ birimli halka ve $(a, f(a)+k)$ birim elemanı olsun. $(1,f(1)) \in A \bowtie^f J$ için $(a,f(a)+k)(1,f(1)) = (1,f(1))$ sağlanmalıdır. Buradan $(a, f(a)+kf(1)) = (1,f(1))$ olmak üzere $a=1$ elde edilir. Ayrıca $f(a)+kf(1) = f(1)$ olduğundan $f(a) = f(1)-kf(1)$ bulunur. Dahası, $f(a)+k = f(1)+k-kf(1)$ için $k-kf(1) \in J$ olduğundan $k-kf(1) = t$ alındığında $f(a)+k = f(1)+t$ elde edilir. Dolayısıyla $(1,f(1)+t)$, $A \bowtie^f J$'nin birim elemanı olur. Bununla beraber $(1,f(1)+t)(1,f(1)) = (1,f(1))$ olmak üzere $tf(1)=0$ ve her $(0,0+j) \in A \bowtie^f J$ için $(1,f(1)+t)(0,j) = (0,j)$ olduğundan $(f(1)+t)j = j$ sağlanır.
$(\Leftarrow)$: Bir $t \in J$ için $tf(1)=0$ olsun ve her $j \in J$ için $(f(1)+t)j = j$ sağlansın. $a_1 \in A$ ve $d \in J$ için $(1,f(1)+t)(a_1, f(a_1)+d) = (a_1, f(a_1)+f(1)d+tf(a_1)+td) = (a_1, f(a_1)+(f(1)+t)d+ta_1f(1)) = (a_1, f(a_1)+d)$ elde edilir. Dolayısıyla $(1,f(1)+t)$ halkanın birim elemanıdır.

Uyarı 3.2. Buradan görüleceği üzere $A \bowtie^f J$ halkası her zaman birimli bir halka olmak zorunda değildir. Buradan sonra tüm birleştirilmiş halkalar birimli olarak ele alınacaktır.

Lemma 3.1. A ve B iki halka ve $f : A \longrightarrow B$ bir halka homomorfizması olsun.

O zaman $I_1 := \{(a,a)|a \in A\}$, $A \times A$ halkasının bir alt halkasıdır. Ayrıca $I_2 := \{(a, f(a))|a \in A\}$, $A \times B$ halkasının bir alt halkasıdır [19].

ispat. $(a_1,a_1),(a_2,a_2) \in I_1$ için $(a_1,a_1)-(a_2,a_2) = (a_1-a_2, a_1-a_2) \in I_1$ ve $(a_1,a_1)(a_2,a_2) = (a_1a_2, a_1a_2) \in I_1$ elde edilir. $I_1, A \times A$'nın bir alt halkasıdır. Dahası, $(a_1, f(a_1)),(a_2, f(a_2)) \in I_2$ için $(a_1, f(a_1)) - (a_2, f(a_2)) = (a_1 - a_2, f(a_1 - a_2)) \in I_2$ ve $(a_1, f(a_1))(a_2, f(a_2)) = (a_1a_2, f(a_1a_2)) \in I_2$ olduğundan $I_2, A \times B$'nin bir alt halkasıdır.

Teorem 3.3. 1. $A \bowtie^f J$, A halkasının bir alt halkasıdır.

2. $\mu : A \longrightarrow A \bowtie^f J$, her $a' \in A$ için $\mu(a') = (a', f(a'))$ ile tanımlı doğal halka homomorfizması olsun. μ fonksiyonu A halkasını $A \bowtie^f J$ halkasına genişleten bir gömülmedir.

3. A halkasının herhangi bir I_1 ideali için $I_1 \bowtie^f J = \{i_1, f(i_1) + j|i_1 \in I_1, j \in J\}$ kümesi $A \bowtie^f J$'nın bir idealidir. Dahası, aşağıdaki izomorfizmaya sahibiz:

$$\frac{A \bowtie^f J}{I_1 \bowtie^f J} \cong \frac{A}{I_1} \tag{3.2}$$

4. $A \bowtie^f J$'nın $\{0\} \times J$ ve $f^{-1}(J) \times \{0\}$ idealleri için sırasıyla aşağıdaki izomorfizmalar sağlanır:

$$\frac{A \bowtie^f J}{\{0\} \times J} \cong A, \qquad \frac{A \bowtie^f J}{f^{-1}(J) \times \{0\}} \cong f(A) + J \tag{3.3}$$

5. $f^{-1}(J) \times J$ ve J, sırasıyla $A \bowtie^f J$ ve $f(A) + J$ halkalarının idealleridir ve aşağıdaki izomorfizmayı sağlarlar:

$$\frac{A \bowtie^f J}{f^{-1}(J) \times J} \cong \frac{f(A) + J}{J} \tag{3.4}$$

   Özel olarak f örten bir homomorfizma ise aşağıdaki izomorfizma verilir [5] :

$$\frac{A \bowtie^f J}{f^{-1}(J) \times J} \cong \frac{B}{J} \tag{3.5}$$

ispat.

1. $A \subset A \bowtie^f J$. Her $(a'_1, f(a'_1) + j'_1), (a'_2, f(a'_2) + j'_2) \in A \bowtie^f J$ için $(a'_1, f(a'_1)+j'_1)-(a'_2, f(a'_2)+j'_2) = (a'_1-a'_2, f(a'_1-a'_2)+(j'_1-j'_2)) \in A \bowtie^f J$

elde edilir. Dahası, $(a_1', f(a_1') + j_1').(a_2', f(a_2') + j_2') = (a_1'a_2', f(a_1'a_2') + f(a_1')j_2' + j_1'f(a_2') + j_1'j_2') \in A \bowtie^f J$ olduğundan $A \bowtie^f J$ bir alt halkadır.

2. $\mu : A \longrightarrow A \bowtie^f J$ doğal halka homomorfizmasıdır, gösterelim.

   (a) $\mu(a_1' + a_2') = (a_1' + a_2', f(a_1' + a_2')) = (a_1', f(a_1') + (a_2', f(a_2')) = \mu(a_1') + \mu(a_2')$
   $\mu(a_1'a_2') = (a_1'a_2', f(a_1'a_2')) = (a_1', f(a_1'))(a_2', f(a_2')) = \mu(a_1')\mu(a_2')$
   sağlandığından μ homomorfizmadır.

   (b) $\forall (a', f(a')) \in A \bowtie^f J$ için $\mu(a') = (a', f(a'))$ olacak şekilde $a' \in A$ bulunduğundan μ örtendir.

   (c)

$$\begin{aligned} \text{Çek}\mu &= \{a' \in A | \mu(a') = 0_{A \bowtie^f J}\} \\ &= \{a' \in A | \mu(a') = (0, f(0))\} \\ &= \{a' \in A | (a', f(a')) = (0, f(0))\} \\ &= \{a' \in A | a' = 0\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

   olduğundan μ birebirdir.

3. $(i_1, f(i_1) + j_1), (i_2, f(i_2) + j_2) \in I_1 \bowtie^f J$ için $(i_1, f(i_1) + j_1) - (i_2, f(i_2) + j_2) = (i_1 - i_2, f(i_1 - i_2) + (j_1 - j_2)) \in I_1 \bowtie^f J$
   $(i, f(i) + j_1) \in I_1 \bowtie^f J$ ve $(a, f(a) + j_2) \in A \bowtie^f J$ için $(i, f(i) + j_1).(a, f(a)+j_2) = (ia, f(ia)+f(i)j_2+j_1f(a)+j_1j_2) \in I_1 \bowtie^f J$ olduğundan $I_1 \bowtie^f J$, $A \bowtie^f J$'nin bir idealidir.
   Ayrıca $\phi : A \bowtie^f J \longrightarrow A/I_1$ fonksiyonu
   $(a, f(a) + j) \longrightarrow a + I_1$ şeklinde tanımlandığında

   (i) İyi tanımlılık : $(a_1', f(a_1') + j_1') = (a_2', f(a_2') + j_2')$ olsun. Buradan $a_1' = a_2'$ olduğu açıkça görülür. $a_1' + I_1 = a_2' + I_1$ yazıldığında $\phi((a_1', f(a_1') + j_1')) = \phi((a_2', f(a_2') + j_2'))$ elde edilir.

   (ii) Homomorfizma : $\phi((a_1, f(a_1)+j_1)+(a_2, f(a_2)+j_2)) = \phi((a_1+a_2)+(f(a_1)+j_1+f(a_2)+j_2)) = \phi((a_1+a_2)+(f(a_1+a_2)+j_1+j_2)) = (a_1+a_2)+I_1 = (a_1+I_1)+(a_2+I_1) = \phi(a_1, f(a_1)+j_1)+\phi(a_2, f(a_2)+j_2)$
   ve
   $\phi((a_1, f(a_1)+j_1).(a_2, f(a_2)+j_2)) = \phi((a_1.a_2), f(a_1.a_2)+f(a_1).j_2+j_1.f(a_2)+j_1.j_2) = (a_1.a_2)+I_1 = (a_1+I_1).(a_2+I_1) = \phi(a_1, f(a_1)+j_1).\phi(a_2, f(a_2)+j_2)$ sağlanır.

(iii) Örtenlik : Her $a_1 + I_1 \in A/I_1$ için $\phi(a_1, f(a_1) + j) = a_1 + I_1$ olacak şekilde $(a_1, f(a_1) + j) \in A \bowtie^f J$ vardır.

(iv)

$$\begin{aligned} \text{Çek}\phi &= \{(a_1, f(a_1) + j') \in A \bowtie^f J | \phi((a_1, f(a_1) + j')) = 0_{A/I_1}\} \\ &= \{(a_1, f(a_1) + j') \in A \bowtie^f J | a_1 + I_1 = I_1\} \\ &= \{(a_1, f(a_1) + j) \in A \bowtie^f J | a_1 \in I_1\} \\ &= I_1 \bowtie^f J \end{aligned}$$

olduğundan Birinci izomorfizma teoremine göre sonuç elde edilir.

4. $\forall (0, j_1), (0, j_2) \in \{0\} \times J$ için $(0, j_1) - (0, j_2) = (0, j_1 - j_2) \in \{0\} \times J$ ve $\forall (a', f(a') + j') \in A \bowtie^f J$ için $(0, j_1).(a', f(a') + j') = (0, j_1 f(a') + j_1 j') \in \{0\} \times J$ olduğundan $\{0\} \times J$, $A \bowtie^f J$'nın idealidir.

Benzer şekilde, $\forall (p, 0), (q, 0) \in f^{-1}(J) \times \{0\}$ için $(p, 0) - (q, 0) = (p - q, 0) \in f^{-1}(J) \times \{0\}$ ve $\forall (a, f(a) + j) \in A \bowtie^f J$ için $(p, 0).(a, f(a) + j) = (pa, 0)$ bulunur. Burada $f(p) \in J$ ve J, B'nin bir ideali olduğundan her $a \in A$ için $f(p)f(a) = f(pa) \in J$ olup $pa \in f^{-1}(J)$ elde edilir. Sonuç olarak $f^{-1}(J) \times \{0\}$ da $A \bowtie^f J$'nin bir idealidir.
$\varphi : A \bowtie^f J \longrightarrow A$ homomorfizması
$(a_1, f(a_1) + j_1) \longrightarrow a_1$ şeklinde tanımlandığında

$$\begin{aligned} \text{Çek}\varphi &= \{(a_1, f(a_1) + j_1) \in A \bowtie^f J | \varphi((a_1, f(a_1) + j_1)) = 0\} \\ &= \{(a_1, f(a_1) + j_1) \in A \bowtie^f J | a_1 = 0\} \\ &= \{(0, f(0) + j) \in A \bowtie^f J\} \\ &= \{(0, j)\} \\ &= \{0\} \times J \end{aligned}$$

bulunur. Birinci izomorfizma teoremine göre sonuç elde edilir.

Benzer şekilde $\gamma : A \bowtie^f J \longrightarrow f(A) + J$ homomorfizması
$(a_1', f(a_1') + j_1') \longrightarrow f(a_1') + j_1'$ şeklinde tanımlandığında

$$\begin{aligned} \text{Çek}\gamma &= \{(a_1', f(a_1') + j_1') \in A \bowtie^f J | \gamma((a_1', f(a_1') + j_1')) = 0\} \\ &= \{(a_1', f(a_1') + j_1') \in A \bowtie^f J | f(a_1') + j_1' = 0\} \\ &= \{(a_1', 0) \in A \bowtie^f J | a_1' \in f^{-1}(J)\} \\ &= f^{-1}(J) \times \{0\} \end{aligned}$$

Birinci izomorfizma teoremine göre sonuç elde edilir.

5. $(t, j_1), (s, j_2) \in f^{-1}(J) \times J$ alalım.
$(t, j_1) - (s, j_2) = (t-s, j_1-j_2) \in f^{-1}(J) \times J$ ve her $(a', f(a')+j') \in A \bowtie^f J$ için $(t, j_1).(a', f(a')+j') = (ta', j_1 f(a') + j_1 j')$ elde edilir. Burada $f(t) \in J$ ve J, B'nin bir ideali olduğundan $\forall a' \in A$ için $f(t)f(a') = f(ta') \in J$ olup $ta' \in f^{-1}(J)$ bulunur. Sonuç olarak $(ta', j_1 f(a') + j_1 j) \in f^{-1}(J) \times J$ elde edilir. $f^{-1}(J) \times J$, $A \bowtie^f J$ halkasının idealidir.

$\mu : A \bowtie^f J \longrightarrow (f(A)+J)/J$ homomorfizması
$(a_1', f(a_1') + j_1') \longrightarrow f(a_1') + J$ olarak tanımlandığında

$$\begin{aligned}
\text{Çek}\mu &= \{(a_1', f(a_1') + j_1') \in A \bowtie^f J | \mu((a_1', f(a_1') + j_1')) = 0_{(f(A)+J)/J}\} \\
&= \{(a_1', f(a_1') + j_1') \in A \bowtie^f J | \mu((a_1', f(a_1') + j_1')) = J\} \\
&= \{(a_1', f(a_1') + j_1') \in A \bowtie^f J | f(a_1') + J = J\} \\
&= \{(a_1', f(a_1') + j_1') \in A \bowtie^f J | f(a_1') \in J\} \\
&= \{(a_1', f(a_1') + j_1') \in A \bowtie^f J | a_1' \in f^{-1}(J)\} \\
&= f^{-1}(J) \times J
\end{aligned}$$

bulunur ve Birinci izomorfizma teoremine göre sonuç elde edilir.

Eğer f örten homomorfizma ise $f(A) = B$ ve $J \subset B$ olduğundan $f(A)+J = B$ olur. Dolayısıyla istenilen izomorfizma elde edilir.

Örnek 3.1.'ye bakıldığı zaman $(\bar{1}, \bar{0})(\bar{0}, \bar{3}) = (\bar{0}, \bar{0})$ olduğu görülür, $\mathbb{Z}_2 \bowtie^f 3\mathbb{Z}_6$ sıfır bölene sahiptir. Aşağıdaki teorem hangi durumda $A \bowtie^f J$'nin tamlık bölgesi olabileceğini göstermektedir.

Teorem 3.4. Tanım 3.1' deki A ve B'nin f homomorfizmasına göre J ideali boyunca birleşmesini ele alalım. $J \neq 0$ olduğunda aşağıdakiler eşdeğerdir:

1. $A \bowtie^f J$ tamlık bölgesidir.
2. $f(A) + J$ bir tamlık bölgesidir ve $f^{-1}(J) = \{0\}$

Özel olarak, B halkası bir tamlık bölgesi ve $f^{-1}(J) = \{0\}$ ise o zaman $A \bowtie^f J$ bir tamlık bölgesidir [5].

ispat. (1) $\Rightarrow$ (2) $A \bowtie^f J$ bir tamlık bölgesi ve $f^{-1}(J) \neq \{0\}$ olsun. O zaman $f(r) \in J$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $r \in A$ vardır. Buradan $(r, 0)$, $A \bowtie^f J$

halkasının sıfırdan farklı bir elemanı olur. Böylece sıfırdan farklı bir $s \in J$ için $(r,0)(0,s) = (0,0)$ çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak $f^{-1}(J) = \{0\}$ olmalıdır. Teorem 3.3'nin 4. önermesi ile $A \bowtie^f J \cong f(A) + J$ elde edilir. Buradan sonuçla $f(A) + J$ bir tamlık bölgesi olur.
(2) $\Rightarrow$ (1) Açıktır, çünkü $f^{-1}(J) = \{0\}$ olduğundan Teorem 3.3'nin 4. önermesinden hareketle $A \bowtie^f J \cong f(A) + J$ bulunur. $f(A) + J$ bir tamlık bölgesi ise $A \bowtie^f J$ halkası da tamlık bölgesi bulunur.

Uyarı 3.3. Eğer $A \bowtie^f J$ halkası bir tamlık bölgesi ise A halkası da tamlık bölgesidir [5].

ispat. $0 \neq a \in A$ için $a.a' = 0$ olsun. $(a, f(a) + j).(a', f(a') + j') = (0,0)$ ise $A \bowtie^f J$ tamlık bölgesi olduğundan $a' = 0$ bulunur. Buradan, $a.a' = 0$ olduğunda A halkası sıfır bölen eleman içermediğinden bir tamlık bölgesidir.

Tanım 2.1.9'da indirgenmiş halka tanımından söz etmiştik. Şimdi, $A \bowtie^f J$ birleştirilmiş halkanın indirgenmiş halka olduğunu karakterize edeceğiz. $A \bowtie^f J$ birleştirilmiş halkanın, A indirgenmiş halka olsa bile indirgenememesi de mümkündür. Aşağıdaki teorem hangi koşul ile $A \bowtie^f J$ halkasının indirgenmiş halka olabileceğini göstermektedir.

Teorem 3.5. Kabul edelim ki Tanım 3.1'deki ifade sağlanıyor olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler denktir:

1. $A \bowtie^f J$ bir indirgenmiş halkadır.
2. A indirgenmiş halka ve $N(B) \cap J = \{0\}$ dır.

Eğer A ve B indirgenmiş halkalar ise, $A \bowtie^f J$ indirgenmiştir. Tersine, eğer $A \bowtie^f J$ indirgenmiş ve J, B'nin radikal ideali ise o zaman A ve B indirgenmiş halkalardır [5].

ispat. (1) $\Rightarrow$ (2) $(a, f(a)) \in A \bowtie^f J$ olmak üzere bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $(a, f(a))^n = (0,0)$ olsun. Çarpım açıldığında $(a^n, f(a^n)) = (0,0)$ olduğundan $a^n = 0$ elde edilir. Ayrıca $A \bowtie^f J$ indirgenmiş halka olduğundan $(a, f(a)) = (0,0)$ olmalıdır, buradan $a = 0$ elde edilir. Dolayısıyla A indirgenmiş halka bulunur. Şimdi $b \in N(B) \cap J$ alalım. $b \in N(B)$ olduğundan $b^k = 0$ olacak şekilde pozitif bir k tamsayısı vardır. $b \in J$ olduğundan $(0, f(0) + b) \in A \bowtie^f J$ için $(0, f(0) + b)^k = (0,0)$ bulunur. $A \bowtie^f J$ indirgenmiş halka olduğundan

$(0, b) = (0, 0)$ ve $b = 0$ elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (1) $a_1 \in A$ ve $t_1 \in J$ için $(a_1, f(a_1) + t_1) \in A \bowtie^f J$ alalım. $(a_1, f(a_1) + t_1)^s = (0, 0)$ olacak şekilde pozitif bir s tamsayısı olsun. Buradan $(a_1^s, (f(a_1) + t_1)^s) = (0, 0)$ bulunur. Böylece $a_1^s = 0$ ve (2) koşulu ile A indirgenmiş halka olduğundan $a_1 = 0$ elde edilir. $t_1 \in J \subset B$ ve $t_1^s = 0$ olduğundan $t_1 \in N(B) \cap J$ bulunur. $N(B) \cap J = \{0\}$ olduğundan $t_1 = 0$ elde edilir. Sonuç olarak, $(a_1, f(a_1) + t_1) = (0, 0)$ bulunur. $A \bowtie^f J$ bir indirgenmiş halkadır.

A ve B indirgenmiş halkalar olmak üzere $(a_1, f(a_1) + h_1) \in A \bowtie^f J$ alalım. $(a_1, f(a_1) + h_1)^k = (0, 0)$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}^+$ var olduğunu kabul edelim. Buradan hareketle, $(a_1^k, (f(a_1) + h_1)^k) = (0, 0)$ elde edilir. A indirgenmiş halka olduğundan $a_1^k = 0$ ise $a_1 = 0$ bulunur. Ayrıca $(f(0) + h_1) \in B$ olup B de indirgenmiş halka olduğundan $(f(0) + h_1)^k = 0$ iken $(f(0) + h_1)) = 0$ sonucu elde edilir. Dolayısıyla $h_1 = 0$ olup $(a_1, f(a_1) + h_1) = (0, 0)$ bulunur. $A \bowtie^f J$ indirgenmiş halkadır.

Tersine $A \bowtie^f J$ indirgenmiş ve J ideali B'nin radikali olsun. $A \bowtie^f J$ indirgenmiş ise Teorem 3.5'teki denk ifadelerden $N(B) \cap J = \{0\}$ dır. J ideali de B'nin radikali olduğundan $N(B) \subseteq J$ elde edilir. Dolayısıyla $N(B) \cap J = \{0\} = N(B)$ sonucuna ulaşılır ve B indirgenmiş halka bulunur.

Uyarı 3.4. Eğer A ve $f(A)+J$ indirgenmiş halkalar ise Teorem 3.5 gereğince $A \bowtie^f J$ de indirgenmiş halka olur. Ancak karşıtı her zaman doğru olmayabilir. Örneğin $A := \mathbb{Z}$, $B := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ve $f : A \to B$, her $t \in \mathbb{Z}$ için $f(t) = (t, \bar{t}(\mod 9))$ olacak şekilde bir halka homomorfizması olsun. B'nin de $J := \mathbb{Z} \times \bar{0}(\mod 9)$ idealini ele alalım. Şimdi $g \in N(B) \cap J$ olsun.
$g \in N(B) \cap J$ olduğundan $g = (t, \bar{0}(\mod 9))$ şeklinde ifade edilsin. Dolayısıyla $g^k = (t, \bar{0}(\mod 9))^k = (0, \bar{0})$ olacak biçimde $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan $(t^k, \bar{0}^k(\mod 9)) = (0, \bar{0})$ eşitliğinden $t^k = 0$ elde edilir. $t \in \mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}$ indirgenmiş halka olduğundan buradan $t = 0$ ve $g = (t, \bar{0}(\mod 9)) = (0, \bar{0})$ elde edilir. Sonuç olarak $N(B) \cap J = \{0\}$ bulunur ve $A \bowtie^f J$ indirgenmiş halka olur. Fakat $(0, \bar{3}) = (3, \bar{3}) + (-3, \bar{0})$, $f(\mathbb{Z}) + J$'nin sıfırdan farklı bir nilpotent elemanıdır.

Daha genel olarak, $A := \mathbb{Z}$ ve p asal tam sayı olmak üzere $B := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ olsun. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, her $t \in \mathbb{Z}$ için $f(t) = (t, \bar{t}(\mod p^n))$ olacak biçimde bir halka homomorfizması olsun. B'nin $J := \mathbb{Z} \times \bar{0}(\mod p^n)$ idealini alalım. $y \in N(B) \cap J$ olsun. Buradan $y \in N(B) \cap J$ olduğundan
$y^m = (t, \bar{0}(\mod p^n))^m = (0, \bar{0})$ olacak biçimde $m \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

$(t^m, \bar{0}^m(\mod p^n)) = (0, \bar{0})$ eşitliğinden $t^m = 0$ elde edilir. $\mathbb{Z}$ indirgenmiş halka olduğundan buradan $t = 0$ ve $y = (t, \bar{0}(\mod p^n)) = (0, \bar{0})$ olur. Dolayısıyla $N(B) \cap J = \{0\}$ bulunur ve $A \bowtie^f J$ indirgenmiş halka olur. Fakat $(0, \bar{p}) = (p, \bar{p}) + (-p, \bar{0})$, $f(\mathbb{Z}) + J$'nin sıfırdan farklı bir nilpotent elemanı olarak bulunur.

Lemma 3.2. A ve B iki halka, $f : A \longrightarrow B$ bir halka homomorfizması ve J, B'nin öz ideali olsun. Her $m \in J$ için $\{(0, f(0) + mn) | n \in B\}$, $A \bowtie^f J$'nin bir sağ idealidir ve her $b \in B$ için $\{(0, f(0) + bn) | n \in J\}$, $A \bowtie^f J$'nin bir sağ idealidir [20].

ispat. Her $m_1, m_2 \in J$ için $n_1, n_2 \in B$ olacak şekilde $(0, f(0) + m_1n_1), (0, f(0) + m_2n_2)$ alalım. $(0, f(0) + m_1n_1) - (0, f(0) + m_2n_2) = (0, f(0) + (m_1n_1 - m_2n_2))$ ve her $(a_2, f(a_2) + j') \in A \bowtie^f J$ için $(0, f(0) + m_1n_1).(a_2, f(a_2) + j') = (0, f(0)f(a_2) + f(0)j' + m_1n_1f(a_2) + m_1n_1j') = (0, f(0) + m_1(n_1f(a_2) + n_1j'))$ olduğundan $\{(0, f(0) + mn) | n \in B\}$, $A \bowtie^f J$'nin bir sağ idealidir.

Dahası, her $b_1, b_2 \in B$ için $n_1, n_2 \in J$ olacak biçimde $(0, f(0) + b_1n_1), (0, f(0) + b_2n_2)$ alalım. $(0, f(0) + b_1n_1) - (0, f(0) + b_2n_2) = (0, f(0) + (b_1n_1 - b_2n_2)$ ve her $(a_3, f(a_3) + j') \in A \bowtie^f J$ için $(0, f(0) + b_1n_1).(a_3, f(a_3) + j') = (0, f(0)f(a_3) + f(0)j' + b_1n_1f(a_3) + b_1n_1j') = (0, f(0) + b_1(n_1f(a_3) + n_1j'))$ olduğundan $\{(0, f(0) + bn) | n \in J\}$, $A \bowtie^f J$'nin bir sağ idealidir.

Teorem 3.6. I ve N, sırasıyla A ve $f(A) + J$ halkalarının idealleri olmak üzere

$$\overline{N}^f = \{(a, f(a) + j) | a \in A, j \in J, f(a) + j \in N\} \tag{3.6}$$

$$\overline{I \times N}^f = \{(i, f(i) + j) | i \in I, j \in J, f(i) + j \in N\} \tag{3.7}$$

kümeleri de $A \bowtie^f J$ halkasının idealleridir [9].

Teorem 3.7. 1. $\forall P \in Spec(A)$ ve $\forall Q \in Spec(B) \setminus Var(J)$ için

$$P \bowtie^f J := \{(p, f(p) + j) | p \in P, j \in J\} (= P_0) \tag{3.8}$$

$$\overline{Q}^f := \{(q, f(q) + j) | q \in A, j \in J, f(q) + j \in Q\} (= P_1) \tag{3.9}$$

formundaki idealler $A \bowtie^f J$ halkasının asal idealleridir.

2. $A \bowtie^f J$ halkasının maksimal idealleri, $\forall P \in Maks(A)$ ve $\forall Q \in Maks(B) \setminus Var(J)$ için $P \bowtie^f J$ ve $\overline{Q}^f$ formundaki ideallerdir [21].

Lemma 3.3. $f : A \longrightarrow B$ halka homomorfizması, I ve J, B'nin idealleri olmak üzere $J \subset I$ olsun. $P \in Spec(A)$ ve $Q \in Spec(B)$ olsun. P_0 ve P_1 yukarıda verilen $A \bowtie^f J$ halkasının asal ideal formları olmak üzere,
$Q_0 = \{(p, f(p) + i) | p \in P, i \in I\}$,
$Q_1 = \{(q, f(q) + i) | q \in A, i \in I, f(q) + i \in Q\} \in Spec(A \bowtie^f I)$ ise o zaman

$$P_0 := Q_0 \cap (A \bowtie^f J) = \{(p, f(p) + j) | p \in P, j \in J\} \tag{3.10}$$

ve

$$P_1 := Q_1 \cap (A \bowtie^f J) = \{(q, f(q) + j) | q \in A, j \in J, f(q) + j \in Q\} \tag{3.11}$$

elde edilir [19].

ispat. $J \subset I$ olduğundan $P_0 \subseteq Q_0$ olduğu açıktır. P_0 ideali $A \bowtie^f J$ tarafından da kapsanır bu yüzden $P_0 \subseteq Q_0 \cap (A \bowtie^f J)$ elde edilir. Tersine, $(p, f(p) + i) \in Q_0 \cap (A \bowtie^f J)$ alalım. $(p, f(p) + i) \in A \bowtie^f J$ olduğundan burada $i \in J$ bulunur. $(p, f(p) + i) \in P_0$ elde edilir. $Q_0 \cap (A \bowtie^f J) \subseteq P_0$ bulunur ve eşitlik elde edilir. Diğeri için, $J \subset I$ olduğundan $P_1 \subseteq Q_1$ olduğu açıktır. Ayrıca, $P_1 \subseteq A \bowtie^f J$ olduğundan $P_1 \subseteq Q_1 \cap (A \bowtie^f J)$ elde edilir. Şimdi, $(q, f(q) + i) \in Q_1 \cap (A \bowtie^f J)$ alalım. $(q, f(q) + i) \in A \bowtie^f J$ olduğundan $i \in J$ elde edilir. Ayrıca Q_1'in tanımından $f(q) + i \in Q$'dur. Böylece $(q, f(q) + i) \in P_1$ sonucuna ulaşılır. $Q_1 \cap (A \bowtie^f J) \subseteq P_1$ elde edilir ve eşitlik gösterilmiş olur.

Lemma 3.4. $f : A \longrightarrow B$ halka homomorfizması ve B'nin I ve J idealleri için $J \subset I$ olsun. Farz edelim ki, bir $Q \in Spec(B)$ için $J \subseteq Q$, $I \nsubseteq Q$ olsun. $Spec(A \bowtie^f I) \longrightarrow Spec(A \bowtie^f J)$ şeklinde tanımlanan fonksiyon birebir değildir [19].

ispat. $Q \in Spec(B)$ olmak üzere $Spec(A \bowtie^f I)$'nın şu iki idealini göz önüne alalım:

$$Q_0 = \{(p, f(p) + i) | p \in f^{-1}(Q), i \in I\} \tag{3.12}$$

ve

$$Q_1 = \{(q, f(q) + i) | q \in A, i \in I, f(q) + i \in Q\} \tag{3.13}$$

$Q_0 \neq Q_1$'dir, çünkü varsayım gereği bir $i \in I \setminus Q$ bulunur ve dolayısıyla $(0, i) \in Q_0 \setminus Q_1$ elde edilir. Lemma 3.3'ten hareketle
$P_0 := Q_0 \cap (A \bowtie^f J) = \{(p, f(p) + j) | p \in f^{-1}(Q), j \in J\}$ ve
$P_1 := Q_1 \cap (A \bowtie^f J) = \{(q, f(q) + j) | q \in A, j \in J, f(q) + j \in Q\}$ elde edilir.
$f(f^{-1}(Q)) \subseteq Q$ ve $J \subseteq Q$ olduğundan her bir $(p, f(p) + j) \in P_0$ için $f(p) + j \in Q$

yazılır. Buradan $P_0 \subseteq P_1$ bulunur. Diğer taraftan, $(q, f(q)+j) \in P_1$ için $j \in J \subseteq Q$ olduğundan $f(q) \in Q$ ve $q \in f^{-1}(Q)$ elde edilir. Böylece $P_1 \subseteq P_0$ elde edilir ve $P_0 = P_1$ sonucuna ulaşılır. $Spec(A \bowtie^f I) \longrightarrow Spec(A \bowtie^f J)$ şeklinde tanımlanan fonksiyon birebir değildir.

Teorem 3.8. $f : A \longrightarrow B$ halka homomorfizması ve $J \trianglelefteq B$ olsun. $A \bowtie^f J = \{(a, f(a) + j) | a \in A, j \in J\}$ birleştirilmiş halka yapısını ele alalım. O zaman $A \bowtie^f J$ kuazi-lokal halkadır $\iff$ A kuazi-lokal halka ve $J \subseteq J(B)$'dir. Özel olarak, M, A'nın tek maksimal ideali ise o zaman $M \bowtie^f J$, $A \bowtie^f J$ halkasının tek maksimal idealidir [21].

Uyarı 3.5. Teorem 3.3 ve Teorem 3.7'deki koşullar geçerli olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler sağlanır.

1. Eğer I_1, A halkasının (sırasıyla $H, f(A) + J$'nin) $f(I_1)J \subseteq H \subseteq J$ olacak şekilde bir ideali ise, o zaman

$$I_1 \bowtie^f H := \{(i_1, f(i_1) + h) | i_1 \in I_1, h \in H\}, \tag{3.14}$$

   $A \bowtie^f J$ halkasının bir idealidir.

2. I_1, A'nın bir ideali ise, $I_1(A \bowtie^f J)$, I_1'nın $A \bowtie^f J$'ye genişlemesi olmak üzere

$$I_1 \bowtie^f (f(I_1)B)J := \{(i_1, f(i_1) + \gamma) | i_1 \in I_1, \gamma \in (f(I_1)B)J\} \tag{3.15}$$

   kümesine tekabül eder.

3. I_1, A halkasının $f(I_1)B = B$ olacak şekilde bir ideali ise,

$$I_1(A \bowtie^f J) = \{(i_1, f(i_1) + j) | i_1 \in I_1, j \in J\} = I_1 \bowtie^f J \tag{3.16}$$

   elde edilir [21].

ispat.

1. $(i_1, f(i_1) + h_1), (i_2, f(i_2) + h_2) \in I_1 \bowtie^f H$ alalım. $(i_1, f(i_1) + h_1) - (i_2, f(i_2) + h_2) = (i_1 - i_2, f(i_1 - i_2) + (h_1 - h_2)) \in I_1 \bowtie^f H$ ve her $(a', f(a') + j') \in A \bowtie^f J$ için $(i_1, f(i_1) + h_1).(a', f(a') + j') = (i_1a', f(i_1a') + f(i_1)j' + h_1f(a') + h_1j')$ elde edilir. $f(I_1)J \subseteq H$ olduğundan $f(i_1)j' \in H$ bulunur. Buradan $(i_1, f(i_1) + h_1).(a', f(a') + j') \in I_1 \bowtie^f H$ elde edilir. $I_1 \bowtie^f H$, $A \bowtie^f J$'nin bir idealidir.

2. $I_1 \bowtie^f (f(I_1)B)J = I_k$ diyelim. 1. şıkta H yerine $(f(I_1)B)J$ alındığında I_k, $A \bowtie^f J$'nin bir ideali olur. $\{(i, f(i))|i \in I_1\} = \mu(I_1)$ kümesi için tanımdan $\mu(I_1) \subseteq I_k$ elde edilir. Şimdi, $A \bowtie^f J$'nin $\mu(I_1)$'yı içeren bir ideali K olsun. $i \in I_1$ ve $\gamma \in (f(I_1)B)J)$ olacak biçimde $(i, f(i) + \gamma) \in I_k$ alalım. Buradan $\gamma = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)b_k$ olacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in I_1$ ve $b_1, b_2, \ldots, b_n \in J$ bulunur. $(i, f(i)), (\alpha_1, f(\alpha_1)), \ldots, (\alpha_n, f(\alpha_n)) \in \mu(I_1) \subseteq K$ olduğundan buradan

$$(i, f(i) + \gamma) = (i, f(i)) + \textstyle\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k, f(\alpha_k))(0, b_k) \in K$$

elde edilir. Sonuç olarak, $I_k \subseteq K$ bulunur. O zaman $\mu(I_1)$'yı kapsayan herhangi bir K idealinin I_k idealini de kapsadığı gösterilmiş olur. Dolayısıyla I_k ideali $\mu(I_1)$'in ürettiği idealdir.

3. I_1, A halkasının $f(I_1)B = B$ olacak şekilde bir ideali olsun. O zaman 2. şıkta $(f(I_1)B)J$ yerine J ideali yazıldığında $I_1(A \bowtie^f J) = \{(i_1, f(i_1) + j)|i_1 \in I_1, j \in J\} = I_1 \bowtie^f J$ elde edilir.

Sonuç 3.2. A, tek maksimal ideali M olan kuazi-lokal halka olsun. $f : A \longrightarrow B$ halka homomorfizması olmak üzere her $Q \in Spec(B) \setminus Var(J)$ için $f^{-1}(Q) \neq M$ olacak şekilde B'nin J ideali olduğunu kabul edelim. A'nın I idealinin radikali M ise o zaman $I(A \bowtie^f J)$'nin radikali $M \bowtie^f J$ kümesidir [21].

ispat. Farz edelim ki $I(A \bowtie^f J) \subseteq P \bowtie^f J$ olacak şekilde A halkasının P asal ideali vardır. Buradan $I \subseteq P$ olur ve tek maksimal ideal M olduğundan $P = M$ elde edilir. Şimdi farz edelim ki bir $Q \in Spec(B) \setminus Var(J)$ için $I(A \bowtie^f J) \subseteq \overline{Q}^f$ olsun. Uyarı 3.5'ün 2. şıkkından ve $\overline{Q}^f$ idealinin tanımından $(f(I)B)J \subseteq Q$ ve böylece de $f(I) \subseteq Q$ elde edilir. Buradan $I \subseteq f^{-1}(Q)$ ve en baştaki varsayımla $f^{-1}(Q) = M$ bulunur ki bu hipotezle bir çelişki oluşturur. Dolayısıyla $A \bowtie^f J$'nin $I(A \bowtie^f J)$'yi içeren tek asal ideali $M \bowtie^f J$ kümesidir. $I(A \bowtie^f J) \subseteq \sqrt{I(A \bowtie^f J)} = M \bowtie^f J$

Lemma 3.5. I_1, A'nın ideali olmak üzere

$$\sqrt{I_1 \bowtie^f J} = \sqrt{I_1} \bowtie^f J \tag{3.17}$$

eşitliği sağlanır [22].

ispat. $(a_1, f(a_1) + j_1) \in \sqrt{I_1 \bowtie^f J}$ alalım. Pozitif bir k sayısı için, burada $j' = \sum_{n=0}^{k-1} \binom{k}{n} f(a_1^n) j_1^{k-n} \in J$ olacak şekilde $(a_1, f(a_1)+j_1)^k = (a_1^k, f(a_1^k)+j') \in I_1 \bowtie^f$

J elde edilir. Buradan $a_1^k \in I_1$ ve $a_1 \in \sqrt{I_1}$ bulunur. Dolayısıyla $(a_1, f(a_1)+j_1) \in \sqrt{I_1} \bowtie^f J$ elde edilir ve $\sqrt{I_1 \bowtie^f J} \subset \sqrt{I_1} \bowtie^f J$ sonucuna ulaşılır. Ters kapsama için, $(a_2, f(a_2)+j_2) \in \sqrt{I_1} \bowtie^f J$ alalım. Buradan $a_2 \in \sqrt{I_1}$ olduğundan bir pozitif n tamsayısı için $a_2^n \in I_1$ elde edilir. $(a_2, f(a_2)+j_2)^n = (a_2^n, f(a_2^n)+j_2^{'}) \in I_1 \bowtie^f J$ olduğundan $(a_2, f(a_2)+j_2) \in \sqrt{I_1 \bowtie^f J}$'dir. $\sqrt{I_1} \bowtie^f J \subset \sqrt{I_1 \bowtie^f J}$ sonucuna ulaşılır ve eşitlik sağlanmış olur.

Lemma 3.6. Teorem 3.6'de tanımlanan $\overline{N}^f$ kümesini ele alalım. O zaman $\sqrt{\overline{N}^f} = \overline{\sqrt{N}}^f$ eşitliği sağlanır [22].

ispat.

Teorem 3.6'den yola çıkarak $(a, f(a)+j) \in \sqrt{\overline{N}^f}$ alalım. Pozitif bir m tamsayısı için $(a, f(a)+j)^m \in \overline{N}^f$ elde edilir. $(a^m, (f(a)+j)^m) \in \overline{N}^f$ olduğundan $(f(a)+j)^m \in N$ bulunur. Dolayısıyla $f(a)+j \in \sqrt{N}$ elde edilir. Buradan $(a, f(a)+j) \in \overline{\sqrt{N}}^f$ ve $\sqrt{\overline{N}^f} \subset \overline{\sqrt{N}}^f$ sonucuna ulaşılır. Ters kapsama için de $(b, f(b)+j) \in \overline{\sqrt{N}}^f$ alalım. Teorem 3.6'den $f(b)+j \in \sqrt{N}$ elde edilir. Buradan bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $(f(b)+j)^k \in N$'dir. $(b, f(b)+j)^k = (b^k, (f(b)+j)^k) \in \overline{N}^f$ olduğundan $(b, f(b)+j) \in \sqrt{\overline{N}^f}$ elde edilir ve eşitlik sağlanmış olur.

Teorem 3.9. Kabul edelim ki Tanım 3.1'deki koşullar sağlansın. Buna göre aşağıdaki ifadeler denktir [5] :

1. $A \bowtie^f J$ bir Noetherian halkadır.
2. A ve $f(A)+J$ birer Noetherian halkadır.

4
BİRLEŞTİRİLMİŞ CEBİR YAPISININ ÖZEL HALLERİ

Tanım 4.1. I, değişmeli ve birimli A halkasının öz ideali olsun. I ideali boyunca A halkasının birleştirilmiş kopyası, birim elemanı $(1,1)$ olan $A \times A$ kartezyen çarpım halkasının alt halkası olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır [23]:

$$A \bowtie I = \{(a, a+i) | a \in A, i \in I\} \tag{4.1}$$

$A \bowtie I$ ile gösterilen bir ideal boyunca bir halkanın birleştirilmiş kopyası $A \bowtie^f J$ yapısının özel halidir.

Lemma 4.1. $A \bowtie I$'nın tamlık bölgesi olması için gerek ve yeter koşul A'nın tamlık bölgesi ve $I = 0$ olmasıdır [6].

$ispat.$ $(\Rightarrow) : A \bowtie I$ tamlık bölgesi ve $I \neq 0$ olsun. Sıfırdan farklı herhangi bir $i \in I$ için $(i,0)(0,i) = (0,0)$ olduğundan $A \bowtie I$'nın tamlık bölgesi olması ile çelişir. Dolayısıyla $I = 0$ olmalıdır. $0 \neq a_1 \in A$ olmak üzere $(a_1, a_1 + i_1) \in A \bowtie I$ alalım. $(a_2, a_2 + i_2) \in A \bowtie I$ için $(a_1, a_1 + i_1).(a_2, a_2 + i_2) = (0,0)$ olduğunu kabul edelim. $(a_1a_2, a_1a_2 + a_1i_2 + i_1a_2 + i_1i_2) = (0,0)$ eşitliğinden $a_1a_2 = 0$ dır ve $A \bowtie I$ sıfır bölen içermediğinden $a_2 = 0$ elde edilir. Dolayısıyla A tamlık bölgesi bulunur.

$(\Leftarrow) : A$ tamlık bölgesi ve $I = 0$ olsun. $A \bowtie I = A \bowtie 0 = \{(a,a) : a \in A\}$ elde edilir. $0 \neq a_1$ olmak üzere $(a_1, a_1) \in A \bowtie I$ alalım. Kabul edelim ki $(a_2, a_2) \in A \bowtie I$ için $(a_1, a_1).(a_2, a_2) = (0,0)$ olsun. $(a_1a_2, a_1a_2) = (0,0)$ olduğundan $a_1a_2 = 0$ bulunur. A tamlık bölgesi olduğundan $a_2 = 0$ elde edilir. Buradan $A \bowtie I$ tamlık bölgesi bulunur.

Uyarı 4.1. Lemma 3.1'den $I_1 \subseteq A \bowtie I \subseteq A \times A$ ve $I_2 \subseteq A \bowtie^f J \subseteq A \times B$ olduğu açıkça görülür. Ayrıca $I_1 = A \bowtie 0$ ve $A \times A = A \bowtie A$ ($I_2 = A \bowtie^f 0$ ve $A \times B = A \bowtie^f B$) olduğu açıktır [19].

Lemma 4.2. 1. A değişmeli halka ve I, A'nın ideali olsun. P, A'nın bir asal ideali olmak üzere aşağıdaki kümeleri ele alalım:

$$P_0 = \{(b, b+i) | b \in P, i \in I \cap P\} \tag{4.2}$$

$$P_1 = \{(b, b+i) | b \in P, i \in I\} \tag{4.3}$$

$$P_2 = \{(b+i, b) | b \in P, i \in I\} \tag{4.4}$$

(i) Eğer $I \subseteq P$ ise o zaman $P_0 = P_1 = P_2$ olup $A \bowtie I$'nın asal idealidir ve P üzerinde yer alan $A \bowtie I$'nın tek asal idealidir.

(ii) Eğer $I \nsubseteq P$ ise o zaman $P_1 \neq P_2$, $P_1 \cap P_2 = P_0$'dır. Ayrıca P_1 ve P_2, $A \bowtie I$'nin P üzerinde yer alan tek asal idealleridir.

Dahası, $A \bowtie I$'nın her asal ideali bir $P \in Spec(A)$ için yukarıdaki P_1 ve P_2 formunda ifade edilir.

2. Q, $A \bowtie I$'nın asal ideali ve $D_1 = \{(0, i) | i \in I\}$ olsun. Burada iki durum söz konusudur: $Q \ngeq D_1$ veya $Q \supseteq D_1$.

(a) Eğer $Q \ngeq D_1$ ise o zaman $Q = P_2 = \{(b+i, b) | b \in P, i \in I\}$ olacak şekilde A'nın tek bir P $(I \nsubseteq P)$ asal ideali mevcuttur.

(b) Eğer $Q \supseteq D_1$ ise o zaman $Q = P_1 = \{(b, b+i) | b \in P, i \in I\}$ olmak üzere A'nın tek bir P asalı mevcuttur [23].

$ispat.$

1. (i) $I \subseteq P$ olsun, buradan her $i \in I$ için $i \in P$ bulunur. Böylece küme tanımlarına bakıldığında $P_0 = P_1 = P_2$ elde edilir. $(b_1, b_1+i_1), (b_2, b_2+i_2) \in A \bowtie I$ alalım. Kabul edelim ki $(b_1, b_1+i_1)(b_2, b_2+i_2) \in P_1$ fakat $(b_1, b_1+i_1) \notin P_1$ olsun. Buradan $b_1 \notin P$ ve $i_1 \notin I$ elde edilir. Çarpım açıldığında, $(b_1b_2, b_1b_2 + b_1i_2 + i_1b_2 + i_1i_2) \in P_1$ bulunur. Küme tanımından $b_1b_2 \in P$ ve $b_1i_2 + i_1b_2 + i_1i_2 \in I$ olmalıdır. $i_1 \notin I$ olduğundan buradan $i_2 \in I$ ve $b_2 \in I \subseteq P$ sonucu elde edilir. Dolayısıyla, $(b_2, b_2+i_2) \in P_1$ bulunur ve $P_1, A \bowtie I$'nın asal idealidir.

(ii) $I \nsubseteq P$ olsun. Buradan bir $i_1 \in I$ vardır öyle ki $i_1 \notin P$'dır. Dolayısıyla $(0, i_1) \in P_1$ fakat $(0, i_1) \notin P_2$ bulunur, $P_1 \neq P_2$ olduğu açıkça görülür. $b_0 \in P$ ve $i_0 \in I \cap P$ olmak üzere $(b_0, b_0+i_0) \in P_0$ alalım. $b_0 \in P$ ve $i_0 \in I$ olduğundan $(b_0, b_0+i_0) \in P_1$ elde edilir. Ayrıca $i_0 \in P$ olduğundan $(b_0, b_0+i_0) = (b_0+0, b_0+i_0) \in P_2$ bulunur. Dolayısıyla

$(b_0, b_0 + i_0) \in P_1 \cap P_2$ ve $P_0 \subseteq P_1 \cap P_2$ elde edilir.

Ters kapsama için $(b_2, b_2 + i_2) \in P_1 \cap P_2$ alalım. $(b_2, b_2 + i_2) \in P_1$ olduğundan buradan $b_2 \in P$ ve $i_2 \in I$ bulunur. Dahası, $(b_2, b_2+i_2) \in P_2$ olduğundan $i_2 \in P$ sonucuna ulaşılır. $i_2 \in I \cap P$ olmak üzere küme tanımından $(b_2, b_2 + i_2) \in P_0$ bulunur. Sonuç olarak, $P_1 \cap P_2 \subseteq P_0$ olup eşitik sağlanmış olur.

2. (a) $A \bowtie I$'nın asal idealleri P_1 ve P_2 formunda olduğundan eğer $Q \not\supseteq D_1$ ise $Q = P_2 = \{(b + i, b)|b \in P, i \in I\}$ şeklinde ifade edilir.

   (b) Eğer $Q \supseteq D_1$ ise $Q = P_1 = \{(b, b + i)|b \in P, i \in I\}$ formunda olur.

Sonuç 4.1. I, A'nın öz ideali olsun. A tek maksimal ideali M_1 olan kuazi-lokal halkadır ancak ve ancak $A \bowtie I$ tek maksimal ideali $\{(m, m + i)|m \in M_1, i \in I\}$ olan kuazi-lokal halkadır [19].

ispat. $(\Rightarrow)$: A tek maksimal ideali M_1 olan kuazi-lokal halka olsun. $M_1 \bowtie I = \{(m, m + i)|m \in M_1, i \in I\}$ kümesinin $A \bowtie I$ halkasının birimsel olmayan elemanlarından oluşan ideali olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $(m_1, m_1 + i_1), (m_2, m_2 + i_2) \in M_1 \bowtie I$ ve $(a, a + i) \in A \bowtie I$ alalım. $(m_1, m_1 + i_1) + (m_2, m_2 + i_2) = (m_1 + m_2, m_1 + m_2 + i_1 + i_2) \in M_1 \bowtie I$ ve $(a, a + i)(m_1, m_1 + i_1) = (am_1, am_1 + ai_1 + im_1 + ii_1) \in M_1 \bowtie I$ olduğundan $M_1 \bowtie I$, $A \bowtie I$'nın bir idealidir. Dahası, $M_1 \subset A$ olduğundan $M_1 \bowtie I \subset A \bowtie I$ olup $M_1 \bowtie I$ öz idealdir. Şimdi, $m_3 \in A$ olmak üzere (m_3, m_3), $A \bowtie I$ da birimsel eleman olsun. O zaman $(m_3, m_3)(m_4, m_4) = (1, 1)$ olacak şekilde $m_4 \in A$ vardır. Buradan $m_3m_4 = 1$ sonucuna ulaşılır. $m_3 \in A$ birimsel ve M_1 de maksimal ideal olduğundan $m_3 \notin M_1$ elde edilir. Dolayısıyla $(m_3, m_3) \notin M_1 \bowtie I$ bulunur. $M_1 \bowtie I$'daki elemanlar birimsel değildir. O halde $A \bowtie I$ kuazi-lokal halkadır.

$(\Leftarrow) : M_1 \bowtie I = \{(m, m + i)|m \in M_1, i \in I\}$, $A \bowtie I$'nın tek maksimal ideali olsun. $M_1 \bowtie I \subset A \bowtie I$ olduğundan M_1, A'nın öz idealidir. Dolayısıyla benzer şekilde M_1'nin birimsel olmayan elemanlardan oluştuğunu göstermek yetecektir. Şimdi m_3, A'da birimsel eleman olsun. O zaman $m_3m_4 = 1$ olacak biçimde $m_4 \in A$ vardır. Buradan $(m_3, m_3)(m_4, m_4) = (1, 1)$ bulunur. $(m_3, m_3) \in A \bowtie I$ da birimsel ve $M_1 \bowtie I$ maksimal ideal olduğundan $(m_3, m_3) \notin M_1 \bowtie I$ elde edilir. Böylece $m_3 \notin M_1$ bulunur. M_1'deki elemanlar birimsel değildir. Sonuç olarak A kuazi-lokal halkadır.

Lemma 4.3. A değişmeli halka ve $0 \neq I$, A'nın bir esas ideali olsun. $D_1 = \{(0, i), i \in I\}$ ve $D_2 = \{(i, 0), i \in I\}$, $A \bowtie I$'nın esas idelleridir [23].

$ispat.$ $(0,i) \in D_1$ alalım. I, A'nın esas ideali olduğundan $I = Ab = (b)$ olacak şekilde bir $b \in I$ vardır. Buradan bir $a \in A$ ve $j \in I$ için $(0,i) = (0,ab) = (a+j,a)(0,b)$ elde edilir. Dolayısıyla D_1, $A \bowtie I$'nın $(0,b)$ elemanı ile üretilen bir esas idealidir. Benzer şekilde, $(i,0) \in D_2$ alalım. I esas ideal olduğundan $I = cA = (c)$ olacak şekilde bir $c \in I$ vardır. Böylece $(i,0) = (ca,0) = (c,0)(a,a+i)$ olacak şekilde bir $a \in A$ ve $i \in I$ vardır. D_2, $A \bowtie I$'nın $(c,0)$ elemanı ile üretilen esas idealidir.

Tanım 4.2. A bir halka ve I, A'nın ideali olsun. Bir A-modül M alalım. I ideali boyunca A-modül M'nin birleştirilmiş kopyası $M \bowtie I$ ile gösterilir ve

$$M \bowtie I = \{(m_1,m_2) \in M \times M | m_1 - m_2 \in IM\} \tag{4.5}$$

şeklinde tanımlanır. $a \in A, i \in I$ ve $(m_1,m_2) \in M \bowtie I$ için
$(a,a+i).(m_1,m_2) = (am_1,(a+i)m_2)$ şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile $M \bowtie I$ bir $A \bowtie I$-modüldür [6].

Burada M yerine özel olarak A halkasının kendisi A-modül olarak alındığında o zaman I ideali boyunca A-modül A'nın birleştirilmiş kopyası ile I ideali boyunca A halkasının birleştirilmiş kopyasının aynı olduğu açıktır.

Teorem 4.1. $0 \times I$, $A \bowtie I$'nın bir idealidir,
$(0 \times I)M \bowtie I = \{(0,i)(m_1,m_2) | i \in I, (m_1,m_2) \in M \times M, m_1 - m_2 \in IM\} = 0 \times IM$
ve $IM \times IM$, $M \bowtie I$'nın $A \bowtie I$-alt modülleridir. Ayrıca aşağıdaki izomorfizmalar da sağlanır [6]:

1.
$$\frac{M \bowtie I}{0 \times IM} \cong M \tag{4.6}$$

2.
$$\frac{M \bowtie I}{IM \times IM} \cong \frac{M}{IM} \tag{4.7}$$

$ispat.$ Öncelikle $(0,i_1m_1),(0,i_2m_2) \in 0 \times IM$ alalım. $(0,i_1m_1) + (0,i_2m_2) = (0,i_1m_1 + i_2m_2) \in 0 \times IM$ ve her $(a,a+i) \in A \bowtie I$ için $(a,a+i).(0,i_1m_1) = (0,i_1m_1(a+i)) \in 0 \times IM$ olduğundan $0 \times IM$, $M \bowtie I$'nın bir $A \bowtie I$- alt modülüdür.
Benzer şekilde $(i_1m_1,i_2m_2),(i_1'm_1',i_2'm_2') \in IM \times IM$ alalım. $(i_1m_1,i_2m_2) + (i_1'm_1',i_2'm_2') = (i_1m_1 + i_1'm_1', i_2m_2 + i_2'm_2') \in IM \times IM$ ve her $(a,a+i) \in A \bowtie I$ için $(a,a+i).(i_1m_1,i_2m_2) = (ai_1m_1,(a+i)i_2m_2) \in IM \times IM$ olduğundan $IM \times IM$ de $M \bowtie I$'nın bir $A \bowtie I$-alt modülüdür.

1. $\phi : M \bowtie I \longrightarrow M$ homomorfizması $(m_1, m_2) \mapsto m_1$ şeklinde tanımlandığında

$$\begin{aligned} \text{Çek}\phi &= \{(m_1, m_2) \in M \bowtie I | \phi((m_1, m_2)) = 0\} \\ &= \{(m_1, m_2) \in M \bowtie I | m_1 = 0, m_1 - m_2 \in IM\} \\ &= 0 \times IM \end{aligned}$$

bulunur. Birinci izomorfizma teoremi ile sonuç elde edilir.

2. $\varphi : M \bowtie I \longrightarrow \frac{M}{IM}$ homomorfizması da $(m_1, m_2) \mapsto m_1 + IM$ olarak tanımlandığında

$$\begin{aligned} \text{Çek}\varphi &= \{(m_1, m_2) \in M \bowtie I | \varphi((m_1, m_2)) = 0_{\frac{M}{IM}} = IM\} \\ &= \{(m_1, m_2) \in M \bowtie I | m_1 + IM = IM\} \\ &= \{(m_1, m_2) \in M \bowtie I | m_1 \in IM, m_1 - m_2 \in IM\} \\ &= IM \times IM \end{aligned}$$

bulunur. Birinci izomorfizma teoremi ile sonuç elde edilir.

Örnek 4.1. $A = \mathbb{Z}$'nın öz ideali $I = 3\mathbb{Z}$ olsun. $\mathbb{Z}$-modül $M = \mathbb{Z}_4$ alalım. $A \bowtie I = \mathbb{Z} \bowtie 3\mathbb{Z} = \{(a, a + i) | a \in \mathbb{Z}, i \in 3\mathbb{Z}\}$, $M \bowtie I = \mathbb{Z}_4 \bowtie 3\mathbb{Z} = \{(\bar{m_1}, \bar{m_2}) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 | \bar{m_1} - \bar{m_2} \in 3\mathbb{Z}\mathbb{Z}_4\}$ olmak üzere Teorem 4.1'den $\phi : \mathbb{Z}_4 \bowtie 3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4$ homomorfizması $(\bar{m_1}, \bar{m_2}) \mapsto \bar{m_1}$ şeklinde tanımlandığında

$$\begin{aligned} \text{Çek}\phi &= \{(\bar{m_1}, \bar{m_2}) \in \mathbb{Z}_4 \bowtie 3\mathbb{Z} | \phi((\bar{m_1}, \bar{m_2})) = \bar{0}\} \\ &= \{(\bar{m_1}, \bar{m_2}) \in \mathbb{Z}_4 \bowtie 3\mathbb{Z} | \bar{m_1} = \bar{0}, \bar{m_1} - \bar{m_2} \in 3\mathbb{Z}\mathbb{Z}_4\} \\ &= \bar{0} \times 3\mathbb{Z}\mathbb{Z}_4 \end{aligned}$$

bulunur. Birinci izomorfizma teoremine göre $\frac{\mathbb{Z}_4 \bowtie 3\mathbb{Z}}{\bar{0} \times 3\mathbb{Z}\mathbb{Z}_4} \cong \mathbb{Z}_4$ elde edilir.
Benzer şekilde, $\varphi : \mathbb{Z}_4 \bowtie 3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4/3\mathbb{Z}\mathbb{Z}_4$ homomorfizması $(\bar{m_1}, \bar{m_2}) \mapsto \bar{m_1} + 3\mathbb{Z}\mathbb{Z}_4$ şeklinde tanımlandığında

$$\begin{aligned} \text{Çek}\varphi &= \{(\bar{m_1}, \bar{m_2}) \in \mathbb{Z}_4 \bowtie 3\mathbb{Z} | \varphi((\bar{m_1}, \bar{m_2})) = 3\mathbb{Z}\mathbb{Z}_4\} \\ &= \{(\bar{m_1}, \bar{m_2}) \in \mathbb{Z}_4 \bowtie 3\mathbb{Z} | \bar{m_1} + 3\mathbb{Z}\mathbb{Z}_4 = 3\mathbb{Z}\mathbb{Z}_4\} \\ &= \{(\bar{m_1}, \bar{m_2}) \in \mathbb{Z}_4 \bowtie 3\mathbb{Z} | \bar{m_1} \in 3\mathbb{Z}\mathbb{Z}_4, \bar{m_1} - \bar{m_2} \in 3\mathbb{Z}\mathbb{Z}_4\} \\ &= 3\mathbb{Z}\mathbb{Z}_4 \times 3\mathbb{Z}\mathbb{Z}_4 \end{aligned}$$

bulunur. Birinci izomorfizma teoreminden $\frac{\mathbb{Z}_4 \bowtie 3\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}\mathbb{Z}_4 \times 3\mathbb{Z}\mathbb{Z}_4} \cong \frac{\mathbb{Z}_4}{3\mathbb{Z}\mathbb{Z}_4}$ elde edilir.

Uyarı 4.2. N, M'nin alt modülü olsun.

$N \bowtie I = \{(n_1, m_1) \in N \times M | n_1 - m_1 \in IM\}$ olarak tanımlanır. Dolayısıyla $N \bowtie I$, $M \bowtie I$'nın alt modülüdür [22].

Lemma 4.4. N, M'nin alt modülü olsun.

$$(N \bowtie I : M \bowtie I) = (N : M) \bowtie I \tag{4.8}$$

eşitliği sağlanır [22].

ispat. $(a_1, a_1 + i_1) \in (N \bowtie I : M \bowtie I)$ alalım. Tanım 2.1.7'den yola çıkarak $(a_1, a_1 + i_1)M \bowtie I \subseteq N \bowtie I$ elde edilir. $a_1 M \subseteq N$ olduğundan buradan $(a_1, a_1 + i_1) \in (N : M) \bowtie I$ sonucuna ulaşılır.
Ters kapsama için, $(a_2, a_2 + i_2) \in (N : M) \bowtie I$ alalım. Buradan $a_2 \in (N : M)$ olduğundan her $m_1 \in M$ için $a_2 m_1 \in N$ elde edilir. Şimdi, $(m, m') \in M \bowtie I$ alalım. $(a_2, a_2 + i_2).(m, m') = (a_2 m, (a_2 + i_2)m') \in N \times M$'dir. Ayrıca burada $m - m' \in IM$ olduğundan $a_2 m - (a_2 m' + i_2 m') = a_2(m - m') - i_2 m' \in IM$ bulunur. $(a_2, a_2 + i_2).(m, m') \in N \bowtie I$ elde edilir. Sonuç olarak, $(a_2, a_2 + i_2) \in (N \bowtie I : M \bowtie I)$ bulunur ve eşitlik sağlanmış olur.

Uyarı 4.3. Eğer A-modüller, $A \bowtie I \longrightarrow A$; $(a_1, a_1 + i_1) \mapsto a_1 + i_1$ ikinci izdüşüm fonksiyonu ile $A \bowtie I$-modüller olarak düşünülürse o zaman Teorem 4.1'deki önermeye benzer bir ispatla

$$\frac{M \bowtie I}{IM \times 0} \cong M \tag{4.9}$$

izomorfizması elde edilir [6].

Lemma 4.5. $A \bowtie I$-modül $M \bowtie I$ Noetheriandır ancak ve ancak A-modül M Noetheriandır [6].

ispat. $(\Rightarrow)$: $A \bowtie I$-modül $M \bowtie I$ Noetherian olsun. $0 \times IM$,
$M \bowtie I$'nın $A \bowtie I$ alt modülü olduğundan Noetheriandır. Teorem 4.1'deki izomorfizmadan M bir Noetherian $A \bowtie I$-modül bulunur. $i : A \longrightarrow A \bowtie I; a \mapsto (a, a)$ örten homomorfizma ile Lemma 2.2.4 gereğince M bir Noetherian A-modül bulunur.

$(\Leftarrow)$: Şimdi, M bir Noetherian A-modül olsun. Lemma 2.2.4 yardımıyla M bir $A \bowtie I$-modüldür. Teorem 4.1'i kullanarak ve Teorem 2.2.3'in yardımıyla $M \bowtie I$'nın Noetherian $A \bowtie I$-modül olduğunu ispat etmek için $A \bowtie I$-modül $0 \times IM$'nin bu özelliği sağladığını göstermek yeterlidir. $T_1 \subseteq T_2 \subseteq T_3 \subseteq \ldots$
$0 \times IM$'nin $A \bowtie I$-alt modüllerinin bir artan zinciri olsun. $T_i = 0 \times P_i$ olarak ele alalım. Burada P_i'ler, IM'nin A-alt modülleridir ve M Noetherian olduğundan alt modülü IM de Noetheriandır. Böylece $P_n = P_{n+1}$ olacak şekilde bir n tamsayısı

vardır. Sonuç olarak buradan $T_n = T_{n+1}$ elde edilir. $0 \times IM$ Noetheriandır ve böylece $A \bowtie I$-modül $M \bowtie I$ Noetherian bulunur.

Sonuç 4.2. $A \bowtie I$-modül $M \bowtie I$'nin Artiniandır ancak ve ancak A-modül M Artiniandır [6].

Sonuç 4.3. $A \bowtie I$ Noetherian halkadır ancak ve ancak A bir Noetherian halkadır [6].

ispat. $(\Rightarrow) : \gamma : A \bowtie I \longrightarrow A; (a', a' + i') \mapsto a' + i'$ örten homomorfizmasını ele alalım. A'nın ideallerinin keyfi artan zinciri $I'_1 \subseteq I'_2 \subseteq \ldots \subseteq I'_n \subseteq \ldots$ olsun. $k = 1, 2, \ldots$ için $I_k = \gamma^{-1}(I'_k)$ ise $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq \ldots$
$A \bowtie I$'nın ideallerinin artan zinciri olur. $A \bowtie I$ Noetherian olduğundan her $m \geq n$ için $I_m = I_n$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{Z}^+$ vardır. γ örten olduğundan $\gamma(I_k) = \gamma(\gamma^{-1}(I'_k)) = I'_k$ dır. O halde $\forall m \geq n$ için $I'_m = I'_n$ bulunur.
$(\Leftarrow) : A \longrightarrow A \bowtie I; a \mapsto (a, a)$ örten homomorfizmasını ele alalım. Lemma 2.1.8 yardımıyla istenilen sonuç elde edilir.

Lemma 4.6. T, M'nin alt modülü olmak üzere aşağıdakiler eşdeğerdir [22] :

1. T, M'nin asal alt modülüdür.
2. $T \bowtie I$, $M \bowtie I$'nın asal alt modülüdür.

ispat. $(1) \Rightarrow (2)$ T, M'nin asal alt modülü olsun. $\forall (a_1, a_1 + i_1) \in A \bowtie I$ ve $\forall (m, m') \in M \bowtie I$ için $(a_1, a_1 + i_1).(m, m') \in T \bowtie I$ olduğunu kabul edelim. Buradan $(a_1 m, (a_1 + i_1)m') \in T \bowtie I$ ve $a_1 m \in T$ elde edilir. T asal alt modül olduğundan $a_1 \in (T : M)$ veya $m \in T$ olmalıdır. Eğer $a_1 \in (T : M)$ ise Lemma 4.4 yardımıyla $(a_1, a_1 + i_1) \in (T : M) \bowtie I = (T \bowtie I : M \bowtie I)$ bulunur. Eğer $m \in T$ ise $m - m' \in IM$ olduğundan $(m, m') \in T \bowtie I$ sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla $T \bowtie I$, $M \bowtie I$'nın asal alt modülüdür.

$(2) \Rightarrow (1)$ $T \bowtie I$, $M \bowtie I$'nın asal alt modülü olsun. Her $a_1 \in A$ ve $m_1 \in M$ için $a_1 m_1 \in T$ olduğunu kabul edelim. Buradan $(a_1, a_1).(m_1, m_1) \in T \bowtie I$ elde edilir. $T \bowtie I$, $M \bowtie I$'nın asal alt modülü olduğundan Tanım 2.2.9'den $(a_1, a_1) \in (T \bowtie I : M \bowtie I)$ veya $(m_1, m_1) \in T \bowtie I$ olmalıdır. Eğer $(a_1, a_1) \in (T \bowtie I : M \bowtie I)$ ise Lemma 4.4'ten $(a_1, a_1) \in (T : M) \bowtie I$ dır ve buradan $a_1 \in (T : M)$ bulunur. Diğer yandan $(m_1, m_1) \in T \bowtie I$ ise $m_1 \in T$ elde edilir. Böylece T, M'nin asal alt modülü bulunur.

Teorem 4.2. 1. $M \bowtie I$ asal $A \bowtie I$-modüldür ancak ve ancak M asal A-modül ve $IM = 0$ dır.

2. $0 \times IM$, $M \bowtie I$'nın bir asal $A \bowtie I$-alt modülüdür ancak ve ancak M bir asal A-modüldür [6].

ispat.

1. $(\Rightarrow) : M \bowtie I$ asal $A \bowtie I$-modül ve farz edelim ki $IM \neq 0$ olsun. Böylece $im \neq 0$ olacak şekilde $i \in I$ ve $m \in M$ ele alalım. Buradan $(0, im) \neq (0, 0)$ iken $(i, 0)(0, im) = (0, 0)$ elde edilir. Ayrıca $M \bowtie I$ asal modül olduğundan her $(m, m') \in M \bowtie I$ için $(i, 0)(m, m') = (im, 0) = (0, 0)$ olmalıdır ki bu $im \neq 0$ olması ile çelişir. Dolayısıyla, $IM = 0$ olmalıdır. Şimdi, $a_1 m = 0$ olacak şekilde $a_1 \in A$ ve $0 \neq m \in M$ alalım. Buradan $(a_1, a_1)(m, m) = (0, 0)$ ve böylece $(a_1, a_1)M \bowtie I = 0$ bulunur. Her $r \in M$ için $(a_1 r, a_1 r) = (a_1, a_1)(r, r) = (0, 0)$ bulunduğundan $a_1 M = 0$ elde edilir ve M asal A-modül bulunur.

   $(\Leftarrow) : IM = 0$ ve M asal A-modül olsun. $IM = 0$ olduğundan küme tanımından $M \bowtie I = \{(m_1, m_1) | m_1 \in M\}$ elde edilir. Şimdi $(a, a + i) \in A \bowtie I$ alalım ve $(a, a + i)(m_1, m_1) = (0, 0)$ olacak şekilde $0 \neq m_1 \in M$ olduğunu varsayalım. Buradan $am_1 = 0$ ve M asal A-modül olduğundan $aM = 0$ elde edilir. Dolayısıyla, her $b \in M$ için $(a, a + i)(b, b) = (ab, ab + ib) = (0, 0)$ bulunur ve $(a, a + i)M \bowtie I = (0, 0)$ elde edilir. Sonuç olarak $M \bowtie I$ asal $A \bowtie I$-modüldür.

2. $(\Rightarrow) : 0 \times IM$, $M \bowtie I$'nın asal $A \bowtie I$-alt modülü olsun. Kabul edelim ki $a_1 \in A$ ve $0 \neq m_1 \in M$ için $a_1 m = 0$ olsun. $\frac{M \bowtie I}{0 \times IM}$ de $\overline{(0, 0)} \neq \overline{(m_1, m_1)}$ için $(a_1, a_1)\overline{(m_1, m_1)} = \overline{(a_1 m_1, a_1 m_1)} = \overline{(0, 0)}$ olduğu açıktır. Buradan her $r \in M$ için $\overline{(a_1 r, a_1 r)} = (a_1, a_1)\overline{(r, r)} = \overline{(0, 0)}$ dır. Dolayısıyla $a_1 r = 0$ ve $a_1 M = 0$ elde edilir, M bir asal A-modül bulunur.

   $(\Leftarrow)$: Teorem 4.1'deki (4.6) izomorfizması ile M asal A-modül ise $\frac{M \bowtie I}{0 \times IM}$ asal modüldür. Lemma 2.2.2 yardımıyla $0 \times IM, M \bowtie I$ 'nın asal $A \bowtie I$-alt modülü bulunur.

Lemma 4.7. $M \bowtie I$ sadık $A \bowtie I$-modüldür ancak ve ancak M sadık A-modüldür [6].

ispat. $(\Rightarrow) : M \bowtie I$ sadık $A \bowtie I$-modül olsun.
$Ann_{A \bowtie I}(M \bowtie I) = \{(a, a + i) \in A \bowtie I | (a, a + i)(m_1, m_2) = (0, 0), \forall (m_1, m_2) \in M \bowtie I\} = (0, 0)$ dır. Buradan $(am_1, am_2 + im_2) = (0, 0)$ olması için $am_1 = 0$

ve $am_2 + im_2 = 0$ elde edilir. Her $m_1, m_2 \in M$ için bu eşitlikler $a = 0$ ve $i = 0$ sağlandığından $Ann(M) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla M bir sadık A-modüldür.

$(\Leftarrow)$: M sadık A-modül olsun. Küme tanımından
$Ann(M) = \{a_1 \in A | a_1 m = 0, \forall m \in M\} = 0$ dır. $(a, a+i) \in A \bowtie I$ alalım, $(m_1, m_2) \in M \bowtie I$ için $(a, a+i).(m_1, m_2) = (am_1, am_2 + im_2) = (0, 0)$ dır. Buradan $am_1 = 0$ ve $am_2 + im_2 = 0$ sonucu elde edilir. M sadık modül olduğundan her $m_1, m_2 \in M$ için $a = 0$ ve $i = 0$ bulunur. Dolayısıyla her $(m_1, m_2) \in M \bowtie I$ için $(a, a+i) = (0, 0)$ sonucuna ulaşılır, $M \bowtie I$ sadık $A \bowtie I$-modüldür.

Aşağıdaki tanım $A \bowtie^f J$- modül yapısının özel bir halidir.

Tanım 4.3. $f : A \longrightarrow B$ bir halka homomorfizması, $J \trianglelefteq B$ olsun. Ayrıca M, A-modül ve N, B-modül olsun. $\phi : M \longrightarrow N, A$-modül homomorfizması olmak üzere ϕ'ye göre J ideali boyunca M ve N'nin birleştirilmesi

$$M \bowtie^{\phi} JN := \{(m, \phi(m) + n) | m \in M, n \in JN\} \tag{4.10}$$

şeklinde tanımlanır [7]. Aşağıdaki skaler çarpma işlemi ile $M \bowtie^{\phi} JN$ bir $A \bowtie^f J$-modüldür:
$(a, f(a) + j).(m, \phi(m) + n) := (am, \phi(am) + f(a)n + j\phi(m) + jn)$

ϕ bir A-modül homomorfizması olduğundan $\phi(am) = f(a)\phi(m)$ şeklinde ifade edilir. Ayrıca $M = A$, $N = B$ ve $\phi = f$ ise, A-modül A ve B-modül B'nin J ideali boyunca ϕ'ye göre birleştirilmesi ile A ve B'nin J ideali boyunca f'ye göre birleştirilmesinin aynı olduğu açıktır.
Dahası, $B = A$, $M = N$ ve ϕ birim fonksiyon alınırsa, M ve N'nin ϕ'ye göre J ideali boyunca birleştirilmesi tam olarak A-modül M'nin J ideali boyunca birleştirilmiş kopyasına tekabül eder. Dolayısıyla modüllerin birleştirilmesi kavramı, daha önce bahsedilen tüm kavramların bir genellemesidir [7] .

Uyarı 4.4. T_1 ve T_2, M ve N modüllerinin sırasıyla alt modülleri olsun. O zaman

$$T_1 \bowtie^{\phi} JN = \{(m_1, \phi(m_1) + n_2) \in M \bowtie^{\phi} JN : m_1 \in T_1\} \tag{4.11}$$

$$\overline{T_2}^{\phi} = \{(m_1, \phi(m_1) + n_2) \in M \bowtie^{\phi} JN : \phi(m_1) + n_2 \in T_2\} \tag{4.12}$$

$M \bowtie^{\phi} JN$'nin alt modülleridir [24].

Uyarı 4.5. 1. $f(A) + J$, B'nin bir alt halkasıdır. Bu durumda, N bir $f(A) + J$-modüldür. $\phi(M) + JN$, N'nin bir $f(A) + J$-alt modülüdür. Böylece $\phi(M) +$

JN, $P_B : A \bowtie^f J \longrightarrow f(A) + J$, $P_B(a, f(a) + j) = f(a) + j$ şeklinde tanımlanan fonksiyon ile bir $A \bowtie^f J$-modüldür.

2. $\pi_N : M \bowtie^\phi JN \longrightarrow \phi(M) + JN$ fonksiyonu $\pi_N(m, \phi(m) + n) = \phi(m) + n$ şeklinde tanımlandığında bir $A \bowtie^f J$-modül homomorfizmasıdır.

3. $P_A : A \bowtie^f J \longrightarrow A$ örten homomorfizması ile M bir $A \bowtie^f J$-modüldür. Ayrıca $\pi_M : M \bowtie^\phi JN \longrightarrow M$, $\pi_M(m, \phi(m) + n) = m$ bir $A \bowtie^f J$-modül homomorfizmasıdır.

4. JN, $\phi(M) + JN$'nin bir $f(A) + J$-alt modülüdür. Sonuç olarak JN, $\phi(M) + JN$'nin bir $A \bowtie^f J$-alt modülüdür.

5. $i : JN \longrightarrow M \bowtie^\phi JN$ fonksiyonu $i(n) = (0, n)$ biçiminde tanımlandığında, $A \bowtie^f J$-modülleri ve $A \bowtie^f J$ homomorfizmaları ile

$$0 \to JN \xrightarrow{i} M \bowtie^\phi JN \xrightarrow{\pi_M} M \to 0 \tag{4.13}$$

bir tam dizidir [7].

ispat.

1. $f(a'_1) + j'_1, f(a'_2) + j'_2 \in f(A) + J$ alalım. $(f(a'_1) + j'_1) - (f(a'_2) + j'_2) = f(a'_1 - a'_2) + j'_1 - j'_2 \in f(A) + J$ ve $(f(a'_1) + j'_1).(f(a'_2) + j'_2) = f(a'_1 a'_2) + f(a'_1)j'_2 + j'_1 f(a'_2) + j'_1 j'_2 \in f(A) + J$ olduğundan $f(A) + J$, B'nin bir alt halkasıdır.
   $\varphi : (f(A) + J) \times N \longrightarrow N$ fonksiyonu $(f(a) + j, n) \mapsto (f(a) + j)n$ şeklinde tanımlandığında modül şartlarını sağladığından N bir $f(A) + J$- modüldür:

   (i) Her $f(a) + j \in f(A) + J$ ve her $n_1, n_2 \in N$ için $(f(a) + j)(n_1 + n_2) = (f(a) + j)n_1 + (f(a) + j)n_2$

   (ii) Her $f(a'_1) + j'_1, f(a'_2) + j'_2 \in f(A) + J$ ve her $n \in N$ için $(f(a'_1) + j'_1 + f(a'_2) + j'_2).n = (f(a'_1) + j'_1)n + (f(a'_2) + j'_2)n$

   (iii) Her $f(a'_1) + j'_1, f(a'_2) + j'_2 \in f(A) + J$ ve her $n \in N$ için $(f(a'_1) + j'_1).((f(a'_2) + j'_2).n) = ((f(a'_1) + j'_1).(f(a'_2) + j'_2)).n$

   (iv) Her $n \in N$ için $1_{f(A)+J}.n = (f(1) + t).n = n$

   Dahası $n_1, n_2 \in JN$ olmak üzere $(\phi(m_1) + n_1), (\phi(m_2) + n_2) \in \phi(M) + JN$ için $(\phi(m_1) + n_1) + (\phi(m_2) + n_2) = \phi(m_1 + m_2) + (n_1 + n_2) \in \phi(M) + JN$ ve her $f(a') + j' \in f(A) + J$ için
   $(f(a') + j')(\phi(m_1) + n_1) = f(a')\phi(m_1) + f(a')n_1 + j'\phi(m_1) + j'n_1 =$

$\phi(a'm_1) + f(a')n_1 + j'\phi(m_1) + j'n_1 \in \phi(M) + JN$ olduğundan $\phi(M) + JN$, N'nin bir $f(A) + J$-alt modülüdür.

2. $\pi_N : M \bowtie^{\phi} JN \longrightarrow \phi(M) + JN$ fonksiyonu $\pi_N(m, \phi(m) + n) = \phi(m) + n$ olarak tanımlandığında her $(m_1, \phi(m_1) + n_1), (m_2, \phi(m_2) + n_2) \in M \bowtie^{\phi} JN$ için

   $\pi_N((m_1, \phi(m_1) + n_1) + (m_2, \phi(m_2) + n_2)) = \pi_N((m_1 + m_2), \phi(m_1 + m_2) + (n_1 + n_2)) = \phi(m_1 + m_2) + (n_1 + n_2) = (\phi(m_1) + n_1) + (\phi(m_2) + n_2) = \pi_N(m_1, \phi(m_1) + n_1) + \pi_N(m_2, \phi(m_2) + n_2)$

   ve her $(a', f(a') + j') \in A \bowtie^{f} J$ için
   $\pi_N((a', f(a') + j')(m_1, \phi(m_1) + n_1)) = \pi_N(a'm_1, f(a')\phi(m_1) + f(a')n_1 + j'\phi(m_1) + j'n_1) = f(a')\phi(m_1) + f(a')n_1 + j'\phi(m_1) + j'n_1 = (f(a') + j')\phi(m_1) + (f(a') + j')n_1 = (f(a') + j')(\phi(m_1) + n_1) = (f(a') + j')\pi_N(m_1, \phi(m_1) + n_1)$
   olduğundan π_N bir $A \bowtie^{f} J$-modül homomorfizmasıdır.

3. $\pi_M : M \bowtie^{\phi} JN \longrightarrow M$, $\pi_M(m, \phi(m) + n) = m$ şeklinde tanımlandığında her $(m_1, \phi(m_1) + n_1), (m_2, \phi(m_2) + n_2) \in M \bowtie^{\phi} JN$ için
   $\pi_M((m_1, \phi(m_1) + n_1) + (m_2, \phi(m_2) + n_2)) = \pi_M((m_1 + m_2), \phi(m_1 + m_2) + (n_1 + n_2)) = m_1 + m_2 = \pi_M(m_1, \phi(m_1) + n_1) + \pi_M(m_2, \phi(m_2) + n_2)$
   ve her $(a', f(a') + j') \in A \bowtie^{f} J$ için
   $\pi_M((a', f(a') + j')(m_1, \phi(m_1) + n_1)) = \pi_M(a'm_1, f(a')\phi(m_1) + f(a')n_1 + j'\phi(m_1) + j'n_1) = a'm_1 = a'\pi_M(m_1, \phi(m_1) + n_1)$
   olduğundan π_M bir $A \bowtie^{f} J$-modül homomorfizmasıdır.

4. $n_1, n_2 \in JN$ olmak üzere $n_1 + n_2 \in JN$ ve her $f(a'_1) + j'_1 \in f(A) + J$ için $(f(a'_1) + j'_1)n_1 = f(a'_1)n_1 + j'_1 n_1 \in JN$ olduğundan JN, $\phi(M) + JN$'nin bir $f(A) + J$-alt modülüdür.

5. $i : JN \longrightarrow M \bowtie^{\phi} JN$ fonksiyonu $i(n) = (0, n)$ ile $\pi_M : M \bowtie^{\phi} JN \longrightarrow M$ fonksiyonu $\pi_M(m, \phi(m) + n) = m$ biçiminde tanımlandığında
   $Im(i) = \{0\} \times JN$ ve

$$\begin{aligned} \text{Çek}(\pi_M) &= \{(m_1, \phi(m_1) + n_1) : \pi_M(m_1, \phi(m_1) + n_1) = 0_M\} \\ &= \{(m_1, \phi(m_1) + n_1) : m_1 = 0\} \\ &= \{(0, \phi(0) + n_1) : n_1 \in JN\} \\ &= \{(0, n_1) : n_1 \in JN\} \\ &= \{0\} \times JN \end{aligned}$$

   bulunur. $Im(i) = \text{Ç}ek(\pi_M)$ olduğundan tam dizidir.

Teorem 4.3. $f : A \longrightarrow B$ bir halka homomorfizması, $J \trianglelefteq B$ olsun. Ayrıca M, A-modül ve N, B-modül olsun. $\phi : M \longrightarrow N, A$-modül homomorfizması olsun. O zaman aşağıdaki izomorfizmalar sağlanır [7]:

1.
$$\frac{M \bowtie^{\phi} JN}{\{0\} \times JN} \cong M \tag{4.14}$$

2. S, M'nin bir alt modülü olmak üzere
$$\frac{M \bowtie^{\phi} JN}{S \bowtie^{\phi} JN} \cong \frac{M}{S} \tag{4.15}$$

3.
$$\frac{M \bowtie^{\phi} JN}{\phi^{-1}(JN) \times \{0\}} \cong \phi(M) + JN \tag{4.16}$$

ispat.

1. $\pi_M : M \bowtie^{\phi} JN \longrightarrow M$ homomorfizması $(m', \phi(m') + n') \mapsto m'$ olarak tanımlandığında
$$\begin{aligned} \text{Çek}\pi_M &= \{(m', \phi(m') + n') \in M \bowtie^{\phi} JN | \pi_M(m', \phi(m') + n') = 0_M\} \\ &= \{(m', \phi(m') + n') \in M \bowtie^{\phi} JN | m' = 0\} \\ &= \{0\} \bowtie^{\phi} JN \end{aligned}$$
Birinci izomorfizma teoreminden sonuç elde edilir.

2. $\xi : M \bowtie^{\phi} JN \longrightarrow \frac{M}{S}$ homomorfizması $(m_1, \phi(m_1) + n) \mapsto m_1 + S$ şeklinde tanımlandığında
$$\begin{aligned} \text{Çek}\xi &= \{(m_1, \phi(m_1) + n) \in M \bowtie^{\phi} JN | \xi(m_1, \phi(m_1) + n) = 0_{\frac{M}{S}}\} \\ &= \{(m_1, \phi(m_1) + n) \in M \bowtie^{\phi} JN | m_1 + S = S\} \\ &= \{(m_1, \phi(m_1) + n) \in M \bowtie^{\phi} JN | m_1 \in S\} \\ &= S \bowtie^{\phi} JN \end{aligned}$$
Birinci izomorfizma teoreminden sonuç elde edilir.

3. Benzer şekilde, $\pi_N : M \bowtie^{\phi} JN \longrightarrow \phi(M) + JN$ homomorfizması

$(m, \phi(m) + n) \mapsto \phi(m) + n$ olarak tanımlandığında

$$\begin{aligned}
\text{Çek}\pi_N &= \{(m, \phi(m) + n) \in M \bowtie^{\phi} JN | \pi_N(m, \phi(m) + n) = 0_{\phi(M)+JN}\} \\
&= \{(m, \phi(m) + n) \in M \bowtie^{\phi} JN | \phi(m) + n = 0\} \\
&= \{(m, 0) \in M \bowtie^{\phi} JN | \phi(m) = -n \in JN\} \\
&= \{(m, 0) \in M \bowtie^{\phi} JN | m \in \phi^{-1}(JN)\} \\
&= \phi^{-1}(JN) \times \{0\}
\end{aligned}$$

İzomorfizma teoreminden istenilen sonuç elde edilir.

Örnek 4.2. $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{Z}_6$ ve J, B'nin ideali olmak üzere $J = 3\mathbb{Z}_6$ olsun. Ayrıca $\mathbb{Z}$-modül $M = \mathbb{Z}_2$ ve $\mathbb{Z}_6$-modül $N = \mathbb{Z}_6$ olsun. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_6; n \mapsto \bar{n}(\mod 6)$ halka homomorfizmasını alalım. $\phi : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}$-modül homomorfizmasını $\phi(\bar{1}) = \bar{3}$ olarak tanımlayalım. Şimdi, Teorem 4.3'den $\pi_M : \mathbb{Z}_2 \bowtie^{\phi} 3\mathbb{Z}_6\mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ homomorfizması $(m', \phi(m') + n') \mapsto m'$ olarak tanımlandığında

$$\begin{aligned}
\text{Çek}\pi_M &= \{(m', \phi(m') + n') \in \mathbb{Z}_2 \bowtie^{\phi} 3\mathbb{Z}_6\mathbb{Z}_6 | \pi_M(m', \phi(m') + n') = 0_{\mathbb{Z}_2}\} \\
&= \{(m', \phi(m') + n') \in \mathbb{Z}_2 \bowtie^{\phi} 3\mathbb{Z}_6\mathbb{Z}_6 | m' = 0\} \\
&= \{0\} \times 3\mathbb{Z}_6\mathbb{Z}_6
\end{aligned}$$

bulunur. Birinci izomorfizma teoreminden $\frac{\mathbb{Z}_2 \bowtie^{\phi} 3\mathbb{Z}_6\mathbb{Z}_6}{\{0\} \times 3\mathbb{Z}_6\mathbb{Z}_6} \cong \mathbb{Z}_2$ elde edilir.

Benzer şekilde, $\pi_N : \mathbb{Z}_2 \bowtie^{\phi} 3\mathbb{Z}_6\mathbb{Z}_6 \longrightarrow \phi(\mathbb{Z}_2) + 3\mathbb{Z}_6\mathbb{Z}_6$ homomorfizması $(m, \phi(m) + n) \mapsto \phi(m) + n$ olarak tanımlandığında

$$\begin{aligned}
\text{Çek}\pi_N &= \{(m, \phi(m) + n) \in \mathbb{Z}_2 \bowtie^{\phi} 3\mathbb{Z}_6\mathbb{Z}_6 | \pi_N(m, \phi(m) + n) = 0_{\phi(\mathbb{Z}_2)+3\mathbb{Z}_6\mathbb{Z}_6}\} \\
&= \{(m, \phi(m) + n) \in \mathbb{Z}_2 \bowtie^{\phi} 3\mathbb{Z}_6\mathbb{Z}_6 | \phi(m) + n = 0\} \\
&= \{(m, 0) \in \mathbb{Z}_2 \bowtie^{\phi} 3\mathbb{Z}_6\mathbb{Z}_6 | \phi(m) = -n \in 3\mathbb{Z}_6\mathbb{Z}_6\} \\
&= \{(m, 0) \in \mathbb{Z}_2 \bowtie^{\phi} 3\mathbb{Z}_6\mathbb{Z}_6 | m \in \phi^{-1}(3\mathbb{Z}_6\mathbb{Z}_6)\} \\
&= \phi^{-1}(3\mathbb{Z}_6\mathbb{Z}_6) \times \{0\}
\end{aligned}$$

bulunur ve İzomorfizma teoreminden $\frac{\mathbb{Z}_2 \bowtie^{\phi} 3\mathbb{Z}_6\mathbb{Z}_6}{\phi^{-1}(3\mathbb{Z}_6\mathbb{Z}_6) \times \{0\}} \cong \phi(\mathbb{Z}_2) + 3\mathbb{Z}_6\mathbb{Z}_6$ elde edilir.

Uyarı 4.6. Teorem 4.3'teki A-modüllerini $A \bowtie^{f} J$-modülü olarak düşünürsek, izomorfizmalar aynı zamanda $A \bowtie^{f} J$-izomorfizmalarıdır [7].

Lemma 4.8. Uyarı 4.4'teki tanımlı kümeleri ele alalım.

1. $(t_1, f(t_1) + j) \in (T_1 \bowtie^{\phi} JN : M \bowtie^{\phi} JN)$ dır ancak ve ancak $t_1 \in (T_1 : M)$ dır.

2. Eğer f ve ϕ örten homomorfizmalar ise o zaman $(t_1, f(t_1) + j) \in (\overline{T_2}^{\phi} : M \bowtie^{\phi} JN)$ dır ancak ve ancak $f(t_1) + j \in (T_2 : N)$ dır [24].

ispat.

1. $(\Rightarrow)$: $(t_1, f(t_1) + j) \in (T_1 \bowtie^{\phi} JN : M \bowtie^{\phi} JN)$ olsun. Tanım 2.1.7'den hareketle $(t_1, f(t_1) + j)M \bowtie^{\phi} JN \subseteq T_1 \bowtie^{\phi} JN$ elde edilir. Buradan her $(m_1, \phi(m_1) + n_1) \in M \bowtie^{\phi} JN$ için $(t_1, f(t_1) + j).(m_1, \phi(m_1) + n_1) \in T_1 \bowtie^{\phi} JN$ sonucuna ulaşılır. Çarpım açıldığında $(t_1m_1, f(t_1)\phi(m_1) + f(t_1)n_1 + j\phi(m_1) + jn_1) \in T_1 \bowtie^{\phi} JN$ olduğundan Uyarı 4.4'teki küme tanımından her $m_1 \in M$ için $t_1m_1 \in T_1$ bulunur. Dolayısıyla $t_1 \in (T_1 : M)$ elde edilir.

   $(\Leftarrow)$: $t_1 \in (T_1 : M)$ olduğunu kabul edelim. Buradan her $m_2 \in M$ için $t_1m_2 \in T_1$ elde edilir. Her $(m_1, \phi(m_1) + n_1) \in M \bowtie^{\phi} JN$ için $(t_1, f(t_1) + j).(m_1, \phi(m_1) + n_1) = (t_1m_1, f(t_1)\phi(m_1) + f(t_1)n_1 + j\phi(m_1) + jn_1) \in M \bowtie^{\phi} JN$ ve $t_1m_1 \in T_1$ olduğundan $(t_1, f(t_1) + j)(m_1, \phi(m_1) + n_1) \in T_1 \bowtie^{\phi} JN$ bulunur. Sonuç olarak $(t_1, f(t_1) + j) \in (T_1 \bowtie^{\phi} JN : M \bowtie^{\phi} JN)$ elde edilir.

2. $(\Rightarrow)$: $(t_1, f(t_1) + j) \in (\overline{T_2}^{\phi} : M \bowtie^{\phi} JN)$ olsun. Her $(m_1, \phi(m_1) + n_1) \in M \bowtie^{\phi} JN$ için $(t_1, f(t_1) + j).(m_1, \phi(m_1) + n_1) \in \overline{T_2}^{\phi}$ elde edilir. Buradan $(t_1m_1, f(t_1)\phi(m_1) + f(t_1)n_1 + j\phi(m_1) + jn_1) \in \overline{T_2}^{\phi}$ olduğundan $f(t_1)\phi(m_1) + f(t_1)n_1 + j\phi(m_1) + jn_1 \in T_2$ bulunur. $f(t_1)(\phi(m_1) + n_1) + j(\phi(m_1) + n_1) = (f(t_1) + j)(\phi(m_1) + n_1) \in T_2$ olduğundan her $\phi(m_1)+n_1 \in N$ için $(f(t_1)+j) \in (T_2 : N)$ sonucuna ulaşılır.

   $(\Leftarrow)$: Şimdi $f(t_1) + j \in (T_2 : N)$ olsun. Buradan her $n_1 \in N$ için $(f(t_1) + j)n_1 \in T_2$ olur. Dahası ϕ örten homomorfizma olduğundan $\phi(m) + n \in N$ elde edilir. Dolayısıyla her $(m, \phi(m) + n) \in M \bowtie^{\phi} JN$ için $(t_1, f(t_1) + j).(m, \phi(m) + n) = (t_1m, (f(t_1) + j)(\phi(m) + n)) \in \overline{T_2}^{\phi}$ olacağından $(t_1, f(t_1) + j) \in (\overline{T_2}^{\phi} : M \bowtie^{\phi} JN)$ sonucuna ulaşılır.

Teorem 4.4. Teorem 4.3'ün gösterimiyle $M \bowtie^{\phi} JN$ bir Noetherian $A \bowtie^{f} J$-modüldür ancak ve ancak $\phi(M) + JN$ bir Noetherian $f(A) + J$-modül ve M bir Noetherian A-modüldür [7].

ispat. $(\Rightarrow)$: Uyarı 4.5'in 2. şıkkındaki π_N homomorfizmasından eğer $M \bowtie^{\phi} JN$ Noetherian $A \bowtie^{f} J$-modül ise $\phi(M) + JN$ de Noetherian $A \bowtie^{f} J$-modüldür.

Böylece $\phi(M) + JN$ Noetherian $f(A) + J$-modüldür. Benzer şekilde Uyarı 4.5'in 3. şıkkındaki π_M homomorfizmasından M Noetherian $A \bowtie^f J$-modül olur. Dolayısıyla P_A homomorfizması ile M Noetherian A-modül bulunur.

$(\Leftarrow)$: $\phi(M) + JN$ Noetherian $f(A) + J$-modül olduğundan o zaman $\phi(M) + JN$ Noetherian $A \bowtie^f J$-modül olur. $JN, \phi(M) + JN$'nin alt modülü olduğundan JN de Noetherian $A \bowtie^f J$-modül olur. Ayrıca M Noetherian $A \bowtie^f J$-modüldür. Sonuç olarak Uyarı 4.5'in 5. şıkkından $M \bowtie^\phi JN$ Noetherian $A \bowtie^f J$-modül bulunur.

Lemma 4.9. Yukarıdaki gösterimle aşağıdaki koşullardan en az birinin sağlandığını varsayalım:

(i) JN bir Noetherian A-modüldür.

(ii) $\phi(M) + JN$ bir Noetherian A-modüldür.

Buradan, $M \bowtie^\phi JN$ bir Noetherian $A \bowtie^f J$-modüldür ancak ve ancak M bir Noetherian A-modüldür. Dahası, eğer M bir Noetherian A-modül ve N bir Noetherian A-modül ise o zaman B'nin her J ideali için $M \bowtie^\phi JN$ bir Noetherian $A \bowtie^f J$-modüldür [7].

$ispat$. Teorem 4.4, eğer $M \bowtie^\phi JN$ Noetherian $A \bowtie^f J$-modül ise M'nin Noetherian A-modül olduğunu söylemektedir. Tersine, M Noetherian A-modül olsun. JN, $\phi(M) + JN$'nin alt modülü olduğundan buradan (i)'in (ii)'den kaynaklandığı açıkça görülür. Şimdi (i)'in sağlandığını kabul edelim. M ve JN Noetherian A-modül olduklarından, ayrıca $A \bowtie^f J$-modüllerdir. Uyarı 4.5'in 5. şıkkından $M \bowtie^\phi JN$ de $A \bowtie^f J$-modül bulunur.

5
SONUÇ

Bu tez çalışması sonucunda birleştirilmiş cebir kavramı genel özellikleriyle verildi. Halkalar ve modüller için geçerli olan temel cebirsel özelliklerin birleştirilmiş halka ve birleştirilmiş modül tanımları için de sağlanıp sağlanmadığı irdelendi. Birleştirilmiş cebir kavramını karakterize etmek amaçlı yapılan çalışmaların derlemesi yapıldı. Bu çalışmalardaki açık olduğu belirtilerek verilen bazı sonuçların ispatları üzerinde durularak detaylı açıklamalarıyla ve örnekleriyle birlikte sunuldu.

KAYNAKÇA

[1] J. Dorroh, "Concerning adjunctions to algebras," 1932.

[2] M. Nagata, "On the 14-th problem of hilbert," *American Journal of Mathematics*, vol. 81, no. 3, pp. 766–772, 1959.

[3] M. Nagata, "Local rings," *Interscience Tracts in Pure and Appl. Math.*, 1962.

[4] M. D'Anna, M. Fontana, "An amalgamated duplication of a ring along an ideal: The basic properties," *Journal of Algebra and its Applications*, vol. 6, no. 03, pp. 443–459, 2007.

[5] M. D'Anna, C. A. Finocchiaro, M. Fontana, "Amalgamated algebras along an ideal," *Commutative algebra and its applications*, pp. 155–172, 2009.

[6] E. Bouba, N. Mahdou, M. Tamekkante, "Duplication of a module along an ideal," *Acta Mathematica Hungarica*, vol. 154, pp. 29–42, 2018.

[7] R. El Khalfaoui, N. Mahdou, P. Sahandi, N. Shirmohammadi, "Amalgamated modules along an ideal," *Communications of the Korean Mathematical Society*, vol. 36, no. 1, pp. 1–10, 2021.

[8] M. D'Anna, C. A. Finocchiaro, M. Fontana, "Properties of chains of prime ideals in an amalgamated algebra along an ideal," *Journal of Pure and Applied Algebra*, vol. 214, no. 9, pp. 1633–1641, 2010.

[9] N. Mahdou, M. A. S. Moutui, Y. Zahir, "Weakly prime ideals issued from an amalgamated algebra," *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, vol. 49, no. 3, pp. 1159–1167, 2020.

[10] D. S. Dummit, R. M. Foote, *Abstract algebra*. Wiley Hoboken, 2004, vol. 3.

[11] G. Yeşilot, M. Özavşar, *Soyut cebir çözümlü problemleri*. Nobel Akademik, 2012.

[12] F. Çallıalp, Ü. Tekir, *Değişmeli halkalar ve modüller*. Birsen Yayınevi, 2009.

[13] D. Mordeson, M. Sen, D. Malik, "Fundamentals of abstract algebra," *The McCGraw-HILL Companies, Inc. New York st. Louis, san Francisco, printed in Singapore*, 1997.

[14] D. M. Burton, *A First Course in Rings and Ideals*. Addison-Wesley Publishing Company, 1970.

[15] R. Y. Sharp, *Steps in commutative algebra*. Cambridge university press, 2000.

[16] T. Kolotoğlu, "Birleştirilmiş ve ikili birleştirilmiş halkaların idealleri ile birleştirilmiş modüllerin alt modülleri," Ph.D. dissertation, Yıldız Teknik Üniversitesi, 2023.

[17] M. Atiyah, *Introduction to commutative algebra*. CRC Press, 2018.

[18] Y. Tiras, A. Tercan, A. Harmanci, "Prime modules," *Honam Mathematical Journal*, vol. 18, no. 1, pp. 5–15, 1996.

[19] T. S. Long, "Ring extensions involving amalgamated duplications," Ph.D. dissertation, George Mason University, 2014.

[20] H. Köse, Y. Kurtulmaz, B. Üngör, A. Harmancı, "Semicommutativity of amalgamated rings," *Journal of Mathematical Research with Applications*, vol. 38, no. 4, pp. 366–376, 2018.

[21] M. D'Anna, C. A. Finocchiaro, M. Fontana, "New algebraic properties of an amalgamated algebra along an ideal," *Communications in Algebra*, vol. 44, no. 5, pp. 1836–1851, 2016.

[22] M. Issoual, N. Mahdou, N. A. Ozkirisci, E. Y. Celikel, "S-1-absorbing primary submodules," *arXiv preprint arXiv:2203.04690*, 2022.

[23] M. Chhiti, N. Mahdou, "Some homological properties of an amalgamated duplication of a ring along an ideal," *arXiv preprint arXiv:0903.2240*, 2009.

[24] E. Y. Celikel, H. A. Khashan, "On weakly s-primary submodules," *arXiv preprint arXiv:2203.14701*, 2022.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirisi

1. G. Yeşilot, E. Tarakcı, "Amalgamated Algebra," 11th International Summit Scientific Research Conference, Gaziantep, Turkey, pp.66, 2023.