İÇİNDEKİLER

Kuadratik Yüzeyler

Uzayda İkinci Dereceden Yüzeyler

Yüzeyi, 3 boyutlu Öklid uzayında (x, y, z) koordinatları arasında bir $F(x, y, z) := 0$ eşitliğini sağlayan noktaların kümesi olarak ele almıştık. Eğer yüzeyi tanımlayan F bağıntısı (x, y, z) değişkenlerine göre ikinci dereceden bir denklem ise, diğer bir ifadeyle,

$$F(x,y,z) := Ax^2+By^2+Cz^2+A_1xy+B_1xz+C_1yz+A_2x+B_2y+C_2z \\ +D=0$$

ise elde edilen yüzeye ***kuadratik yüzey*** adı verilir.

Silindirik yüzeyler, elipsoidler ve bunların bir özel hali olan küre yüzeyi, koni yüzeyleri, paraboloidler ve hiperboloidler temel kuadratik yüzey örnekleridir.

Koniklerde olduğu gibi kuadratik yüzeylerde de 1.derecen olan terimler yüzeyin merkez noktasının (eğer mevcut ise) seçilen koordinat sisteminin başlangıç noktasından farklı bir nokta olmasından kaynaklanan terimler olup verilen koordinat sistemine bir öteme hareketi uygulanarak bu terimler yok edilir. Çapraz terimler ise eksenlerin koordinat eksenlerinden farklı doğrultularda olmasından kaynaklanan terimler olup mevcut koordinat sistemine bir dönme hareketi uygulanarak bu terimler yok edilirse yüzeyin standart denkleminin ifade edildiği yeni bir koordinat sistemi alınabilir. Biz bu dersimizde standart denklemi yani

$$F(x,y,z) = Ax^2+By^2+Cz^2+D=0 \tag{0.0.1}$$

denklemi ile verilen yüzeyleri ele alacağız. Bu denklemde gerekli işlemler uygulayıp a, b ve c sayıları bulunarak (0.0.1) denklemi

$$\frac{x^2}{a^2} \mp \frac{y^2}{b^2} \mp \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{0.0.2}$$

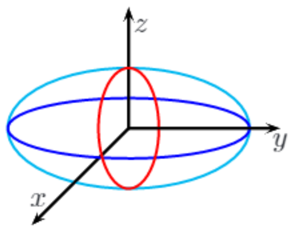
eşitliğine dönüştürülerek yüzeyin standart denklemi elde edilir. Burada katsayıların büyüklüğüne ve işaretlerine bakılarak çeşitli yüzeyler tanımlanabilir.

* **Kuadratik Yüzey Örnekleri**

0.1. Elipsoid

(0.0.2) denkleminde katsayılar pozitif yani $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ eşitliği ile tanımlanan yüzeyde a, b ve c sayılarının birbirinden farklı sayılar olması durumunda yüzeye *elipsoid* adı verilir. Bu durumda yüzeyin herhangi bir düzlem ile arakesit eğrisi bir elips olduğundan yüzeye bu isim verilmiştir. Elipsoidin koordinat düzlemleri ile arakesit eğrilerini bulmak için (0.0.2) eşitliğinde

$x = 0$ alınırsa Oyz düzleminde $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ elipsi,



$y = 0$ alınırsa Oxz düzleminde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ elipsi ve

$z = 0$ alınırsa Oxy düzleminde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi elde edilir.

Elipsoidin Özelikleri,

* Bir elipsoid merkez noktasına, koordinat eksenlerine ve koordinat düzlemlerine göre simetriktir.

* Bir elipsoidde a, b ve c sayılarından ikisi eşit ve üçüncüsü bunlardan farklı ise yüzeye *dönel elipsoid* veya *spheroid* adı verilir. Bu yüzey bir elipsi uzunluğu farklı olan ekseni etrafında döndürerek elde edilir.

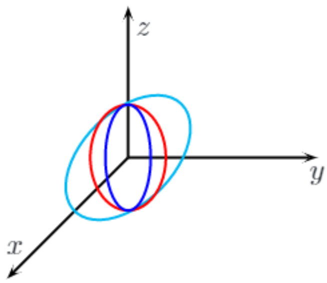
* Bir elipsoidde $a = b = c = r$ ise yüzey bir *küre yüzeyi*dir.
Spheroid ve küre yüzeyi aynı zamanda birer dönel yüzeydir.

Örnek 1: $x^2+4y^2+2z^2-1=0$ eşitliği ile verilen yüzeyin cisini belirtip şeklini çizelim:

Verilen denklemin standat hali

$$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{(\frac{1}{2})^2}+\frac{z^2}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=1$$

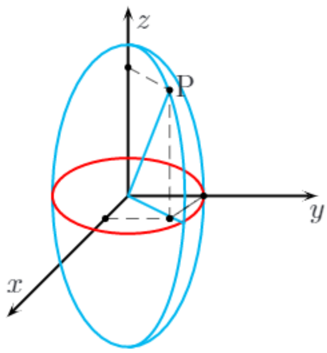
dir. Burada $a=1,\ b=\frac{1}{2}$ ve $c=\frac{\sqrt{2}}{2}$ olup bu sayılar birbirinden farklı olduğundan yüzey bir elipsoiddir.



**Elipsoidin Parametrik İfadesi*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ ... } (1)$$

eşitliği ile tanım lanan bir elipsoid için yüzey üzerinde bir $P(x, y, z)$ noktası alalım.



$z=0$ için (1) eşitliği $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ olup bir elips göterir. Buna göre,
OP doğrusunun eğim açısına u dersek P noktasının koordinatları
$P(a\ \cos u, b\ \sin u, 0)$ olur.
$z \neq 0$ ise OP doğrusunun Oxy düzlemi ile yapmış olduğu açıyı v dersek $z = c\ \sin v$ olup P noktasının koordinatları, diğer bir ifadeyle elipsoidin

parametrik ifadesi

$$\phi(u,v) = (a\cos u\cos v, b\sin u\cos v, c\ \sin v) \tag{0.1.1}$$

olarak bulunur. Buna göre **Örnek 1** de verilen elipsoidin parametrik ifadesi,

$$\phi(u,v) = (\cos u\cos v, \frac{1}{2}\sin u\cos v, \frac{\sqrt{2}}{2}\ \sin v)\ dir.$$

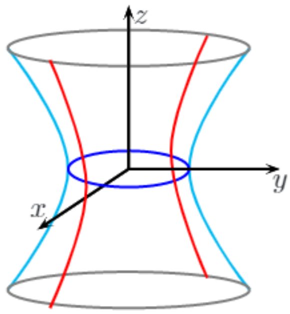
0.2. Hiperboloid

0.2.1. Tek Kanatlı Hiperboloid. (0.0.2) denkleminde katsayılardan biri negatif yani $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ eşitliği ile tanımlanan yüzeydir.
Bu eşitlikte

$x = 0$ alınırsa Oyz düzleminde $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ hiperbolü,

$y = 0$ alınırsa Oxz düzleminde $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ hiperbolü ve

$z = 0$ alınırsa Oxy düzleminde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi elde edilir.



Burada $a \neq b$ için yüzey *eliptik*, $a = b$ ise *dönel* yüzeydir.

0.2.2. Çift Kanatlı Hiperboloid. (0.0.2) denkleminde katsayılardan ikisi negatif yani $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ eşitliği ile tanımlanan yüzeydir.
Bu eşitlikte

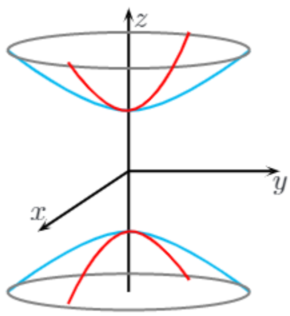
$x = 0$ alınırsa Oyz düzleminde $\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolü ve

$y = 0$ alınırsa Oxz düzleminde $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ hiperbolü elde edilir.

$|z| \neq 0$ olmak zorundadır (neden?)

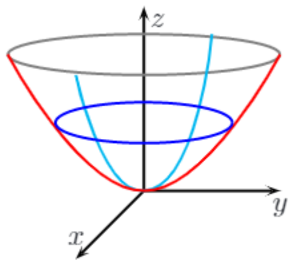
Burada $b \neq c$ için yüzey *eliptik*,

$b = c$ ise *dönel* yüzeydir.



0.3. Paraboloid

0.3.1. Eliptik Paraboloid. (0.0.2) denkleminde değişkenlerden biri 1.dereceden yani $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ eşitliği ile tanımlanan yüzeydir.



Bu eşitlikte

$x = 0$ alınırsa Oyz düzleminde $z = \frac{y^2}{b^2}$ parabolü,

$y = 0$ alınırsa Oxz düzleminde $z = \frac{x^2}{a^2}$ parabolü ve

$z = c > 0$ alınırsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c$ elipsi, yani Oxy düzlemine paralel olan bir düzlemde yatan ve orijine $z = c$ *br* uzaklıkta bir elips elde edilir. Bu nedenle yüzeye ***eliptik paraboloid*** adı verilir.

Parabolodin Özelikleri,

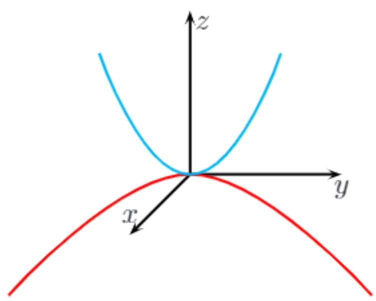
* z eksenine, Oxz ve Oyz düzlemlerine göre simetriktir.

* $a = b$ ise bir *dönel* yüzeydir.

Bu yüzey bir parabolü asal ekseni etrafında döndürerek elde edilir.

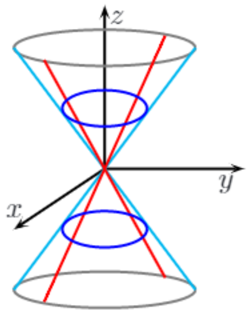
0.3.2. Hipebolik Paraboloid. (0.0.2) denkleminde değişkenlerden biri 1.dereceden ve bir diğerinin katsayısı negatif yani $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ eşitliği ile tanımlanan yüzeydir. Bu eşitlikte

$x = 0$ alınırsa Oyz düzleminde
$z = -\frac{y^2}{b^2}$ parabolü,
$y = 0$ alınırsa Oxz düzleminde
$z = \frac{x^2}{a^2}$ parabolü elde edilir.



0.4. Koni Yüzeyleri

Koni yüzeyi (0.0.2) denkleminde sabit terimin sıfır ve değişkenlerden birinin katsayısı negatif (örnğin z'nin katsayısı negatif ise) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ eşitliği ile tanımlanan yüzeydir.



Bu eşitlikte

$x = 0$ alınırsa Oyz düzleminde $z = \mp\frac{c}{b}y$ doğruları,

$y = 0$ alınırsa Oxz düzleminde $z = \mp\frac{c}{a}x$ doğruları ve

$z = |c|$ alınırsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c$ elipsi, yani

Oxy düzlemine paralel olan bir düzlemde yatan ve orijine $z = c\, br$ uzaklıkta bir elips elde edilir.

Konin Yüzeyinin Özelikleri,

* Orijin noktasına, koordinat eksenlerine ve koordinat düzlemlerine göre simetriktir.

* $a \neq b$ ise yüzey *eliptik koni,*

* $a = b$ ise *dik dairesel koni yüzeyi (veya dönel koni)* adı verilir.

Bu yüzey orijinden geçen bir doğruyu z ekseni etrafında döndürerek elde edilir.

0.5. Silindirik Yüzeyler

Uzayda verilen bir doğruya paralel olan ve düzlemsel bir eğriden geçen doğruların oluşturduğu yüzeylerdir.

0.5.1. Dairesel Silindirik Yüzey. (0.0.2) denkleminde değişkenlerden ikisinin katsayısı eşit ve üçüncü değişkenin katsayısı sıfır olan örneğin

$a = b = r$ için $x^2 + y^2 = r^2$ eşitliği ile tanımlanan yüzeydir.

Bu eşitlikte

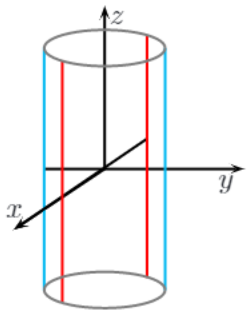
$x = 0$ alınırsa Oyz düzleminde $y = \mp r$

doğruları ve

$y = 0$ alınırsa Oxz düzleminde $x = \mp r$

doğruları elde edilir.

Bu doğrular z eksenine paralel doğrulardır.



0.5.2. Eliptik Silindirik Yüzey. (0.0.2) denkleminde değişkenlerden birinin katsayısı sıfır olan örneğin z'nin katsayısı sıfır için $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ eşitliği ile tanımlanan yüzeydir.

Bu eşitlikte

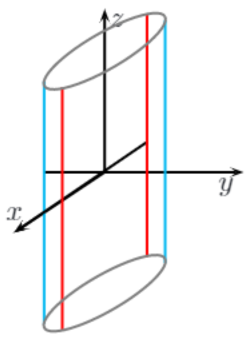
$x = 0$ alınırsa Oyz düzleminde $y = \mp b$

doğruları ve

$y = 0$ alınırsa Oxz düzleminde $x = \mp a$

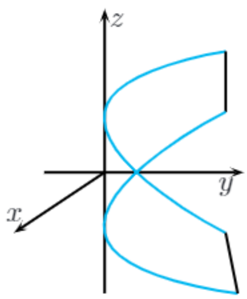
doğruları elde edilir.

Bu doğrular z eksenine paralel doğrulardır.

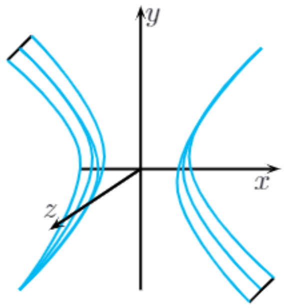


0.5.3. Parbolik Silindirik Yüzey.

(0.0.2) denkleminde değişkenlerden birinin katsayısı sıfır ve biri 1.dereceden olan örneğin z'nin katsayısı sıfır için $y = \frac{x^2}{a^2}$ eşitliği ile tanımlanan yüzeydir.



0.5.4. Hipebolik Silindirik Yüzey.



(0.0.2) denkleminde değişkenlerden birinin katsayısı sıfır ve diğerinin negatif olan örneğin z'nin katsayısı sıfır için $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ eşitliği ile tanımlanan yüzeydir.

DİZİN