T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ADVEKSİYON–DİFÜZYON DENKLEMLERİNİN SONLU FARKLAR İLE ÇÖZÜMÜ

AYŞE MERVE BİLGİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. ELİF TEKİN TARIM

İSTANBUL, 2015

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ADVEKSİYON–DİFÜZYON DENKLEMLERİNİN SONLU FARKLAR İLE ÇÖZÜMÜ

Ayşe Merve BİLGİN tarafından hazırlanan tez çalışması 26/06/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Elif TEKİN TARIM

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Yrd. Doç. Dr. Elif TEKİN TARIM

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Nuran GÜZEL

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Yrd. Doç. Dr. S.Hikmet ÇAĞLAR

İstanbul Kültür Üniversitesi _____

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın amacı bilim ve mühendislikteki birçok önemli uygulamada kullanılan bir boyutlu adveksiyon–difüzyon denklemi için sonlu fark formüllerini incelemek ve uygulanan yöntemleri karşılaştırmaktır.

Öncelikle çalışmalarım sırasında her konuda bana destek olan ve önerileriyle beni yönlendiren değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Elif TEKİN TARIM ‘a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bu tezi, her zaman yanımda olup bana inanan ve beni destekleyen annem Zehra BİLGİN, babam Akif BİLGİN ve abim Burak BİLGİN’e armağan ediyorum.

Haziran, 2015

Ayşe Merve BİLGİN

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ vii

ŞEKİL LİSTESİ viii

ÇİZELGE LİSTESİ x

ÖZET xi

ABSTRACT xiii

BÖLÜM 1

GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 2
1.3 Hipotez 2

BÖLÜM 2

SONLU FARKLAR YÖNTEMİ 3

2.1 Sonlu Fark Formülleri 3
2.1.1 Birinci Türev İçin Yaklaşımlar 3
2.1.2 İkinci Türev İçin Yaklaşımlar 6
2.2 Sonlu Fark Denklemleri 12

BÖLÜM 3

KARARLILIK ANALİZİ 14

3.1 Ayrık Pertürbasyon Kararlılık Analizi 15
3.2 Von Neumann Kararlılık Analizi 27

BÖLÜM 4

DİFÜZYON DENKLEMLERİ 41

4.1 Açık Yöntemler ... 43
4.1.1 FTCS Yöntemi ... 44
4.1.2 Richardson Yöntemi ... 44
4.1.3 DuFort–Frankel Yöntemi ... 45
4.2 Kapalı Yöntemler ... 46
4.2.1 Laasonen Yöntemi ... 47
4.2.2 Crank–Nicolson Yöntemi ... 47
4.2.3 Beta Formülasyonu ... 49
4.3 Uygulama ... 49
4.4 Özet ... 57

BÖLÜM 5

ADVEKSİYON DENKLEMLERİ ... 58

5.1 Açık Yöntemler ... 58
5.1.1 Upwind Yöntemi ... 58
5.1.2 FTCS Yöntemi ... 60
5.1.3 Lax–Friedrichs Yöntemi ... 60
5.1.4 Leapfrog Yöntemi ... 61
5.1.5 Lax–Wendroff Yöntemi ... 62
5.1.6 Beam–Warming Yöntemi ... 63
5.2 Kapalı Yöntemler ... 65
5.2.1 Euler BTCS Yöntemi ... 65
5.2.2 Upwind Yöntemi ... 66
5.2.3 Crank–Nicolson Yöntemi ... 67
5.3 Uygulama ... 68
5.4 Özet ... 77

BÖLÜM 6

ADVEKSİYON–DİFÜZYON DENKLEMLERİ ... 78

6.1 İki Zaman Düzeyli Açık Yöntemler ... 79
6.2 Açık Yöntemler ... 80
6.2.1 FTCS Yöntemi ... 80
6.2.2 Upwind Açık Yöntemi ... 81
6.2.3 DuFort–Frankel Yöntemi ... 82
6.2.4 Lax–Wendroff Yöntemi ... 83
6.2.5 İkinci Mertebe Upwind Yöntemi ... 84
6.2.6 Üçüncü Mertebe Upwind Yöntemi ... 85
6.2.7 Dördüncü Mertebe Upwind Yöntemi ... 86
6.2.8 Bağımsız Parametreli Açık Yöntem ... 87
6.3 Kapalı Yöntemler ... 88
6.3.1 BTCS Kapalı Yöntemi ... 88
6.3.2 Upwind Kapalı Yöntemi ... 89
6.3.3 Crank–Nicolson Yöntemi ... 91
6.3.4 Siemieniuch–Gladwell Yöntemi ... 91
6.4 Uygulama ... 92
6. 5 Özet ... 94

BÖLÜM 7

SONUÇ VE ÖNERİLER..... 98
KAYNAKLAR 99

ÖZGEÇMİŞ..... 102

SİMGE LİSTESİ

c	Courant sayısı
d	Difüzyon sayısı
D_p	Akışkanın sabit basınçtaki özgül ısısı
G	Büyütme çarpanı
$\bar{G}$	Büyütme çarpanının eşleniği
h	İki levha arasındaki uzaklık
IM	x eksenindeki adım sayısı
k	Sabit iletim katsayısı
NM	Zaman eksenindeki adım sayısı
p	Yoğunluk
P	x doğrultusundaki dalga sayısı
R	Yarıçap
Re_c	Hücre Reynolds sayısı
U^n	n zaman adımındaki genlik
α	Difüzyon büyüklüğünü niteleyen bir sabit
β	Adveksiyon hızını niteleyen bir sabit
γ	Adveksiyon–difüzyon denklemindeki bağımsız parametre
ε	Von Neumann kararlılık analizinde bir noktaya yerleştirilen bozunum
θ	Faz açısı ($\theta = P\Delta x$)
λ	Özdeğer
λ_x	Dalga uzunluğu
ϕ	Adveksiyon–difüzyon denklemindeki bağımsız parametre
Δx	Konumsal adım uzunluğu
Δt	Zamansal adım uzunluğu

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2. 1 İleri fark formülü 4
Şekil 2. 2 Geri fark formülü 5
Şekil 2. 3 Merkezi fark formülü 6
Şekil 3. 1 m zaman adımında bozunumların yayılması 20
Şekil 3. 2 FTCS açık yönteminde $d = 0.25$ için hatanın küçülmesi 21
Şekil 3. 3 FTCS açık yönteminde $d = 1.5$ için hatanın büyümesi 22
Şekil 3. 4 Adveksiyon denkleminin çözümünde $c = 0.75$ için hatanın küçülmesi 25
Şekil 3. 5 $c = 1$ için bozunumun karakteristik çizgi boyunca yayılması 25
Şekil 3. 6 Adveksiyon denkleminin çözümünde $c = 1.5$ için hatanın büyümesi 25
Şekil 3. 7 Dinamik kararsızlık 26
Şekil 3. 8 Statik kararsızlık 27
Şekil 3. 9 (3.93) bağıntısıyla verilen büyütme çarpanının görünümü 30
Şekil 3. 10 (3.111) bağıntısıyla verilen büyütme çarpanının görünümü 32
Şekil 3. 11 $d = 0.5$ için büyütme çarpanının görünümü 33
Şekil 3. 12 $c = 1$ için büyütme çarpanının görünümü 34
Şekil 3. 13 (3.115) denkleminin kuadratik eğrileri 35
Şekil 3. 14 $c^2 > 2d$ için kararsızlık gösteren büyütme çarpanının görünümü 38
Şekil 4. 1 Açık yöntem için ağ noktaları 42
Şekil 4. 2 Kapalı yöntem için ağ noktaları 43
Şekil 4. 3 FTCS açık yöntemi için ağ noktaları 44
Şekil 4. 4 Richardson açık yöntemi için ağ noktaları 45
Şekil 4. 5 DuFort–Frankel açık yöntemi için ağ noktaları 46
Şekil 4. 6 Laasonen kapalı yöntemi için ağ noktaları 47
Şekil 4. 7 Crank–Nicolson kapalı yöntemi için ağ noktaları 48
Şekil 4. 8 Problemin fiziksel gösterimi 50
Şekil 4. 9 Problemin ağ sistemi ile gösterimi 51
Şekil 4. 10 $t = 0.18$ anındaki hata dağılımlarının karşılaştırılması 54
Şekil 4. 11 $t = 1.08$ anındaki hata dağılımlarının karşılaştırılması 55
Şekil 4. 12 $t = 0.1$ anında Laasonen yöntemi üzerinde zaman adımlarının etkisi 56
Şekil 5. 1 $\beta > 0$ değerinde Upwind açık yöntemi için ağ noktaları 59
Şekil 5. 2 $\beta < 0$ değerinde Upwind açık yöntemi için ağ noktaları 59
Şekil 5. 3 FTCS açık yöntemi için ağ noktaları 60
Şekil 5. 4 Lax–Friedrichs açık yöntemi için ağ noktaları 61

Şekil 5. 5 Leapfrog açık yöntemi için ağ noktaları 62
Şekil 5. 6 Lax–Wendroff açık yöntemi için ağ noktaları 63
Şekil 5. 7 $\beta > 0$ değerinde Beam–Warming açık yöntemi için ağ noktaları 64
Şekil 5. 8 $\beta < 0$ değerinde Beam–Warming açık yöntemi için ağ noktaları 65
Şekil 5. 9 Euler BTCS kapalı yöntemi için ağ noktaları 66
Şekil 5. 10 Upwind kapalı yöntemi için ağ noktaları 66
Şekil 5. 11 $t = 0$ anında başlangıç koşulları 68
Şekil 5. 12 $t = 0.5$ anında açık Upwind yönteminin çözümleri 70
Şekil 5. 13 $t = 0.5$ anında açık Upwind yönteminin hata dağılımı 71
Şekil 5. 14 $t = 0.5$ anında kapalı Upwind yönteminin çözümleri 72
Şekil 5. 15 $t = 0.5$ anında kapalı Upwind yönteminin hata dağılımı 73
Şekil 5. 16 $t = 0.5$ anında Lax–Wendroff açık yönteminin çözümleri 74
Şekil 5. 17 $t = 0.5$ anında Lax–Wendroff açık yönteminin hata dağılımı 74
Şekil 5. 18 $t = 0.5$ anında Euler BTCS kapalı yönteminin çözümleri 76
Şekil 5. 19 $t = 0.5$ anında Euler BTCS kapalı yönteminin hata dağılımı 76
Şekil 6. 1 FTCS açık yöntemi için ağ noktaları 80
Şekil 6. 2 Upwind açık yöntemi için ağ noktaları 82
Şekil 6. 3 DuFort–Frankel açık yöntemi için ağ noktaları 83
Şekil 6. 4 Lax–Wendroff açık yöntemi için ağ noktaları 83
Şekil 6. 5 İkinci mertebe Upwind açık yöntemi için ağ noktaları 85
Şekil 6. 6 Üçüncü mertebe Upwind açık yöntemi için ağ noktaları 86
Şekil 6. 7 Dördüncü mertebe Upwind açık yöntemi için ağ noktaları 87
Şekil 6. 8 Bağımsız parametreli açık yöntem için ağ noktaları 88
Şekil 6. 9 BTCS kapalı yöntemi için ağ noktaları 89
Şekil 6. 10 Upwind kapalı yöntemi için ağ noktaları 90

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2. 1 $\partial u/\partial x$ için sonlu fark formülleri 9
Çizelge 2. 2 $\partial^2 u/\partial x^2$ için sonlu fark formülleri 10
Çizelge 2. 3 $\partial^3 u/\partial x^3$ için sonlu fark formülleri 11
Çizelge 2. 4 $\partial^4 u/\partial x^4$ için sonlu fark formülleri 11
Çizelge 4. 1 Uygulanan farklı yöntemler için hata analizleri 53
Çizelge 4. 2 Difüzyon denkleminde kullanılan açık yöntemler 57
Çizelge 4. 3 Difüzyon denkleminde kullanılan kapalı yöntemler 57
Çizelge 5. 1 Adveksiyon denkleminde kullanılan açık yöntemler 77
Çizelge 5. 2 Adveksiyon denkleminde kullanılan kapalı yöntemler 77
Çizelge 6. 1 Açık yöntemler için hata analizleri 93
Çizelge 6. 2 Kapalı yöntemler için hata analizleri 94
Çizelge 6. 3 Adveksiyon–difüzyon denkleminde kullanılan açık yöntemler 95
Çizelge 6. 4 Adveksiyon–difüzyon denkleminde kullanılan kapalı yöntemler 97

ÖZET

ADVEKSİYON–DİFÜZYON DENKLEMLERİNİN SONLU FARKLAR İLE ÇÖZÜMÜ

Ayşe Merve BİLGİN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Elif TEKİN TARIM

Bu tezin amacı bir boyutlu adveksiyon–difüzyon denklemini ayrıklaştırmada kullanılan sonlu fark formüllerini incelemek ve uygulanan yöntemleri karşılaştırmaktır.

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, literatür özeti, tezin amacı ve hipotez hakkında kısa bilgiler verilmektedir.

İkinci bölümde, Taylor seri açılımlarından elde edilen sonlu fark formüllerinin çıkarımları ve hata mertebeleri yer almaktadır. Ayrıca açık ve kapalı sonlu fark denklemlerine değinilmektedir.

Üçüncü bölümde, ayrık pertürbasyon kararlılık analizi ve Von Neumann kararlılık analizi incelenmektedir. Bu teknikler model denklemler üzerinde uygulanarak kararlılık koşulları araştırılmaktadır.

Dördüncü bölümde difüzyon denklemi, beşinci bölümde adveksiyon denklemi ve altıncı bölümde ise tezin asıl amacı olan bir boyutlu adveksiyon–difüzyon denklemi incelenmektedir. Bu denklemler üzerinde açık ve kapalı sonlu fark yöntemleri uygulanarak ayrıklaştırılmış denklemler elde edilmektedir. Bazı fiziksel problemler üzerinde uygulanan bu yöntemlerin hata analizleri ve kararlılık koşulları incelenip, birbirlerine göre avantaj ve dezavantajlarına değinilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Adveksiyon–difüzyon denklemi, açık ve kapalı sonlu farklar, Von Neumann kararlılık analizi, ayrık pertürbasyon kararlılık analizi

ABSTRACT

SOLUTION WITH FINITE DIFFERENCES OF ADVECTION–DIFFUSION EQUATIONS

Ayşe Merve BİLGİN

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser: Assist. Prof. Dr. Elif TEKİN TARIM

The aim of this thesis is to study finite difference formulations which are used to discretization of one–dimensional advection–diffusion equation and compare the methods used.

This work consists of six chapters.

In the first chapter, there are literature review, objective of the thesis and some brief information about the hypothesis.

In the second chapter, finite difference formulations which are obtained from Taylor series expansion and their error analysises are introduced. Also explicit and implicit finite difference equations are mentioned.

In the third chapter, discrete perturbation stability analysis and Von Neumann stability analysis are studied. Stability conditions are investigated by applying these techniques on the model equations.

In the fourth chapter diffusion equation, in the fifth chapter advection equation and in the sixth chapter advection–diffusion equation which is the aim of the thesis are studied. Explicit and implicit finite difference methods applied on these equations and discretization equations are obtained. Error analysises and stability conditions of these

methods applied on some physical problems are studied and mentioned advantages and disadvantages relative to one another.

Keywords: Advection–diffusion equation, explicit and implicit finite differences, Von Neumnann stability analysis, discrete perturbation stability analysis

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Fizikteki bazı korunum yasaları (kütle korunumu, momentum korunumu ve enerji korunumu) bir takım kısmi diferansiyel denklemler yardımıyla matematiksel olarak ifade edilebilirler. Sıcaklıkla değişmeyen yoğunluğa ve sabit iletim katsayısına (k) sahip sıkıştırılamaz akışkanlar için kaynak olmadığı durumda termal enerjinin korunumu kanunu belirtilen ısı denklemi, sıcaklık dağılım (u) tarafından temsil edilir [1].

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+c\frac{\partial u}{\partial z}-\propto\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=0 \qquad (1.1)$$

(1.1) denklemindeki $\propto=\frac{k}{pD_p}$ ve a,b,c akışkanın t anında (x,y,z) eksenleri yönündeki hız bileşenleridir. Burada p yoğunluk, D_p akışkanın sabit basınçtaki özgül ısısı ve $\frac{\partial}{\partial t}$ akışkanın hareketindeki farklılaşmayı göstermektedir. Durağan haldeki akışkanlarda ve katılarda $a=b=c=0$'dır. Bu durumda (1.1) denklemi aşağıdaki difüzyon denklemine indirgenmiş olur [1].

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\propto\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=0 \qquad (1.2)$$

(1.1) denkleminde $a\frac{\partial u}{\partial x}, b\frac{\partial u}{\partial y}$ ve $c\frac{\partial u}{\partial z}$ adveksiyon terimleri, $\propto\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\propto\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ve $\propto\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ ise difüzyon terimleri olarak adlandırılır. Bu çalışmada bir boyutlu adveksiyon–difüzyon denklemi ele alınmıştır.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\beta\frac{\partial u}{\partial x}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1.3)$$

Bilim ve mühendislikteki birçok önemli uygulamada adveksiyon–difüzyon denkleminin sayısal çözümü kullanılmaktadır. Örneğin, çevre kirliliğine yol açan maddelerin nehir ve akarsularda yayılması [2], topraktaki su transferi [3], gözenekli ortamda izleyicilerin yayılması [4], haliç ve kıyı sularda çözünmüş maddenin dağılımı [5], sığ göllerdeki atık dağılımı [6], yatakların içindeki kimyasalların emilimi [7], bir boru içinden akan bir sıvı içinde çözünmüş maddenin yayılması [8], nehirlerdeki termal kirlilik [9], gözenekli ortamda akış [10] ve yeraltı suları içinde çözünmüş tuzların dağılımı [11] adveksiyon–difüzyon denklemlerinin uygulama alanı içerisindedir [12].

Adveksiyon–difüzyon denkleminin sonlu farklar ile çözümünde kullanılan geleneksel yöntemler Dehghan [12], Karahan [13], Thongmoon ve McKibbin [14] ve Karahan [15] 'da anlatılmıştır. Bununla birlikte Dehghan [1], Karahan [16] ve Kaya [17] 'da anlatılan yeni yöntemler ile geleneksel yöntemlere göre daha başarılı sonuçlar elde edilmiştir.

Bu konuya değinen kitaplardan bazıları Roche (1972, 1999), Patankar (1980), Peyret ve Taylor (1983), Anderson, Tannehill ve Pletcher (1984, 1997), Hoffman (1989), Hirsch (1988, 1990), Fletcher (1988), Anderson (1995), Ferziger ve Peric (1999) şeklindedir [18].

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmanın amacı bir boyutlu adveksiyon–difüzyon denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için kullanılan açık ve kapalı sonlu fark yöntemlerini incelemek ve bu yöntemleri karşılaştırmaktır.

1.3 Hipotez

Sonlu farklar yönteminin adveksiyon–difüzyon denklemine uygulanabilirliği.

BÖLÜM 2

SONLU FARKLAR YÖNTEMİ

2.1 Sonlu Fark Formülleri

Kısmi diferansiyel denklemlerdeki bağımlı değişkene ait türevlerin, bilgisayar yardımıyla çözülebilmesi için yaklaşık ifadelerle yazılması yani ayrıklaştırılması gereklidir. Bu tür ayrıklaştırma işlemlerine genel olarak *sonlu fark formülü* adı verilir [19].

Belirli bir kısmi diferansiyel denklemin çözümünü elde etmek için kullanılan sonlu fark formüllerinin ardındaki ana fikir; denklemlerde yer alan türevlere, seçilen birkaç noktadaki fonksiyonların değerleri ile yaklaşmaktır. Bu yaklaşımları elde ederken en çok kullanılan yöntem Taylor seri açılımıdır.

2.1.1 Birinci Türev İçin Yaklaşımlar

- Bir $u(x)$ fonksiyonunun $(x + \Delta x)$ noktasındaki değeri Taylor seri açılımı ile

$$u(x+\Delta x) = u(x) + (\Delta x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \cdots \tag{2.1}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan birinci türev çekildiğinde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^2}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \cdots \tag{2.2}$$

denklemi elde edilir. Hata terimi

$$O(\Delta x) = -\frac{(\Delta x)}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^2}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \cdots \tag{2.3}$$

olarak seçildiğinde birinci türev

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{2.4}$$

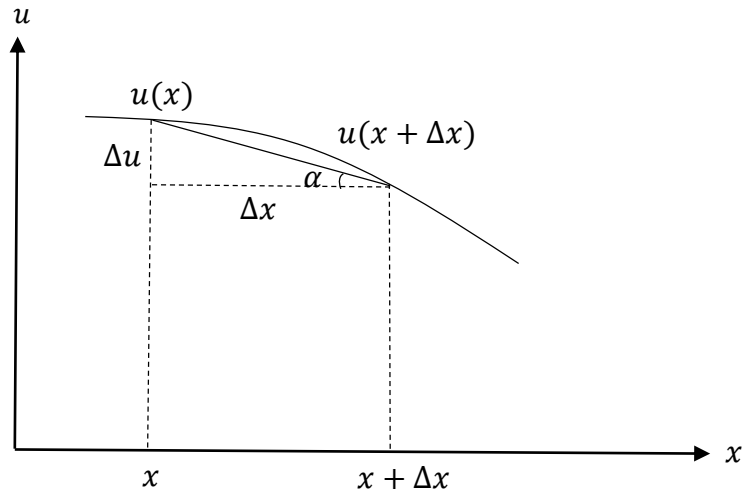
şeklinde ifade edilebilir. Bu ifade indissel formda

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{2.5}$$

şeklini alır ve $\partial u/\partial x$ için *birinci mertebeden hataya sahip ileri fark formülü* olarak adlandırılır [18], [19], [20]. Bu formülde adım uzunluğu azaldıkça, kesme hatasının küçüleceği ve dolayısıyla yaklaşımın doğruluğunun artacağı açıkça görülmektedir. Ayrıca denklemden hata terimi çekildiğinde

$$O(\Delta x) = \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}\right) \tag{2.6}$$

bulunur. Böylece hatanın, türevin gerçek değeri ile sonlu fark gösterimi arasındaki fark olduğu görülür. İleri fark formülü Şekil 2.1'de gösterilmektedir.



Şekil 2. 1 İleri fark formülü

- $u(x)$ fonksiyonunun $(x - \Delta x)$ noktasındaki değeri Taylor seri açılımı ile

$$u(x - \Delta x) = u(x) - (\Delta x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \cdots \tag{2.7}$$

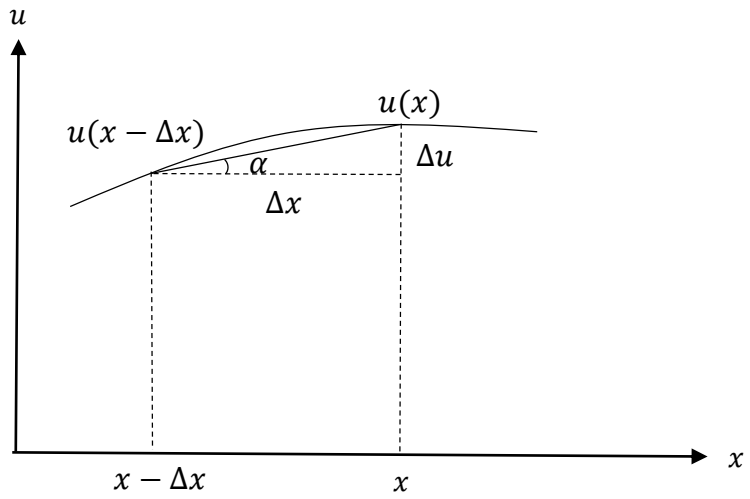
şeklinde yazılabilir. Buradan birinci türev çekilip, hata terimi yerine yazıldığında

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{2.8}$$

bulunur. Bu ifade indissel formda yazıldığında

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{2.9}$$

şeklini alır ve *birinci mertebeden hataya sahip geri fark formülü* olarak adlandırılır [18], [19], [20]. Geri fark formülü Şekil 2.2'de gösterilmiştir.



Şekil 2. 2 Geri fark formülü

- $u(x)$ fonksiyonunun $(x + \Delta x)$ ve $(x - \Delta x)$ noktalarındaki değerlerinin Taylor seri açılımları, yani (2.1) ve (2.7) denklemleri birbirinden çıkartıldığında.

$$u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x) = 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \cdots \tag{2.10}$$

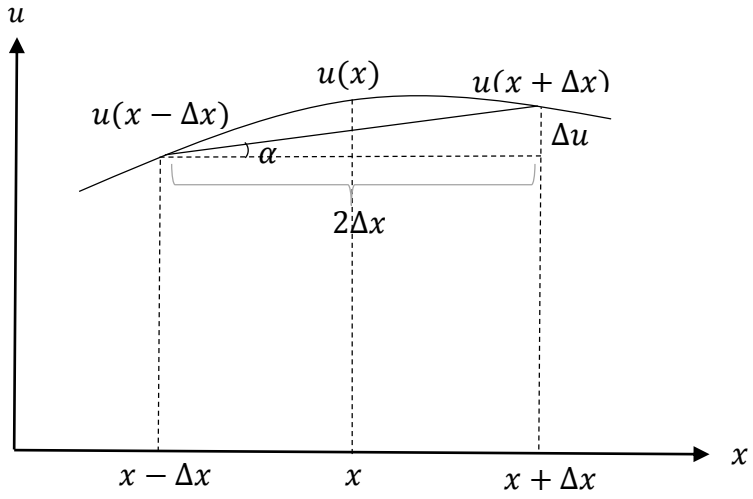
eşitliği elde edilir. Buradan birinci türev çekilip hata terimi yerine yazıldığında

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \tag{2.11}$$

bulunur. Bu ifade indissel formda

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \tag{2.12}$$

şeklini alır ve *ikinci mertebeden hataya sahip merkezi fark formülü* olarak adlandırılır [18], [19], [20]. Merkezi fark formülü Şekil 2.3'de gösterilmektedir.



Şekil 2. 3 Merkezi fark formülü

2.1.2 İkinci Türev İçin Yaklaşımlar

- $u(x)$ fonksiyonunun $(x + 2\Delta x)$ noktasındaki değeri Taylor seri açılımı ile

$$u(x + 2\Delta x) = u(x) + (2\Delta x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(2\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \cdots \tag{2.13}$$

şeklinde yazılabilir. (2.1) denklemi 2 ile çarpılıp (2.13) denkleminden çıkartıldığında birinci türev $\partial u/\partial x$ yok edilerek

$$u(x + 2\Delta x) - 2u(x + \Delta x) = -u(x) + (\Delta x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\Delta x)^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \cdots \tag{2.14}$$

eşitliği elde edilir. Buradan ikinci türev çekilip hata terimi yerine yazıldığında

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x + 2\Delta x) - 2u(x + \Delta x) + u(x)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \tag{2.15}$$

bulunur. Bu ifade indissel formda yazıldığında ikinci türevin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \tag{2.16}$$

şeklinde ileri fark formülü elde edilir [18], [19], [20].

- $u(x)$ fonksiyonunun $(x - 2\Delta x)$ noktasındaki değeri Taylor seri açılımı ile

$$u(x - 2\Delta x) = u(x) - (2\Delta x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{(2\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \cdots \tag{2.17}$$

şeklinde yazılabilir. (2.7) denklemi 2 ile çarpılıp (2.17) denkleminden çıkartıldığında birinci türev $\partial u/\partial x$ yok edilerek

$$u(x-2\Delta x)-2u(x-\Delta x)=-u(x)+(\Delta x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(\Delta x)^3\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\cdots \tag{2.18}$$

eşitliği elde edilir. Buradan ikinci türev çekilip hata terimi yerine yazıldığında

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{u(x)-2u(x-\Delta x)+u(x-2\Delta x)}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x) \tag{2.19}$$

bulunur. Bu ifade indissel formda yazıldığında ikinci türevin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{u_i-2u_{i-1}+u_{i-2}}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x) \tag{2.20}$$

şeklinde geri fark formülü elde edilir [18], [19], [20].

- $u(x)$ fonksiyonunun $(x+\Delta x)$ ve $(x-\Delta x)$ noktalarındaki değerlerinin Taylor seri açılımları, yani (2.1) ve (2.7) denklemleri toplandığında

$$u(x+\Delta x)+u(x-\Delta x)=2u(x)+(\Delta x)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cdots \tag{2.21}$$

eşitliği elde edilir. Buradan ikinci türev çekilip hata terimi yerine yazıldığında

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{u(x+\Delta x)-2u(x)+u(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x)^2 \tag{2.22}$$

bulunur. Bu ifade indissel formda ikinci türevin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{(\Delta x)^2}+O(\Delta x)^2 \tag{2.23}$$

şeklinde merkezi fark formülü elde edilir [18], [19], [20].

Buraya kadar birinci ve ikinci türevlerin birinci mertebeden hataya sahip ileri farklar, birinci mertebeden hataya sahip geri farklar ve ikinci mertebeden hataya sahip merkezi farklar ile gösterimi incelendi. Şimdi bu formüllerden bazıları Taylor seri açılımında kullanılarak daha doğru bir yaklaşım elde edilecektir.

- İkinci türevin ileri fark formülü yani (2.15) ifadesi, (2.2) denkleminde yerine yazıldığında

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{(\Delta x)} + \frac{(\Delta x)}{2!}\left[\frac{u(x+2\Delta x) - 2u(x+\Delta x) + u(x)}{(\Delta x)^2}\right] - \frac{(\Delta x)^2}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \cdots \tag{2.24}$$

veya

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x+2\Delta x) + 4u(x+\Delta x) - 3u(x)}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \tag{2.25}$$

bulunur. Bu ifade indissel formda

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+2} + 4u_{i+1} - 3u_i}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \tag{2.26}$$

şeklini alır. Böylece birinci türev için ikinci mertebeden doğruluğa sahip ileri fark formülü elde edilmiş olur [18], [19], [20], [21].

Bu yöntem daha yüksek mertebeden doğruluğa sahip ileri, geri ve merkezi fark formülleri elde etmek için de kullanılabilir. Fakat üç ve daha yüksek mertebeden doğruluğa sahip formüller çok daha fazla matematiksel işlem gerektirdiği için nadiren kullanılır. İkinci mertebeden doğruluğa sahip sonlu fark yaklaşımları ise başarılı yakınsaklık kriterleri ve uygun matematiksel işlem hacminden dolayı daha çok tercih edilirler [19].

Yüksek mertebeden türevlerin ileri, geri ve merkezi sonlu fark formülleri aşağıdaki gibidir:

Çizelge 2. 1 $\frac{\partial u}{\partial x}$ için sonlu fark formülleri

Tür	Sonlu Fark Formülleri	Hata
İleri	$(u_{i+1} - u_i)/\Delta x$	$O(\Delta x)$
Geri	$(u_i - u_{i-1})/\Delta x$	$O(\Delta x)$
İleri	$(-u_{i+2} + 4u_{i+1} - 3u_i)/2\Delta x$	$O(\Delta x)^2$
Geri	$(3u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2})/2\Delta x$	$O(\Delta x)^2$
Merkezi	$(u_{i+1} - u_{i-1})/2\Delta x$	$O(\Delta x)^2$
İleri	$(-3u_{i+4} + 16u_{i+3} - 36u_{i+2} + 48u_{i+1} - 25u_i)/12\Delta x$	$O(\Delta x)^4$
Geri	$(25u_i - 48u_{i-1} + 36u_{i-2} - 16u_{i-3} + 3u_{i-4})/12\Delta x$	$O(\Delta x)^4$
Merkezi	$(-u_{i+2} + 8u_{i+1} - 8u_{i-1} + u_{i-2})/12\Delta x$	$O(\Delta x)^4$

Çizelge 2. 2 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ için sonlu fark formülleri

Tür	Sonlu Fark Formülleri	Hata
İleri	$(u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i)/(\Delta x)^2$	$O(\Delta x)$
Geri	$(u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2})/(\Delta x)^2$	$O(\Delta x)$
İleri	$(-u_{i+3} + 4u_{i+2} - 5u_{i+1} + 2u_i)/(\Delta x)^2$	$O(\Delta x)^2$
Geri	$(2u_i - 5u_{i-1} + 4u_{i-2} - u_{i-3})/(\Delta x)^2$	$O(\Delta x)^2$
Merkezi	$(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})/(\Delta x)^2$	$O(\Delta x)^2$
İleri	$(-10u_{i-5} + 61u_{i+4} - 156u_{i+3} + 214u_{i+2} - 154u_{i+1} + 45u_i)/12(\Delta x)^2$	$O(\Delta x)^4$
Geri	$(45u_i - 154u_{i-1} + 214u_{i-2} - 156u_{i-3} + 61u_{i-4} - 10u_{i-5})/12(\Delta x)^2$	$O(\Delta x)^4$
Merkezi	$(-u_{i+2} + 16u_{i+1} - 30u_i + 16u_{i-1} - u_{i-2})/12(\Delta x)^2$	$O(\Delta x)^4$

Çizelge 2. 3 $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ için sonlu fark formülleri

Tür	Sonlu Fark Formülleri	Hata
İleri	$(u_{i+3} - 3u_{i+2} + 3u_{i+1} - u_i)/(\Delta x)^3$	$O(\Delta x)$
Geri	$(u_i - 3u_{i-1} + 3u_{i-2} - u_{i-3})/(\Delta x)^3$	$O(\Delta x)$
İleri	$(-3u_{i+4} + 14u_{i+3} - 24u_{i+2} + 18u_{i+1} - 5u_i)/2(\Delta x)^3$	$O(\Delta x)^2$
Geri	$(5u_i - 18u_{i-1} + 24u_{i-2} - 14u_{i-3} + 3u_{i-4})/2(\Delta x)^3$	$O(\Delta x)^2$
Merkezi	$(u_{i+2} - 2u_{i+1} + 2u_{i-1} - u_{i-2})/2(\Delta x)^3$	$O(\Delta x)^2$

Çizelge 2. 4 $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ için sonlu fark formülleri

Tür	Sonlu Fark Formülleri	Hata
İleri	$(u_{i+4} - 4u_{i+3} + 6u_{i+2} - 4u_{i+1} + u_i)/(\Delta x)^4$	$O(\Delta x)$
Geri	$(u_i - 4u_{i-1} + 6u_{i-2} - 4u_{i-3} + u_{i-4})/(\Delta x)^4$	$O(\Delta x)$
İleri	$(-2u_{i+5} + 11u_{i+4} - 24u_{i+3} + 26u_{i+2} - 14u_{i+1} + 3u_i)/(\Delta x)^4$	$O(\Delta x)^2$
Geri	$(3u_i - 14u_{i-1} + 26u_{i-2} - 24u_{i-3} + 11u_{i-4} - 2u_{i-5})/(\Delta x)^4$	$O(\Delta x)^2$
Merkezi	$(u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2})/(\Delta x)^4$	$O(\Delta x)^2$

2.2 Sonlu Fark Denklemleri

Kısmi diferansiyel denklemlerdeki türevler üzerinde bir önceki kısımda verilen sonlu fark formülleri uygulanarak ayrıklaştırılmış denklemler elde edilir. Bu ayrıklaştırılmış denklemlere *sonlu fark denklemleri* denir [19].

Örneğin bir $u = u(t, x, y)$ bağımlı değişkenine ait

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{2.27}$$

denklemini ele alalım. Burada α bir sabit olarak kabul edilmektedir.

i ve j indisleri sırasıyla Kartezyen koordinatlardaki x ve y'yi temsil ederken, n indisi zamanı temsil etmektedir. Bu denklemde zamana göre birinci mertebeden hataya sahip ileri farklar ve konuma göre ikinci mertebeden hataya sahip merkezi farklar uygulanarak ayrıklaştırma yapılabilir.

u 'nun n zaman adımındaki değeri bilindiğinden $n+1$ zaman adımındaki değeri hesaplanır. Böylece (2.27) denkleminde n ve $n+1$ zaman adımlarında olmak üzere iki tür yöntemle ayrıklaştırma yapılabilir. İlk olarak n zaman adımında ayrıklaştırma yapıldığında

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \alpha \left[\frac{u_{i+1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i-1,j}^{n}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j-1}^{n}}{(\Delta y)^2} \right] + O[\Delta t, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2] \tag{2.28}$$

denklemi elde edilir. İkinci olarak $n+1$ zaman adımında ayrıklaştırma yapıldığında

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \alpha \left[\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right] + O[\Delta t, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2] \tag{2.29}$$

bulunur [19].

(2.28) ve (2.29) sonlu fark denklemleri sırasıyla *açık* ve *kapalı yöntemler* olarak adlandırılır. Bu iki yöntem arasındaki temel farklılık elde edilen ayrıklaştırılmış denklemlerdeki bilinmeyen sayısıdır. (2.28) denkleminde bir tek bilinmeyen var iken, (2.29) denkleminde 5 bilinmeyen vardır. Bundan dolayı açık ve kapalı yöntemlerin çözüm yolları farklıdır.

Açık yöntemde bir tek bilinmeyen olduğundan bütün ağ noktalarında kolaylıkla hesaplanır. Buna karşılık kapalı yöntem birden fazla bilinmeyen içerdiğinden sonlu fark denkleminin $n+1$ zaman adımındaki bütün ağ noktaları için yazılması gerekir. Böylece bilinmeyen sayısı kadar denklem elde edilip, eş zamanlı çözülerek sonuca ulaşılır [19].

Açık yöntemin çözümünün kapalı yönteme göre daha kolay olduğu açıkça görülmektedir. Fakat kapalı yöntem açık yönteme göre daha kararlıdır. Bir sonraki bölümde kısmi diferansiyel denklemler için kararlılık analizleri incelenecektir.

(2.28) denklemi yeniden düzenlendiğinde

$$\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n}}{\Delta t}-\alpha\left[\frac{u_{i+1,j}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n}}{(\Delta x)^2}+\frac{u_{i,j+1}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i,j-1}^{n}}{(\Delta y)^2}\right] = O[\Delta t,(\Delta x)^2,(\Delta y)^2] \tag{2.30}$$

eşitliğinin sağ tarafında kesme hatası elde edilir. Kesme hatasındaki en düşük dereceli terim birinci mertebeden olduğu için yöntem birinci mertebeden doğruluğa sahiptir. Eğer kesme hatası $O[(\Delta t)^2,(\Delta x)^2,(\Delta y)^2]$ şeklinde olsaydı yöntemin ikinci mertebeden doğruluğa sahip olduğu görülürdü [19].

BÖLÜM 3

KARARLILIK ANALİZİ

Sonlu fark denklemlerinin çözümü sırasında genellikle iki tür hata ortaya çıkar. Bu hatalar, bilgisayarın bir özelliği olan yuvarlatma hatası ve uygulanan sayısal yöntem sonucunda ortaya çıkan ayrıklaştırma hatasıdır [19].

Eğer kısmi diferansiyel denklem çözümünde ortaya çıkan bu hatalar kontrol edilmezse kararsız bir çözüme neden olur. Yani denklemin başarılı bir çözümü olması için asıl önemli olan bu hataların bir kararlılık analizi ile anlaşılması ve kontrol edilmesidir.

Bu kısımda bazı model denklemlerin kararlılık analizleri incelenecektir. Bu analizlerden elde edilen sonuçlar daha karmaşık kısmi diferansiyel denklemlerin kararlılık analizlerinde yol gösterici özelliktedir. Bazı durumlarda kararlılık analizi tek başına son derece kullanışsız olurken, sayısal denemeler ile birlikte daha gerçekçi bir yaklaşım elde edilebilir. Model denklemlere uygulanan sayısal denemeler, kararlı bir çözüm elde etmek için gerekli olan adım uzunluklarının sınırlandırılması hakkında bilgi verici özelliktedir.

Şimdi kararlılık analizinde kullanılan iki yöntemi ve bunların çeşitli model denklemler üzerindeki uygulamalarını inceleyelim. Bu yöntemler; ayrık pertürbasyon kararlılık analizi ve Von Neumann (Fourier) kararlılık analizidir.

Von Neumann kararlılık analizi daha yaygın olarak kullanılmakla birlikte matematiksel olarak da daha kullanışlıdır. Bununla birlikte çözüm ile büyüyen veya azalan bir bozunumun etkisini grafiksel olarak göstermek için ayrık pertürbasyon kararlılık analizi ele alınmıştır [19], [22].

3.1 Ayrık Pertürbasyon Kararlılık Analizi

Bu yöntemde bir noktaya bir bozunum yerleştirilip bunun komşu noktalar üzerindeki etkisi araştırılır. Eğer çözüm ilerledikçe bozunum küçülüyorsa kullanılan sayısal yöntem kararlı, bozunum büyüyorsa yöntem kararsızdır [19], [22]. Ayrık bozunum kararlılık analizi için parabolik bir denklem olan difüzyon denklemini ele alalım.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (\alpha > 0) \tag{3.1}$$

Burada α sabit olarak kabul edilmektedir. Verilen denklemde zamana göre birinci mertebeden hataya sahip ileri farklar ve konuma göre ikinci mertebeden hataya sahip merkezi farklar uygulanarak ayrıklaştırma yapıldığında

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = a \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{3.2}$$

elde edilir [19], [22]. Ayrık pertürbasyon kararlılık analizinde matematiksel işlemler için kullanılabilecek iki yöntem vardır.

<u>*Birinci yöntemde*</u> bütün i noktalarında bir $u_i^n = 0$ çözümü kabul edilir. Sonra n zaman adımında herhangi bir i noktasına bir ε bozunumu yerleştirilerek $n+1$ zaman adımındaki bütün i noktalarında çözümlerin durumu incelenir. Buna bağlı olarak

$$\frac{u_i^{n+1} - (u_i^n + \varepsilon)}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2(u_i^n + \varepsilon) + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{3.3}$$

denklemi elde edilir [19]. n zaman adımındaki bütün çözümler sıfır kabul edildiğinden dolayı

$$\frac{u_i^{n+1} - \varepsilon}{\Delta t} = \alpha \frac{-2\varepsilon}{(\Delta x)^2} \tag{3.4}$$

veya

$$u_i^{n+1} = -\alpha \frac{2\varepsilon}{(\Delta x)^2} \Delta t + \varepsilon = \varepsilon \left[1 - 2\alpha \left(\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right)\right] \tag{3.5}$$

elde edilir [23]. Buradaki $\alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ *difüzyon sayısı* olarak adlandırılır ve d ile gösterilir. Yani

$$d = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \tag{3.6}$$

sonuç olarak

$$\frac{u_i^{n+1}}{\varepsilon} = 1 - 2d \tag{3.7}$$

bulunur.

İkinci yöntemde n zaman adımında i noktasına ε_i^n bozunumu yerleştirilerek $n+1$ zaman adımında i noktasındaki bozunumunun (ε_i^{n+1}) durumu incelenir. Buna bağlı olarak

$$\frac{(u_i^{n+1} + \varepsilon_i^{n+1}) - (u_i^n + \varepsilon_i^n)}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2(u_i^n + \varepsilon_i^n) + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{3.8}$$

elde edilir [19], [22]. (3.8) denkleminden (3.2) denklemi çıkarıldığında

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n}{\Delta t} = -\alpha \frac{2\varepsilon_i^n}{(\Delta x)^2} \tag{3.9}$$

veya

$$\varepsilon_i^{n+1} = \varepsilon_i^n \left[1 - 2\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}\right] \tag{3.10}$$

bulunur. Difüzyon sayısı yerine d yazılıp düzenlendiğinde

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n} = 1 - 2d \tag{3.11}$$

olur. İki yöntemle de elde edilen sonuçlar, yani (3.7) ve (3.11) birbiriyle eşdeğerdir. Fakat daha az matematiksel işlem gerektirdiği için bundan sonraki analizlerde birinci yöntem tercih edilecektir. Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta, n zaman adımında kabul edilen çözümün analizin sonucunu etkilemeyeceğidir.

Bozunumun diğer noktalar üzerinde etkisini incelemek için tekrar (3.7) denklemi ele alındığında, i ağ noktasındaki bozunumun $n+1$ zaman adımındaki yayılmasını ifade etmektedir. Çözüm sürecinde bozunumun büyümesini engellemek için hata

sınırlandırılmalıdır. Bunun için de hata yayılması teriminin mutlak değeri 1'e eşit veya 1'den küçük olmalıdır [19], [23].

$$\left|\frac{u_i^{n+1}}{\varepsilon}\right| \leq 1 \tag{3.12}$$

Buradan

$$|1-2d| \leq 1 \tag{3.13}$$

olmalı ve bunun için de $1-2d \leq 1$ ve $1-2d \geq -1$ koşullarının sağlanması gerekir.

$$1-2d \leq 1 \quad \text{için} \quad d \geq 0 \tag{3.14}$$

$$1-2d \geq -1 \quad \text{için} \quad d \leq 1 \tag{3.15}$$

bulunur. d büyüklüğü her zaman pozitif bir değere sahip olduğu için (3.14) koşulu kendiliğinden sağlanır. Dolayısıyla kararlı bir çözüm için sadece (3.15) koşulunun gerçekleşmesi yeterlidir [19], [23].

- $n+1$ zaman adımında $i+1$ noktasındaki bozunumun etkisini hesaplamak için (3.2) denklemi yeniden düzenlendiğinde

$$\frac{u_{i+1}^{n+1}-u_{i+1}^{n}}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+2}^{n}-2u_{i+1}^{n}+u_i^{n}}{(\Delta x)^2} \tag{3.16}$$

veya

$$u_{i+1}^{n+1}-u_{i+1}^{n} = d(u_{i+2}^{n}-2u_{i+1}^{n}+u_i^{n}) \tag{3.17}$$

elde edilir. Bu denklemde n zaman adımında i noktasına bozunum yerleştirildiğinde

$$u_{i+1}^{n+1}-u_{i+1}^{n} = d[u_{i+2}^{n}-2u_{i+1}^{n}+(u_i^{n}+\varepsilon)] \tag{3.18}$$

şeklini alır. n zaman adımında bütün noktalardaki çözümler sıfır kabul edildiğinden

$$u_{i+1}^{n+1} = d\varepsilon \tag{3.19}$$

bulunur. Benzer şekilde $i-1$ noktasında da

$$u_{i-1}^{n+1} = d\varepsilon \tag{3.20}$$

sonucu elde edilir.

- Bozunumun $n+2$ zaman adımında i noktasındaki durumunu görmek için (3.1) denklemi

$$\frac{u_i^{n+2}-u_i^{n+1}}{\Delta t}=\alpha\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \tag{3.21}$$

veya

$$u_i^{n+2}=u_i^{n+1}+d(u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}) \tag{3.22}$$

şeklinde yazılıp burada (3.7), (3.19) ve (3.20) eşitlikleri yerine koyulduğunda

$$u_i^{n+2}=\varepsilon(1-2d)+d[d\varepsilon-2\varepsilon(1-2d)+d\varepsilon] \tag{3.23}$$

veya

$$\frac{u_i^{n+2}}{\varepsilon}=6d^2-4d+1 \tag{3.24}$$

elde edilir [19], [23]. Kararlı bir çözüm için

$$\left|\frac{u_i^{n+2}}{\varepsilon}\right|=|6d^2-4d+1|\leq 1 \tag{3.25}$$

olmalıdır. Bu eşitsizliğin gerçekleşmesi için $6d^2-4d+1\leq 1$ve $6d^2-4d+1\geq -1$ koşullarının sağlanması gerekir.

$$6d^2-4d+1\leq 1 \quad \text{için} \quad d\leq\frac{2}{3} \tag{3.26}$$

$$6d^2-4d+1\geq -1 \quad \text{için} \quad 2d-3d^2\leq 1 \tag{3.27}$$

bulunur. d pozitif olduğundan (3.27) koşulu bütün d'ler için kendiliğinden sağlanır. Dolayısıyla kararlı bir çözüm için sadece (3.26) koşulunun geçekleşmesi yeterlidir [19], [23].

- Şimdi de bozunumun $n+2$ zaman adımında $i+2$ noktasındaki durumunu incelemek için

$$\frac{u_{i+2}^{n+2}-u_{i+2}^{n+1}}{\Delta t}=\alpha\frac{u_{i+3}^{n+1}-2u_{i+2}^{n+1}+u_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \tag{3.28}$$

veya

$$u_{i+2}^{n+2} = u_{i+2}^{n+1} + d(u_{i+3}^{n+1} - 2u_{i+2}^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}) \tag{3.29}$$

yazılıp $n+1$ zaman adımında $i+2$ ve $i+3$ noktalarındaki çözümler sıfır olduğundan (3.19) eşitliği yerine yazıldığında

$$u_{i+2}^{n+2} = du_{i+1}^{n+1} = dd\varepsilon \tag{3.30}$$

yani

$$u_{i+2}^{n+2} = d^2\varepsilon \tag{3.31}$$

bulunur. Benzer işlemlerle $i+1$ noktasında da

$$u_{i+1}^{n+2} = u_{i+1}^{n+1} + d(u_{i+2}^{n+1} - 2u_{i+1}^{n+1} + u_{i}^{n+1}) \tag{3.32}$$

denklemi yazılır. $i+2$ noktasındaki çözüm sıfır olduğundan (3.7) ve (3.19) eşitlikleri yerine yazıldığında

$$u_{i+1}^{n+2} = d\varepsilon + d[-2d\varepsilon + \varepsilon(1-2d)] \tag{3.33}$$

veya

$$u_{i+1}^{n+2} = 2d\varepsilon(1-2d) \tag{3.34}$$

elde edilir. Daha yüksek zaman adımlarında da bu analiz uygulanabilir. Fakat artan her bir zaman adımında d büyüklüğü üzerinde daha kısıtlayıcı koşullar uygulanacaktır.

Birçok zaman adımından sonra hata, muhtemelen bütün ağ noktalarında yaklaşık aynı büyüklüğe sahip olacaktır. Burada iki olasılık vardır.

Birinci olasılık, m zaman adımındaki hataların aynı gösterime sahip olmasıdır. Yani

$$u_{i+1}^{m} = \varepsilon^m \tag{3.35}$$

$$u_{i}^{m} = \varepsilon^m \tag{3.36}$$

$$u_{i-1}^{m} = \varepsilon^m \tag{3.37}$$

ve buna göre $m+1$ zaman adımı için

$$\frac{u_i^{m+1} - \varepsilon^m}{\Delta t} = \alpha \frac{\varepsilon^m - 2\varepsilon^m + \varepsilon^m}{(\Delta x)^2} \tag{3.38}$$

veya

$$u_i^{m+1} = \varepsilon^m \tag{3.39}$$

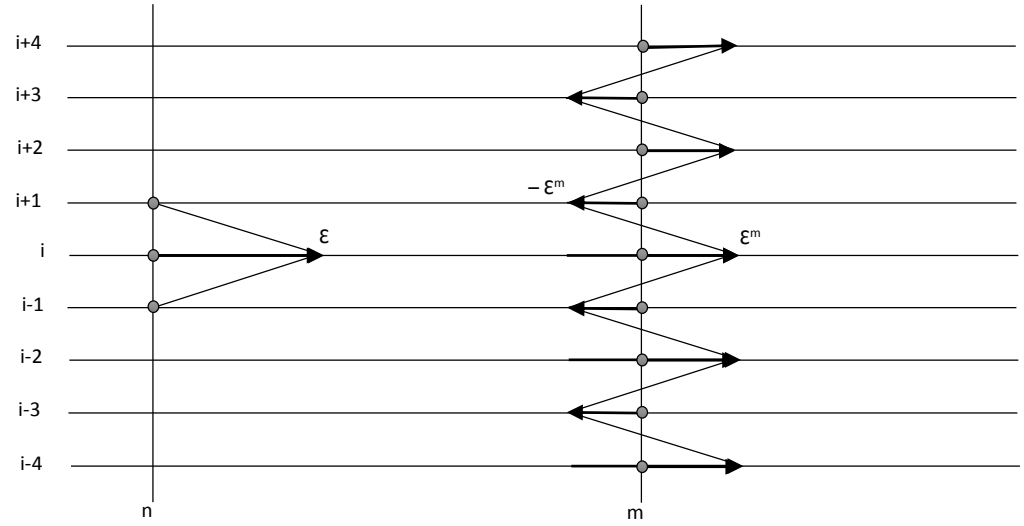
bulunur. Bu durumda çözümüm kararlı olması için bir kısıtlama yoktur. İkinci olasılık, hatanın art arda gelen noktalarda işaret değiştirmesidir. Yani

$$u_{i+1}^m = -\varepsilon^m \tag{3.40}$$

$$u_i^m = \varepsilon^m \tag{3.41}$$

$$u_{i-1}^m = -\varepsilon^m \tag{3.42}$$

Bu durum Şekil 3.1'de grafiksel olarak gösterilmektedir.



Şekil 3. 1 m zaman adımında bozunumların yayılması

Buna göre $m + 1$ zaman adımı için

$$\frac{u_i^{m+1} - \varepsilon^m}{\Delta t} = \alpha \frac{-\varepsilon^m - 2\varepsilon^m - \varepsilon^m}{(\Delta x)^2} \tag{3.43}$$

yazılarak buradan

$$u_i^{m+1} = \varepsilon^m + d(-\varepsilon^m - 2\varepsilon^m - \varepsilon^m) \tag{3.44}$$

veya

$$u_i^{m+1} = (1 - 4d)\varepsilon^m \tag{3.45}$$

elde edilir [19], [23]. Kararlı bir çözüm için

$$\left|\frac{u_i^{m+1}}{\varepsilon^m}\right| = |1 - 4d| \leq 1 \tag{3.46}$$

olmalı ve bunun için de $1 - 4d \leq 1$ ve $1 - 4d \geq -1$ koşullarının sağlanması gerekir.

$$1 - 4d \leq 1 \quad \text{için} \quad d \geq 0 \tag{3.47}$$

$$1 - 4d \geq -1 \quad \text{için} \quad d \leq \frac{1}{2} \tag{3.48}$$

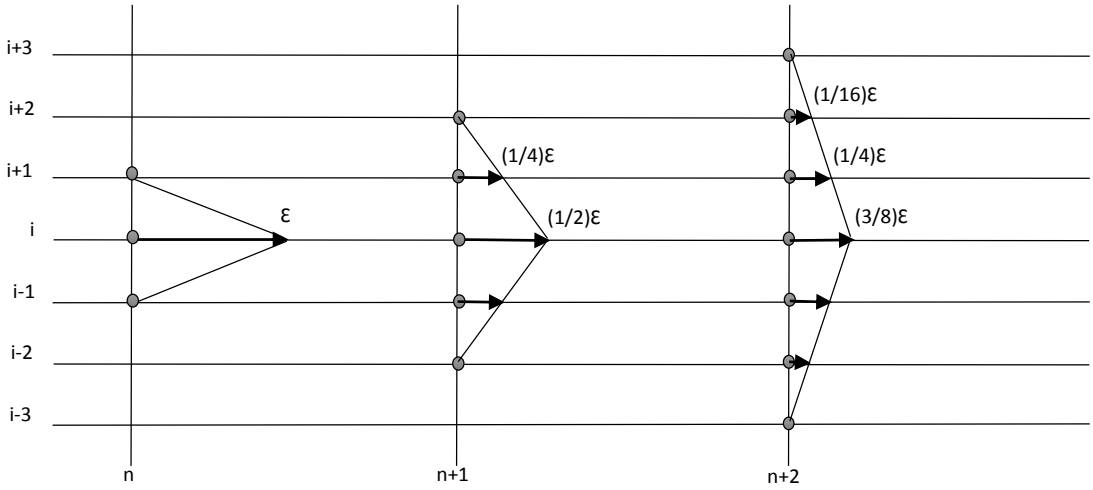
bulunur. d pozitif olduğu için (3.47) koşulu kendiliğinden sağlanır. Dolayısıyla kararlı bir çözüm için sadece (3.48) koşulunun gerçekleşmesi yeterlidir [19], [23]. (3.48) eşitsizliğinde d değeri yerine yazılıp Δt çekildiğinde

$$\Delta t \leq \frac{1}{2\alpha}(\Delta x)^2 \tag{3.49}$$

elde edilir. Yani model difüzyon denklemin için (3.2) eşitliğiyle gösterilen sonlu fark denkleminde kararlı bir çözümün elde edilebilmesi için adım uzunluklarının (3.49) koşulu gerçekleşecek biçimde seçilmesi gerekir.

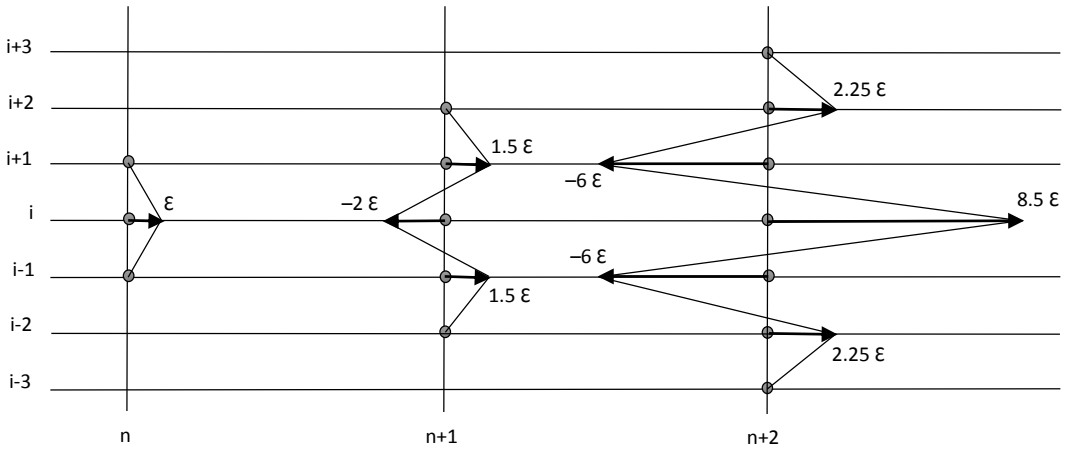
Şimdi de d büyüklüğünün iki farklı değeri için bozunumun küçülmesi veya büyümesi durumlarını grafiksel olarak gösterelim.

İlk olarak $d = 0.25$ değeri için, n zaman adımında i noktasına yerleştirilen ε bozunumu Şekil 3.2'de gösterildiği gibi küçülecektir.



Şekil 3. 2 FTCS açık yönteminde $d = 0.25$ için hatanın küçülmesi

Kararlılık koşulunun aşıldığı $d = 1.5$ değerinde ise n zaman adımında i noktasına yerleştirilen ε bozunumu Şekil 3.3'de gösterildiği gibi büyüyecektir.



Şekil 3. 3 FTCS açık yönteminde $d = 1.5$ için hatanın büyümesi

Ayrık pertürbasyon kararlılık analizine ikinci örnek olarak birinci dereceden hiperbolik bir denklem olan adveksiyon denklemini ele alalım:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\beta \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (\beta > 0) \tag{3.50}$$

Verilen denklemde zamana göre birinci mertebeden hataya sahip ileri farklar ve konuma göre birinci mertebeden hataya sahip geri farklarla ayrıştırma yapıldığında

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\beta \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \tag{3.51}$$

elde edilir. n zaman adımında i noktasına bir ε bozunumu yerleştirilirse

$$\frac{u_i^{n+1} - (u_i^n + \varepsilon)}{\Delta t} = -\beta \frac{(u_i^n + \varepsilon) - u_{i-1}^n}{\Delta x} \tag{3.52}$$

veya

$$u_i^{n+1} = (u_i^n + \varepsilon) - c(u_i^n + \varepsilon - u_{i-1}^n) \tag{3.53}$$

olacak şekilde seçilen

$$c = \beta \frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{3.54}$$

c büyüklüğüne *Courant sayısı* denir. n zaman adımındaki bütün çözümler sıfır kabul edildiğinden, $n + 1$ zaman adımında i noktasındaki çözüm

$$u_i^{n+1} = (1 - c)\varepsilon \tag{3.55}$$

olur. Kararlı bir çözüm için

$$\left|\frac{u_i^{n+1}}{\varepsilon}\right| \leq 1 \tag{3.56}$$

veya

$$|(1-c)| \leq 1 \tag{3.57}$$

olmalı ve bunun için de $1-c \leq 1$ ve $1-c \geq -1$ koşullarının sağlanması gerekir.

$$1-c \leq 1 \quad \text{için} \quad -c \leq 0 \tag{3.58}$$

$$1-c \geq -1 \quad \text{için} \quad c \leq 2 \tag{3.59}$$

bulunur. c büyüklüğü pozitif olduğundan (3.58) koşulu kendiliğinden sağlanır. Dolayısıyla kararlı bir çözüm için sadece (3.59) koşulunun gerçekleşmesi yeterlidir [19]. $n+1$ zaman adımında $i-1$ noktası için denklem

- Şimdi de bozunumun $n+1$ zaman adımında $i+1$ noktasındaki durumunu görmek için

$$\frac{u_{i+1}^{n+1}-u_{i+1}^{n}}{\Delta t} = -\beta\,\frac{u_{i+1}^{n}-(u_i^{n}+\varepsilon)}{\Delta x} \tag{3.60}$$

veya

$$u_{i+1}^{n+1} = u_{i+1}^{n} - c[u_{i+1}^{n}-(u_i^{n}+\varepsilon)] \tag{3.61}$$

yazılıp, n zamana adımındaki çözümler sıfıra eşit olduğundan

$$u_{i+1}^{n+1} = c\varepsilon \tag{3.62}$$

elde edilir. Kararlı bir çözüm için

$$\left|\frac{u_{i+1}^{n+1}}{\varepsilon}\right| \leq 1 \tag{3.63}$$

veya

$$|c| \leq 1 \tag{3.64}$$

olmalı ve bunun için de

$$c \leq 1 \tag{3.65}$$

ve

$$c \geq -1 \tag{3.66}$$

koşullarının sağlanması gerekir. c büyüklüğü pozitif olduğu için ikinci koşul kendiliğinden sağlanır. Dolayısıyla kararlı bir çözüm için sadece birinci koşul yani $c \leq 1$ olması yeterlidir [19].

$$\frac{u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^{n}}{\Delta t} = -\beta \frac{u_{i-1}^{n} - u_{i-2}^{n}}{\Delta x} \tag{3.67}$$

şeklinde olup içinde bozunum büyüklüğü bulunmadığından $u_{i-1}^{n+1} = 0$ olur.

Bu işlemler bir sonraki zaman adımı olan $n + 2$'de aşağıdaki gibi sonuçlar verir:

$$u_i^{n+2} = (1 - c)^2 \varepsilon \tag{3.68}$$

$$u_{i+1}^{n+2} = 2c(1 - c)\varepsilon \tag{3.69}$$

$$u_{i+2}^{n+2} = c^2 \varepsilon \tag{3.70}$$

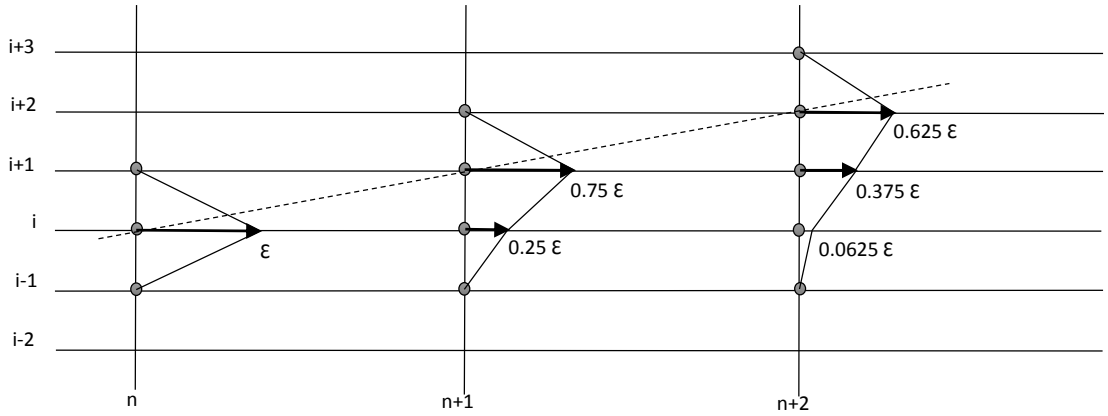
$$u_{i+3}^{n+2} = 0 \tag{3.71}$$

$$u_{i-1}^{n+2} = 0 \tag{3.72}$$

Kararlılık koşulu uygulandığında, kararlı bir çözüm için $c \leq 1$ olması gerektiği görülür [19].

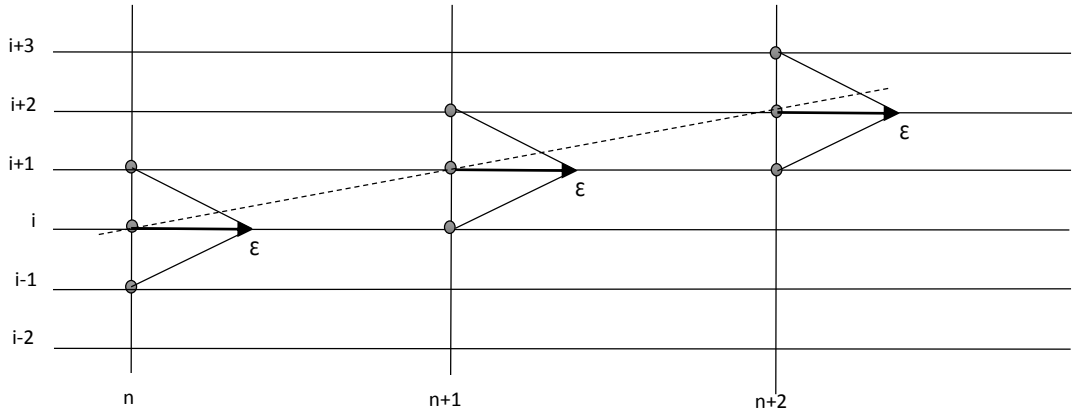
Şimdi ε bozunumunun $c = 0.75$ ve $c = 1.5$ değerlerinde küçülmesi veya büyümesini inceleyelim.

$c = 0.75$ değeri için, n zaman adımında i noktasına yerleştirilen bozunum Şekil 3.4'de gösterildiği gibi küçülecektir.



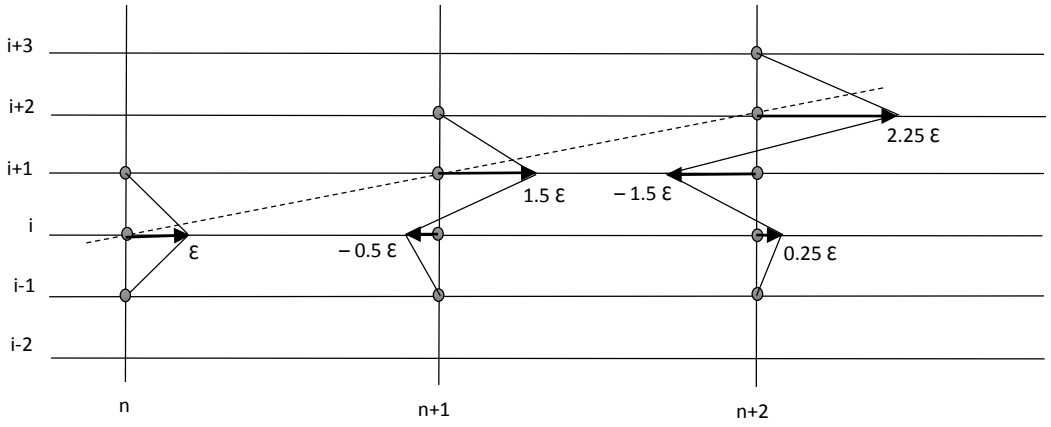
Şekil 3. 4 Adveksiyon denkleminin çözümünde $c = 0.75$ için hatanın küçülmesi

Kararlılık koşulunun üst sınırı olan $c = 1$ değerinde çözüm tamdır. n zaman adımında i noktasına yerleştirilen bozunum Şekil 3.5'de gösterildiği gibi karakteristik çizgi boyunca yayılır [19].



Şekil 3. 5 $c = 1$ için bozunumun karakteristik çizgi boyunca yayılması

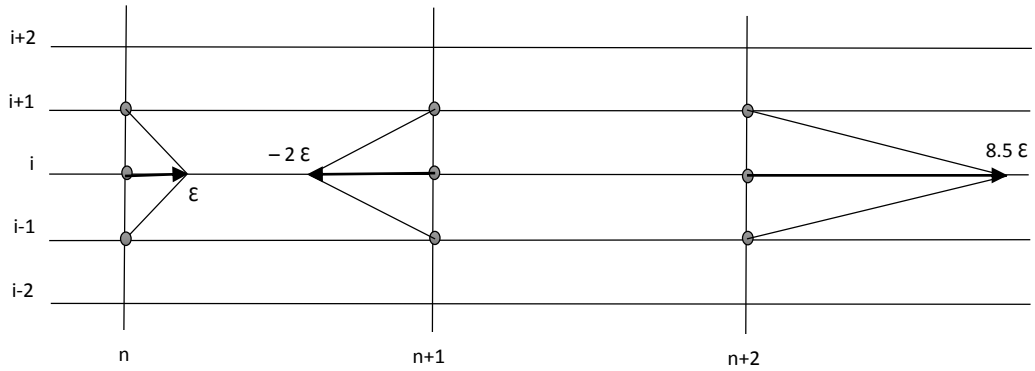
Kararlılık koşulunun aşıldığı $c = 1.5$ değeri için, n zaman adımında i noktasına yerleştirilen bozunumun $n + 1$ ve $n + 2$ zaman adımlarında yayılması Şekil 3.6'da gösterilmektedir.



Şekil 3. 6 Adveksiyon denkleminin çözümünde c $= 1.5$ için hatanın büyümesi

Kararsızlıkla ilgili bir uyarı:

Farklı zaman adımlarında i noktası için çözümün kararsızlığı Şekil 3.7'de gösterilmiştir.



Şekil 3. 7 Dinamik kararsızlık

Bu şekilde açıkça görülen, kararsız çözümün salınımlı davranışı "dinamik kararsızlık" olarak adlandırılır [19]. Difüzyon denkleminde i noktası için farklı zaman adımlarındaki bozunum yayılması

$$u_i^n = \varepsilon \tag{3.73}$$

$$u_i^{n+1} = (1-2d)\varepsilon \tag{3.74}$$

$$u_i^{n+2} = (6d^2-4d+1)\varepsilon \tag{3.75}$$

şeklindedir. $d > \frac{1}{2}$ için kararsız çözüm salınımıdır. Örneğin $d = 1.5$ için

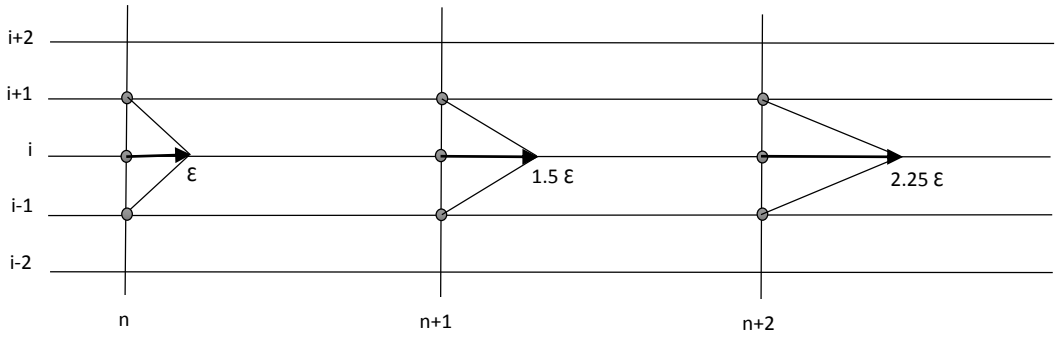
$$u_i^n = \varepsilon > 0 \tag{3.76}$$

$$u_i^{n+1} = -2\varepsilon < 0 \tag{3.77}$$

$$u_i^{n+2} = 8{,}5\varepsilon > 0 \tag{3.78}$$

olur. Görüldüğü gibi her bir zaman adımında çözüm işaret değiştirmektedir.

Eğer salınım olmadan sadece genliğin arttığı bir kararsızlık durumu varsa bu durum "statik kararsızlık" olarak adlandırılır [19]. Statik kararsızlık Şekil 3.8'de grafiksel olarak gösterilmektedir.



Şekil 3. 8 Statik kararsızlık

Eğer model denklem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\beta \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.79}$$

şeklinde adveksiyon ve difüzyon terimlerinin her ikisini de içeriyorsa ayrık pertürbasyon kararlılık analiz yöntemi kullanışsız olur. Bu gibi durumlarda Von Neumann kararlılık analiz yönteminin kullanılması daha uygundur.

3.2 Von Neumann Kararlılık Analizi

Von Neumann kararlılık analizi, sonlu fark denklemlerinin kararlılık durumlarını incelemede sıklıkla kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemde, sonlu fark denkleminin bir çözümü Fourier seri açılımı kullanılarak elde edilir. Eğer verilen sonlu fark denklemi lineerse, Fourier serisinin sadece bir teriminin incelenmesi yeterli olur. Aslında, denklemin lineer olması Von Neumann kararlılık analizinin uygulanması için genel bir zorunluluktur [19], [22].

Büyütme çarpanının büyümesi veya küçülmesi sayısal algoritmanın kararlı olup olmadığını gösterir. Ayrıca bu yöntemde sınır koşullarının çözümün kararlılığı üzerindeki etkisi de hesaba katılmaz [19], [22]. Bu kısıtlamaları ortadan kaldırmak için lineer olmayan denklemler, lokal olarak lineerleştirildikten sonra Von Neumann kararlılık analizi uygulanır. Bu durumda kararlılık koşulu lokal olarak sağlanmış olur. Dolayısıyla gerçekte gerekli kararlılık koşulu, Von Neumann analiziyle elde edilenden daha kısıtlayıcı olabilir. Bütün bunlara rağmen elde edilen sonuçlar kararlılıkla ilgili oldukça faydalı bilgiler verecektir.

Yöntemi göstermek amacıyla u_i^n için Fourier serisi terimlerinden birinin

$$u_i^n = U^n e^{IP(\Delta x)i} \tag{3.80}$$

şeklinde olduğunu varsayalım. Burada

$I = \sqrt{-1}$

$U^n = n$ zaman adımındaki genlik

$P = x$ doğrultusundaki dalga sayısıdır. Yani λ_x dalga uzunluğu olmak üzere $\lambda_x = {}^{2\pi}/_{P}$ 'dir [19], [22].

Benzer şekilde

$$u_i^{n\pm1} = U^{n\pm1} e^{IP(\Delta x)i} \tag{3.81}$$

ve

$$u_{i\pm1}^n = U^n e^{IP(\Delta x)(i\pm1)} \tag{3.82}$$

yazılabilir. $\theta = P(\Delta x)$ olacak şekilde bir faz açısı tanımlandığında

$$u_i^n = U^n e^{I\theta i} \tag{3.83}$$

$$u_i^{n\pm1} = U^{n\pm1} e^{I\theta i} \tag{3.84}$$

$$u_{i\pm1}^n = U^n e^{I\theta(i\pm1)} \tag{3.85}$$

olur [19], [22]. Von Neumann kararlılık analizine örnek olarak parabolik bir denklem olan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.86}$$

difüzyon denklemini ele alalım. Verilen denklemde zamana göre birinci mertebeden hataya sahip ileri farklar ve konuma göre ikinci mertebeden hataya sahip merkezi farklar (FTCS açık yöntemi) uygulanarak ayrıklaştırma yapıldığında

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{3.87}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde d difüzyon sayısı yerine yazılırsa

$$u_i^{n+1} = u_i^n + d(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \tag{3.88}$$

olur. (3.83), (3.84) ve (3.85) bağıntıları bu denklemde yerine yazıldığında

$$U^{n+1}e^{I\theta i} = U^n e^{I\theta i} + d\left[U^n e^{I\theta(i+1)} - 2U^n e^{I\theta i} + U^n e^{I\theta(i-1)}\right] \quad (3.89)$$

ifadesi sadeleştirildiğinde

$$U^{n+1} = U^n + d\left[U^n e^{I\theta} - 2U^n + U^n e^{-I\theta}\right] \quad (3.90)$$

veya

$$U^{n+1} = U^n\left[1 + d\left(e^{I\theta} + e^{-I\theta} - 2\right)\right] \quad (3.91)$$

elde edilir [18], [19], [21], [22]. Burada $cos\theta = \frac{e^{I\theta}+e^{-I\theta}}{2}$ olduğu hatırlanarak $e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ yerine $2cos\theta$ yazıldığında, denklem

$$U^{n+1} = U^n[1 + 2d(\cos\theta - 1)] \quad (3.92)$$

şeklini alır.

$$G = 1 - 2d(1 - cos\,\theta) \quad (3.93)$$

şeklinde bir büyütme çarpanı tanımlanıp denklemde yerine yazıldığında

$$U^{n+1} = U^n G \quad (3.94)$$

bulunur. Kararlı bir çözüm için θ'nın bütün değerlerinde büyütme çarpanı sınırlandırılmalıdır. Bunun için de G'nin mutlak değeri 1'e eşit veya 1'den küçük olmalıdır. Yani

$$|G| \leq 1 \quad (3.95)$$

veya

$$|1 - 2d(1 - \cos\theta)| \leq 1 \quad (3.96)$$

olmalıdır. Böylece

$$1 - 2d(1 - \cos\theta) \leq 1 \quad (3.97)$$

$$1 - 2d(1 - \cos\theta) \geq -1 \quad (3.98)$$

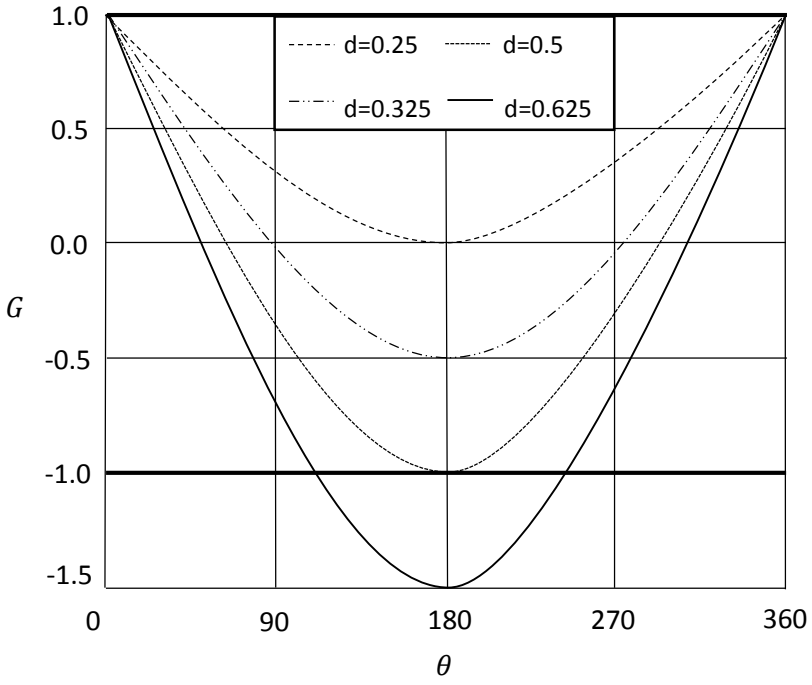
koşulları elde edilir. d pozitif ve $-1 \leq cos\theta \leq 1$ olduğundan (3.97) eşitsizliği θ'nın bütün değerleri için kendiliğinden sağlanır. Dolayısıyla kararlı bir çözüm için sadece (3.98) koşulunun gerçekleşmesi yeterlidir. $1 - cos\theta$'nın maksimum değeri 2 olduğundan (3.98) eşitsizliğinin sol tarafı $1 - 4d$ olur. Buradan kararlılık koşulunun

$$1 - 4d \geq 1 \quad \text{için} \quad d \leq \frac{1}{2} \tag{3.99}$$

şeklinde olduğu görülür [18], [19], [21], [22]. Daha önce, ayrık pertürbasyon kararlılık analizi yönteminde de aynı koşul elde edilmişti.

Bazen büyütme çarpanı daha karmaşık bir matematiksel ifade şeklinde olabilir. Bu yüzden $|G| \leq 1$ koşulu uygulandığında net bir kararlılık koşulu elde edilemeyebilir. Bu gibi durumlarda, sayısal denemelerle birlikte büyütme çarpanının grafiksel gösterimi kararlılık analizini kolaylaştırabilir. Ayrıca, basit denklemler üzerinde uygulanan kararlılık analizleri de yol gösterici özelliklerinden dolayı çok faydalıdır.

Grafiksel gösterim polar koordinatlarda ya da kartezyen koordinatlarda yapılabilir. Şekil 3.9'da görüldüğü gibi $d = 0.625$ değerinde kararlılık sınırı aşıldığından dolayı bu noktada kararsız bir çözüm elde edileceği görülmektedir.



Şekil 3. 9 (3.93) bağıntısıyla verilen büyütme çarpanının görünümü

Von Neumann kararlılık analizine ikinci bir örnek olarak bir boyutlu adveksiyon–difüzyon denklemini ele alalım.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\beta \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.100}$$

Verilen denklemde zamana göre birinci mertebeden hataya sahip ileri farklar, adveksiyon teriminde birinci mertebeden hataya sahip merkezi farklar ve difüzyon teriminde ikinci mertebeden hataya sahip merkezi farklar (FTCS açık yöntemi) uygulanarak ayrıklaştırma yapıldığında

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\beta \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{3.101}$$

veya

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \beta \frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \tag{3.102}$$

bulunur. Burada c ve d değerleri yerine yazılıp, Von Neumann kararlılık analizi uygulandığında

$$U^{n+1}e^{I\theta i} = U^n e^{I\theta i} - \frac{c}{2}\left[U^n e^{I\theta(i+1)} - U^n e^{I\theta(i-1)}\right] + d\left[U^n e^{I\theta(i+1)} - 2U^n e^{I\theta i} + U^n e^{I\theta(i-1)}\right] \tag{3.103}$$

elde edilir. Denklemdeki $e^{I\theta i}$ 'ler sadeleştirilerek yeniden düzenlendiğinde

$$U^{n+1} = U^n - \frac{c}{2}\left[U^n e^{I\theta} - U^n e^{-I\theta}\right] + d\left[U^n e^{I\theta} - 2U^n + U^n e^{-I\theta}\right] \tag{3.104}$$

veya

$$U^{n+1} = U^n\left\{1 - \frac{c}{2}\left(e^{I\theta} - e^{-I\theta}\right) + d\left[\left(e^{I\theta} + e^{-I\theta}\right) - 2\right]\right\} \tag{3.105}$$

olur. Burada

$$cos\theta = \frac{e^{I\theta} + e^{-I\theta}}{2} \quad \rightarrow \quad e^{I\theta} + e^{-I\theta} = 2cos\theta \tag{3.106}$$

$$sin\theta = \frac{e^{I\theta} - e^{-I\theta}}{2I} \quad \rightarrow \quad e^{I\theta} - e^{-I\theta} = 2Isin\theta \tag{3.107}$$

eşitlikleri yerine yazıldığında

$$U^{n+1} = U^n\{1 - c\, I \sin\theta + 2d(\cos\theta - 1)\} \tag{3.108}$$

denklemi bulunur. Böylece büyütme çarpanı

$$G = 1 - 2d(1 - \cos\theta) - I\, c \sin\theta \tag{3.109}$$

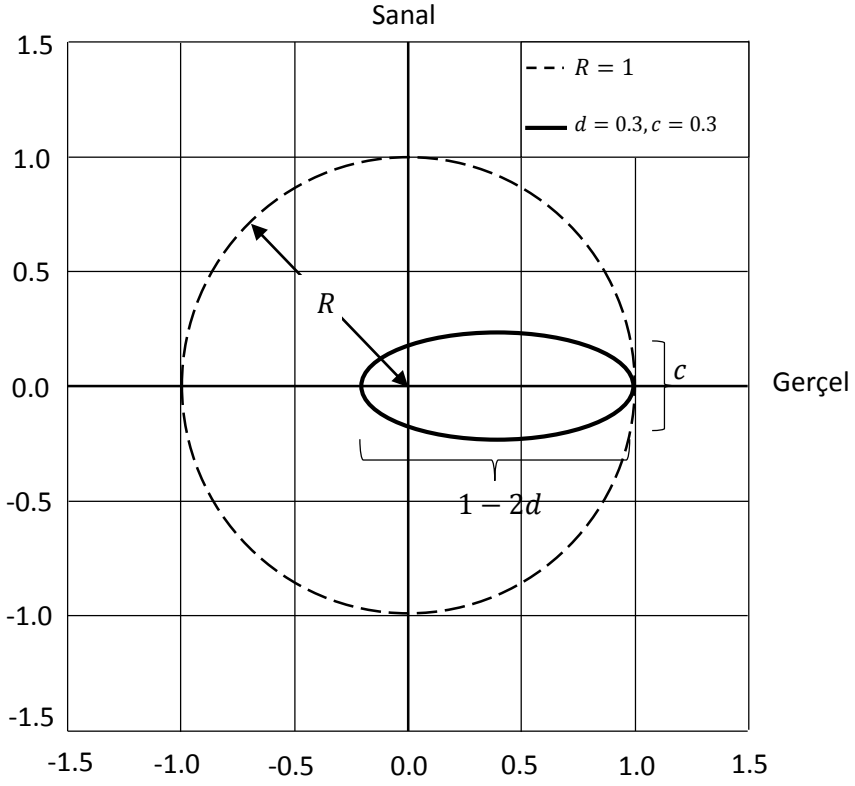
şeklinde elde edilir [19], [20], [21]. Bu özel problem için, büyütme çarpanının $Re(G) = 1 - 2d(1 - cos\theta)$ ve $Im(G) = -csin\theta$ olmak üzere gerçek ve sanal kısımları vardır. Kararlı bir çözüm için büyütme çarpanı sınırlandırılmalıdır.

$$|G|^2 \leq 1 \tag{3.110}$$

şeklinde sınırlandıralım. Matematiksel işlemlere geçmeden önce G'nin grafiksel gösterimini inceleyelim. (3.109) denklemi

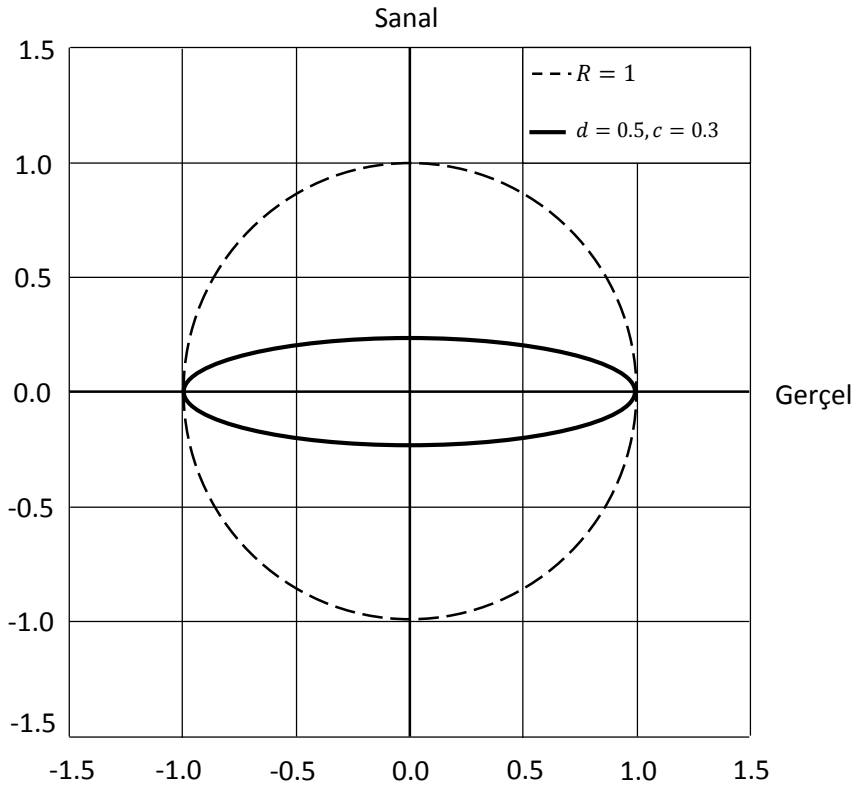
$$G = X + IY = [(1 - 2d) + 2d\cos\theta] - I\,[c\sin\theta] \tag{3.111}$$

şeklinde düzenlendiğinde bir elips denklemi elde edilir. Bu elips Şekil 3.10'da grafiksel olarak gösterilmektedir.

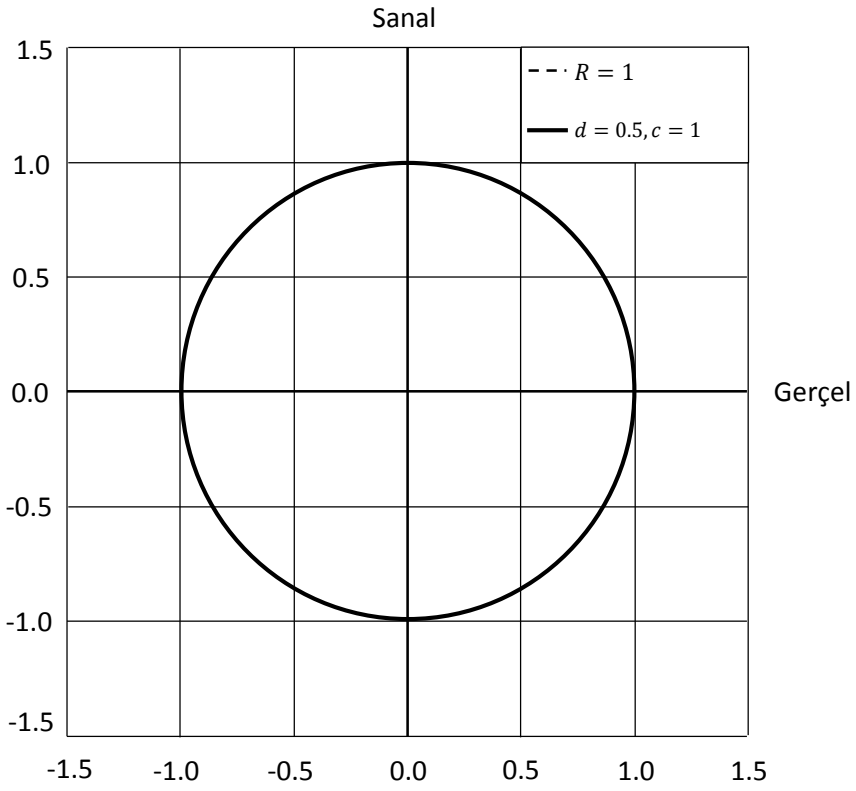


Şekil 3. 10 (3.111) bağıntısıyla verilen büyütme çarpanının görünümü

Kararlı bir çözüm için $|G| \leq 1$ koşulu gereği bu elips, birim yarıçaplı dairenin içinde kalmalıdır. En uç iki durum: Şekil 3.11'de gösterilen $1 - 2d = 0$ yani $d = 0.5$ ve Şekil 3.12'de gösterilen $c = 1$ 'dir. İlk durumda kararlılık koşulu $d \leq 0.5$ iken ikinci durumda kararlılık koşulu $c \leq 1$ 'dir.



Şekil 3. 11 $d = 0.5$ için büyütme çarpanının görünümü



Şekil 3. 12 $c = 1$ için büyütme çarpanının görünümü

(3.111) ifadesi $|G|^2 \leq 1$ koşulu ile sınırlandırılmak üzere yeniden düzenlendiğinde

$$|G|^2 = G\bar{G} = \{[(1-2d) + 2d\cos\theta] - I[c\sin\theta]\} \cdot \{[(1-2d) + 2d\cos\theta] + I[c\sin\theta]\} \quad (3.112)$$

veya

$$|G|^2 = [(1-2d) + 2d\cos\theta]^2 + [c\sin\theta]^2 \quad (3.113)$$

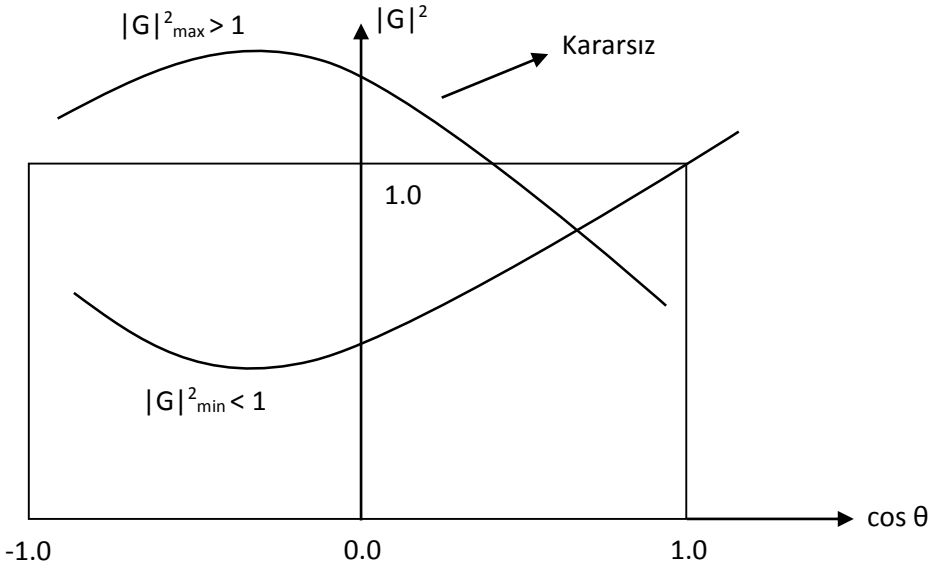
bulunur. Bu eşitliğin kuadratik biçimde yazılışı

$$|G|^2 = (1-2d)^2 + 4d^2\cos^2\theta + 4d(1-2d)\cos\theta + c^2[1-\cos^2\theta] \quad (3.114)$$

veya

$$|G|^2 = (4d^2 - c^2)\cos^2\theta + 4d(1-2d)\cos\theta + 4d(d-1) + c^2 + 1 \quad (3.115)$$

şeklinde elde edilir [19], [20], [21]. Bu kuadratik denklem hem bir tane minimuma sahip içbükey eğriyi hem de bir tane maksimuma sahip dışbükey eğriyi temsil etmektedir. Bu eğriler Şekil 3.13'de gösterilmektedir.



Şekil 3. 13 (3.115) denkleminin kuadratik eğrileri

Kararlı bir çözüm için bu kuadratik fonksiyonun bir maksimumu bulunmamalı, yani eğri dışbükey olmamalıdır.

$|G|^2$ fonksiyonunun $cos\theta$'ya göre birinci ve ikinci türevleri aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d|G|^2}{d(\cos\theta)} = (4d^2 - c^2)2\cos\theta + 4d(1-2d) \tag{3.116}$$

$$\frac{d^2|G|^2}{d(\cos\theta)^2} = 2(4d^2 - c^2) \tag{3.117}$$

Fonksiyonu bir tane maksimuma sahiptir. Eğer ikinci türevi negatif olursa, yani $4d^2 - c^2 < 0$ veya $c > 2d$ ise dışbükey bir eğri olacaktır. $|G|^2$ fonksiyonunun birinci türevi sıfıra eşitlendiğinde (3.116) denkleminden

$$(\cos\theta)_{max} = -\frac{4d(1-2d)}{2(4d^2 - c^2)} = \frac{2d(2d-1)}{4d^2 - c^2} \tag{3.118}$$

bulunur. (3.118) denkleminde elde edilen $cos\theta$ değeri (3.115) denkleminde yerine yazıldığında

$$|G|^2_{max} = (4d^2 - c^2)\left[\frac{2d(2d-1)}{4d^2 - c^2}\right]^2 + 4d(1-2d)\frac{2d(2d-1)}{4d^2 - c^2} + 4d(d-1) + c^2 + 1 \tag{3.119}$$

veya

$$|G|^2_{max} = \frac{c^2(c^2 - 4d + 1)}{c^2 - 4d^2} \tag{3.120}$$

elde edilir. $|G|^2 \leq 1$ koşulu uygulandığında

$$c^2(c^2 - 4d + 1) \leq c^2 - 4d^2 \tag{3.121}$$

veya

$$(c^2 - 2d)^2 \leq 0 \tag{3.122}$$

olur. $(c^2 - 2d)^2$ her zaman pozitif olacağından kararlılık koşulunu sağlamaz. Buna göre (3.115) denklemiyle temsil edilen kuadratik eğrinin dışbükey olamayacağı görülür. Bu durumda (3.117) bağıntısıyla verilen $|G|^2$ 'nin ikinci türevinin pozitif olması koşulu incelenmelidir.

$$2(4d^2 - 2c) \geq 0 \tag{3.123}$$

veya

$$c \leq 2d \tag{3.124}$$

bulunur [19], [21]. Bu koşul bir maksimum olmamasını sağlayacaktır. Bununla birlikte $cos\theta$'nın ekstremum değerleri, yani ± 1 değerleri de araştırılmalıdır. (3.115) denkleminde $cos\theta = 1$ yazıldığında $|G|^2 = 1$ elde edilir ve kararlılık koşulu sağlanır. $cos\theta = -1$ yazıldığında $|G|^2 = 16d^2 - 8d + 1$ elde edilir. $|G|^2 \leq 1$ koşulu uygulandığında

$$16d^2 - 8d + 1 \leq 1 \quad \text{için} \quad 2d - 1 \leq 0 \tag{3.125}$$

ve dolayısıyla

$$d \leq \frac{1}{2} \tag{3.126}$$

bulunur. Bu sonuç daha önce (3.99) bağıntısında elde edilmişti. (3.124) ve (3.126) bağıntıları birleştirildiğinde (3.65) ifadesi elde edilir. Benzer şekilde (3.124) ve (3.65) bağıntıları birleştirildiğinde

$$c^2 \leq 2d \tag{3.127}$$

şeklinde (3.124) bağıntısından daha sınırlayıcı bir koşul elde edilmiş olur [19], [20], [21]. Böylece, (3.102) denkleminin kararlılık koşullarının (3.65) ve (3.127) şeklinde olduğu görülür. Courant sayısı ve difüzyon sayısının değerleri (3.124) denkleminde yerine yazıldığında

$$\beta \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 2\alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \tag{3.128}$$

veya

$$\beta \frac{\Delta x}{\alpha} \leq 2 \tag{3.129}$$

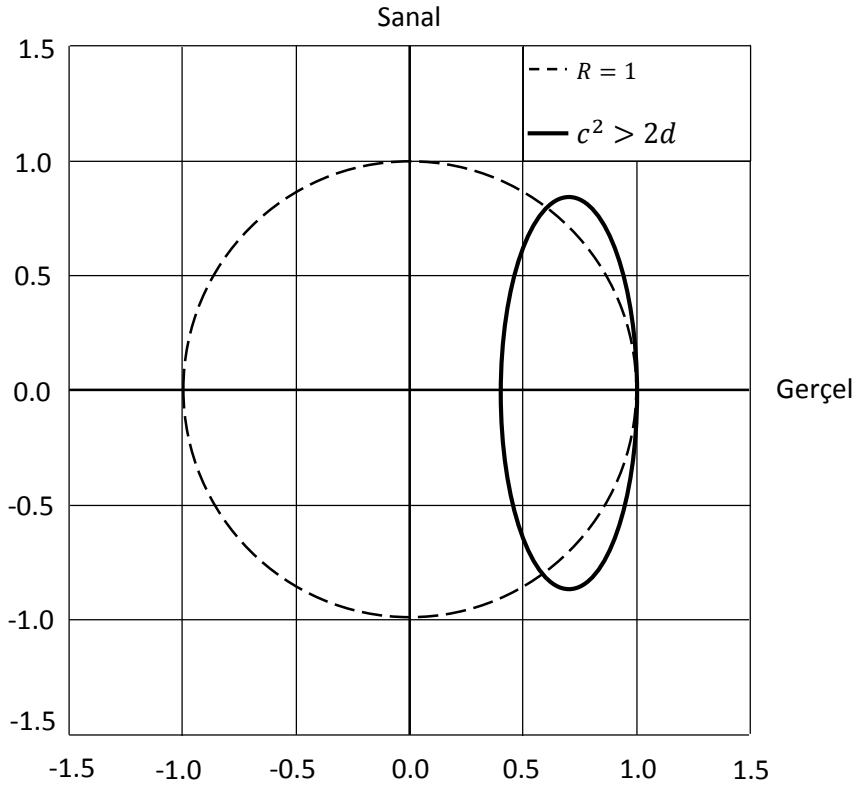
olur. Buradaki $\beta \frac{\Delta x}{\alpha}$ büyüklüğü "Hücre Reynolds Sayısı – Re_c" olarak adlandırılır. Yani

$$Re_c \leq 2 \tag{3.130}$$

bulunur. Benzer şekilde, Reynold sayısı (3.127) denkleminde yerine yazıldığında

$$Re_c \leq \left(\frac{2}{c}\right) \tag{3.131}$$

şeklinde daha kısıtlayıcı bir koşul elde edilir [19], [21]. $c^2 > 2d$ koşulu için büyütme çarpanının grafiği Şekil 3.14'de gösterilmektedir.



Şekil 3. 14 $c^2 > 2d$ için kararsızlık gösteren büyütme çarpanının görünümü

Şu ana kadar incelenen sonlu fark denklemleri n ve $n+1$ olmak üzere iki zaman adımı içermekteydi. Şimdi $n-1$, n ve $n+1$ olmak üzere üç zaman adımı içeren sonlu fark denklemlerinde kararlılık analizi uygulamasını göstermek için birinci dereceden hiperbolik bir denklem olan adveksiyon denklemini ele alalım.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\beta \frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.132}$$

Verilen denklemde hem zamana hem de konuma göre ikinci mertebeden hataya sahip merkezi farklar (leapfrog yöntemi) uygulanarak ayrıklaştırma yapıldığında

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} = -\beta \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \tag{3.133}$$

açık denklemi elde edilir. Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$'dir. Courant sayısının değeri ayrıklaştırılmış denklemde yerine yazıldığında

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - c(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \tag{3.134}$$

elde edilir. Bu denklem üzerinde Von Neumann kararlılık analizi uygulandığında

$$U^{n+1} e^{I\theta i} = U^{n-1} e^{I\theta i} - c\left(U^n e^{I\theta(i+1)} - U^n e^{I\theta(i-1)}\right) \tag{3.135}$$

bulunur. Denklemdeki $e^{I\theta i}$ 'ler sadeleştirildiğinde

$$U^{n+1} = U^{n-1} - c\left(U^n e^{I\theta} - U^n e^{-I\theta}\right) \tag{3.136}$$

veya

$$U^{n+1} = U^{n-1} - cU^n\left(e^{I\theta} - e^{-I\theta}\right) \tag{3.137}$$

Bulunur [19], [20]. $sin\theta = \frac{e^{I\theta} - e^{-I\theta}}{2I}$ olduğundan $e^{I\theta} - e^{-I\theta}$ yerine $2Isin\theta$ yazılabilir. Böylece

$$U^{n+1} = U^{n-1} - c(2\,I\sin\theta)U^n \tag{3.138}$$

olur. Buradan $-2Ic\sin\theta = A$ olmak üzere

$$U^{n+1} = AU^n + U^{n-1} \tag{3.139}$$

elde edilir. Ayrıca

$$U^n = U^n + (0)U^{n-1} \tag{3.140}$$

şeklinde bir eşitlik yazılabilir. (3.139) ve (3.140) denklemleri matris biçiminde yazıldığında

$$\begin{Bmatrix} U^{n+1} \\ U^n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U^n \\ U^{n-1} \end{Bmatrix} \tag{3.141}$$

bulunur. Burada büyütme çarpanı da bir matris biçiminde ifade edilmiştir. Yani

$$G = \begin{bmatrix} A & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.142}$$

olduğu görülür. G matrisinin öz değerleri λ ile gösterilsin. Kararlılık için $|\lambda| \leq 1$ olmalıdır. Buna göre λ değerleri

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda A - 1 = 0 \tag{3.143}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{A \pm \sqrt{A^2+4}}{2} \tag{3.144}$$

şeklinde elde edilir. Burada $A = -2Icsin\theta$ değeri yerine koyulduğunda

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-2Ic\sin\theta \pm \sqrt{4 - 4c^2\sin^2\theta}\right] \tag{3.145}$$

$$\lambda_{1,2} = -Ic\sin\theta \pm \sqrt{1 - c^2\sin^2\theta} \tag{3.146}$$

olur [19]. Bu aşamada iki durum incelenmelidir. İlk olarak, eğer

$$c^2\sin^2\theta \leq 1 \;\; ise \;\; \left|\lambda_{1,2}\right|^2 = c^2\sin^2\theta + (1 - c^2\sin^2\theta) = 1 \tag{3.147}$$

olup $|\lambda| \leq 1$ kararlılık koşulu sağlanır. Çünkü $sin^2\theta$, 0 ile 1 arasında değerler alabilir. En kısıtlayıcı durumda yani $sin^2\theta = 1$ olduğunda bile $c \leq 1$ 'dir. İkinci olarak $c^2 sin^2\theta > 1$ olması halinde ise

$$\lambda_{1,2} = I\left[-c\sin\theta \pm \sqrt{c^2\sin^2\theta - 1}\right] \tag{3.148}$$

$$\left|\lambda_{1,2}\right|^2 = c^2\sin^2\theta + (c^2\sin^2\theta - 1) \pm 2c\sin\theta\sqrt{c^2\sin^2\theta - 1} \tag{3.149}$$

$$\left|\lambda_{1,2}\right|^2 = 2c^2\sin^2\theta \pm 2c\sin\theta\sqrt{c^2\sin^2\theta - 1} - 1 \tag{3.150}$$

yazılabilir. Kararlılık gereği $|\lambda|^2 \leq 1$ olduğundan

$$2c^2\sin^2\theta \pm 2c\sin\theta\sqrt{c^2\sin^2\theta - 1} - 1 \leq 1 \tag{3.151}$$

bulunur. $(+)$ işaretli ifadeden

$$c^2\sin^2\theta + c\sin\theta\sqrt{c^2\sin^2\theta - 1} \leq 1 \tag{3.152}$$

elde edilir. Fakat $c^2 sin^2\theta > 1$ için bu koşul hiçbir zaman sağlanamaz. Buna göre (3.133) denklemi için kararlılık koşulu ilk durumda elde edilen $c \leq 1$ 'dir [19], [20].

BÖLÜM 4

DİFÜZYON DENKLEMLERİ

Difüzyon denklemi ikinci mertebeden parabolik bir kısmi diferansiyel denklemdir. Bir boyutlu difüzyon denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.1}$$

şeklinde gösterilir. Burada α difüzyon büyüklüğünü belirten pozitif bir sabit olarak kabul edilmektedir.

(4.1) denklemindeki türevler çeşitli sonlu fark formülleri ile ifade edilebilir. Birini türev $(\partial u/\partial t)$, birinci mertebeden hataya sahip ileri fark formülü ile

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \tag{4.2}$$

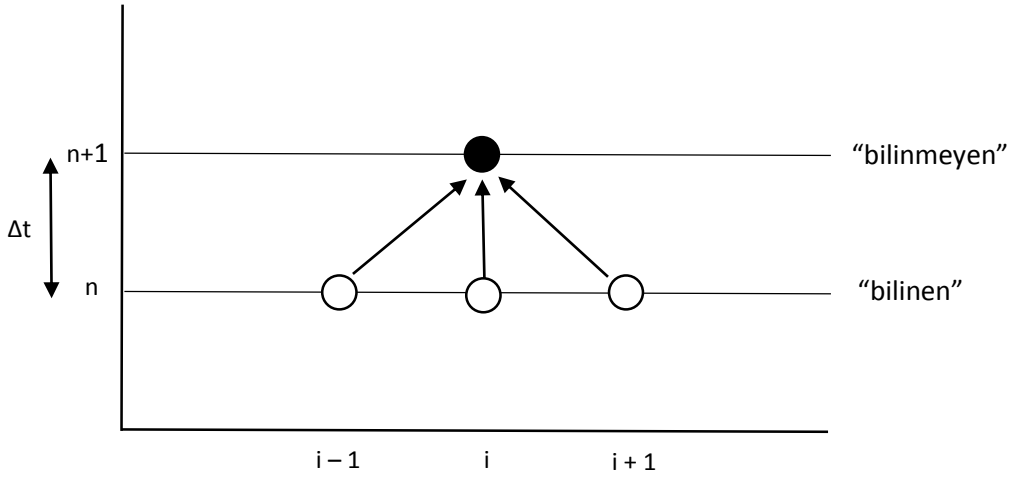
şeklinde yazılır. Difüzyon terimi $(\partial^2 u/\partial x^2)$, ikinci mertebeden hataya sahip merkezi fark formülü ile ifade edildiğinde (4.1) denklemi

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{4.3}$$

şeklini alır. Bu denklemdeki tek bilinmeyen u_i^{n+1} olduğu için bu değer hesaplanabilir. (4.3) denkleminden u_i^{n+1} terimi çekildiğinde

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \tag{4.4}$$

bulunur. Böylece ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklem, cebirsel bir denkleme dönüşmüş olur [19]. (4.4) denklemindeki ağ noktaları Şekil 4.1'de gösterilmektedir.



Şekil 4. 1 Açık yöntem için ağ noktaları

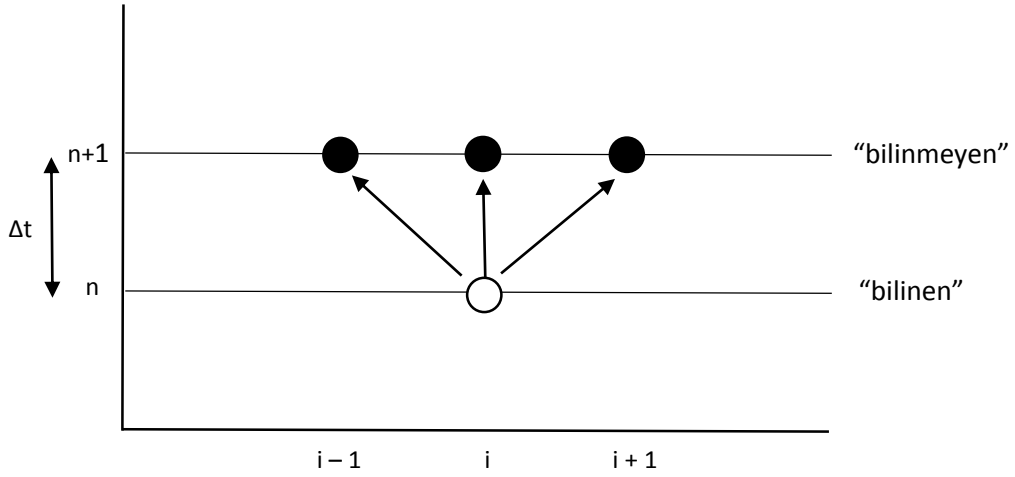
n zaman adımındaki bağımlı değişkenin değeri önceki çözüm (previous solution) olarak adlandırılır veya başlangıç bilgisi olarak verilir. Buna bağlı olarak $n+1$ zaman adımındaki değerler hesaplanır. Çözüme başlamak için bir tane başlangıç koşulu ve iki tane sınır koşulunun bilinmesi gerekmektedir [19].

Açık yöntemde her bir ayrıklaştırılmış denklem bir tane bilinmeyen içerdiğinden, $n+1$ zaman adımında elde edilen denklemler birbirinden bağımsız bir şekilde çözülerek bilinmeyen değerler bulunur.

Şimdi, tüm zaman adımlarındaki sınır koşullarını içeren bir yöntemi inceleyelim. Zamana göre birinci mertebeden hataya sahip geri farklar ve konuma göre ikinci mertebeden hataya sahip merkezi farklar uygulanarak ayrıklaştırma yapıldığında

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \tag{4.5}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1} ve u_{i+1}^{n+1} olmak üzere üç tane bilinmeyen vardır. (4.5) denklemindeki ağ noktaları Şekil 4.2'de gösterilmektedir.



Şekil 4. 2 Kapalı yöntem için ağ noktaları

Bilinmeyenlerin hesaplanması için tüm ağ noktaları için yazılmış bir grup ayrıklaştırılmış denklemin çözülmesi gerekir. Standart çözüm yöntemini uygulamak için (4.5) denklemini yeniden düzenlersek

$$u_i^n = \left(1 + \frac{2\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2}\right) u_i^{n+1} - \frac{\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2}(u_{i+1}^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) \tag{4.6}$$

elde edilir. Kapalı yöntemde her bir ayrıklaştırılmış denklemde birden fazla bilinmeyen vardır. (4.6) denkleminde u'ların katsayıları olarak a, b, c ve sağ taraf yerine de D yazılarak denklemin genel formu

$$a_i^n u_{i-1}^{n+1} + b_i^n u_i^{n+1} + c_i^n u_{i+1}^{n+1} = D_i^n \tag{4.7}$$

şeklinde elde edilir [19], [24]. Tüm ileri zaman adımlarındaki ağ noktaları için yazılan ayrıklaştırılmış denklemler sonucunda bir takım cebirsel denklemler elde edilir. Bu denklemler matris formunda yazıldığında, üç-diyagonalli katsayı matrisi oluşur. Şimdi ayrıklaştırılmış denklemler için olan açık ve kapalı yöntemleri inceleyelim.

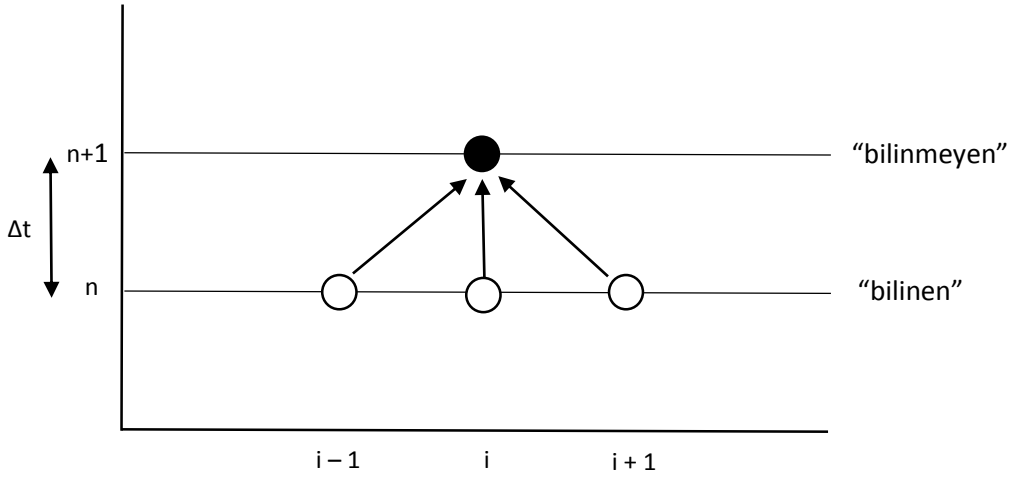
4.1 Açık Yöntemler

Difüzyon denklemlerinin çözümünde yaygın olarak kullanılan bazı açık yöntemler aşağıda verilmiştir.

4.1.1 FTCS Yöntemi

(4.1) denkleminde zamana göre birinci mertebeden hataya sahip ileri farklar ve konuma göre ikinci mertebeden hataya sahip merkezi farklar uygulanarak ayrıklaştırma yapıldığında (4.3) denklemi ve bu denklemden u_i^{n+1} terimi çekildiğinde (4.4) denklemi elde edilir [19], [24], [25], [26], [27], [28].

Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t),(\Delta x)^2]$'dir [19], [25]. Uygulanan yöntemin kararlı olması için $\frac{\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2} \leq 1/2$ koşulunun sağlanması gerekir [19], [25], [26], [28]. (4.4) denkleminin ağ noktaları Şekil 4.3'de gösterilmektedir.



Şekil 4. 3 FTCS açık yöntemi için ağ noktaları

4.1.2 Richardson Yöntemi

(4.1) denkleminde hem zamana hem de konuma göre ikinci mertebeden hataya sahip merkezi farklar uygulanarak ayrıklaştırma yapıldığında

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^{n-1}}{2\Delta t}=\alpha\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{4.8}$$

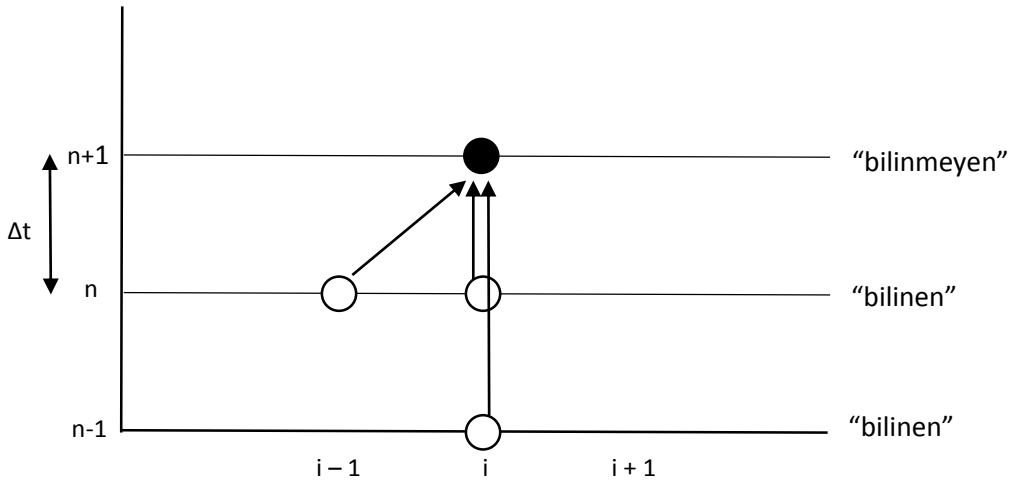
veya

$$u_i^{n+1}=u_i^{n-1}+\frac{2\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2}(u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n) \tag{4.9}$$

denklemi elde edilir [18], [19], [24]. Burada u_i^{n+1} terimi çekilerek yeniden düzenlendiğinde

$$\left(1-\frac{2\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2}\right)u_i^{n+1}=u_i^{n-1}-\frac{2\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2}(2u_i^n+u_{i-1}^n) \tag{4.10}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t)^2,(\Delta x)^2]$'dir [18]. Uygulanan yöntem koşulsuz kararsız olduğu için kullanışlı değildir [18], [19]. (4.10) denkleminin ağ noktaları Şekil 4.4'de gösterilmektedir.



Şekil 4. 4 Richardson açık yöntemi için ağ noktaları

4.1.3 DuFort–Frankel Yöntemi

Bir önceki yöntemde olduğu gibi (4.1) denkleminde hem zamana hem de konuma göre ikinci mertebeden hataya sahip merkezi farklar uygulanır. Fakat yöntemin koşulsuz kararsız olmasını engellemek için difüzyon terimindeki u_i^n yerine u_i^{n+1} ve u_i^{n-1} 'in ortalama değeri yazılır [19], [25]. Bu yöntem Richardson yönteminin modifiye edilmiş halidir. Sonuç olarak ayrıklaştırılmış denklem

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^{n-1}}{2\Delta t}=\alpha\frac{u_{i+1}^n-2\dfrac{u_i^{n+1}+u_i^{n-1}}{2}+u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{4.11}$$

veya

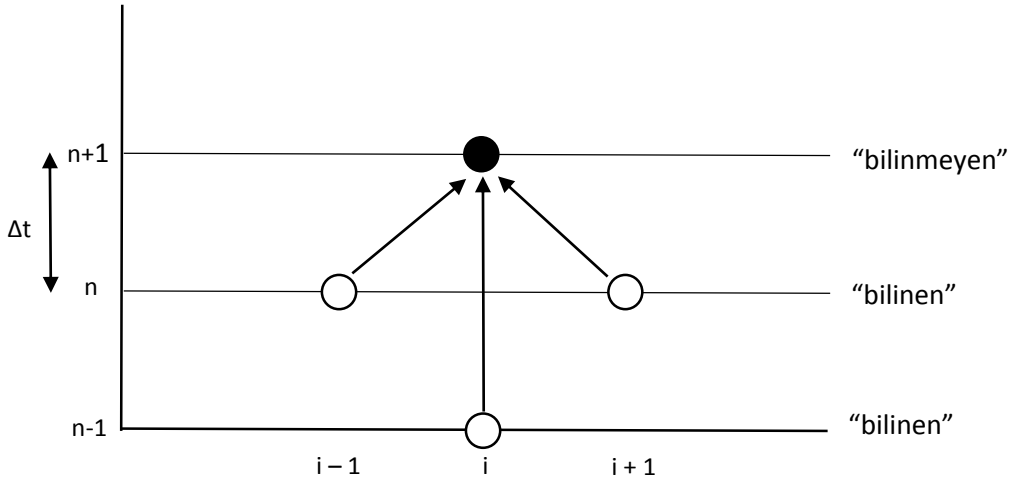
$$u_i^{n+1}=u_i^{n-1}+\frac{2\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2}[u_{i+1}^n-u_i^{n+1}-u_i^{n-1}+u_{i-1}^n] \tag{4.12}$$

şeklinde ifade edilir [18], [19], [25], [27]. Burada u_i^{n+1} terimi çekilerek yeniden düzenlendiğinde

$$\left[1+\frac{2\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2}\right]u_i^{n+1}=\left[1-2\frac{\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2}\right]u_i^{n-1}+\frac{2\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2}[u_{i+1}^n+u_{i-1}^n] \qquad (4.13)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t)^2,(\Delta x)^2,(\Delta t/\Delta x)^2]$ olmakla birlikte uygulanan yöntem koşulsuz kararlıdır [18], [19], [25], [27]. $(\Delta t/\Delta x)^2$ terimi kararlılık analizinin sonucu olarak hata terimine eklenmiştir.

DuFort–Frankel yöntemiyle hesaplamaya başlamak için n ve $n-1$ zaman adımlarındaki u_{i-1} ve u_{i+1} değerlerinin bilinmesi gereklidir. Burada iki önemli nokta vardır. Birincisi, bu yöntemle hesaplanan çözümün doğruluğu, başlangıç çözümünün doğruluğundan etkilenir. İkincisi, bilinmeyen adımdaki çözümler için iki adım öncesindeki çözümler gerektiğinden bilgi depolama gereksinimi artacaktır [19]. (4.13) denkleminin ağ noktaları Şekil 4.5'de gösterilmektedir.



Şekil 4. 5 DuFort–Frankel açık yöntemi için ağ noktaları

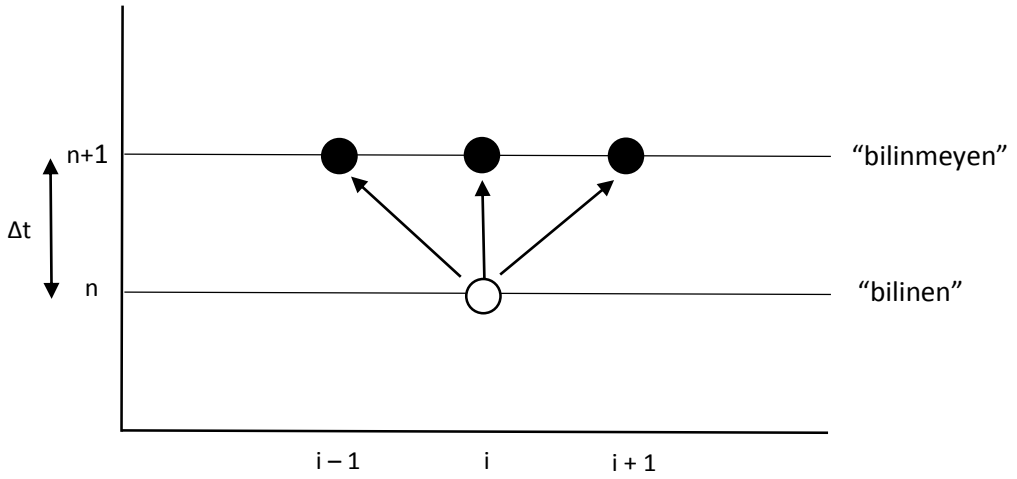
4.2 Kapalı Yöntemler

(4.1) denklemi ayrıklaştırıldığında elde edilen (4.5) ayrıklaştırılmış denkleminde birden fazla bilinmeyen olduğu için kapalı olarak adlandırılır. Kapalı yöntemler ayrıklaştırılmış denklemlerin kararlılığı üzerinde büyük avantaj sağlamaktadır. Çünkü birçoğu koşulsuz kararlıdır. Böylece, zaman için daha büyük adım uzunlukları kullanılmasına izin verilir. Fakat ayrıklaştırılmış denklemde zaman adım uzunluklarının arttırılması kesme hatasını arttırdığı için, daha büyük adım uzunluklarının seçilmesi sınırlandırılmıştır [19], [24].

4.2.1 Laasonen Yöntemi

(4.1) denkleminde zamana göre birinci mertebeden hataya sahip geri farklar ve konuma göre ikinci mertebeden hataya sahip merkezi farklar ile ayrıklaştırma yapıldığında (4.5) denklemi ve bu denklemden u_i^n terimi çekildiğinde (4.6) denklemi elde edilir [18], [19], [24].

Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t), (\Delta x)^2]$ olmakla birlikte uygulanan yöntem koşulsuz kararlıdır [18], [24]. Yöntemin tüm ileri zaman adımlarındaki ağ noktalarına uygulanması, bir grup doğrusal cebirsel denklemin oluşmasına neden olur. Bu denklemler üç-diyagonalli denklem sistemi ile çözülür. (4.18) denkleminin ağ noktaları Şekil 4.6'da gösterilmektedir.



Şekil 4. 6 Laasonen kapalı yöntemi için ağ noktaları

4.2.2 Crank–Nicolson Yöntemi

Bir önceki yöntemde olduğu gibi (4.1) denkleminde zamana göre birinci mertebeden hataya sahip geri farklar ve konuma göre ikinci mertebeden hataya sahip merkezi farklar uygulanır. Difüzyon terimi yerine, n ve $n+1$'inci zaman adımlarındaki ikinci mertebeden hataya sahip merkezi farkların ortalaması yazılır. Bu yöntem Laasonen yönteminin modifiye edilmiş halidir. Sonuç olarak ayrıklaştırılmış denklem

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\right] \qquad (4.19)$$

şeklinde yazılır [18], [19], [25], [26], [28]. Denklemin sol tarafı $\Delta t/2$'ye göre yeniden düzenlendiğinde

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)} \tag{4.20}$$

elde edilir. Açık yöntem kullanılırsa

$$\frac{u_i^{n+\frac{1}{2}} - u_i^n}{\frac{\Delta t}{2}} = \alpha \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{4.21}$$

veya

$$u_i^{n+\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2}\right) u_i^n + \frac{\alpha(\Delta t)}{2(\Delta x)^2}(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) \tag{4.22}$$

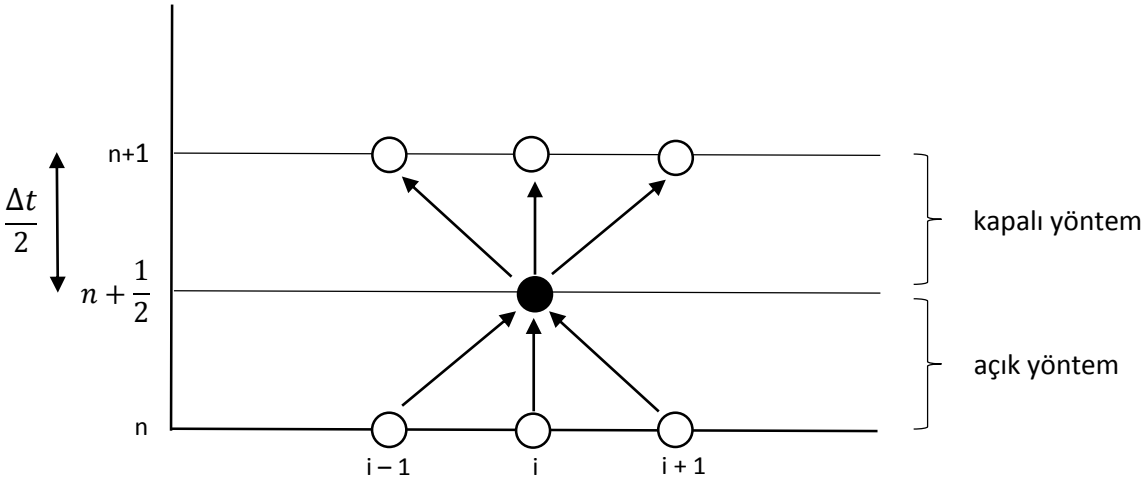
denklemi, kapalı yöntem kullanılırsa

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\Delta t}{2}} = \alpha \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \tag{4.23}$$

veya

$$u_i^{n+\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2}\right) u_i^{n+1} - \frac{\alpha(\Delta t)}{2(\Delta x)^2}(u_{i-1}^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}) \tag{4.24}$$

denklemi elde edilir [19]. (4.22) ve (4.24) denklemlerinin ağ noktaları Şekil 4.7'de gösterilmektedir.



Şekil 4. 7 Crank–Nicolson kapalı yöntemi için ağ noktaları

(4.21) ve (4.23) denklemleri toplandığında

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}=\frac{1}{2}\alpha\left[\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}+\frac{u_{i+1}^{n}-2u_i^{n}+u_{i-1}^{n}}{(\Delta x)^2}\right] \tag{4.25}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t)^2,(\Delta x)^2]$ olmakla birlikte uygulanan yöntem koşulsuz kararlıdır [18], [19], [21], [25], [27].

4.2.3 Beta Formülasyonu

Crank–Nicolson yöntemiyle elde edilen (4.19) ayrıklaştırılmış denklemi

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}=\alpha\left[\beta\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}+(1-\beta)\frac{u_{i+1}^{n}-2u_i^{n}+u_{i-1}^{n}}{(\Delta x)^2}\right] \tag{4.27}$$

şeklinde yazılabilir [18], [19], [27]. Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t),(\Delta x)^2]$'dir [18], [27].

$1/2\leq\beta\leq 1$ aralığında yöntem koşulsuz kararlıdır.

$0\leq\beta<1/2$ aralığında yöntem koşullu kararlıdır. Kararlı bir çözüm için $d\leq\frac{1}{2-4\beta}$ koşulunun sağlanması gerekir.

$\beta=0$ olduğunda FTCS açık yöntemi,

$\beta=1/2$ olduğunda Crank–Nicolson kapalı yöntemi,

$\beta=1$ olduğunda ise Laasonen kapalı yöntemi elde edilir.

4.3 Uygulama

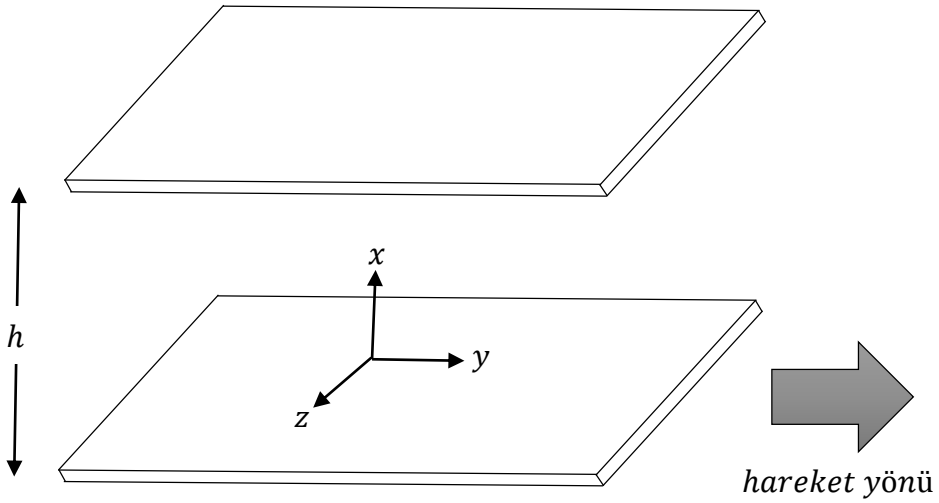
Difüzyon denklemine örnek olarak, sonsuza uzanan iki paralel levha ile sınırlandırılmış bir akışkanı ele alalım. Düzlemsel levhalar ve akışkan başlangıçta hareketsizken alttaki levhanın Şekil 4.8'de gösterildiği gibi aniden hareket ettiğini düşünelim.

yz – düzlemi: konumsal koordinat düzlemi (alt levha)

x: dikey eksen

h: iki levha arasındaki uzaklık

α: akışkanın kinematik viskozitesi olmak üzere



Şekil 4. 8 Problemin fiziksel gösterimi

(4.1) denklemi için başlangıç koşulları

$t = 0$ için (4.28)

$x = 0 \ , \ u = U_0$ (4.29)

$0 < x \leq h \ , \ u = 0$ (4.30)

olmakla birlikte sınır koşulları ise

$t \geq 0$ için (4.31)

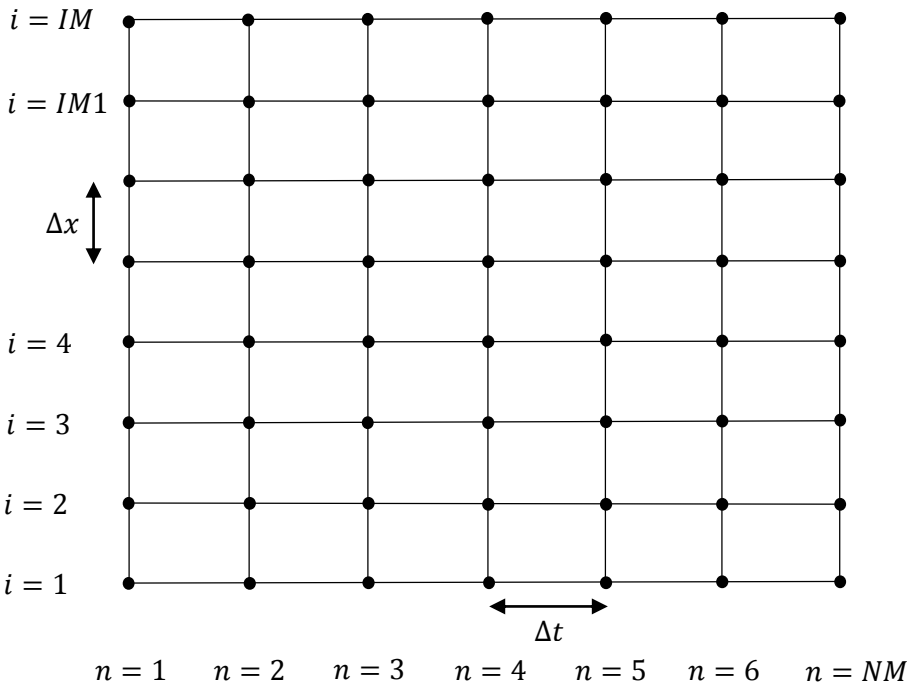
$u = U_0 \ , \ x = 0$ (4.32)

$u = 0 \ , \ x = h$ (4.33)

şeklindedir. Akışkan yağın kinematik viskozitesi $\alpha = 0.000217 \ m^2/s$, iki levha arasındaki uzaklık $h = 40 \ mm$ ve alt levhanın hızı $U_0 = 40 \ m/s$ olarak verilmiştir.

Bu problemde $\Delta x = 0.001 \ m$ seçilip, farklı zaman adımları kullanılarak açık ve kapalı bazı yöntemler karşılaştırılmıştır. Ayrıca kullanılan zaman adımlarının kararlılık ve doğruluk üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

IM ve NM sırasıyla x-ekseni ve zaman eksenindeki adım sayısını ifade etmektedir. En alt yüzey için $i = 1$, en üst yüzey için $i = 41$ ve $t = 0$ başlangıç koşulu için $n = 1$ kullanılır. Bu ağ sistemi Şekil 4.9'da gösterilmektedir.



Şekil 4. 9 Problemin ağ sistemi ile gösterimi

Bu problemi açık ve kapalı bazı yöntemlerle çözmek için seçilen başlangıç ve sınır koşulları aşağıdaki gibidir:

(a) FTCS kapalı yöntemi için

i. $\Delta t = 0.002 \quad , \quad NM = 541$

ii. $\Delta t = 0.00232 \, , \quad NM = 541$

(b) DuFort–Frankel açık yöntemi için

i. $\Delta t = 0.002 \quad , \quad NM = 541$

ii. $\Delta t = 0.003 \quad , \quad NM = 361$

(c) Laasonen kapalı yöntemi için

i. $\Delta t = 0.002 \quad , \quad NM = 541$

ii. $\Delta t = 0.01 \quad , \quad NM = 109$

(d) Crank–Nicolson kapalı yöntemi için

i. $\Delta t = 0.002 \quad , \quad NM = 541$

$\Delta t = 0.01 \quad , \quad NM = 109$

Çözüm:

(a) i. Daha önce belirtildiği gibi FTCS açık yönteminin kararlılık koşulu $\frac{\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2} \leq 1/2$ 'dir. Burada bahsedilen $\frac{\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2} = d$ difüzyon sayısıdır ve

$$d = \frac{\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2} = 0.000217\,\frac{(0.002)}{(0.001)^2} = 0.434 \tag{4.34}$$

şeklinde bulunur. Sonuç olarak kararlılık koşulu sağlandığından, kararlı bir çözüm elde edilmesi beklenir.

(a) ii. Zaman adımı $\Delta t = 0.00232$ seçildiğinde difüzyon sayısı

$$d = \frac{\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2} = 0.000217\,\frac{(0.00232)}{(0.001)^2} = 0.50344 \tag{4.35}$$

şeklinde olacağından kararlılık koşulu aşılır. Dolayısıyla bu zaman adımında kararsız bir çözüm elde edilir.

(b) ii.'de verilen değerler kullanılarak d değeri hesaplandığında

$$d = \frac{\alpha(\Delta t)}{(\Delta x)^2} = 0.000217\,\frac{(0.003)}{(0.001)^2} = 0.651 \tag{4.36}$$

bulunup, FTCS açık yöntemi için olan kararlılık koşulunun aşıldığı görülür. Fakat DuFort–Frankel açık yöntemi koşulsuz kararlı olduğundan dolayı kararlılık konusunda son derece iyi bir yöntemdir. Bunun sonucu olarak daha geniş zaman adımı ile çalışmaya olanak sağladığından daha kısa sürede çözüme ulaşılır. Ancak, zaman adımındaki artış kesme hatasını da arttıracağından dolayı geniş zaman adımı seçilirken dikkat edilmelidir. Bu yöntemin dezavantajı ise başlangıç için bilinmesi gereken değerlerin fazla olmasıdır.

(c) Laasonen kapalı yöntemi koşulsuz kararlıdır. Bu yüzden kesme hatası doğruluk kriteri içinde olduğu sürece geniş zaman adımları kullanılabilir. Bu problemde Laasonen yöntemi için seçilen zaman adımının $(\Delta t = 0.01)$ FTCS yöntemi için seçilen zaman adımından $(\Delta t = 0.002)$ beş kat daha büyük olduğu görülür.

Geniş zaman adımının seçilmesi toplamda kullanılan ağ noktası sayısını azaltarak işlem süresini kısaltmaktadır. Bununla birlikte her bir zaman adımındaki işlem süresi FTCS yöntemine göre daha uzundur. Çünkü elde edilen denklemlerin eş zamanlı olarak üç-diyagonalli sistem ile çözülmesi gerekir.

(d) Crank–Nicolson kapalı yöntemi koşulsuz kararlı olduğu için zaman adımının $\Delta t = 0.01$ seçilmesi durumunda herhangi bir kararlılık kısıtlaması ile karşılaşılmaz. Bu yöntem sonucunda üç-diyagonalli denklem sistemi elde edilir.

Analiz

Problemin analitik çözümü ile uygulanan yöntemler doğrultusunda elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak yapılan hata analizi Çizelge 4.1'de verilmiştir.

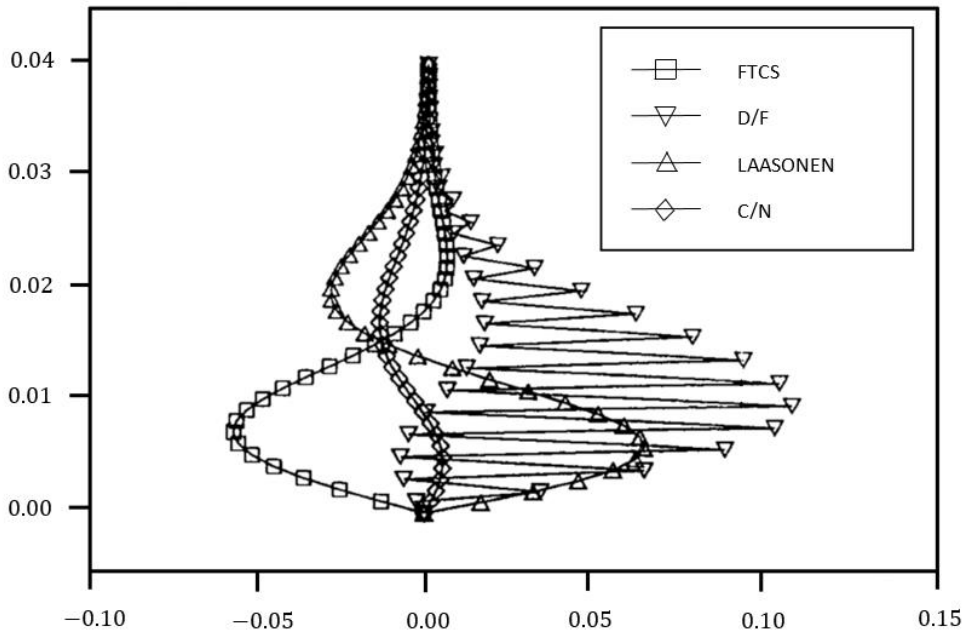
Burada hata terimi aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$HT = \left|\left(\frac{Analitik\ değer - Hesaplanan\ değer}{Analitik\ değer}\right) \times 100\right|$$

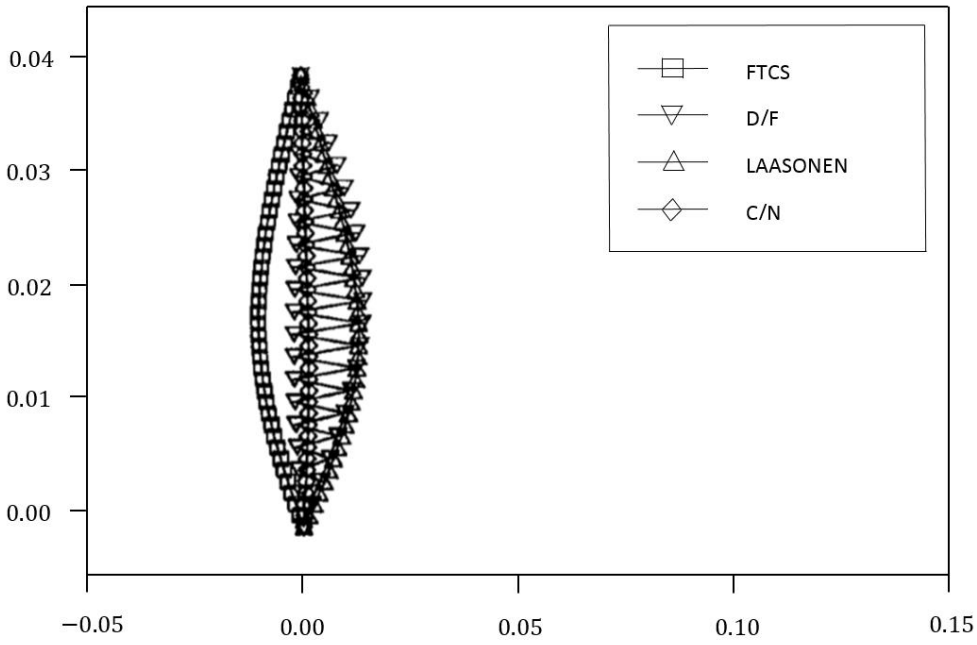
Çizelge 4. 1 Uygulanan farklı yöntemler için hata analizleri

Δt	Δx	$FTCS$	$DuFort - Frankel$	$Laasonen$	$Crank - Nicolson$
0.18	0.001	0.035717	0.021979	0.217050	0.002747
0.54	0.001	0.005274	0.002637	0.039560	0.002637
0.90	0.001	0.002605	0.002605	0.018236	0
0.18	0.002	0.076128	0.133987	0.462864	0
0.54	0.002	0.013950	0.022320	0.080910	0
0.90	0.002	0.005438	0.010877	0.038070	0
0.18	0.003	0.122565	0.068092	0.731989	0.003404
0.54	0.003	0.023679	0.014799	0.127275	0
0.90	0.003	0.011373	0.005686	0.059708	0
0.18	0.004	0.169003	0.334165	1.014019	0
0.54	0.004	0.028341	0.053534	0.179499	0.003149
0.90	0.004	0.014889	0.020845	0.080405	0

FTCS açık yöntemi için seçilen adım uzunluğu, kararlılık gereksinimine göre sınırlandırılmasına rağmen, DuFort–Frankel açık yöntemi, Laasonen kapalı yöntemi ve Crank–Nicolson kapalı yöntemi koşulsuz kararlıdır ve bu nedenle daha geniş zaman adımlarında kullanılabilir. Fakat zaman adım uzunluğunun büyümesi kesme hatasının büyümesine neden olur. Şekil 4.10 ve Şekil 4.11'de çeşitli yöntemlerin karşılaştırılması gösterilmektedir.



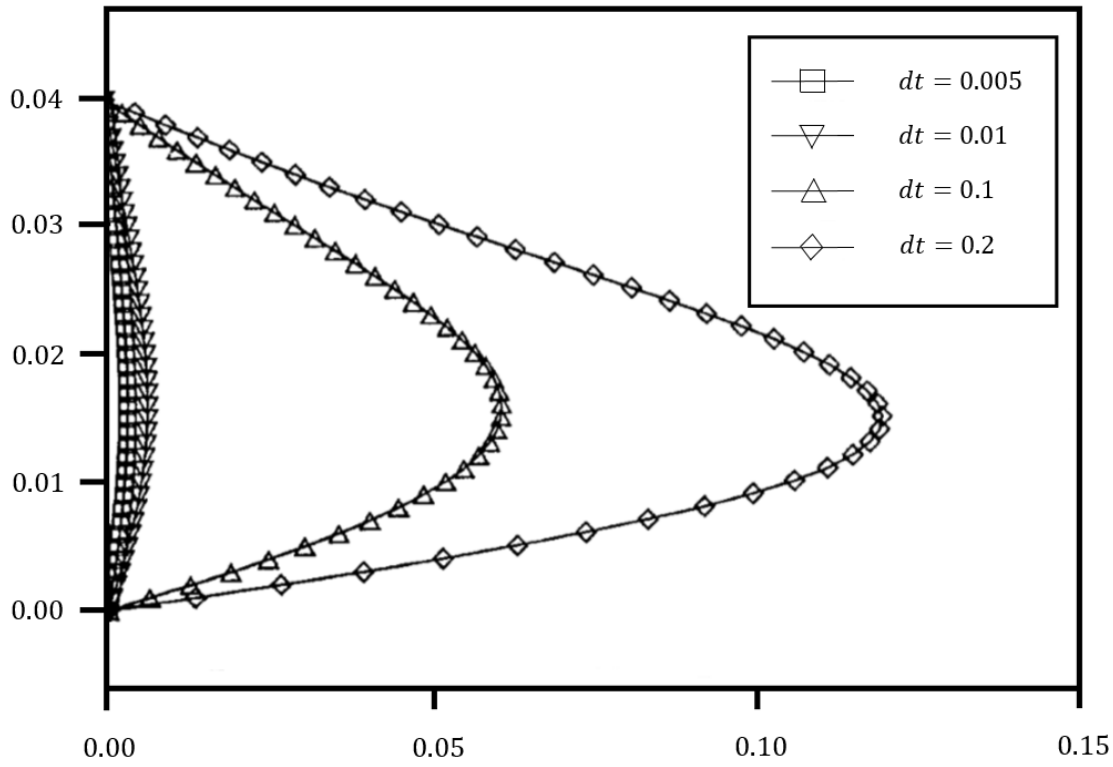
Şekil 4. 10 $t = 0.18$ anındaki hata dağılımlarının karşılaştırılması



Şekil 4. 11 $t = 1.08$ anındaki hata dağılımlarının karşılaştırılması

Yukarıdaki şekillerde açıkça görüldüğü üzere Crank–Nicolson yöntemi, uygulanan diğer yöntemlerle karşılaştırıldığında en az hataya sahip olan yöntemdir. Ayrıca zaman adımında ilerledikçe tüm yöntemlerde elde edilen hata miktarı küçülmektedir. Hatadaki bu küçülme, başlangıç koşulunun çözüm üzerindeki etkisi azaldığı içindir. Zaman veya konum adımındaki ilerleme başlangıç koşulunun etkisinin azalmasına yol açacaktır.

Zaman adım uzunluğunun çözümün doğruluğu üzerindeki etkisini araştırmak için Laasonen kapalı yöntemi kullanılmıştır. Zaman adım uzunluğu arttıkça çözüm bölgesindeki toplam ağ noktalarının sayısı azalacağından işlem süresi kısalmaktadır. Fakat bu avantajlar hata artışını beraberinde getirmektedir. Bu durum Şekil 4.12'de gösterilmektedir.



Şekil 4. 12 $t = 0.1$ anında Laasonen yöntemi üzerinde zaman adımlarının etkisi

Zaman adım uzunluğundaki artışın hata artışına neden olduğu yukarıdaki şekilde açıkça görülmektedir. Zaman adım uzunluğu daha küçük seçilirse bu durum önlenmiş olur. Çünkü işlem süresindeki aşırı artışa rağmen zaman adım uzunluklarının küçük seçilmesi yuvarlama hatalarını engelleyerek doğru bir çözüm elde edilmesini sağlayacaktır.

Bu problemde açık bir şekilde adım uzunluğunun seçimini etkileyen faktörler incelenmiştir. Her şeyden önce, kararlılık analizi sayısal yöntemlere bazı kısıtlamalar getirmektedir. Buna ek olarak çözümün doğruluğu ve işlem süresi de adım uzunluğu seçilirken göz önünde bulundurulması gereken etkenlerdir.

Elde edilen çözüm analitik ya da sayısal diğer sonuçlarla ve eğer ulaşılabiliyorsa deneysel verilerle karşılaştırılmalıdır. Sayısal yöntemler ve onların davranışlarını deneyimlemenin bir avantajı da doğru adım uzunlukları ve sayısal yöntemlerin seçimine yönelik tecrübe kazanılmasıdır.

Sayısal yöntemin seçimi, problemin sunduğu yönetici denklem ile birlikte başlangıç ve sınır koşullarına bağlıdır. Her bir yöntem kendi avantaj ve dezavantajına sahiptir. Problem belirlendiği zaman uygulanabilecek sayısal yöntemlerin avantajları ve dezavantajları dikkatli bir şekilde ölçülerek karar verilmelidir [19].

4.4 Özet

Bu kısımda anlatılan tüm açık ve kapalı yöntemlerin hata terimleri ve sonlu fark gösterimleri Çizelge 4.2 ve Çizelge 4.3'de özet olarak verilmiştir.

Çizelge 4. 2 Difüzyon denkleminde kullanılan açık yöntemler

Yöntem	Hata terimi	Sonlu Fark Gösterimi
FTCS	$O[(\Delta t),(\Delta x)^2]$	$u_i^{n+1} = u_i^n + d(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$
Richardson	$O[(\Delta t)^2,(\Delta x)^2]$	$(1-2d)u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - 2d(2u_i^n - u_{i-1}^n)$
DuFort-Frankel	$O[(\Delta t)^2,(\Delta x)^2,(\Delta t/\Delta x)^2]$	$u_i^{n+1} = (\frac{1-2d}{1+2d})u_i^{n-1} + (\frac{2d}{1+2d})(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)$

Çizelge 4. 3 Difüzyon denkleminde kullanılan kapalı yöntemler

Yöntem	Hata terimi	Sonlu Fark Gösterimi
Laasonen	$O[(\Delta t),(\Delta x)^2]$	$u_i^n = (1+2d)u_i^{n+1} - d(u_{i+1}^{n+1} + u_{i-1}^{n+1})$
Crank-Nicolson	$O[(\Delta t)^2,(\Delta x)^2]$	$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{d}{2}[(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)]$
Beta Formülü	$O[(\Delta t),(\Delta x)^2]$	$u_i^{n+1} = u_i^n + d\beta(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + d(1-\beta)(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$

BÖLÜM 5

ADVEKSİYON DENKLEMLERİ

Adveksiyon denklemi birinci mertebeden hiperbolik bir kısmi diferansiyel denklemdir. Bir boyutlu adveksiyon denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{5.1}$$

şeklinde ifade edilir. Burada β adveksiyon hızını belirtmektedir.

5.1 Açık Yöntemler

5.1.1 Upwind Yöntemi

(5.1) denkleminde zamana göre birinci mertebeden hataya sahip ileri farklar ve β değerine bağlı olarak konuma göre birinci mertebeden hataya sahip geri farklar veya birinci mertebeden hataya sahip ileri farklar uygulanarak ayrıklaştırma yapılır.

Adveksiyon hızı β 'ya bağlı olarak elde edilen iki farklı ayrıklaştırılmış denklem aşağıdaki gibidir:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\beta \left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \right) \qquad \beta > 0 \tag{5.2}$$

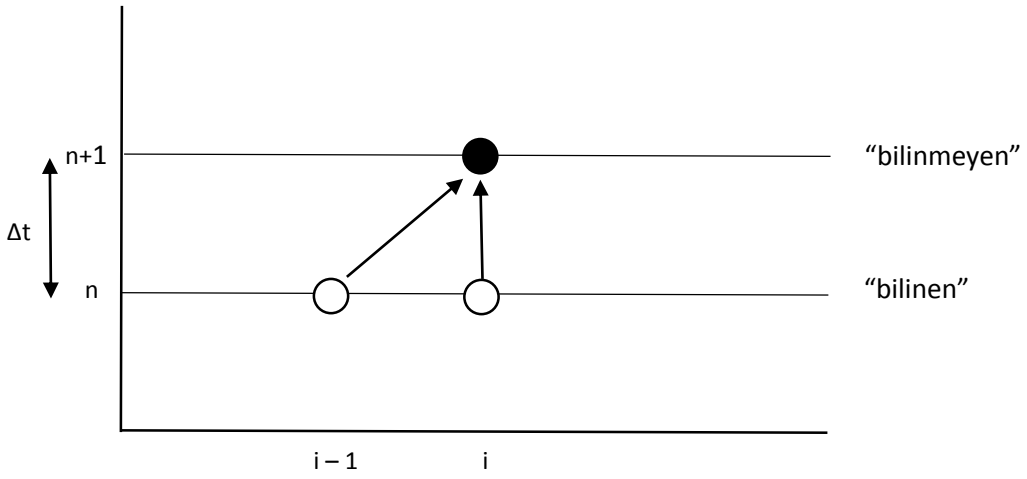
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\beta \left(\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} \right) \qquad \beta < 0 \tag{5.3}$$

Her iki denklemden de u_i^{n+1} terimleri çekildiğinde

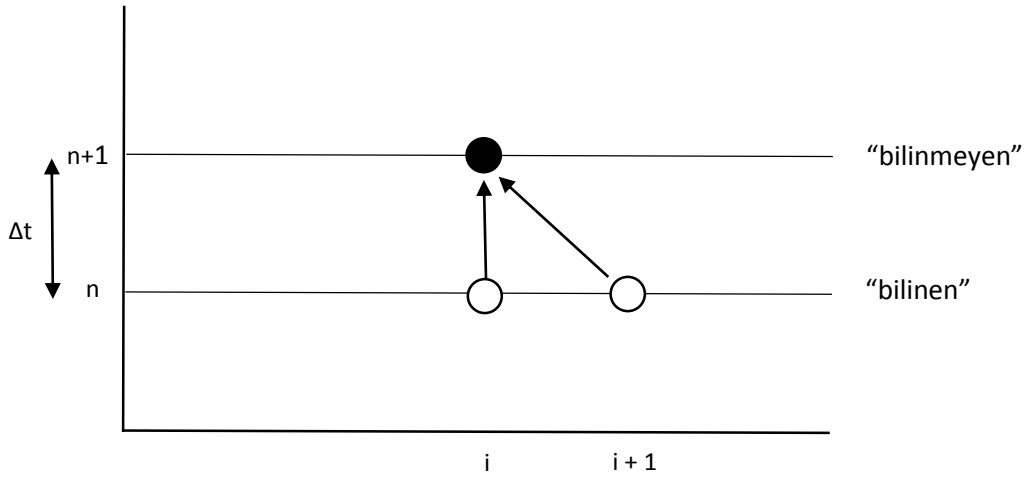
$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\beta \Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) \qquad \beta > 0 \tag{5.4}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\beta \Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_i^n) \qquad \beta < 0 \tag{5.5}$$

elde edilir [19], [24], [25], [26], [28]. Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t), (\Delta x)]$'dir. Uygulanan yöntemin kararlı olması için $\beta \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ koşulunun sağlanması gerekir [19], [24], [25], [28]. (5.4) ve (5.5) denklemlerinin ağ noktaları sırasıyla Şekil 5.1 ve Şekil 5.2'de gösterilmektedir [29].



Şekil 5. 1 $\beta > 0$ değerinde Upwind açık yöntemi için ağ noktaları



Şekil 5. 2 $\beta < 0$ değerinde Upwind açık yöntemi için ağ noktaları

Upwind yöntemi tek boyutta taşınıma sahip denklemlerde tatmin edici sonuçlar sağlamasına rağmen dalga denklemleri gibi daha genel durumlarda yetersiz kalmaktadır.

5.1.2 FTCS Yöntemi

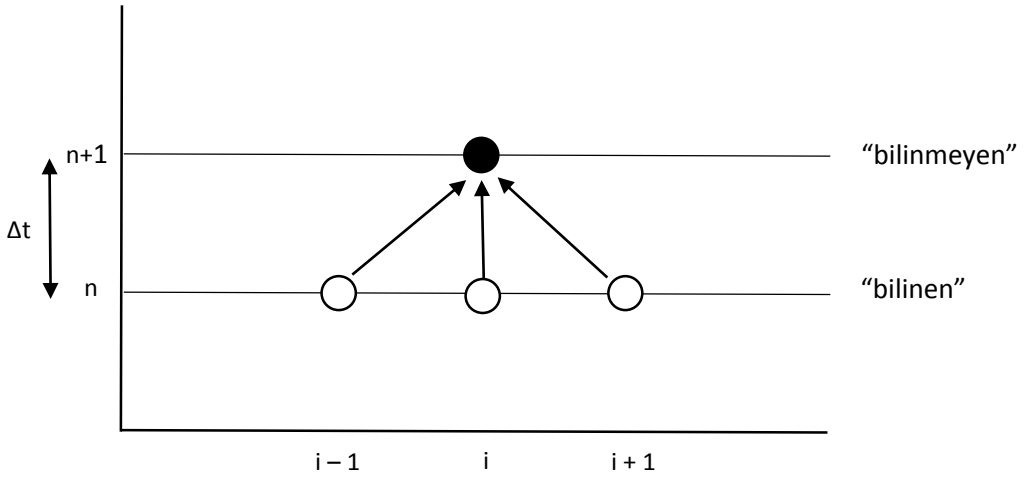
(5.1) denkleminde zamana göre birinci mertebeden hataya sahip ileri farklar ve konuma göre ikinci mertebeden hataya sahip merkezi farklar uygulanarak ayrıklaştırma yapıldığında

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\beta \left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) \tag{5.6}$$

veya

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\beta \Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \tag{5.7}$$

denklemi elde edilir [18], [19], [24], [25], [27]. Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t), (\Delta x)^2]$ olmakla birlikte Von Neumann kararlılık analizine göre uygulanan yöntem koşulsuz kararsızdır [18], [19], [25], [27]. (5.7) denkleminin ağ noktaları Şekil 5.3'de gösterilmektedir [29].



Şekil 5. 3 FTCS açık yöntemi için ağ noktaları

5.1.3 Lax–Friedrichs Yöntemi

FTCS yönteminin koşulsuz kararsız olması durumuna Lax ve Frienrichs tarafından bir çözüm önerilmiştir. Temel fikir çok basit olmakla birlikte yer değiştirmeye dayanmaktadır [25].

(5.6) denklemindeki u_i^n terimi yerine konumsal ortalaması, yani

$$u_i^n = \frac{(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)}{2} \tag{5.8}$$

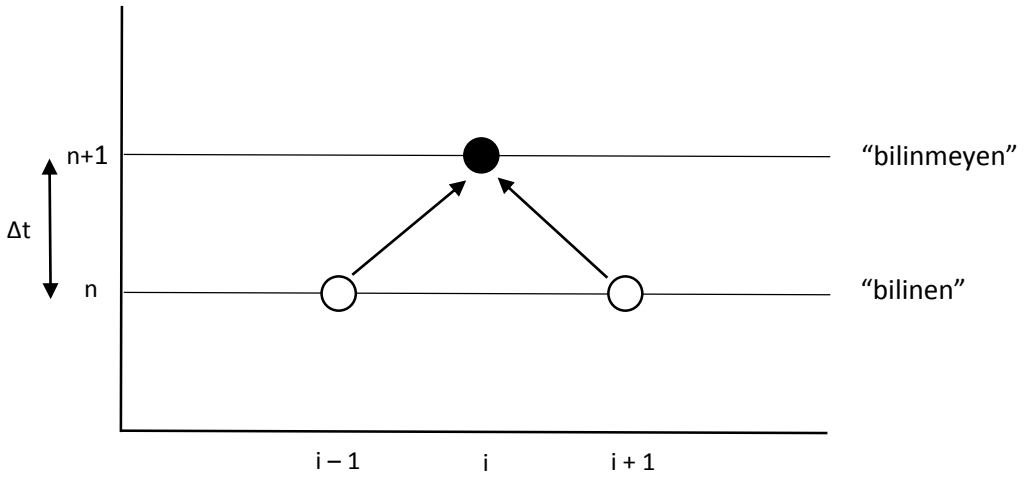
yazıldığında

$$\frac{u_i^{n+1} - (\frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2})}{\Delta t} = -\beta\left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}\right) \tag{5.9}$$

bulunur. Bu denklem u_i^{n+1} terimi çekilerek yeniden düzenlendiğinde

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{\beta\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \tag{5.10}$$

elde edilir [18], [19], [20], [25], [28]. Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t), (\Delta x)^2]$'dir [18], [25]. Uygulanan yöntemin kararlı olması için $\beta\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ koşulunun sağlanması gerekir [19], [20], [25], [28]. (5.10) denkleminin ağ noktaları Şekil 5.4'de gösterilmektedir [29].



Şekil 5. 4 Lax–Friedrichs açık yöntemi için ağ noktaları

5.1.4 Leapfrog Yöntemi

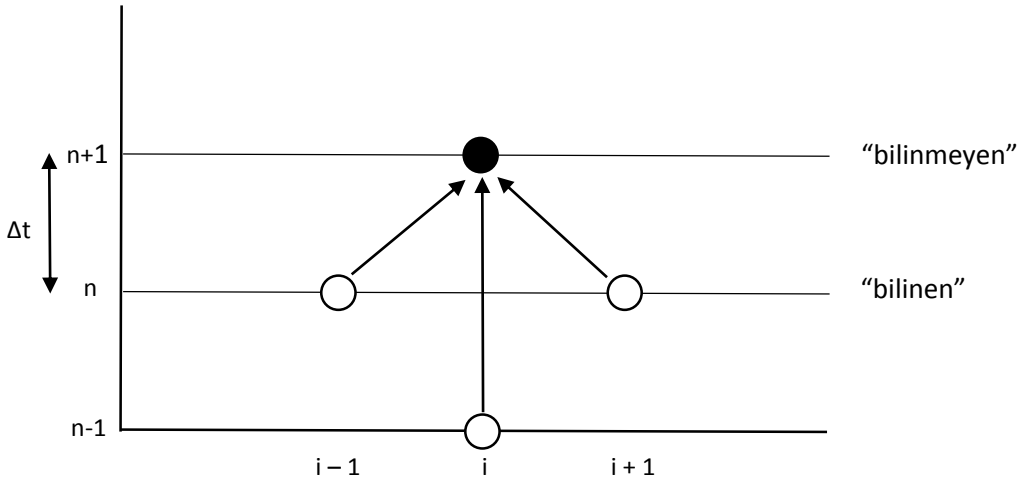
(5.1) denkleminde hem zaman hem de konuma göre ikinci mertebeden hataya sahip merkezi farklar uygulanarak ayrıklaştırma yapıldığında

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} = -\beta\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \tag{5.11}$$

veya

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - \frac{\beta\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \tag{5.12}$$

denklemi elde edilir [18], [19], [20], [24], [25], [26], [28]. Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$'dir [18], [24], [25]. Uygulanan yöntemin kararlı olması için $\beta \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ koşulunun sağlanması gerekir [18], [19], [20], [25]. (5.12) denkleminin ağ noktaları Şekil 5.5'de gösterilmektedir [29].



Şekil 5. 5 Leapfrog açık yöntemi için ağ noktaları

Şimdiye kadar anlatılanlardan farklı olarak Leapfrog yönteminde $n+1$ zaman adımındaki çözümü elde etmek için n ve $n-1$ olmak üzere iki ayrı zaman adımındaki başlangıç değerlerine ihtiyaç duyulmaktadır.

5.1.5 Lax–Wendroff Yöntemi

Bağımlı değişken u 'nun Taylor seri açılımı kullanılarak elde edilen sonlu fark gösterimi

$$u(x, t+\Delta t) = u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{(\Delta t)^2}{2!} + O(\Delta t)^3 \tag{5.13}$$

veya

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{(\Delta t)^2}{2!} + O(\Delta t)^3 \tag{5.14}$$

şeklindedir. (5.1) denkleminin zamana göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\beta \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\beta \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{5.15}$$

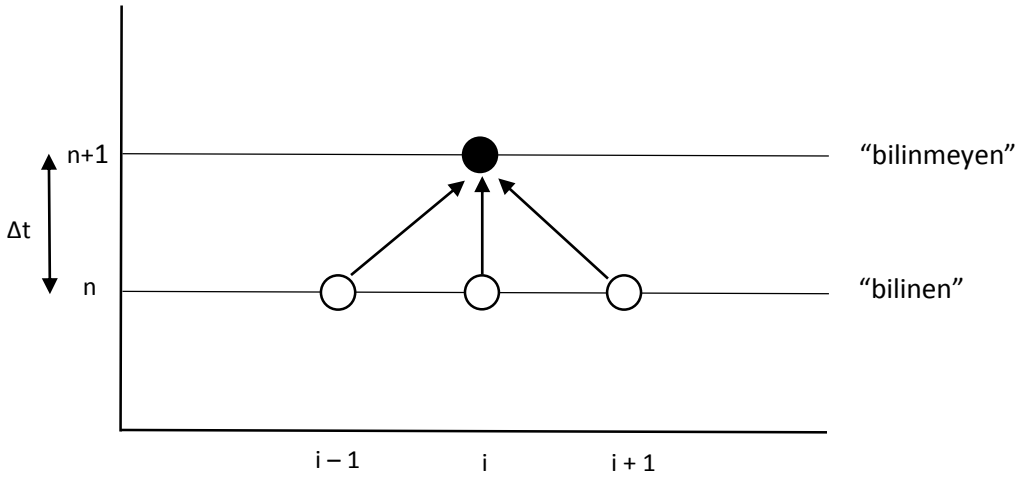
bulunur. (5.1) ve (5.15) ifadeleri (5.14) denkleminde yerine yazıldığında

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \left(-\beta \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2}\left(\beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \tag{5.16}$$

elde edilir [18], [19]. Bu denklemde konuma göre ikinci mertebeden hataya sahip merkezi farklar uygulanarak ayrıklaştırma yapıldığında

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\beta \Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{\beta^2 (\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \tag{5.17}$$

denklemi elde edilir [18], [19], [20], [21], [28]. Bu yöntem Lax–Wendroff yöntemi olarak adlandırılır ve hata terimi $O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$'dir [32]. Uygulanan yöntemin kararlı olması için $\beta \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ koşulunun sağlanması gerekir [18], [19], [20], [21], [25]. (5.17) denkleminin ağ noktaları Şekil 5.6'da gösterilmektedir [29].



Şekil 5. 6 Lax–Wendroff açık yöntemi için ağ noktaları

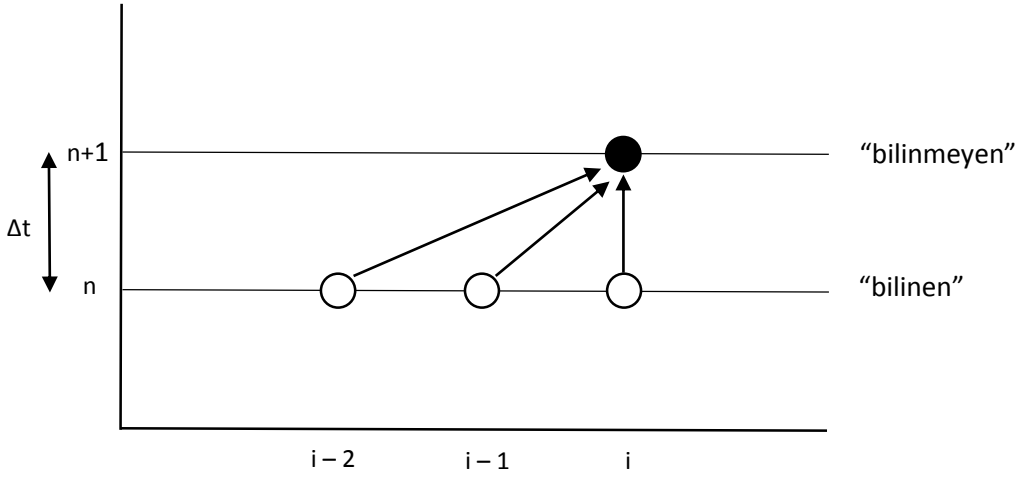
5.1.6 Beam–Warming Yöntemi

Bu yöntemde Upwind yöntemine benzer sonlu farklar kullanılarak ayrıklaştırma yapılacaktır. Fakat Upwind yöntemi birinci mertebeden doğruluğa sahipti. Lax–Wendroff yönteminden türetilen Beam–Warming yöntemi ise ikinci mertebeden doğruluğa sahiptir.

$\beta > 0$ için (5.1) denkleminde zamana göre birinci mertebeden hataya sahip ileri farklar, $\partial u/\partial x$ konum türevinde ikinci mertebeden hataya sahip geri farklar ve $\partial^2 u/\partial x^2$ konum türevinde birinci mertebeden hataya sahip geri farklar uygulanarak ayrıklaştırma yapıldığında

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\beta \Delta t}{2\Delta x}(3u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n) + \frac{\beta^2 (\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2}(u_i^n - 2u_{i-1}^n + u_{i-2}^n) \qquad (5.18)$$

denklemi elde edilir [26], [28]. Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t), (\Delta x)^2]$'dir. Uygulanan yöntemin kararlı olması için $\beta \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 2$ koşulunun sağlanması gerekir [26], [28]. (5.18) denkleminin ağ noktaları Şekil 5.7'de gösterilmektedir.

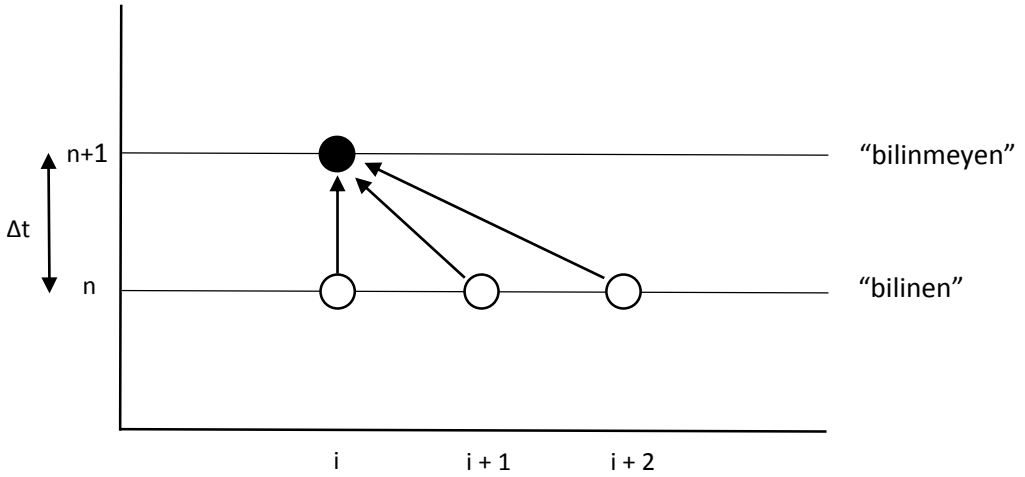


Şekil 5. 7 $\beta > 0$ değerinde Beam–Warming açık yöntemi için ağ noktaları

$\beta < 0$ için (5.1) denkleminde zamana göre birinci mertebeden hataya sahip ileri farklar, $\partial u/\partial x$ konum türevinde ikinci mertebeden hataya sahip ileri farklar ve $\partial^2 u/\partial x^2$ konum türevinde birinci mertebeden hataya sahip ileri farklar uygulanarak ayrıklaştırma yapıldığında

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\beta \Delta t}{2\Delta x}(-3u_i^n + 4u_{i+1}^n - u_{i+2}^n) + \frac{\beta^2 (\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2}(u_i^n - 2u_{i+1}^n + u_{i+2}^n) \qquad (5.19)$$

denklemi elde edilir [26], [28]. Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t), (\Delta x)^2]$'dir. Uygulanan yöntemin kararlı olması için $\beta \frac{\Delta t}{\Delta x} \geq -2$ koşulunun sağlanması gerekir [26], [28]. (5.19) denkleminin ağ noktaları Şekil 5.8'de gösterilmektedir.



Şekil 5. 8 $\beta < 0$ değerinde Beam–Warming açık yöntemi için ağ noktaları

5.2 Kapalı Yöntemler

5.2.1 Euler BTCS Yöntemi

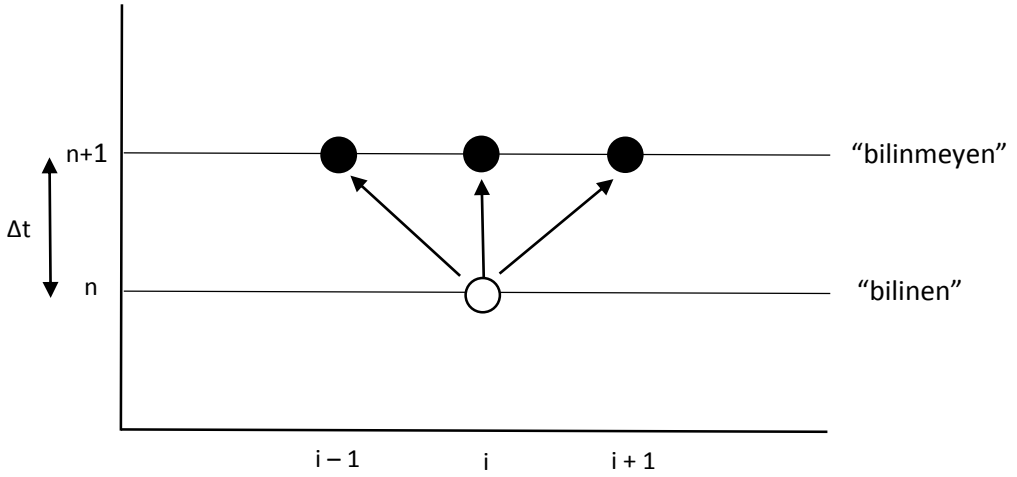
(5.1) denkleminde zamana göre birinci mertebeden hataya sahip geri farklar ve konuma göre ikinci mertebeden hataya sahip merkezi farklar uygulanarak ayrıklaştırma yapıldığında

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\beta \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \tag{5.20}$$

veya

$$u_i^n = u_i^{n+1} + \frac{\beta \Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) \tag{5.21}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t), (\Delta x)^2]$ olmakla birlikte uygulanan yöntem koşulsuz kararlıdır [18], [19]. (5.21) denkleminin ağ noktaları Şekil 5.9'da gösterilmektedir.



Şekil 5. 9 Euler BTCS kapalı yöntemi için ağ noktaları

5.2.2 Upwind Yöntemi

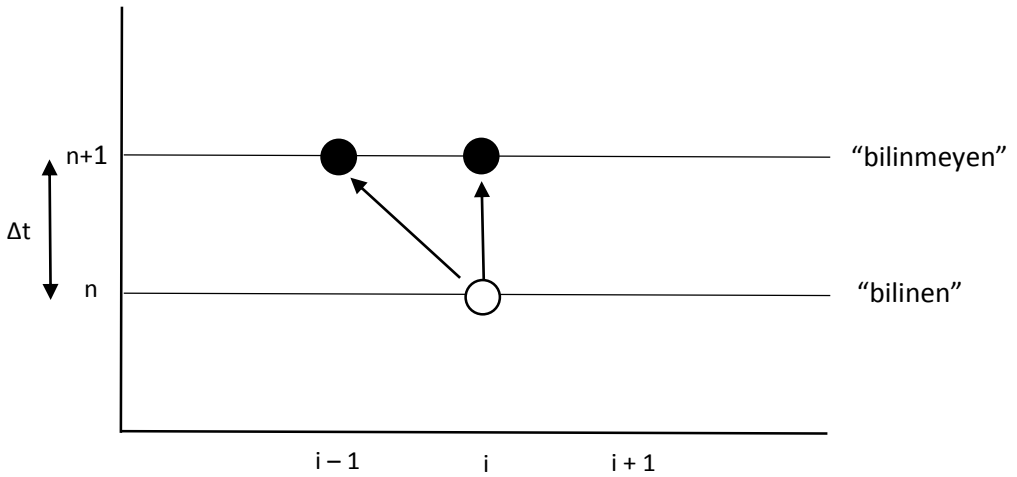
(5.1) denkleminde hem zaman hem de konuma göre birinci mertebeden hataya sahip geri farklar uygulanarak ayrıklaştırma yapıldığında

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\beta \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} \tag{5.22}$$

veya

$$u_i^n = (1 + \frac{\beta \Delta t}{\Delta x}) u_i^{n+1} - \frac{\beta \Delta t}{\Delta x} u_{i-1}^{n+1} \tag{5.23}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t), (\Delta x)]$'dir [19]. (5.23) denkleminin ağ noktaları Şekil 5.10'da gösterilmektedir.



Şekil 5. 10 Upwind kapalı yöntemi için ağ noktaları

Bu denklemde Courant sayısı $\left(c = \beta \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)$ yerine yazıldığında

$$cu_{i-1}^{n+1} - (1+c)u_i^{n+1} = -u_i^n \tag{5.24}$$

bulunur. (5.24) denklemi tüm ağ noktalarına uygulandığında iki-diyagonalli sistem elde edilir. İki-diyagonalli bir sistemin standart gösterimi

$$A_i u_{i-1}^{n+1} + B_i u_i^{n+1} = D_i \tag{5.25}$$

şeklinde olup, çözümü

$$u_i^{n+1} = \frac{D_i - A_i u_{i-1}^{n+1}}{B_i} \tag{5.26}$$

şeklindedir [19].

5.2.3 Crank–Nicolson Yöntemi

(5.1) denkleminde zamana göre birinci mertebeden hataya sahip geri farklar ve konuma göre n ve $n+1$ zaman adımlarındaki ikinci mertebeden hataya sahip merkezi farkların ortalaması yazılarak ayrıklaştırma yapıldığında

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\beta \frac{1}{2}\left[\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}\right] \tag{5.27}$$

veya

$$u_i^n = u_i^{n+1} + \frac{\beta \Delta t}{4\Delta x}[u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} + u_{i+1}^n - u_{i-1}^n] \tag{5.28}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2]$'dir [18], [19], [25]. Uygulanan yöntem koşulsuz kararlıdır [18], [21].

5.3 Uygulama

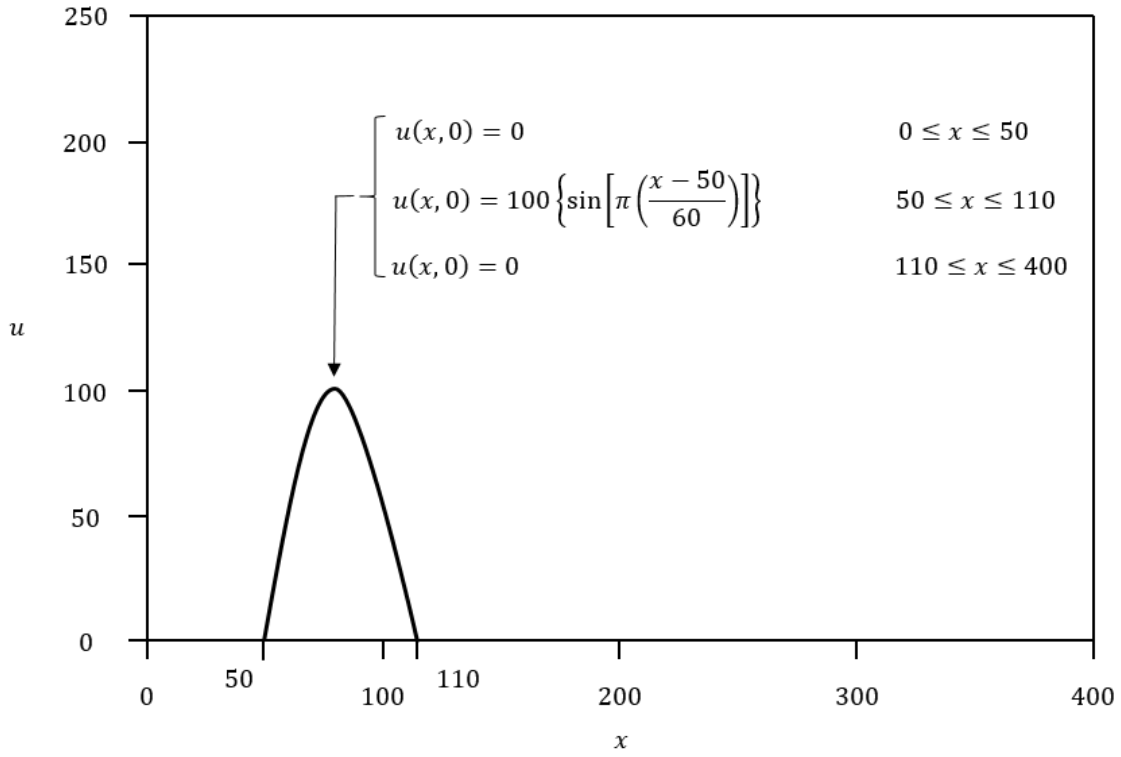
Örnek olarak (5.1) denklemini ele alalım. Burada β ses hızıdır ve $250\,m/s$ olarak seçilmiştir. $t = 0$ anında yarım sinüs eğrisi şeklinde bir bozunum meydana geldiğini varsayalım. Başlangıç koşulları

$$u(x,0) = 0 \qquad 0 \le x \le 50 \qquad (5.29)$$

$$u(x,0) = 100\left\{\sin\left[\pi\left(\frac{x-50}{60}\right)\right]\right\} \qquad 50 \le x \le 110 \qquad (5.30)$$

$$u(x,0) = 0 \qquad 110 \le x \le 400 \qquad (5.31)$$

olarak seçildiğinde elde edilen bozunum Şekil 5.11'de gösterilmektedir.



Şekil 5. 11 $t = 0$ anında başlangıç koşulları

Bu bozunumun iki ucu da kapalı olan tek boyutlu uzun bir tüp içine yerleştirildiğini varsayalım. Bu durumda sınır koşulları

$$x = 0 \qquad u(0,t) = 0 \qquad (5.32)$$

$$x = L \qquad u(L,t) = 0 \qquad (5.33)$$

şeklindedir. Problemin basitliği nedeniyle, bu bölümde anlatılan yöntemlerin sadece birkaç tanesi incelenecektir. Bununla birlikte seçilen yöntemlerin her biri ile ilişkili hata analizleri yapılacaktır.

Birinci mertebeden açık Upwind yöntemi ile başlayalım. (5.1) denkleminde zamana göre birinci mertebeden hataya sahip ileri farklar ve konuma göre birinci mertebeden hataya sahip geri farklar uygulanarak ayrıklaştırma yapıldığında

$$u_i^{n+1} = u_i^n - c(u_i^n - u_{i-1}^n) \tag{5.34}$$

Denklemi elde edilir. Burada $\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x}$ yerine yazılan Courant sayısıdır. Kararlı bir çözüm için $c \leq 1$ olmalıdır. (5.34) denkleminde $c = 1$ yazıldığında

$$u_i^{n+1} = u_{i-1}^n \tag{5.35}$$

ifadesi elde edilir. Farklı adım uzunluklarının çözüm üzerindeki etkisi araştırmak için Courant sayısının üç farklı değeri kullanılmıştır. Bu değerler aşağıdaki gibidir:

$$(1) \quad \Delta x = 5.0\,, \quad \Delta t = 0.02\,, \quad c = 1 \tag{5.36}$$

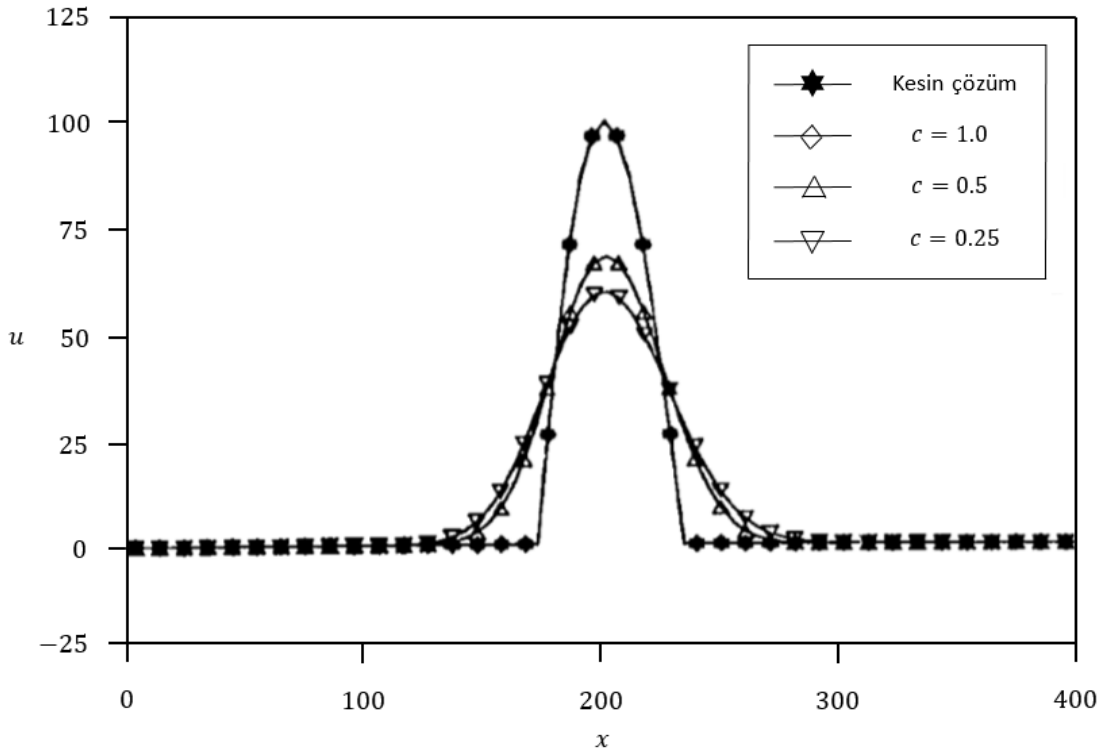
$$(2) \quad \Delta x = 5.0\,, \quad \Delta t = 0.01\,, \quad c = 0.5 \tag{5.37}$$

$$(3) \quad \Delta x = 5.0\,, \quad \Delta t = 0.005\,, \quad c = 0.25 \tag{5.38}$$

Çözümün analizine geçmeden önce birinci mertebeden doğruluğa sahip yöntemlerde, Taylor seri açılımında ikinci ve daha yüksek mertebeden terimler atılarak hatanın elde edildiğini hatırlayalım. Bu hatalar adım uzunluklarına bağlıdır ve çözümün doğruluğunu etkiler.

$c = 1$ değerinde çözüm karakteristik çizgi boyunca yayılır. Bu da çözümün minimum hata ile yayıldığını gösterir. $c = 1$ değeri çözümün tam doğru değeri olduğu için bu şaşırtıcı değildir.

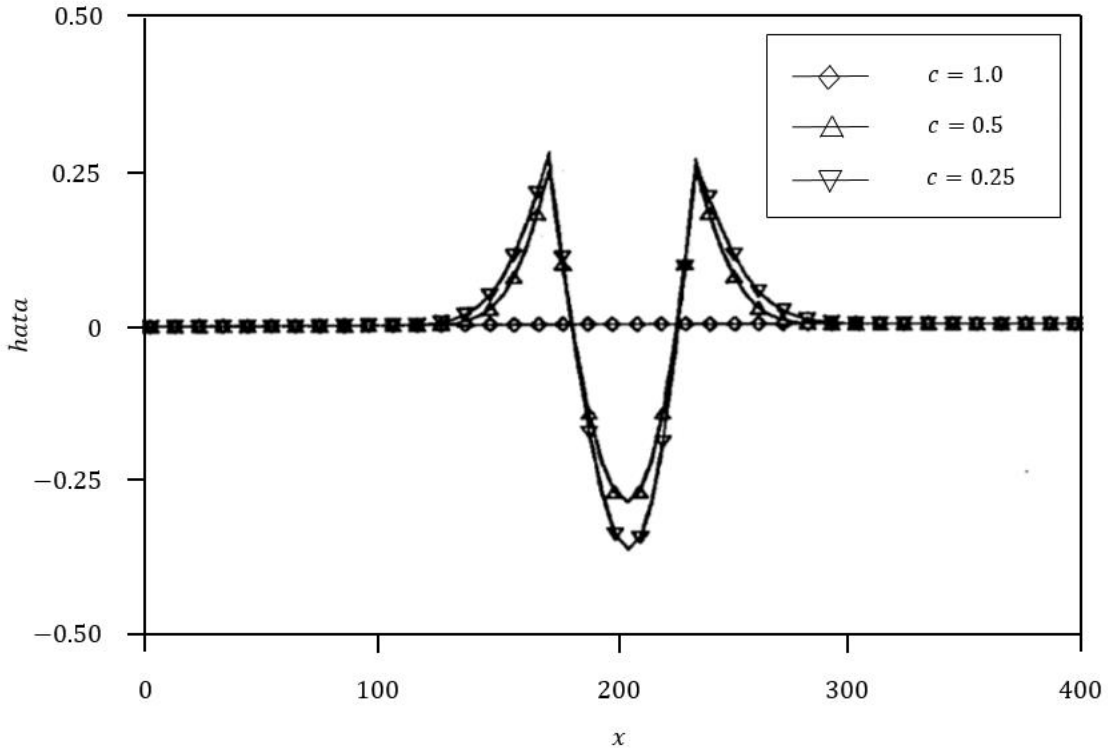
Bununla birlikte $c < 1$ olduğunda Δt adım uzunluğu azalır. Yöntemin yayılma hatası nedeniyle sinüs eğrisi şeklindeki orijinal fonksiyonun genliği azalır ve çözüm komşu noktalara yayılır. $t = 0.5$ anında farklı c değerlerinin çözüm üzerindeki etkisi Şekil 5.12'de gösterilmektedir.



Şekil 5. 12 $t = 0.5$ anında açık Upwind yönteminin çözümleri

Şekilde görüldüğü üzere Courant sayısı azaldıkça hata artmaktadır. Buna kanıt olarak genlikteki azalma ve çözümün komşu noktalar üzerine yayılması gösterilebilir.

$c = 1$ olduğunda yani kararlılık koşuluna göre en büyük değeri aldığında, çözüm için en iyi sonuç elde edilir. $t = 0.5$ anında üç farklı c değeri için olan hata dağılımları Şekil 5.13'de gösterilmektedir. Burada hata, analitik ve sayısal çözümler arasındaki fark olarak tanımlanmıştır.

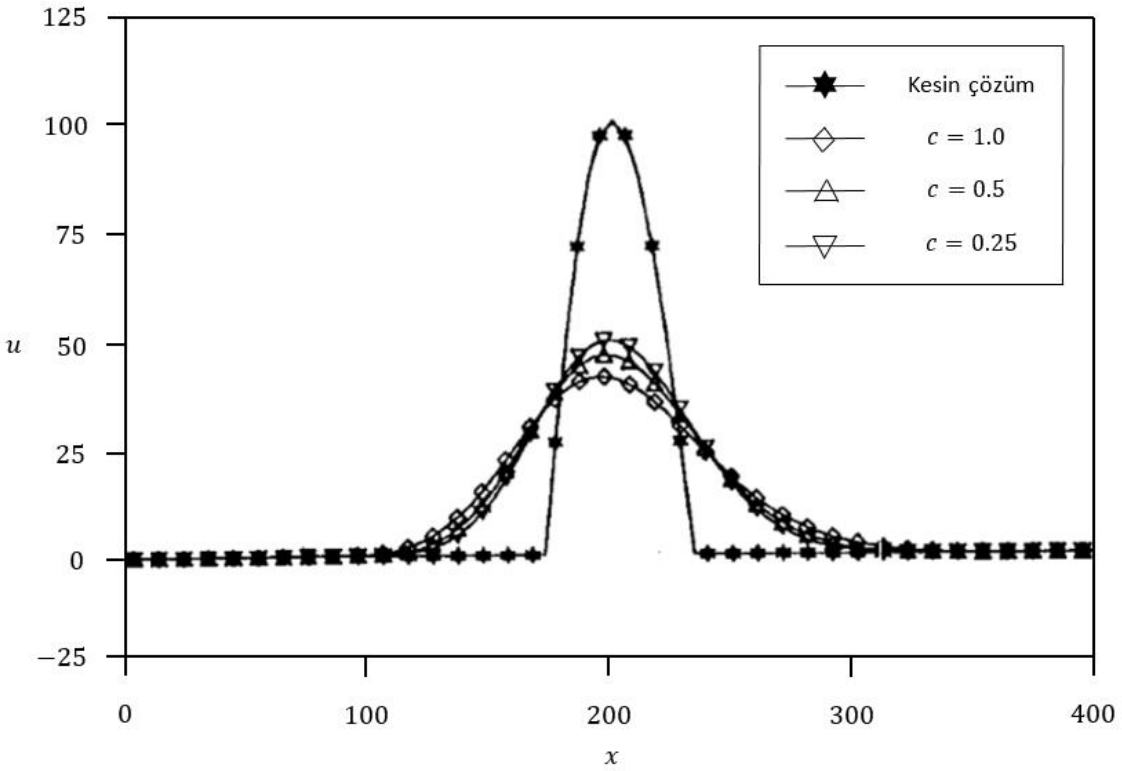


Şekil 5. 13 $t = 0.5$ anında açık Upwind yönteminin hata dağılımı

(5.34) denkleminin kapalı formdaki eşdeğer denklemi olan

$$u_i^n = (1 + c)u_i^{n+1} - cu_{i-1}^{n+1} \tag{5.39}$$

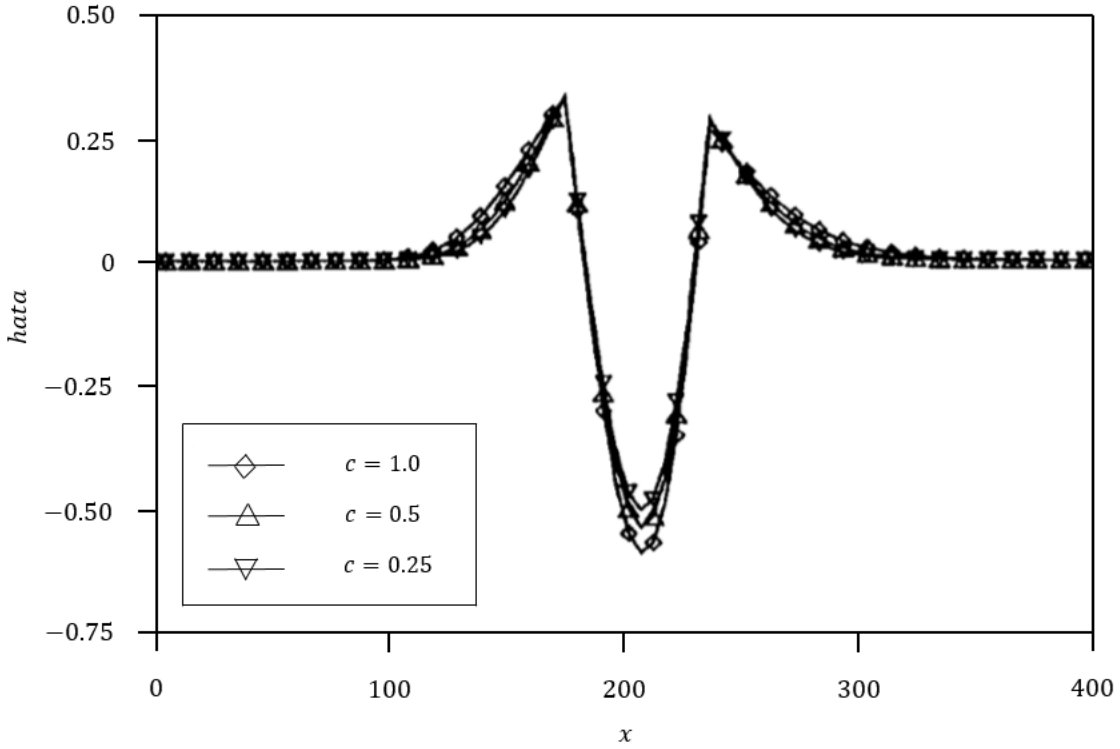
denklemini ele alalım. Bu noktada her iki denklemin de aynı dereceden doğruluğa $[O(\Delta t, \Delta x)]$ sahip olduğunun farkına varmak önemlidir. Fakat kapalı Upwind yöntemi, açık Upwind yöntemine göre daha fazla yayılma hatasına sahiptir. $t = 0.5$ anında farklı c değerlerinin çözüm üzerindeki etkisi Şekil 5.14'de gösterilmektedir.



Şekil 5. 14 $t = 0.5$ anında kapalı Upwind yönteminin çözümleri

Açık Upwind yöntemi ile karşılaştırıldığında, kapalı Upwind yönteminin daha büyük yayılma hatasına sahip olduğu görülür.

$c = 1$ değerinde bile çözümün kayda değer ölçüde yayılma hatasına sahip olduğuna dikkat edilmelidir. $t = 0.5$ anında üç farklı c değeri için olan hata dağılımları Şekil 5.15'de gösterilmektedir.

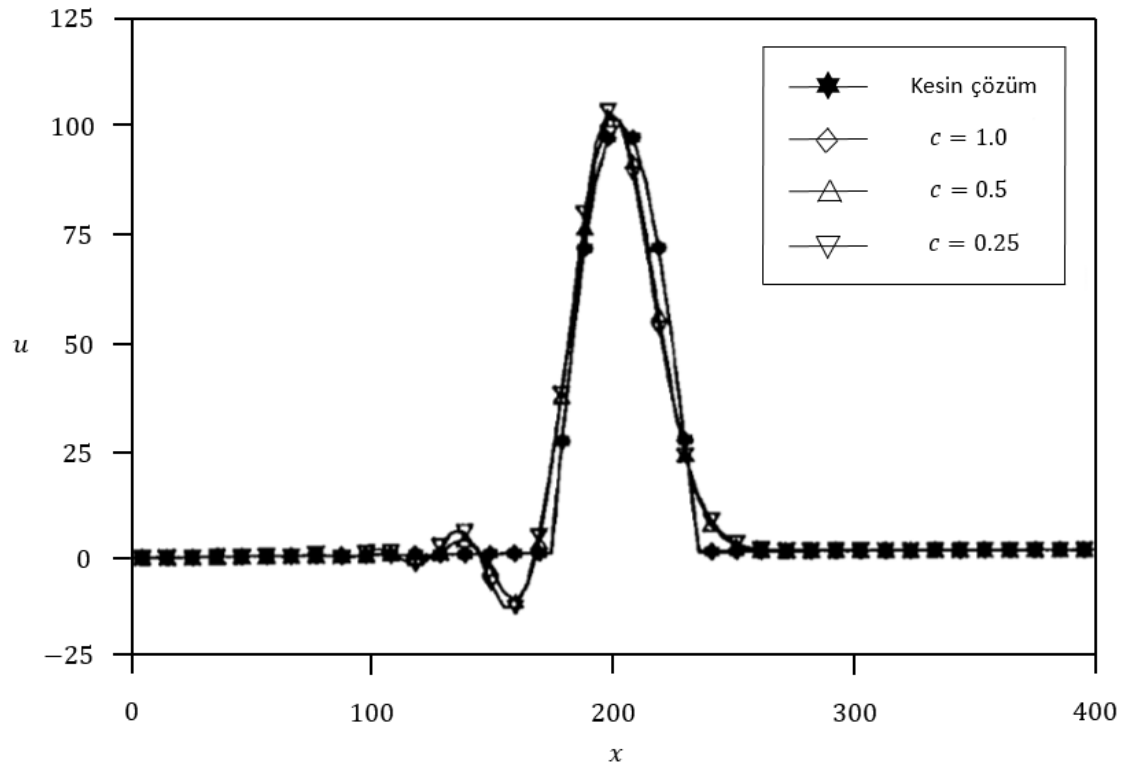


Şekil 5. 15 $t = 0.5$ anında kapalı Upwind yönteminin hata dağılımı

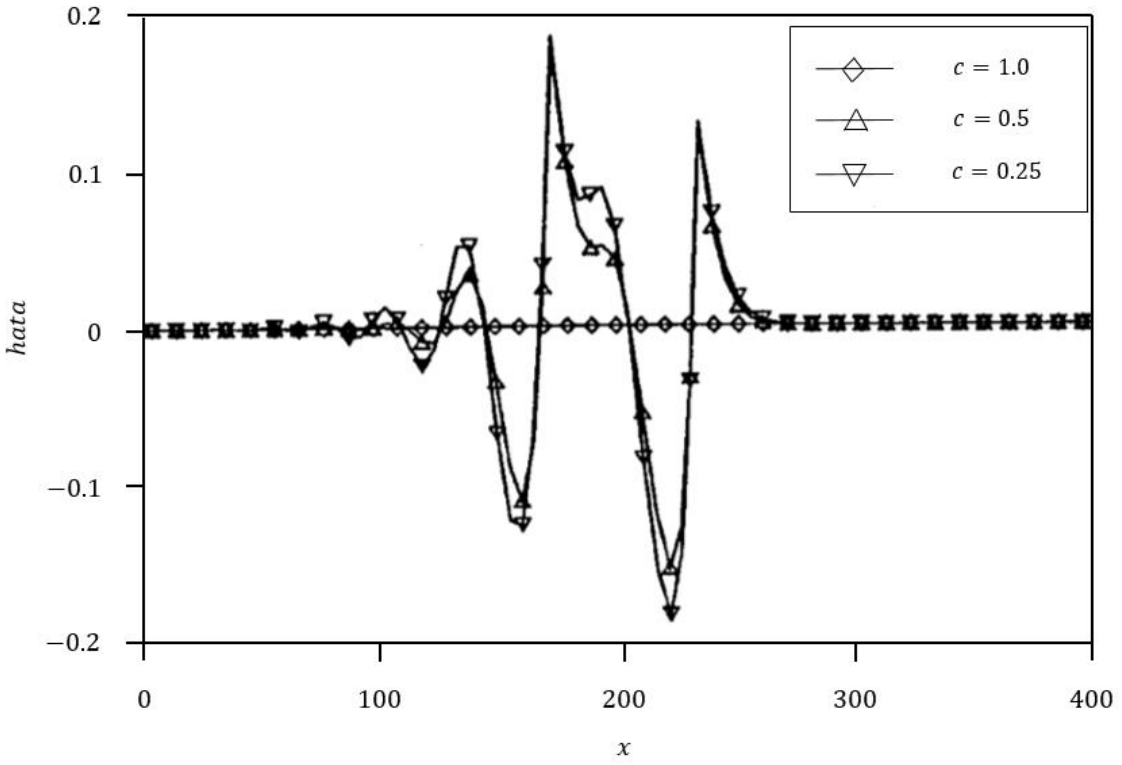
Şimdi, (5.1) denklemine uygulanan ikinci mertebeden doğruluğa sahip Lax – Wendroff yöntemini inceleyelim. Bu yöntemin ayrıklaştırılmış denklemi

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2}c(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{1}{2}c^2(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \qquad (5.40)$$

şeklinde olup kararlılık koşulu $c \leq 1$ 'dir. Yine farklı adım uzunluklarında üç durum incelenecektir. $t = 0.5$ anında üç farklı c değerinin çözüm üzerindeki etkisi Şekil 5.16'da ve bu değerler için olan hata dağılımları Şekil 5.17'de gösterilmektedir.



Şekil 5. 16 t $= 0.5$ anında Lax–Wendroff açık yönteminin çözümleri



Şekil 5. 17 $t = 0.5$ anında Lax–Wendroff açık yönteminin hata dağılımı

Bu yöntem uygulandığında çözümün davranışının farklı olacağı dikkate alınmalıdır. Çünkü ikinci mertebeden doğruluğa sahip bir yöntemde, Taylor seri açılımındaki üçüncü ve daha yüksek mertebeden terimler atılarak hata elde edilir. Gerçekten de Şekil 5.17'de Courant sayısının küçük değerlerinde çözümün salınımlı bir davranış sergilediği açıkça görülmektedir. Ayrıca küçük hatalar içerisinde çözümün genliğinin aynı kaldığına dikkat edilmelidir.

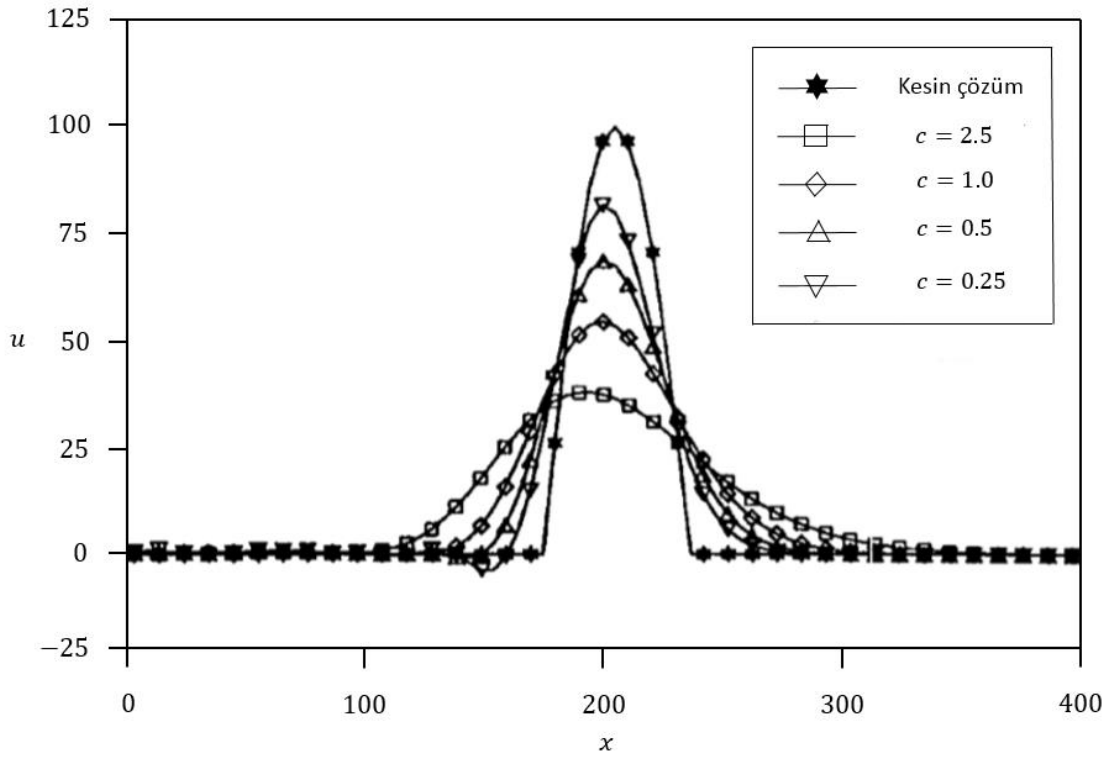
Yine Courant sayısının kararlılık koşuluna göre en büyük değerinde yani $c = 1$, en küçük hataya sahip olunur. Böylece, en iyi sonuç elde edilmiş olur. Bu basit uygulama kararlılık analizi bölümünde anlatılan hata yayılımı ve dağılımını açıkça göstermektedir.

Son olarak Euler BTCS kapalı yöntemini inceleyelim. (5.1) denkleminde zamana göre birinci mertebeden hataya sahip geri farklar ve konuma göre ikinci mertebeden hataya sahip geri farklar uygulanarak ayrıklaştırma yapıldığında

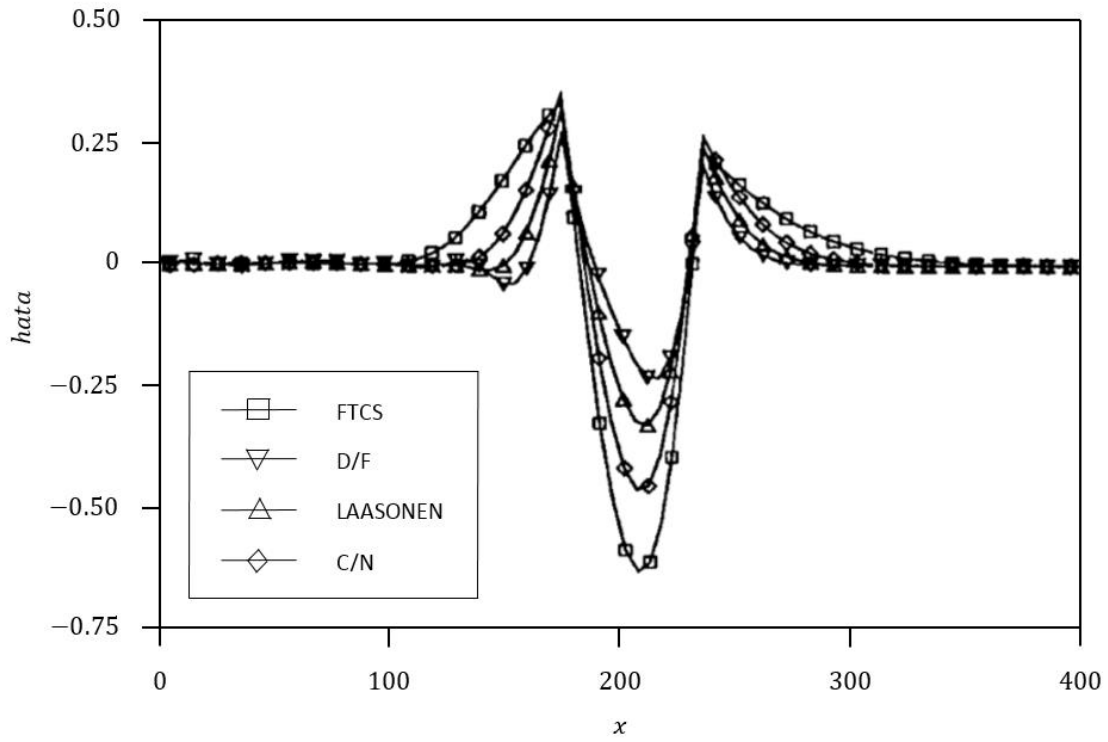
$$\frac{1}{2}cu_{i-1}^{n+1} - u_i^{n+1} - \frac{1}{2}cu_{i+1}^{n+1} = -u_i^n \qquad (5.42)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem her bir zaman adımındaki tüm i noktalarına uygulandığında üç-diyoganalli denklem sistemi elde edilir.

$t = 0.5$ anında farklı c değerlerinin çözüm üzerindeki etkisi Şekil 5.18'de ve bu değerler için olan hata dağılımları Şekil 5.19'da gösterilmektedir.



Şekil 5. 18 $t = 0.5$ anında Euler BTCS kapalı yönteminin çözümleri



Şekil 5. 19 $t = 0.5$ anında Euler BTCS kapalı yönteminin hata dağılımı

Kullanılan c değeri arttıkça hatanın büyüdüğü açıkça görülmektedir. Bunun sonucu olarak daha az sınırlayıcı kararlılık gereksinimlerine sahip olan kapalı yöntemlere, bazı uygulamalarda şüpheyle yaklaşılır [19].

5.4 Özet

Bu kısımda anlatılan tüm açık ve kapalı yöntemlerin hata terimleri ve sonlu fark gösterimleri Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2'de özet olarak verilmiştir.

Çizelge 5. 1 Adveksiyon denkleminde kullanılan açık yöntemler

Yöntem	Hata terimi	Sonlu Fark Gösterimi
Upwind	$O[(\Delta t),(\Delta x)]$	$u_i^{n+1} = u_i^n \pm c(u_{i\pm1}^n - u_i^n)$
FTCS	$O[(\Delta t),(\Delta x)^2]$	$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$
Lax-Friedrichs	$O[(\Delta t),(\Delta x)^2]$	$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{c}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$
Leapfrog	$O[(\Delta t)^2,(\Delta x)^2]$	$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - c(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$
Lax-Wendroff	$O[(\Delta t)^2,(\Delta x)^2]$	$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) - \frac{c^2}{2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$
Beam-Warming	$O[(\Delta t),(\Delta x)^2]$	$u_i^{n+1} = u_i^n \pm \frac{c}{2}(3u_i^n - 4u_{i-1}^n + u_{i-2}^n) + \frac{c^2}{2}(u_i^n - 2u_{i-1}^n + u_{i-2}^n)$

Çizelge 5. 2 Adveksiyon denkleminde kullanılan kapalı yöntemler

Yöntem	Hata terimi	Sonlu Fark Gösterimi
Euler BTCS	$O[(\Delta t),(\Delta x)^2]$	$u_i^n = u_i^{n+1} + \frac{c}{2}(u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1})$
Upwind	$O[(\Delta t),(\Delta x)]$	$u_i^n = (1+c)u_i^{n+1} - cu_{i-1}^{n+1}$
Crank-Nicolson	$O[(\Delta t)^2,(\Delta x)^2]$	$u_i^n = u_i^{n+1} + \frac{c}{4}(u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} + u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$

BÖLÜM 6

ADVEKSİYON–DİFÜZYON DENKLEMLERİ

Sabit katsayılı ve bir boyutlu adveksiyon–difüzyon denklemlerinin çözümü için birçok sayısal yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemler iki zaman düzeyli sonlu fark formüllerine dayalıdır. Yeni yöntemler, geleneksel yöntemlere göre daha kesin ve etkilidir.

Bir boyutlu adveksiyon–difüzyon denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6.1}$$

şeklinde ifade edilir. Başlangıç koşulu

$$u(x,0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{6.2}$$

ve sınır koşulları

$$u(0,t) = g_0(t) \quad 0 < t \leq T \tag{6.3}$$

$$u(1,t) = g_1(t) \quad 0 < t \leq T \tag{6.4}$$

şeklindedir. Burada f, g_0 ve g_1 fonksiyonlarının değerleri bilinmekle birlikte, u fiziksel probleme göre değişen (yoğunluk, akış hızı, derinlik, kütle, ısı...) bilinmeyeni ifade etmektedir. $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ pozitif sabitleri sırasıyla difüzyon ve adveksiyon büyüklüklerini nitelemektedir [1], [12], [13], [15], [16], [17].

Başlangıç ve sınır koşulları daha karmaşık olan bir boyutlu adveksiyon–difüzyon denklemlerinin analitik çözümlerine yönelik çok az ilerleme kaydedilmiştir. Şimdi bu denklemin sayısal çözümüne yönelik geliştirilen yöntemleri inceleyelim.

6.1 İki Zaman Düzeyli Açık Yöntemler

Adveksiyon–difüzyon denklemindeki türevlerin, ϕ bağımsız parametre (ağırlık) içeren sonlu fark formülleri aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{(u_i^{n+1} - u_i^n)}{\Delta t} \tag{6.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \phi \frac{(u_i^n - u_{i-1}^n)}{\Delta x} + (1-\phi) \frac{(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)}{2\Delta x} \tag{6.6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)}{(\Delta x)^2} \tag{6.7}$$

Bu ifadeler (6.1) denkleminde yerine yazıldığında

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \beta\phi \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + \beta(1-\phi) \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{6.8}$$

bulunup, buradan u_i^{n+1} terimi çekildiğinde

$$u_i^{n+1} = \left(\frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\beta\phi\Delta t}{\Delta x} + \frac{\beta(1-\phi)\Delta t}{2\Delta x}\right) u_{i-1}^n + \left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} - \frac{\beta\phi\Delta t}{\Delta x}\right) u_i^n + \left(\frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2} - \frac{\beta(1-\phi)\Delta t}{2\Delta x}\right) u_i^{n+1} \tag{6.9}$$

ifadesi elde edilir. Burada difüzyon sayısı ve Courant sayısı yerine yazıldığında

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}\big(2d + c(1+\phi)\big)u_{i-1}^n + (1 - 2d - c\phi)u_i^n + \frac{1}{2}\big(2d - c(1-\phi)\big)u_{i+1}^n \tag{6.10}$$

denklemi elde edilir [1], [12], [13], [15]. Von Neumann kararlılık analizine göre (6.10) denkleminin kararlılık koşulu

$$\frac{c^2 - c\phi}{2} \leq d \leq \frac{1 - c\phi}{2} \tag{6.11}$$

şeklindedir [12], [15].

6.2 Açık Yöntemler

6.2.1 FTCS Yöntemi

(6.1) denkleminde zamana göre birinci mertebeden hataya sahip ileri farklar ve konuma göre ikinci mertebeden hataya sahip merkezi farklar uygulanarak ayrıklaştırma yapıldığında

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+\beta\frac{u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{2\Delta x}=\alpha\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{6.12}$$

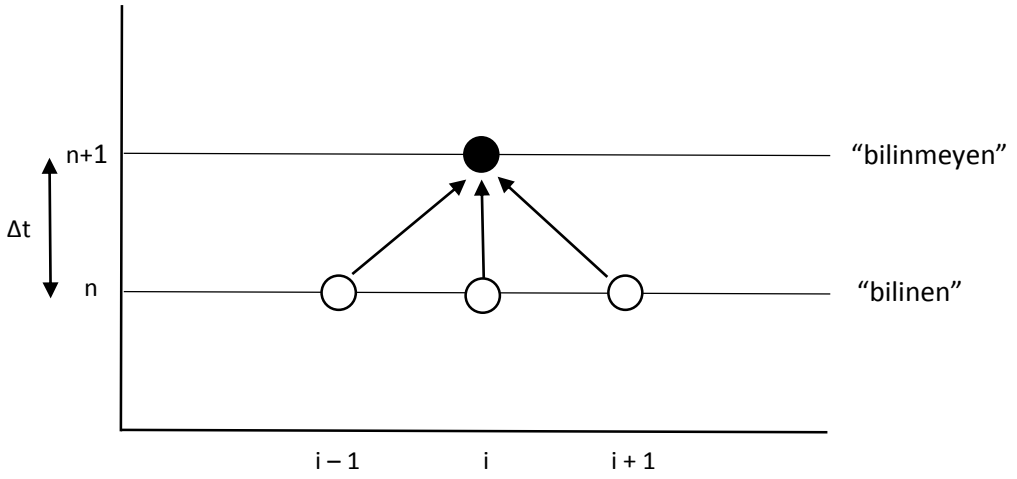
denklemi elde edilir [14], [18], [19], [27]. Bu denklemde u_i^{n+1} terimi çekilip c ve d değerleri yerine yazıldığında

$$u_i^{n+1}=\frac{1}{2}(2d+c)u_{i+1}^n+(1-2d)u_i^n+\frac{1}{2}(2d-c)u_{i-1}^n \tag{6.13}$$

bulunur [12], [15], [21]. Bu ifade aynı zamanda (6.10) denkleminde $\phi=0$ değeri yazılarak elde edilebilir. Verilen denklemin hata terimi $O[(\Delta t),(\Delta x)^2]$'dir [12], [14], [15], [18], [19], [21]. Uygulanan yöntemin kararlı olması için

$$\frac{c^2}{2}\leq d\leq\frac{1}{2} \tag{6.14}$$

koşulunun sağlanması gerekir [12], [14], [15], [19]. (6.13) denkleminin ağ noktaları Şekil 6.1'de gösterilmektedir.



Şekil 6. 1 FTCS açık yöntemi için ağ noktaları

6.2.2 Upwind Açık Yöntemi

(6.1) denkleminde zamana göre birinci mertebeden hataya sahip ileri farklar, difüzyon teriminde ikinci mertebeden hataya sahip merkezi farklar ve adveksiyon teriminde birinci mertebeden hataya sahip geri farklar uygulanarak ayrıklaştırma yapıldığında

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+\beta\frac{u_i^n-u_{i-1}^n}{\Delta x}=\alpha\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{6.15}$$

denklemi elde edilir [18], [19]. Bu denklemde u_i^{n+1} terimi çekilip c ve d değerleri yerine yazıldığında

$$u_i^{n+1}=(d+c)u_{i-1}^n+(1-2d-c)u_i^n+du_{i+1}^n \tag{6.16}$$

bulunur [12], [15]. Bu ifade aynı zamanda (6.10) denkleminde $\phi=1$ değeri yazılarak elde edilebilir. Verilen denklemin hata terimi $O[(\Delta t),(\Delta x),(\Delta x)^2]$'dir. Uygulanan yöntemin kararlı olması için

$$\frac{c^2-c}{2}\leq d\leq\frac{1-c}{2} \tag{6.17}$$

koşulunun sağlanması gerekir [12], [15].

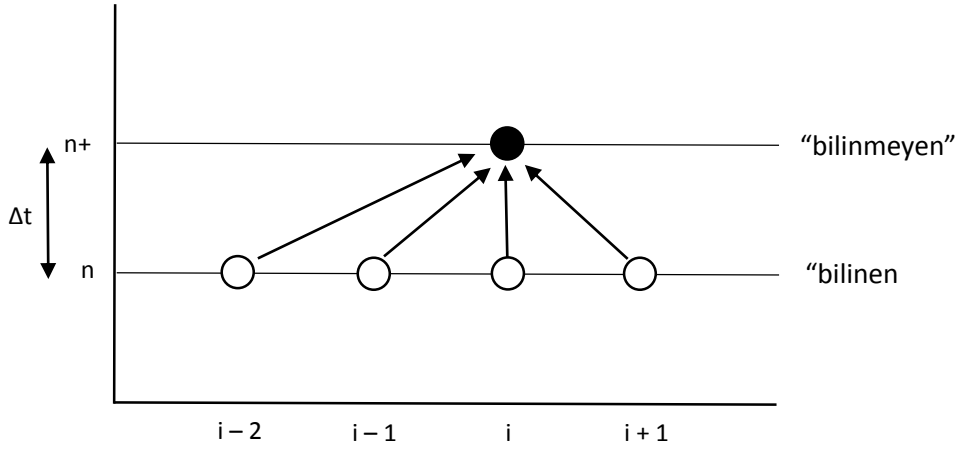
Bu yöntemde adveksiyon teriminde birinci mertebeden hataya sahip geri farkların kullanımı aşırı miktarda ayrıklaştırma hatasına neden olur. Bu nedenle doğru bir sonuca ulaşmak mümkün değildir. Bu sorunu ortadan kaldırmak için birinci yol, adveksiyon teriminde ikinci mertebeden hataya sahip geri farkların uygulanmasıdır. Fakat bunun sonucunda dinamik kararsızlık olarak adlandırılan salınımlı ayrıklaştırma hatası oluştuğundan kullanışlı değildir. İkinci yol ise adveksiyon teriminde üçüncü mertebeden hataya sahip geri farkların kullanılmasıdır. Bu şekilde elde edilen ayrıklaştırılmış denklem

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+\beta\left(\frac{u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{2\Delta x}-\frac{u_{i+1}^n-3u_i^n+3u_{i-1}^n-u_{i-2}^n}{6\Delta x}\right)$$
$$=\alpha\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{6.18}$$

şeklindedir [18], [19]. Bu denklemde u_i^{n+1} terimi çekilip c ve d değerleri yerine yazıldığında

$$u_i^{n+1} = -cu_{i-2}^n + (c+d)u_{i-1}^n + \left(1 - \frac{c}{2} - 2d\right)u_i^n - \left(\frac{c}{3} - d\right)u_{i+1}^n \tag{6.19}$$

bulunur. (6.19) denkleminin ağ noktaları Şekil 6.2'de gösterilmektedir.



Şekil 6. 2 Upwind açık yöntemi için ağ noktaları

6.2.3 DuFort–Frankel Yöntemi

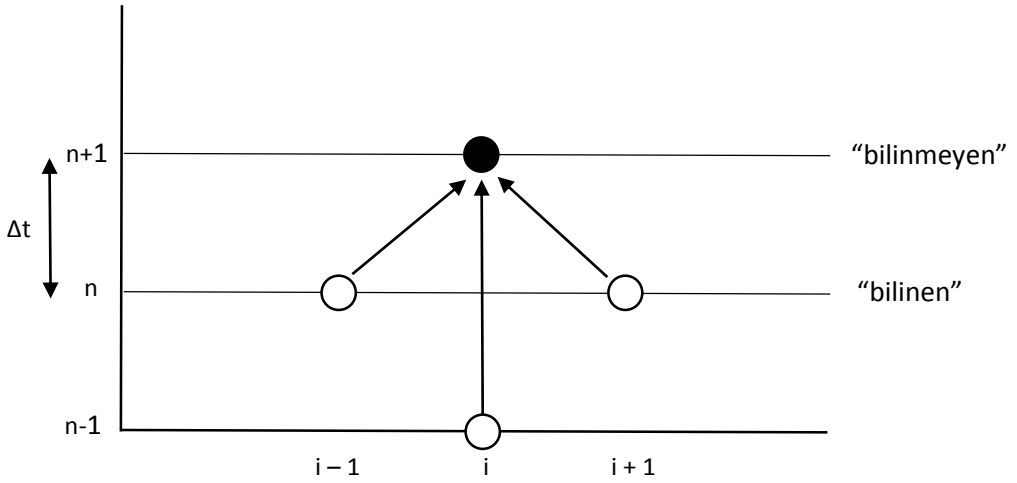
(6.1) denkleminde hem zamana hem de konuma göre ikinci mertebeden hataya sahip merkezi farklar uygulanıp, difüzyon terimindeki u_i^n yerine u_i^{n+1} ve u_i^{n-1} 'in ortalama değeri yazılarak ayrıklaştırma yapıldığında

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + \beta \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2\dfrac{u_i^{n-1} + u_i^{n+1}}{2} + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{6.20}$$

denklemi elde edilir [18], [19]. Bu denklemde u_i^{n+1} terimi çekilip c ve d değerleri yerine yazıldığında

$$u_i^{n+1} = \left(\frac{1-2d}{1+2d}\right)u_i^{n-1} + \left(\frac{c+2d}{1+2d}\right)u_{i-1}^n - \left(\frac{c-2d}{1+2d}\right)u_{i+1}^n \tag{6.21}$$

bulunur [19]. Denklemin hata terimi $O[(\Delta t)^2, (\Delta x)^2, (\Delta t/\Delta x)^2)]$'dir [18], [19]. Uygulanan yöntemin kararlı olması için $\beta \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ koşulunun sağlanması gerekir [18], [19]. (6.21) denkleminin ağ noktaları Şekil 6.3'de gösterilmektedir.



Şekil 6. 3 DuFort–Frankel açık yöntemi için ağ noktaları

6.2.4 Lax–Wendroff Yöntemi

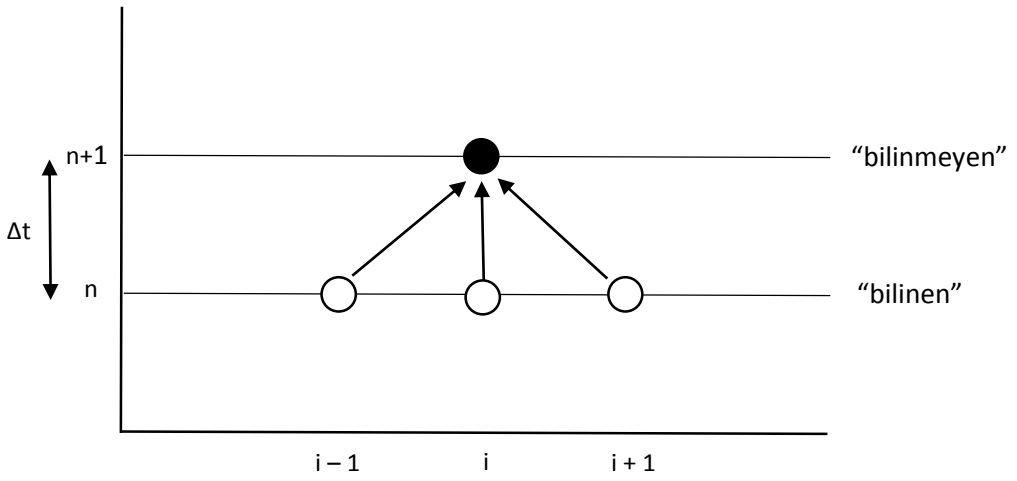
(6.10) denkleminde $\phi = c$ yazıldığında Lax–Wendroff yöntemi elde edilir [12], [15].

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(2d + c + c^2)u_{i-1}^n + (1 - 2d - c^2)u_i^n + \frac{1}{2}(2d - c + c^2)u_{i+1}^n \qquad (6.22)$$

Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t), (\Delta x)^2]$'dir. (6.11) denkleminde de $\phi = c$ yazılırsa, bu yöntemin kararlılık koşulu

$$0 < d \leq \frac{1 - c^2}{2} \qquad (6.23)$$

şeklinde bulunur [12], [15], [27]. (6.22) denkleminin ağ noktaları Şekil 6.4'de gösterilmektedir.



Şekil 6. 4 Lax–Wendroff açık yöntemi için ağ noktaları

6.2.5 İkinci Mertebe Upwind Yöntemi

Bir boyutlu adveksiyon–difüzyon denkleminin ikinci mertebe Upwind açık yöntemi ile çözümünde kullanılan bağımsız parametreli yaklaşımlar (6.5) ifadesi ve

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(4d - 2c + 3c^2)}{4c}\frac{(u_i^n - u_{i-2}^n)}{2\Delta x} + \frac{(4d - 2c + c^2)}{4c}\frac{(u_{i+2}^n - u_i^n)}{2\Delta x} + \frac{(2c - c^2 - 2d)}{c}\frac{(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)}{2\Delta x} \tag{6.24}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{(2c - c^2 - 2d)}{2d}\frac{(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)}{(\Delta x)^2} + \frac{(4d - 2c + c^2)}{2d}\frac{(u_{i+2}^n - 2u_i^n + u_{i-2}^n)}{(2\Delta x)^2} \tag{6.25}$$

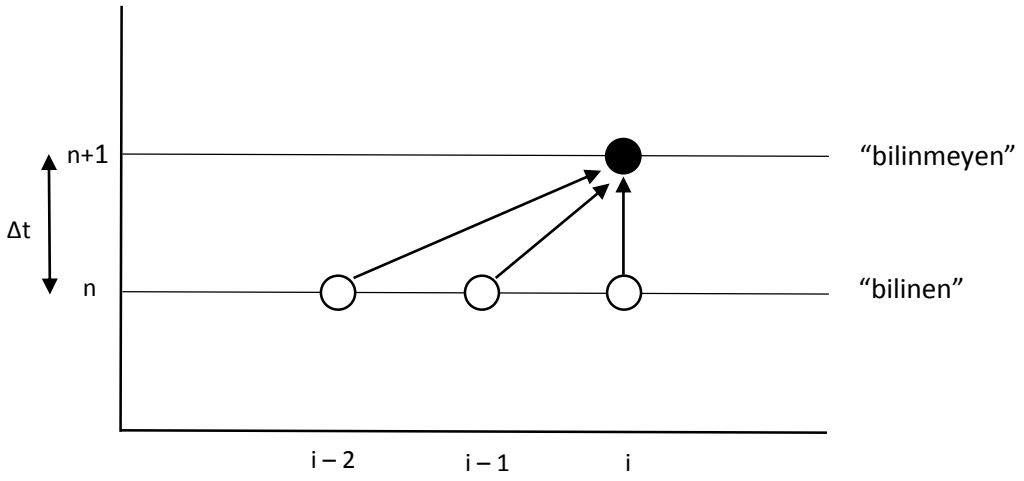
şeklindedir [1]. Yukarıdaki değerler (6.1) denkleminde yerine yazıldığında

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(2d - c + c^2)u_{i-2}^n - (2d - 2c + c^2)u_{i-1}^n + \frac{1}{2}(2 + 2d - 3c + c^2)u_i^n \tag{6.26}$$

denklemi elde edilir [1]. Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t), (\Delta x)^2]$'dir. Uygulanan yöntemin kararlı olması için

$$0 < d \leq \frac{c(2 - c)}{2} \tag{6.27}$$

koşulunu sağlaması gerekir [1]. (6.26) denkleminin ağ noktaları Şekil 6.5'de gösterilmektedir.



Şekil 6. 5 İkinci mertebe Upwind açık yöntemi için ağ noktaları

6.2.6 Üçüncü Mertebe Upwind Yöntemi

Bir boyutlu adveksiyon–difüzyon denkleminin üçüncü mertebe Upwind açık yöntemi ile çözümünde kullanılan bağımsız parametreli yaklaşımlar (6.5) ifadesi ve

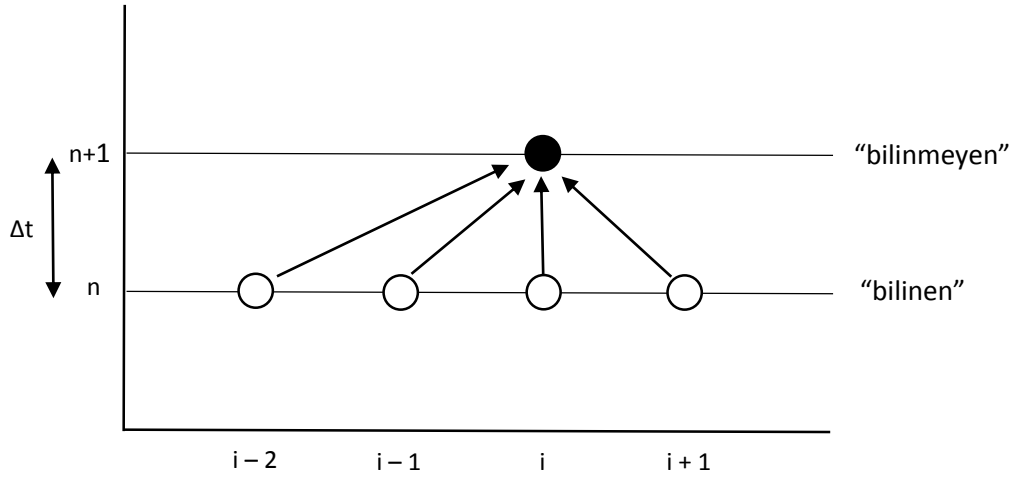
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(2c^2+3c+12d-2)}{12}\frac{(u_i^n - u_{i-2}^n)}{2\Delta x} + \frac{(2c^2-3c+12d-2)}{12}\frac{(u_{i+2}^n - u_i^n)}{2\Delta x} + \frac{(4-c^2-6d)}{3}\frac{(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)}{2\Delta x} \tag{6.28}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{(6d-12dc+2c-2c^3+3c^2)}{6d}\frac{(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)}{(\Delta x)^2} + \frac{(12dc-2c+2c^3-3c^2)}{6d}\frac{(u_{i+2}^n - 2u_i^n + u_{i-2}^n)}{(2\Delta x)^2} \tag{6.29}$$

şeklindedir [1], [16]. Yukarıdaki değerler (6.1) denkleminde yerine yazıldığında

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{6}c(c^2+6d-1)u_{i-2}^n + \frac{1}{2}(2d+2c+c^2-c^3+6dc)u_{i-1}^n + \frac{1}{2}(2-4d+6dc-c-2c^2+c^3)u_i^n + \frac{1}{6}(1-c)(6d-2c+c^2)u_{i+1}^n \tag{6.30}$$

denklemi elde edilir [1], [16]. Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t),(\Delta x)^2]$'dir. Uygulanan yöntemin kararlı olması için (6.27) koşulunu sağlaması gerekir [1]. (6.30) denkleminin ağ noktaları Şekil 6.6'da gösterilmektedir.



Şekil 6. 6 Üçüncü mertebe Upwind açık yöntemi için ağ noktaları

6.2.7 Dördüncü Mertebe Upwind Yöntemi

Sayısal ayrıklaştırma işleminde yüksek dereceden doğruluk elde edebilmek için sonlu fark formüllerinde daha fazla ağ noktası kullanılabilir. Bu yöntemde simetrik beş ağ noktası seçilerek ayrıklaştırma yapılmıştır. Bir boyutlu adveksiyon–difüzyon denkleminin dördüncü mertebe Upwind açık yöntemi ile çözümünde kullanılan bağımsız parametreli yaklaşımlar (6.5) ifadesi ve

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(12d + 2c^2 - 3c - 2)}{12}\frac{(u_{i+2}^n - u_i^n)}{2\Delta x} + \frac{(12d + 2c^2 + 3c - 2)}{12}\frac{(u_i^n - u_{i-2}^n)}{2\Delta x} - \frac{(c^2 + 6d - 4)}{3}\frac{(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)}{2\Delta x} \tag{6.31}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{(-c^4 + 4c^2 - 12d^2 - 12sc^2 + 8d)}{6d}\frac{(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)}{(\Delta x)^2} + \frac{(c^4 - 4c^2 + 12d^2 + 12dc^2 - 2d)}{6d}\frac{(u_{i+2}^n - 2u_i^n + u_{i-2}^n)}{(\Delta x)^2} \tag{6.32}$$

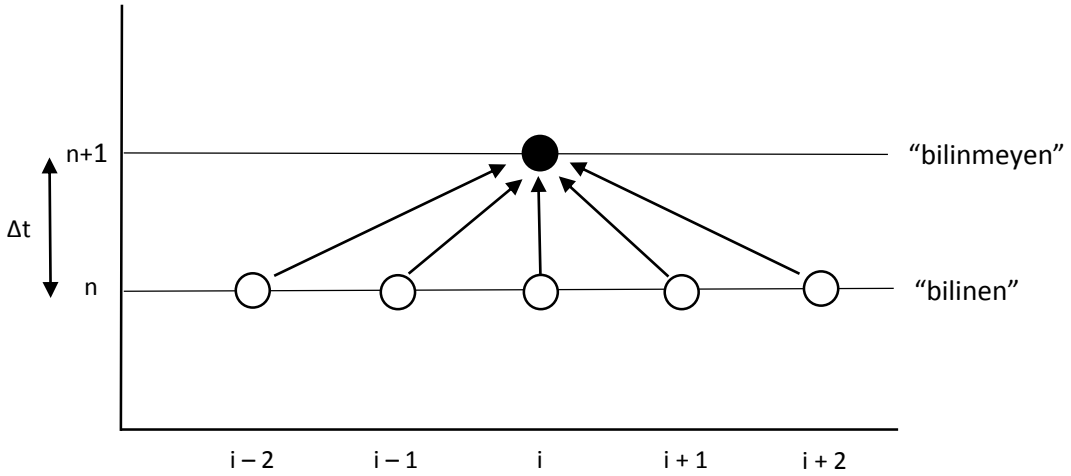
şeklindedir [1], [12]. Yukarıdaki değerler (6.1) denkleminde yerine yazıldığında

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{24}\left(12s(d+c^2) + 2d(6c-1) + c(c-1)(c+1)(c+2)\right)u_{i-2}^n$$
$$+ \frac{1}{24}\left(12d(d+c^2) - 2d(6c+1) + c(c-1)(c+1)(c-2)\right)u_{i-1}^n$$
$$- \frac{1}{6}\left(12d(d+c^2) + 2d(3c-4) + c(c-2)(c+1)(c+2)\right)u_i^n$$
$$- \frac{1}{6}\left(12d(d+c^2) - 2d(3c+4) + c(c-1)(c-2)(c+2)\right)u_{i+1}^n$$
$$+ \frac{1}{4}\left(12d(d+c^2) - 10d\right.$$
$$\left. + (c-1)(c-2)(c+1)(c+2)\right)u_{i+2}^n \qquad (6.33)$$

denklemi elde edilir [1], [12], [17]. Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t), (\Delta x)^2]$'dir. Uygulanan yöntemin kararlı olması için

$$0 < d \leq \frac{2-c}{2} \qquad (6.34)$$

koşulunu sağlaması gerekir [1], [12]. (6.33) denkleminin ağ noktaları Şekil 6.7'de gösterilmektedir.



Şekil 6. 7 Dördüncü mertebe Upwind açık yöntemi için ağ noktaları

6.2.8 Bağımsız Parametreli Açık Yöntem

Bir boyutlu adveksiyon–difüzyon denkleminin bağımsız parametreli açık yöntem ile çözümünde kullanılan yaklaşımlar (6.5) ifadesi ve

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \phi\frac{(u_i^n - u_{i-2}^n)}{2\Delta x} + \theta\frac{(u_{i+2}^n - u_i^n)}{2\Delta x} + (1-\phi-\theta)\frac{(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)}{2\Delta x} \qquad (6.35)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma \frac{(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)}{(\Delta x)^2} + (1-\gamma)\frac{(u_{i+2}^n - 2u_i^n + u_{i-2}^n)}{(\Delta x)^2} \tag{6.36}$$

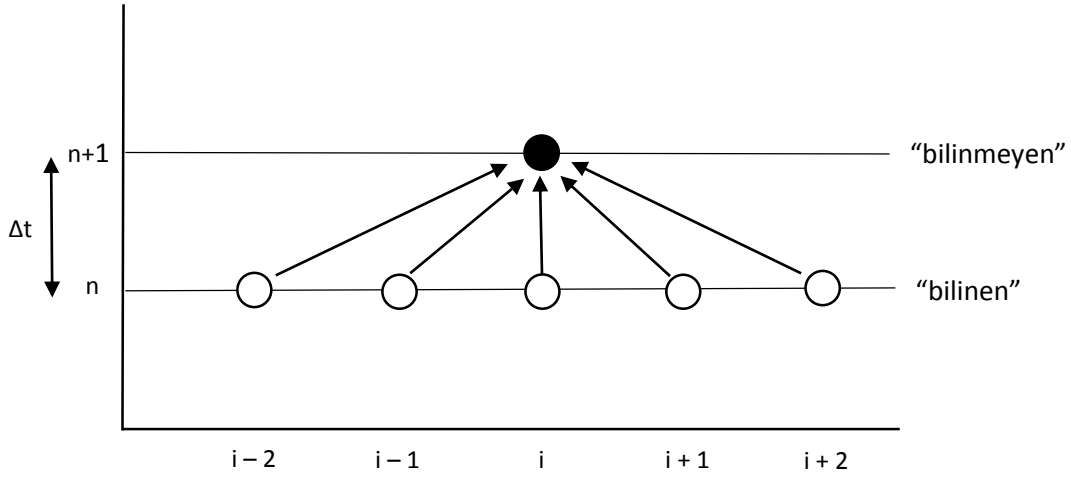
şeklindedir [1]. Yukarıdaki değerler (6.1) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} = {} & \frac{1}{4}(d + 2c\phi - d\gamma)u_{i-2}^n + \frac{1}{2}(c - c\phi - c\theta + 2d\gamma)u_{i-1}^n \\ & + \frac{1}{2}(2 - d + c\theta - c\phi - 3d\gamma)u_i^n + \frac{1}{2}(-c + c\phi + c\theta + 2d\gamma)u_{i+1}^n \\ & + \frac{1}{4}(d - d\gamma - 2c\theta)u_{i+2}^n \end{aligned} \tag{6.37}$$

denklemi elde edilir [1]. Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t), (\Delta x)^2]$'dir. Uygulanan yöntemin kararlı olması için

$$\frac{c^2 - c\phi}{2} \leq d \leq \frac{1 - c\phi}{2} \tag{6.38}$$

koşulunu sağlaması gerekir [1]. (6.37) denkleminin ağ noktaları Şekil 6.8'de gösterilmektedir.



Şekil 6. 8 Bağımsız parametreli açık yöntem için ağ noktaları

6.3 Kapalı Yöntemler

6.3.1 BTCS Kapalı Yöntemi

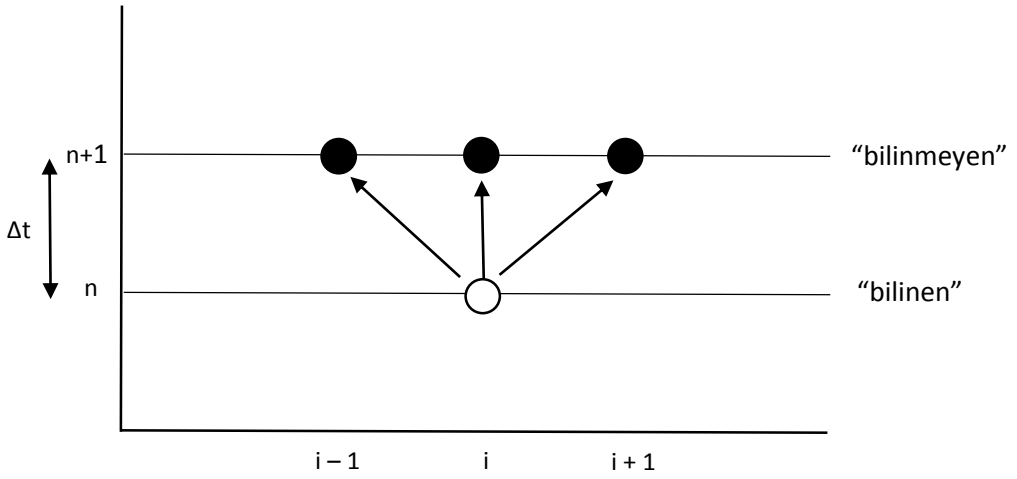
(6.1) denkleminde zamana göre birinci mertebeden hataya sahip geri farklar ve konuma göre ikinci mertebeden hataya sahip merkezi farklar uygulanarak ayrıklaştırma yapıldığında

$$\frac{u_{i+1}^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+\beta\frac{u_{i+1}^{n+1}-u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}=\alpha\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \tag{6.39}$$

denklemi elde edilir [19]. Bu denklemde u_i^n terimi çekilip c ve d değerleri yerine yazıldığında

$$-\left(\frac{c}{2}+d\right)u_{i-1}^{n+1}+(1+2d)u_i^{n+1}+\left(\frac{c}{2}-d\right)u_{i+1}^{n+1}=u_i^n \tag{6.40}$$

bulunur [12], [13], [19]. Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t),(\Delta x)^2]$'dir. Uygulanan yöntem koşulsuz kararlıdır ve (6.40) denklemi üç-diyagonalli katsayı matrisi yardımıyla çözülebilir [12], [19]. (6.40) denkleminin ağ noktaları Şekil 6.9'da gösterilmektedir.



Şekil 6. 9 BTCS kapalı yöntemi için ağ noktaları

6.3.2 Upwind Kapalı Yöntemi

(6.1) denkleminde zamana göre birinci mertebeden hataya sahip geri farklar ve difüzyon teriminde ikinci mertebeden hataya sahip merkezi farklar uygulanır. Adveksiyon teriminde ise birinci, ikinci ya da üçüncü mertebeden hataya sahip geri farklar uygulanabilir. Fakat Upwind açık yönteminde bahsedildiği üzere birinci mertebeden hataya sahip geri farklar aşırı miktarda ayrıklaştırma hatasına, ikinci mertebeden hataya sahip geri farklar ise salınımlı ayrıklaştırma hatasına neden olur. Bu kısımda üç durum da incelenecektir [19].

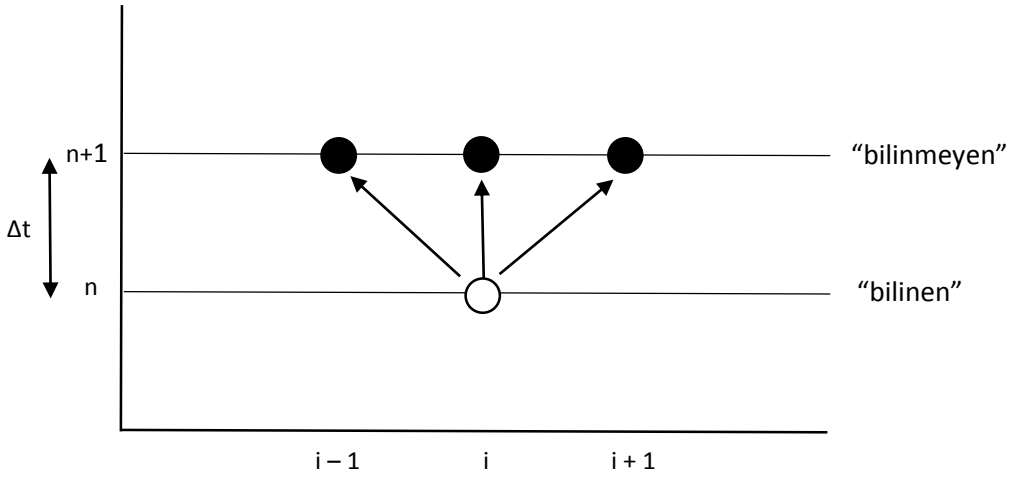
i. Adveksiyon teriminde birinci mertebeden hataya sahip geri farklar uygulanarak ayrıklaştırma yapıldığında

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+\beta\frac{u_i^{n+1}-u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}=\alpha\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \tag{6.41}$$

denklemi elde edilir [19]. Bu denklemde u_i^n terimi çekilip c ve d değerleri yerine yazıldığında

$$-(c+d)u_{i-1}^{n+1}+(1+c+2d)u_i^{n+1}-du_{i+1}^{n+1}=u_i^n \tag{6.42}$$

bulunur [12], [13], [19]. Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t),(\Delta x),(\Delta x)^2]$'dir. Uygulanan yöntem koşulsuz kararlıdır [12]. (6.42) denkleminin ağ noktaları Şekil 6.10'da gösterilmektedir.



Şekil 6. 10 Upwind kapalı yöntemi için ağ noktaları

ii. Adveksiyon teriminde ikinci mertebeden hataya sahip geri farklar uygulanarak ayrıklaştırma yapıldığında

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+\beta\frac{u_{i-2}^{n+1}-4u_{i-1}^{n+1}+3u_i^{n+1}}{2\Delta x}=\alpha\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \tag{6.43}$$

denklemi elde edilir [19]. Bu denklemde u_i^n ve u_{i-2}^n terimleri çekilip c ve d değerleri yerine yazıldığında

$$-(2c+d)u_{i-1}^{n+1}+\left(1+\frac{3}{2}c+2d\right)u_i^{n+1}-du_{i+1}^{n+1}=u_i^n-\frac{c}{2}u_{i-2}^n \tag{6.44}$$

bulunur. Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t),(\Delta x)^2]$'dir.

iii. Adveksiyon teriminde üçüncü mertebeden hataya sahip geri farklar kullanılarak ayrıklaştırma yapıldığında

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+\beta\left(\frac{u_{i+1}^{n+1}-u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}-\frac{u_{i+1}^{n+1}-3u_i^{n+1}+3u_{i-1}^{n+1}-u_{i-2}^{n+1}}{6\Delta x}\right)$$
$$=\alpha\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \tag{6.45}$$

denklemi elde edilir [19]. Bu denklemde u_i^n ve u_{i-2}^n terimleri çekilip c ve d değerleri yerine yazıldığında

$$-(c+d)u_{i-1}^{n+1}+\left(1+\frac{c}{2}+2d\right)u_i^{n+1}-\left(\frac{c}{3}-d\right)u_{i+1}^{n+1}=u_i^n-\frac{c}{6}u_{i-2}^n \tag{6.46}$$

bulunur. Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t),(\Delta x)^3]$'dür.

6.3.3 Crank–Nicolson Yöntemi

(6.1) denkleminde zamana göre birinci mertebeden hataya sahip ileri farklar, adveksiyon ve difüzyon terimlerinde ise n ve $n+1$ zaman adımlarındaki ikinci mertebeden hataya sahip merkezi farkların ortalaması alınarak ayrıklaştırma yapıldığında

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+\frac{\beta}{2}\left(\frac{u_{i+1}^n-u_{i-1}^n}{2\Delta x}+\frac{u_{i+1}^{n+1}-u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}\right)$$
$$=\frac{\alpha}{2}\left(\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}+\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}\right) \tag{6.47}$$

denklemi elde edilir [14]. Bu denklem c ve d değerleri yerine yazılıp yeniden düzenlendiğinde

$$-(c+2d)u_{i-1}^{n+1}+4(1+d)u_i^{n+1}+(c-2d)u_{i+1}^{n+1}$$
$$=(2d+c)u_{i-1}^n+4(1-d)u_i^n+(2d-c)u_{i+1}^n \tag{6.48}$$

şeklini alır [12], [13]. Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t),(\Delta x)^2]$'dir [14]. Uygulanan yöntem koşulsuz kararlıdır [12], [14].

6.3.4 Siemieniuch–Gladwell Yöntemi

Bir boyutlu adveksiyon–difüzyon denkleminin Siemieniuch–Gladwell yöntemi ile çözümünde kullanılan bağımsız parametreli yaklaşımlar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{(2d-c)}{4}\frac{(u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^{n})}{\Delta t} + \frac{(2+c-2d)}{2}\frac{(u_{i}^{n+1} - u_{i}^{n})}{\Delta t} + \frac{(2d-c)}{4}\frac{(u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^{n})}{\Delta t} \tag{6.49}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(u_{i+1}^{n} - u_{i-1}^{n})}{4\Delta x} + \frac{(u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1})}{4\Delta x} \tag{6.50}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\frac{(u_{i+1}^{n+1} - 2u_{i}^{n+1} + u_{i-1}^{n+1})}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}\frac{(u_{i+1}^{n} - 2u_{i}^{n} + u_{i-1}^{n})}{(\Delta x)^2} \tag{6.51}$$

şeklindedir [12]. Yukarıdaki değerler (6.1) denkleminde yerine yazıldığında

$$-cu_{i-1}^{n+1} + (2+c)u_{i}^{n+1} = 2du_{i-1}^{n} + (2-4d+c)u_{i}^{n} + (2d-c)u_{i+1}^{n} \tag{6.52}$$

denklemi elde edilir [12]. Bu denklemin hata terimi $O[(\Delta t), (\Delta x)^2]$'dir. Uygulanan yöntemin kararlı olması için

$$0 < d \leq \frac{(1+c)}{2} \tag{6.53}$$

koşulunu sağlaması gerekir [12].

6.4 Uygulama

Bir boyutlu adveksiyon–difüzyon denkleminin çözümünde kullanılan yöntemlerin doğruluğunu test etmek için bu kısımda anlatılan açık ve kapalı yöntemlerden bazıları, kesin çözümü bilinen bir problem üzerinde uygulandı.

$(6.1) - (6.4)$ ifadeleri göz önünde bulundurulduğunda

$$f(x) = \exp\left(-\frac{(x+0.5)^2}{0.00125}\right) \tag{6.54}$$

$$g_o(0,t) = \frac{0.025}{\sqrt{0.000625 + 0.02t}}\exp\left(-\frac{(0.5-t)^2}{(0.00125+0.04t)}\right) \tag{6.55}$$

$$g_1(1,t) = \frac{0.025}{\sqrt{0.000625 + 0.02t}}\exp\left(-\frac{(0.5-t)^2}{(0.00125+0.04t)}\right) \tag{6.56}$$

$$\alpha = 0.01\,, \quad \beta = 1.0 \tag{6.57}$$

buradan kesin çözüm

$$u(x,t) = \frac{0.025}{\sqrt{0.000625 + 0.02t}} \exp\left(-\frac{(x + 0.5 - t)^2}{(0.00125 + 0.04t)}\right) \tag{6.58}$$

şeklinde elde edilir. Test edilen yöntemler Hücre Reynolds sayısı – Re_c 'nin 2, 4 ve 8 olmak üzere üç farklı değerinde uygulanmıştır. Daha önce kararlılık analizi bölümünde $Re_c = \frac{\beta \Delta x}{\alpha} = \frac{c}{d}$ olduğundan bahsedilmişti. Buradan $\Delta x = 0.02, 0.04, 0.08$ ve $d = 0.025, 0.05, 0.1, 0.2, 0.4$ bulunur.

Seçilen her bir Re_c değeri için c'nin 0.1, 0.2 ve 0.4 olmak üzere üç farklı değeri kullanılmıştır. c'nin artan değerlerinde $\Delta t = 0.004, 0.008, 0.016, 0.032, 0.064$ şeklinde elde edilir.

İlk zaman adımındaki değerleri elde etmek için (6.54) denklemi kullanılmıştır. $u(0.5, 1.0)$ değeri için açık yöntemlerin karşılaştırmalı hata analizleri Çizelge 6.1'de gösterilmektedir.

Çizelge 6. 1 Açık yöntemler için hata analizleri

Δt	Δx	$FTCS$	$Upwind$	$Lax - Wendroff$	$Dördüncü Mertebe$
0.004	0.02	4.5×10^{-3}	4.7×10^{-3}	2.9×10^{-3}	1.8×10^{-6}
0.008	0.02	5.1×10^{-3}	5.0×10^{-3}	1.9×10^{-3}	3.1×10^{-6}
0.016	0.02	4.2×10^{-3}	4.0×10^{-3}	2.8×10^{-3}	3.0×10^{-6}
0.008	0.04	3.9×10^{-3}	4.1×10^{-3}	2.7×10^{-3}	3.1×10^{-5}
0.016	0.04	4.4×10^{-3}	4.5×10^{-3}	2.9×10^{-3}	2.2×10^{-5}
0.032	0.04	4.8×10^{-3}	4.7×10^{-3}	2.8×10^{-3}	3.2×10^{-5}
0.016	0.08	3.6×10^{-3}	3.8×10^{-3}	2.9×10^{-3}	3.3×10^{-4}
0.032	0.08	4.3×10^{-3}	4.0×10^{-3}	3.4×10^{-3}	2.9×10^{-4}
0.064	0.08	3.7×10^{-3}	3.5×10^{-3}	3.6×10^{-3}	3.9×10^{-4}

Elde edilen sonuçlar, FTCS ve Upwind açık yöntemleri ile üretilen hataların aynı büyüklükte olduğunu göstermektedir.

Dördüncü mertebe Upwind yöntemi ile ikinci mertebe Lax–Wendroff yöntemi karşılaştırıldığında, ilkinden elde edilen ortalama hatanın ikincisine göre yaklaşık iki kat daha küçük olduğu görülmektedir.

$u(0.5, 1.0)$ değeri için kapalı yöntemlerin karşılaştırmalı hata analizleri Çizelge 6.2'de gösterilmektedir.

Çizelge 6. 2 Kapalı yöntemler için hata analizleri

Δt	Δx	$BTCS$	$Upwind$	$Crank-Nicolson$	$Siemieniuch-Gladwell$
0.004	0.02	3.5×10^{-3}	4.8×10^{-3}	3.9×10^{-3}	4.3×10^{-3}
0.008	0.02	4.4×10^{-3}	4.7×10^{-3}	3.8×10^{-3}	3.4×10^{-3}
0.016	0.02	3.7×10^{-3}	4.5×10^{-3}	3.7×10^{-3}	4.5×10^{-3}
0.008	0.04	4.1×10^{-3}	4.3×10^{-3}	3.6×10^{-3}	4.7×10^{-3}
0.016	0.04	4.0×10^{-3}	4.4×10^{-3}	3.9×10^{-3}	5.0×10^{-3}
0.032	0.04	3.9×10^{-3}	4.7×10^{-3}	4.0×10^{-3}	4.8×10^{-3}
0.016	0.08	3.7×10^{-3}	4.1×10^{-3}	4.3×10^{-3}	4.6×10^{-3}
0.032	0.08	4.8×10^{-3}	3.9×10^{-3}	4.0×10^{-3}	3.7×10^{-3}
0.064	0.08	3.7×10^{-3}	3.9×10^{-3}	4.1×10^{-3}	4.6×10^{-3}

Kapalı ve açık yöntemlerden elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında, birinci mertebe Upwind açık yöntemi ve birinci mertebe Upwind kapalı yönteminin ürettiği hataların birbirine çok yakın olduğu görülmektedir.

Ayrıca, en doğru sonuç veren ikinci mertebe yöntem Lax–Wendroff yöntemidir [12].

6. 5 Özet

Bu kısımda anlatılan tüm açık ve kapalı yöntemlerin hata terimleri ve sonlu fark gösterimleri Çizelge 6.3 ve Çizelge 6.4'de özet olarak verilmiştir.

Çizelge 6. 3 Adveksiyon–difüzyon denkleminde kullanılan açık yöntemler

Yöntem	Hata terimi	Sonlu Fark Gösterimi
FTCS	$O[(\Delta t),(\Delta x)^2]$	$u_i^{n+1}=\frac{1}{2}(2d+c)u_{i+1}^n+(1-2d)u_i^n+\frac{1}{2}(2d-c)u_{i-1}^n$
Upwind	$O[(\Delta t),(\Delta x),(\Delta x)^2]$	$u_i^{n+1}=(d+c)u_{i-1}^n+(1-2d-c)u_i^n+du_{i+1}^n$
DuFort-Frankel	$O[(\Delta t)^2,(\Delta x)^2,(\Delta t/\Delta x)^2)]$	$u_i^{n+1}=\left(\frac{1-2d}{1+2d}\right)u_i^{n-1}+\left(\frac{c+2d}{1+2d}\right)u_{i-1}^n-\left(\frac{c-2d}{1+2d}\right)u_{i+1}^n$
Lax-Wendroff	$O[(\Delta t),(\Delta x)^2]$	$u_i^{n+1}=\frac{1}{2}(2d+c+c^2)u_{i-1}^n+(1-2d-c^2)u_i^n+\frac{1}{2}(2d-c+c^2)u_{i+1}^n$
İkinci Mertebe Upwind	$O[(\Delta t),(\Delta x)^2]$	$u_i^{n+1}=\frac{1}{2}(2d-c+c^2)u_{i-2}^n-(2d-2c+c^2)u_{i-1}^n+\frac{1}{2}(2+2d-3c+c^2)u_i^n$
Üçüncü Mertebe Upwind	$O[(\Delta t),(\Delta x)^2]$	$u_i^{n+1}=\frac{1}{6}c(c^2+6d-1)u_{i-2}^n+\frac{1}{2}(2d+2c+c^2-c^3+6dc)u_{i-1}^n$ $+\frac{1}{2}(2-4d+6dc-c-2c^2+c^3)u_i^n$ $+\frac{1}{6}(1-c)(6d-2c+c^2)u_{i+1}^n$

Çizelge 6. 4 Adveksiyon–difüzyon denkleminde kullanılan açık yöntemler (devam)

Dördüncü Mertebe Upwind	$O[(\Delta t),(\Delta x)^2]$	$u_i^{n+1} = \frac{1}{24}\big(12s(d+c^2) + 2d(6c-1) + c(c-1)(c+1)(c+2)\big)u_{i-2}^n$ $+\frac{1}{24}\big(12d(d+c^2) - 2d(6c+1) + c(c-1)(c+1)(c-2)\big)u_{i-1}^n$ $-\frac{1}{6}\big(12d(d+c^2) + 2d(3c-4) + c(c-2)(c+1)(c+2)\big)u_i^n$ $-\frac{1}{6}\big(12d(d+c^2) - 2d(3c+4) + c(c-1)(c-2)(c+2)\big)u_{i+1}^n$ $+\frac{1}{4}\big(12d(d+c^2) - 10d + (c-1)(c-2)(c+1)(c+2)\big)u_{i+2}^n$
Bağımsız Parametreli Yöntem	$O[(\Delta t),(\Delta x)^2]$	$u_i^{n+1} = \frac{1}{4}(d + 2c\phi - d\gamma)u_{i-2}^n + \frac{1}{2}(c - c\phi - c\theta + 2d\gamma)u_{i-1}^n$ $+\frac{1}{2}(2 - d + c\theta - c\phi - 3d\gamma)u_i^n$ $+\frac{1}{2}(-c + c\phi + c\theta + 2d\gamma)u_{i+1}^n + \frac{1}{4}(d - d\gamma - 2c\theta)u_{i+2}^n$

Çizelge 6. 5 Adveksiyon–difüzyon denkleminde kullanılan kapalı yöntemler

Yöntem	Hata terimi	Sonlu Fark Gösterimi
BTCS	$O[(\Delta t),(\Delta x)^2]$	$-\left(\frac{c}{2}+d\right)u_{i-1}^{n+1}+(1+2d)u_i^{n+1}+\left(\frac{c}{2}-d\right)u_{i+1}^{n+1}=u_i^n$
Upwind	$O[(\Delta t),(\Delta x)^2]$	$-(c+d)u_{i-1}^{n+1}+(1+c+2d)u_i^{n+1}-du_{i+1}^{n+1}=u_i^n$
Crank-Nicolson	$O[(\Delta t),(\Delta x)^2]$	$-(c+2d)u_{i-1}^{n+1}+4(1+d)u_i^{n+1}+(c-2d)u_{i+1}^{n+1}$ $=(2d+c)u_{i-1}^{n}+4(1-d)u_i^{n}+(2d-c)u_{i+1}^{n}$
Siemieniuch-Gladwell	$O[(\Delta t),(\Delta x)^2]$	$-cu_{i-1}^{n+1}+(2+c)u_i^{n+1}=2du_{i-1}^{n}+(2-4d+c)u_i^{n}+(2d-c)u_{i+1}^{n}$

BÖLÜM 7

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma, bilim ve mühendislikteki birçok önemli uygulamada karşılaşılan adveksiyon–difüzyon denklemini araştıranlar için, kullanılan tüm sonlu fark yöntemlerini kararlılık koşulları ve hata terimleri ile birlikte sunarak konunun net bir şekilde anlaşılması amacıyla hazırlanmıştır.

Öncelikle Taylor seri açılımından elde edilen sonlu fark formüllerinin çıkarımları ve yüksek mertebeden ileri, geri ve merkezi fark formülleri verilmiştir.

Ayrık pertürbasyon kararlılık analizi ve Von Neumann kararlılık analizi anlatılarak model denklemler üzerinde uygulanmıştır. Böylelikle Von Neumann kararlılık analizinin daha kullanışlı olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ayrık pertürbasyon kararlılık analizinde bozunumun hareketi grafiksel olarak gösterilip konunun daha iyi anlaşılması sağlanmıştır.

Adveksiyon denklemi, difüzyon denklemi ve tezin asıl amacı olan bir boyutlu adveksiyon–difüzyon denklemi üzerinde açık ve kapalı sonlu fark yöntemleri kullanılarak ayrıklaştırma yapılmıştır. Elde edilen ayrıklaştırılmış denklemlerin ağ noktaları şekillerle gösterilmiştir.

Her bir model denklem için seçilen bir örnek üzerinden, açık ve kapalı yöntemler kullanılarak elde edilen sayısal çözümler ile analitik çözüm karşılaştırılarak hata analizleri yapılmış ve çizelgeler halinde verilmiştir.

Uygulanan yöntemlerin birbirlerine göre avantaj ve dezavantajlarına değinilerek, fiziksel bir problem için zaman ve konum adım uzunluklarına bağlı olarak kullanılabilecek en uygun yöntem araştırılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Dehghan M., (2005). "On the Numerical Solution of the One–Dimensional Convection–Diffusion Equation", Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering, 1:61-74.

[2] Chatwin P.C. ve Allen C. M., (1985). "Mathematical Models of Dispersion in Rivers and Estuaries", Annual Review of Fluid Mechanics, 17:119-149.

[3] Parlarge J. Y., (1980). "Water Transport in Soils", Annual Review of Fluid Mechanics, 2:77-102.

[4] Fattah Q.N. ve Hoopes J.A., (1985). "Dispersion in Anisotropic Homogeneous Porpus Media", Journal of Hydraulic Engineering, 111:810-827.

[5] Holly F.M. ve Usseglio-Polatera J.M., (1984). "Dispersion Simulation in Two–Dimensional Tidal Flow", Journal of Hydraulic Engineering, 111:905-926.

[6] Salmon J.R., Liggett J.A. ve Gallager R.H., (1980). "Dispersion Analysis in Homogeneous Lakes", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 15:1627-1642.

[7] Lapidus L. ve Amundston N.R., (1952). "Mathematics of Absorption in Beds", The Journal of Physical Chemistry, 56(8):984-988.

[8] Zlatev Z., Berkowicz R. ve Prahm L.P., (1984). "Implementation of a Variable Stepsize Variable Formula in the Time–Integration Part of a Code for Treatment oj Long–Range Transport of air pollutants", Journal of Computational Physics, 55:278-301.

[9] Chaudhry M.H., Cass D.E. ve Edinger J.E., (1983). "Modelling of Unsteady–Flow Water Temperatures", Journal of Hydraulic Engineering, 109(5):657-669.

[10] Kumar N., (1988). "Unsteady Flow Against Dispersion in Finite Porous Media", Journal of Hydrology, 63:345-358.

[11] Guvanasen V. ve Volker R.E., (1983). "Numerical Solutions for Solute Transport in Unconfined Aquifers", International Journal for Numerical Methods in Fluids, 3:103-123.

[12] Dehghan M., (2004). “Weighted Finite Difference Tehniques for the One–Dimensional Advection–Diffusion Equation”, Applied Mathematics and Computation, 147:307-319.

[13] Karahan H., (2006). “Implicit Finite Difference Techniques for the Advection–Diffusion Equation Using Spreadsheets”, Advances in Engineering Software, 37:601-608.

[14] Thongmoon M. ve McKibbin R., (2006). “A Comparison of Some Numerical Methods fort he Advection–Diffusion Equation”, Research Letters in the Information and Mathematical Sciences, 10:49-62.

[15] Karahan H., (2008). “Solution of Weighted Finite Difference Techniques With the Advection–Diffusion Equation Using Spreadsheets”, Computer Applications in Engineering Education, 16(2):147-156.

[16] Karahan H., (2007). “A Third–Order Upwind Scheme for the Advection–Diffusion Equation Using Spreadsheets”, Advances in Engineering Software, 38:688-697.

[17] Kaya B. ve Gharehbaghi A., (2014). “Implicit Solutions of Advection–Diffusion Equation by Various Numerical Methods”, Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 8(1):381-391.

[18] Jhung T.J., (2010). Computational Fluid Dynamics, Second Edition, Cambridge University Press, New York.

[19] Hoffmann K.A., ve Chiang S.T., (2000). Computational Fluid Dynamics, Fourth Edition, Engineering Education System, Kansas.

[20] Hirsch C., (2007). Numerical Computation of Internal & External Flows, Second Edition, Butterworth - Heinemann, Oxford.

[21] Niyogi P., Chakrabartty S.K. ve Laha M.K., (2006). Introduction to Computational Fluid Dynamics, First Edition, Dorling Kindersley, India.

[22] Hong C.P., (2004). Computer Modelling of Heat and Fluid Flow in Materials Processing, First Edition, Institute of Physics Publishing, London.

[23] Ganzha V.G. ve Vorozhtsov (1996). Computer–Aided Analysis of Difference Schemes for Partial Differential Equations, First Edition, A Wiley–Interscience Publication, Canada.

[24] Roed L.P., (2013). Atmospheres and Oceans on Computers: Fundamentals, http://www.uio.no/studier/emner/matnat/geofag/GEF4510/h14/course-material/gef4510_2014.pdf, 28 Mart 2015.

[25] Rezzolla L., (2011). Numerical Methods fot the Solution of Partial Differential Equations, Lectute Notes, http://www.aei.mpg.de/~rezzolla/lnotes/Evolution_Pdes/evolution_pdes_lnotes.pdf, 28 Mart 2015.

[26] LeVeque R.J., (2004). Finite Difference Methods for Differential Equations, Lecture Notes, http://disciplinas.stoa.usp.br/pluginfile.php/41896/mod_resource/content/1/LeVeque%20Finite%20Diff.pdf, 5 Nisan 2015.

[27] Neta B., (1996). Partial Differantial Equations, Lecture Notes, http://faculty.nps.edu/bneta/pde.pdf, 5 Nisan 2015.

[28] LeVeque R.J., (2007). Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations, First Edition, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia.

[29] Causon D.M. ve Mingham C.G., (2010). Introductory Finite Difference Methods for PDEs, First Edition, Ventus Publishing ApS, Denmark.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ayşe Merve BİLGİN

Doğum Tarihi ve Yeri : 28/05/1988 Gemlik

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : aysemervebilgin@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2015
Lisans	Matematik Eğitimi	Marmara Üniversitesi	2012
Lise	Matematik-Fen	İzmir Anadolu Öğretmen Lisesi	2006