$$\int_0^{\infty} \frac{u \sin ux}{u^2 + a^2} du = \frac{\pi}{2} e^{-ax}$$

integrallerine *Laplace integralleri* denir.

Fourier Dönüşümleri

Fourier dönüşümleri belirli integralin hesabında, serilerin toplanmasında, frekans spektrumun belirlenmesinde (elektrik tekniğinde) ve diferensiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılır. Biz burada sadece serilerin toplanması ve belirli integrallerin hesaplanması üzerinde duracağız. Ayrıca Fourier dönüşümlerinin Mathematica paket programı ile hesabına yer vereceğiz.

Fourier Dönüşümlerinin Bulunması

Fourier integralinin kompleks şekli,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{iu(x-v)} dv \right] du \qquad 2.5.1$$

dir. Bu integrali aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{iux} e^{-iuv} dv du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-iuv} dv \right] du \qquad 2.5.2$$

Burada,

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-iuv} dv = \mathcal{F}[f(x)] \qquad 2.5.3$$

şeklinde tanımlanan $F(u)$ fonksiyonuna , $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü denir ve bu integral dönüşümü $\mathcal{F}[f(x)]$ ile gösterilir. x değişkeninin tüm reel değerleri için tanımlanan $f(x)$ ana fonksiyonu (orijinal fonksiyon), reel veya kompleks olabilir.

$\mathcal{F}^{-1}[F(u)]$ sembolü ise, ters operatördür.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{iux} du = \mathcal{F}^{-1}[F(u)] \qquad 2.5.4$$

$f(x)$ fonksiyonuna da $F(u)$ fonksiyonunun Ters Fourier Dönüşümü denir. (2.5.3) ve (2.5.4) formüllerine *Fourier dönüşüm çifti* denir.

Örneklere geçmeden önce Mathematica programında Fourier dönüşümü, Fourier sinüs ve Fourier kosinüs dönüşümü ve ters Fourier dönüşümü için kullanılan komutları verelim.

FourierTransform[expr,x,u]	expr nin Fourier dönüşümü
InverseFourierTransform[expr,u,x]	expr nin ters Fourier dönüşümü
FourierSinTransform[expr,x,u]	Fourier sinüs dönüşümü
FourierCosTransform[expr,x,u]	Fourier kosinüs dönüşümü
InverseFourierSinTransform[expr,u,x]	Ters Fourier sinüs dönüşümü
InverseFourierCosTransform[expr,u,x]	Ters Fourier kosinüs dönüşümü

Örnek 2.6: $f(x) = k$ fonksiyonunun $0 < x < a$ ve $f(x) = 0$ iken Fourier dönüşümünü bulunuz.

Çözüm 2.6: (2.5.3) Fourier dönüşümü formülünde, verilen aralıkların kullanırsak,

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a k e^{-iux} dx = \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-iua} - 1}{-iu} \right) = \frac{k(1 - e^{-iua})}{iu\sqrt{2\pi}}$$

elde ederiz. Bu ise bize Fourier dönüşümünün genelde kompleks değerli bir fonksiyon olacağını gösterir.

Örnek 2.7:

$$P_T(x) = \begin{cases} 1 \;, & |x| < T \\ 0 \;, & |x| > T \end{cases}$$

fonksiyonunda özel olarak $T = 1$ alınarak bulunan,

$$f(x) = \begin{cases} 1 \;, & |x| < 1 \\ 0 \;, & |x| > 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulunuz.

Çözüm 2.7: (2.5.3) Fourier dönüşümü formülünden,

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-iuv} dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-iuv} dv$$

bulunur ve $e^{-iuv} = \cos uv - i \sin uv$ olduğundan,

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \cos uv dv - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \sin uv dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{u} \sin uv \Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{u} \cos uv \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin u}{u} - \frac{\sin(-u)}{u} + \frac{i}{u} (\cos u - (\cos(-u)) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin u}{u} + \frac{\sin u}{u} + 0 \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2 \frac{\sin u}{u}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin u}{u}$$

elde edilir. Özel olarak $u = 0$ alınırsa,

$$F(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

bulunur.

$f(x)$ fonksiyonuna uyguladığımız Fourier dönüşümünü Mathematica paket programi ile de bulalım. Önce fonksiyonu tanımlayalım.

<< Calculus‘FourierTransform‘

f = If[-1 < x < 1, 1, 0]

If[-1 < x < 1, 1, 0]

$f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü **FourierTransform** komutu ile,

FourierTransform[f, x, u]

$$\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathtt{Sin[u]}}{\mathtt{u}}$$

olarak buluruz.

Örnek 2.8: $u(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$ birim basamak fonksiyonu olmak üzere, $f(x) = e^{-ax}u(x)$, $a > 0$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulunuz.

Çözüm 2.8:

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-iux} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(a+iu)x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\frac{1}{a+iu})$$

veya

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\frac{a}{a^2+u^2} - i\frac{u}{a^2+u^2})$$

elde edilir.

Örnek 2.9: $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$ olarak tanımlanan Gauss fonksiyonun Fourier dönüşümünü bulunuz.

Çözüm 2.9: $F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-iux} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x^2+iux/a\right)} dx$ integralini $\left(e^{-u^2/4a} e^{u^2/4a}\right)$ ile çarparak,

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/4a} e^{-a\left(x^2+i\frac{ux}{a}-\frac{u^2}{4a^2}\right)} dx$$

$$= e^{-u^2/4a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x+\frac{iu}{2a}\right)^2} dx$$

buluruz. Burada $\sqrt{a}\left(x+\frac{iu}{2a}\right) = t$ dönüşümü yapılırsa,

$$F(u) = e^{-u^2/4a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt/\sqrt{a}$$

Euler integrali elde edilir. Bu integralin değeri $\sqrt{\pi}$ dir. Böylece Gauss fonksi- yonunun Fourier dönüşümü,

$$\mathcal{F}\left[e^{-ax^2}\right] = F(u) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-u^2/4a}$$

olarak bulunur.

FourierTransform komutu ile $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulalım,

```
<< Calculus`FourierTransform`
FourierTransform[Exp[-a*x^2], x, u]
```

$$\frac{e^{-\frac{u^2}{4a}}}{\sqrt{2}\sqrt{a}}$$

Bulduğumuz sonuca **InverseFourierTransform** komutu ile ters dönüşüm uygulayarak fonksiyonun kendisini elde edelim.

```
InverseFourierTransform[%, u, x]
```

$$e^{-a x^2}$$

Fourier Kosinüs ve Fourier Sinüs Dönüşümleri

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{iu(x-v)} dv \right] du$$

Fourier integralini alalım,

I. Eğer $f(x)$ çift fonksiyon ise ,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos uxdu \int_0^\infty f(v) \cos uvdv \qquad 2.5.5$$

yazılabililir.Burada,

$$F_c(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(v) \cos uvdv \qquad 2.5.6$$

olarak alınırsa,

$$\mathcal{F}^{-1}[F_c(u)] = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_c(u) \cos uxdu \qquad 2.5.7$$

bulunur. (2.5.6) eşitliğine Fourier kosinüs dönüşümü, (2.5.6) ve (2.5.7) eşitliklerinin ikisine birden *Fourier kosinüs dönüşüm formülleri* denir.

Örnek 2.10: $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$ olarak tanımlanan fonksiyonun, Fourier kosinüs dönüşümünü bulunuz.

Çözüm 2.10:

$$F_c(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(v) \cos uvdv$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \cos uvdv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{u} \sin uv \Big|_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin u}{u}$$

olarak bulunur.

Verilen fonksiyona Fourier kosinüs dönüşümü uygulamak için **FourierCosTransform** komutunu kullanalım.

f = If[0 < x < 1, 1, 0]

If[0 < x < 1, 1, 0]

FourierCosTransform[f, x, u]

$$\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{Sin[u]}}{\text{u}}$$

II. Eğer $f(x)$ tek fonksiyon ise ,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin uxdu \int_0^\infty f(v) \sin uvdv \qquad 2.5.8$$

yazılabilir. Burada,

$$F_s(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(v) \sin uvdv \qquad 2.5.9$$

olarak alınırsa,

$$\mathcal{F}^{-1}[F_s(u)] = f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_s(u) \sin uxdu \qquad 2.5.10$$

bulunur. (2.5.9) eşitliğine Fourier Sinüs dönüşümü, (2.5.9) ve (2.5.10) eşitliklerinin ikisine birden *Fourier Sinüs dönüşüm formülleri* denir.

Örnek 2.11: $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$ olarak tanımlanan fonksi- yonun, Fourier sinüs dönüşümünü bulunuz.

Çözüm 2.11: (2.5.9) eşitliğindeki formülden, $f(x)$ fonksiyonunun Fourier sinüs dönüşümü,

$$F_s(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(v) \sin uv dv$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \sin uv dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-\frac{1}{u} \cos uv \Big|_0^1 \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1-\cos u}{u} \right)$$

olarak bulunur.

$f(x)$ fonksiyonuna **FourierSinTransform** komutu ile Fourier sinüs dönüşümü uygulayalım.

f = If[0 < x < 1, 1, 0]

If[0 < x < 1, 1, 0]

FourierSinTransform[f, x, u]

$$\frac{2 - 2\,\mathrm{Cos}[u]}{\sqrt{2\pi}\ u}$$

Fourier Dönüşümünün Özelikleri

1) Lineerlik özeliği:

a, b sabitler ve $\mathcal{F}[f_1(x)] = F_1(u)$, $\mathcal{F}[f_2(x)] = F_2(u)$ olmak üzere,

$$\mathcal{F}[af_1(x) + bf_2(x)] = aF_1(u) + bF_2(u) \qquad 2.5.11$$

dir. Gerçekten,

$$\mathcal{F}[af_1(x) + bf_2(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [af_1(x) + bf_2(x)] e^{-iux} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} af_1(x) e^{-iux} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} bf_2(x) e^{-iux} dx$$

$$= aF_1(u) + bF_2(u)$$

bulunur.

2) $a \neq 0, a \in R$ olmak üzere, $\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|} F(\frac{u}{a})$ dir.

Gerçekten,

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-iux} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-i(\frac{u}{a})ax} dx \qquad 2.5.12$$

$ax = v$ dönüşümü yapalım.

$a > 0$ ise,

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-i(\frac{u}{a})v} dv$$

$a < 0$ ise (2.5.12) integrali,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-i(\frac{u}{a})v} \frac{dv}{a} = -\frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-i(\frac{u}{a})v} dv$$

olur. Böylece,

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{u}{a}\right) \qquad 2.5.13$$

elde edilir.

3) Öteleme özeliği: $\mathcal{F}[f(x)] = F(u)$ ise, $\mathcal{F}[f(x-a)] = e^{-iau}F(u)$ dir.

Bu özeliğin doğruluğunu şu şekilde göstebiliriz.

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-iux}dx$$

Burada $x - a = v$ dersek,

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-iu(v+a)}dv$$

$$= e^{-iau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-iuv}dv$$

bulunur. Böylece

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = e^{-iau}F(u) \qquad 2.5.14$$

elde edilir.

5) Türevlerin Fourier dönüşümü:

$f(x)$ n defa türetilebilir, $f(x)$ ve $f^{(n)}(x)$ mutlak integrali olan fonksiyonlar olsun. Ayrıca $f(x)$ ve ilk $(n-1)$ ci mertebeye kadar türevleri $x \to \pm\infty$ için sıfır ise yani,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f^{(v)}(x) = 0 \qquad (v = 0, 1, \ldots (n-1)) \qquad 2.5.15$$

dir. Bundan başka, $\mathcal{F}[f(x)] = F(u)$ ise $f^{\wedge(n)}(x)$ in Fourier dönüşümü,

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (iu)^n F(u)$$

dir.

a) Önce $f'(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü gösterelim.

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-iux}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)e^{-iux}\Big|_{-\infty}^{\infty} + iu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx$$

olur. (2.5.15) gereğince, ilk terim sıfır olup,

$$\mathcal{F}[f'(x)] = iu\,F(u) \qquad 2.5.16$$

bulunur.

b)

$$\mathcal{F}[f''(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f''(x)e^{-iux}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f'(x)e^{-iux}\Big|_{-\infty}^{\infty} + iu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-iux}dx$$

$$= iu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-iux}dx$$

$$= iu[iu\,F(u)]$$

$$\mathcal{F}[f''(x)] = (iu)^2 F(u)$$

olur. Buradan $n.$ mertebeden türevin Fourier dönüşümü,

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (iu)^n F(u) \qquad 2.5.17$$

elde edilir.

c) $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ düzgün parçalı sürekli ve $x \to \infty$ için $f(x)$, $f'(x) \to 0$ fonksiyonlar olsunlar. $f''(x)$ nin kosinüs ve sinüs Fourier dönüşümünü $f(x)$ ve $f'(x)$ değerlerine bağlı olarak hesaplayalım:

$f''(x)$ fonksiyonuna Fourier kosinüs dönüşümü uygulanırsa,

$$\mathcal{F}_c[f''(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f''(x) \cos ux dx$$

olur. Burada kısmi integral alırsak,

$$\mathcal{F}_c[f''(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(x) \cos ux \Big|_0^\infty + u\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f'(x) \sin ux dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(x) \cos ux \Big|_0^\infty + \sqrt{\frac{2}{\pi}} uf(x) \sin ux \Big|_0^\infty - u^2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos ux dx$$

veya $f(x)$ ve $f'(x)$ fonksiyonlarının her ikisi de $x \to \infty$ için sıfıra yaklaşacağından,

$$\mathcal{F}_c[f''(x)] = -[f'(x)]_{x=0} - u^2 F_c(u) \qquad 2.5.18$$

buluruz. Benzer işlemlerle $f''(x)$ fonksiyonunun Fourier sinüs dönüşümü,

$$\mathcal{F}_s[f''(x)] = u[f(x)]_{x=0} - u^2 F_s(u) \qquad 2.5.19$$

olarak bulunur.

6) İntegralin Fourier dönüşümü

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{x} f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(u)}{iu} \qquad 2.5.20$$

Faltung İntegrali

$f_1(x), f_2(x)$ fonksiyonları ile tanımlanan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(x-\tau) d\tau = f(x) \qquad 2.5.21$$

integraline, $(-\infty, \infty)$ aralığında $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonlarının *Faltungu* denir. Simgesel olarak

$$f_1 * f_2 = f(x)$$

şeklinde gösterilir.

Eğer $f_1(x)$, $f_2(x)$ fonksiyonları,mutlak integrallenebilir ve integral, Lebesgue anlamında ise $f_1 * f_2$ Faltungu var olup, mutlak integrallenebilirdir (bütün x değerleri için). İntegral Riemann anlamında ise $f_1(x)$ fonksiyonunun bütün x değerleri için sınırlı, $f_2(x)$ fonksiyonunun mutlak integrallenebilir olması Faltungun varlığı için yeterlidir. O halde $f_1 * f_2$ Faltungu bütün x değerleri için süreklidir.

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(x-\tau) d\tau \qquad 2.5.22$$

Faltung Teoremi

$f_1(x)$, $f_2(x)$ fonksiyonları,mutlak integrallenebilir ve $F_1(u)$, $f_1(x)$ fonksiyonunun, $F_2(u)$ da $f_2(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü ise

$$\mathcal{F}[f_1(x) * f_2(x)] = F_1(u) F_2(u)$$

dır.