T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TERS ÖZ DEĞER PROBLEMİ

Ayşegül KILIÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman

Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN

Temmuz, 2023

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TERS ÖZDEĞER PROBLEMİ

Ayşegül KILIÇ tarafından hazırlanan tez çalışması 11.07.2023 tarihinde aşağıdaki jüritarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN,
Danışman Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Ömer GÖK,
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN,
İstanbul Üniversitesi _____

Danışmanım Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Ters Özdeğer Problemi başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Ayşegül KILIÇ

İmza

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam esnasında fikirleriyle yol gösteren, ahlaki değerlerini örnek aldığım, bilgisinden ve tecrübesinden yararlanırken göstermiş olduğu sabır hoşgörü ve her türlü yardımından dolayı saygıdeğer hocam Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN'a en içten dileklerimle teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca hayatımın her anında şartsız koşulsuz yanımda olan ve desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen anneme, babama ve biricik kardeşime teşekkür ederim.

Ayşegül KILIÇ

İÇİNDEKİLER

SİMGELİSTESİ vi

ÖZET vii

ABSTRACT viii

1 Giriş 1

1.1 Literatür Özeti 1

1.2 Tezin Amacı 1

1.3 Tanımlar ve Teoremler 2

2 Spektrum Davranışı ve Spektral Dataların Bulunması 6

2.1 Hipotez 6

2.2 Ön Çalışmalar 6

3 Problemin İnşası ve Teklik 10

3.1 Temel Denklem 10

3.2 Teklik 15

4 Spektral Datalarla Yeniden Yapılandırma 17

5 Sonuç ve Öneriler 25

Kaynakça 26

TezdenÜretilmiş Yayınlar 27

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
L_2	Karesi İntegrallenebilen Fonksiyonlar Uzayı
H	Hilbert Uzayı
W	Wronskian
O	Sınırlı Değerler
C	Basit Kapalı Eğri

ÖZET

Ters Özdeğer Problemleri

Ayşegül KILIÇ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN

Uygulamalı bilimlerde ve özellikle bazı fizik problemlerinde diferansiyel operatörlerin spektral analizi önemli bir yere sahiptir. Spektral analiz iki başlıkta incelenir:

Düz Problemler ve Ters Problemler.

Biz çalışmamızda Ters Sturm-Liouville Problemini göz önüne aldık.

Gözönüne aldığımız, sınır koşullarından birinde özdeğere sahip, Sturm-Liouville Probleminin spektral özelliklerinden yola çıkarak, özdeğer dizilerini ve norm sabitlerini kullanmak suretiyle, denklemimizdeki "q" potansiyel fonksiyonu ve sınır koşullarımızdaki tüm parametrelerin çözülebilirliği için gerekli ve yeterli koşulları elde ettik.

Anahtar Kelimeler: Ters problem, Sturm-Liouville denklemi

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

Inverse Eigenvalue Problem

Ayşegül KILIÇ

Department of Mathematics

Msc.Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞKAN

Spectral analysis of differential operators has an important place in applied sciences and especially in some physics problems. Spectral analysis is studied under two headings: direct problems and inverse problems.

In our study, we considered the Inverse Sturm-Liouville Problem.

Starting from the spectral properties of the Sturm-Liouville Problem, which has an eigenvalue in one of the boundary conditions we have considered, using eigenvalues equences and norm constants, we have obtained the necessary and sufficient conditions forthe "q" potential function in our equation and the solubility of all parameters in our boundary conditions.

Keywords: Inverse Problem, Sturm-Liouville Equation

1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Spektral analizde ters problemler, operatörlerin spektral özelliklerinden geri elde edildiği problemlerdir. Ters problemler genelde matematik, fizik, elektronik, jeoloji ve doğa bilimlerinin diğer dallarında kullanılır. Örneğin; klasik mekanikte direkt problem güç bilgisinden parçacıkların yörüngelerinin tespit edilmesinde kullanılırken, ters problem yörüngelerin bilgisinden gücün belirlenmesi de kullanılmaktadır. Bu anlamda Newton'un, gezegenlerin yörüngelerinden yer çekimi kuvvetini hesaplaması da ters problem çözümüne örnek olarak gösterilebilir. Tomografik görüntülemede ters problemin kullanılması ise görüntülemenin gürültüden arındırılıp yeniden yapılandırılması işlemlerinde kullanılır. Genel olarak ters problemde amaç bir sistemin fiziksel özellikleri hakkında bilgi edinmek için salınım sisteminin frekanslarının incelenmesi işlemidir.

Ters spektral problemlerle ilgili esas sonuçlar XX. yy.'ın ikinci yarısından sonra elde edilmiş ve en önemli başarı Sturm-Liouville operatörü ile başlamıştır. İlk çalışma J. Liouville ve Ch. Sturm tarafından bir ipin titreşimini tanımlayan denklemin çözümü için yapılmış olup Ters Sturm-Liouville çözümünde,dönüşüm operatör yöntemi, kontür integral yöntemiyle bağlantılı spektral eşleme yöntemi gibi birçok yöntem kullanılmaktadır.

1.2 Tezin Amacı

Sınır koşullarının birinde öz değer içeren Sturm-Liouville Probleminin öz değer dizilerinden ve norm sabitlerinden yararlanarak, yani spektral verileri kullanarak denklemimizdeki potansiyel fonksiyonunu ve sınır koşullarımızdaki tüm parametrelerin çözülebilirliğini göstermektir.

1.3 Tanımlar ve Teoremler

1.3.1 Sturm-Liouville Problemi:$p(x), p'(x), q(x), r(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere;

$$-\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]' + q(x)y = \lambda r(x)y,$$

$$c_1 y(a) + c_2 y'(a) = 0,$$

$$d_1 y(b) + d_2 y'(b) = 0,$$

denklemi ile yukarıdaki koşulları sağlayan problemi dikkate alalım. Burada$r(x)$ fonksiyonuna yoğunluk fonksiyonu denir. Ayrıca $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ ve $d_1^2 + d_2^2 \neq 0$'dır. Bu şekilde verilen sınır değer problemine, Sturm-Liouville problemi denir.

Eğer $q(x)$ reel değerli ve sürekli fonksiyon; $\frac{c_1}{c_2}$ ve $\frac{d_1}{d_2}(c_2, d_2 \neq 0)$sayıları da sonlu ise probleme regüler Sturm-Liouville problemi, bu şartlardan herhangi biri bozulduğunda veya $[a, b]$ aralığı sonsuzluk içerdiğinde bu probleme singüler Sturm-Liouville problemi denir.

1.3.2 Ters Sturm-Liouville problemi: Sturm-Liouville probleminde λ öz değerleri ve onlara karşı gelen özfonksiyon bilindiğinde $q(x)$ potansiyel fonksiyonunun bulunması şeklindeki probleme Ters Sturm-Liouville problemi denir.

1.3.3 Operatör: Tanım ve değer kümesi vektör uzayı olan dönüşümlere operatör denir.

1.3.4 Lineer Operatör: Bir T operatörü; $D(T)$tanım bölgesi ve $R(T)$ değer bölgesi birer vektör uzayı olsun. $\forall\, x, y \epsilon D(T)$ ve her a skaleri için;

$$T(x + y) = T(x) + T(y)$$

$$T(ax) = aT(x)$$

özelliklerine sahipse bu operatöre lineer operatör denir.

1.3.5 İç Çarpım Uzayı:$K = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere X bir vektör uzayı olsun.

$$(\cdot,\cdot): X \times X \to K$$

dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise $(\cdot,\cdot)$'ye X üzerinde bir iç çarpım, $\big(X, (\cdot,\cdot)\big)$ ikilisine de içi çarpım uzayı (ön Hilbert uzayı) denir.

i. $\forall x \in X$ için $(x, x) \geq 0$ ve$(x, x) = 0 \leftrightarrow x = 0$;

ii. $\forall x, y \in X$ için (x, y)=$\overline{(y, x)}$(kompleks eşlenik);

iii. $\forall x, y \in X$ ve $a \in K$için $(ax, y) = a(x, y)$;

iv. $\forall x, y, z \in X$ için $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

1.3.6 Hilbert Uzayı: Bir $\big(X, (\cdot,\cdot)\big)$ iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisi norma göre yakınsak ise, bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir.

1.3.7 Sobolev Uzayı: Çoklu indis için $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ ve genelleştirilmiş türev için $D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1}, D_2^{\alpha_2}, \dots, D_n^{\alpha_n}$; $D_k^m = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^m$ sembolleri kullanılacak olursa,

$W^{m,p}(\Omega; H) = \{u \in L^p(\Omega; H): D^{\alpha}u \in L^p(\Omega; H), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$[1]uzayı;

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega;H)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \left\|\|D^{\alpha}u\|\right\|_{L^p(\Omega;H)}^p\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ max_{0\leq|\alpha|\leq m}\|D^{\alpha}u\|_{\infty}\ , & p = \infty \end{cases}$$

normuyla Ω üzerinde Sobolev uzayı olarak isimlendirilir.

1.3.8 Özdeğer ve Özvektör:

L bir kompleks V vektör uzayında bir operatör olsun. Eğer $Lx = \lambda x$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir $x \in V$ vektörü varsa λ kompleks değerine L'nin bir özdeğeri denir. $Lx = \lambda x$ eşitliğini sağlayan $\forall x$ vektörüne de λ özdeğerine karşılık gelen özvektör denir

1.3.9 Norm: $(X, (\cdot,\cdot))$bir iç çarpım uzayı ve $x \in X$ olsun. Bir $x \in X$ vektörünün normu;

$$\|x\| = (x, x)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanır.

1.3.10 Çekirdek Kümesi: $T: D(T) \to R(T)$ lineer operatör olsun.T altında $R(T)$'nin özdeş elemanına dönüşen elemanlarının kümesine T'nin çekirdeği denir ve $\text{Çek}T$ ile gösterilir.

1.3.11 Rezidü Teoremi: $f(z); D$ bölgesinde analitik bir fonksiyon ve $\gamma; D$'nin üzerinde tekil nokta bulunmayan kapalı bir eğri olsun. $f(z)$'nin γ içindeki tekil noktaları $z_1, z_2, \dots, z_n$ ise bu noktalardaki rezidülerin toplamı;

$$\sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k) = \frac{1}{2\pi i}\oint f(z)dz$$

şeklindedir.

1.3.12 Bessel Eşitsizliği: $f, 2\pi$- periyodik ve $[-\pi, \pi]$ üzerinde Riemann integrallenebilen bir fonksiyon ve

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta$$

Fourier katsayıları olsun. Bu durumda,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta$$

eşitsizliği gerçeklenir.

1.3.13 Rouche Teoremi: f ve g fonksiyonları basit kapalı bir Ceğrisi üzerinde ve içinde analitik $|f(z)| > |g(z)|$ olsun. Bu durumda f ve $f+g$ fonksiyonları C içinde aynı sayıda sıfıra sahiptir.

1.3.14 Hadamard Teoremi: f; sonlu p mertebeden bir fonksiyon olsun. $a_1, a_2, \ldots; f(z)$ fonksiyonunun sıfır olmayan kökleri, $P_q(z)$ derecesi $q \leq \rho$ olan bir polinom, m orijindeki kökün en çok olduğu değer ve $p \leq \rho$ ise

$$f(z) = z^m e^{P_q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n}, p\right)$$

şeklinde yazılır.

1.3.15 Green Fonksiyon:

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

$$a_0 y(a) + a_1 y'(a) + \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0$$

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) + b_0 y(b) + b_1 y'(b) = 0$$

$[a,b] \times [a,b]$ karesel bölgesinde tanımlı ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $G(x,t)$ fonksiyonuna yukarıdaki homojen sınır-değer problemi için Green fonksiyonu denir.

I. $G(x,t)$, $[a,b] \times [a,b]$bölgesinde süreklidir.

II. $\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}$, $a \leq x \leq tvet \leq x \leq b$üçgensel bölgelerinde süreklidir. Ayrıca;

$$\frac{\partial G(t^+,t)}{\partial x} - \frac{\partial G(t^-,t)}{\partial x} = \frac{1}{p_0(t)}$$

şeklindedir.

III. G(x, t) fonksiyonu $\forall t \in [a,b]$ için , $a \leq x < t$ ve , $t < x \leq b$ aralıklarında

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

homojen denklemini ve

$$a_0 y(a) + a_1 y'(a) + \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0$$

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) + b_0 y(b) + b_1 y'(b) = 0$$

homojen sınır koşullarını sağlar.

2

SPEKTRUM'UN DAVRANIŞI VE SPEKTRAL DATALARIN BULUNMASI

2.1 Hipotez

Çalışmamızdaözdeğerlerin sınır koşullarında lineer olarak yer aldığı problemler kapsamlı bir şekilde inceledik. Çeşitli benzersizlik teoremleri [4,5,9,10] ile kanıtlanmış olup bu yazıda da benzersiz çözülebilirliğin bir başka ispatını yaptık.

Sınır koşullarındaki parametrelerin bir spektrum ve bir dizi norm sabitinden yararlanarak çözülebilirliğini göstererek sınır koşullarında parametreye doğrusal bağlılığı içeren ters problemiele aldık.

Bu amaçla;

$$\ell y := -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x) x\epsilon[0,\pi] \qquad \dots (2.1)$$

denklemi ve aşağıdaki sınır koşulları için ters özdeğer problemini inceledik.

$$\cos\alpha\, y'(0) - \sin\alpha\ y(0) = 0, \qquad \dots (2.2)$$

$$\lambda[y'(\pi) + y(\pi)] = \cos\beta\ y'(\pi) + \sin\beta\ y(\pi), \qquad \dots (2.3)$$

$q(x) \in L_2(0,\pi)$ reel değerli bir fonksiyon $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\rho = \cos\beta - \sin\beta$ olmak üzere bu problemi $\mathrm{P}(\mathrm{q}, \cos\alpha, \sin\alpha, \cos\beta, \sin\beta)$ile gösterelim.

$\rho < 0$ olduğu durumda (2.1)-(2.3) problemi Pontryagin uzayında kendine eşlenik bir operatörle ilişkilendirilir ve tüm öz değerler reel değerli olmayabilir (Bakınız [2,3]).

2.2 Ön Çalışmalar

Bu bölümde öz değer ve norm sabitleri için gerekli koşulların neler olduğunu ve bunların nasıl elde edildiğini gösterdik.

$P(x,\lambda)$ ve $Q(x,\lambda)$ (2.1) denkleminin;

$$P(0,\lambda) = \cos\alpha, P'(0,\lambda) = \sin\alpha,$$
$$Q(\pi,\lambda) = \cos\beta - \lambda, Q'(\pi,\lambda) = \lambda - \sin\beta \qquad \dots (2.4)$$

koşullarını sağlayan çözümleri olsunlar.

$$w(\lambda) = P(x,\lambda)Q'(x,\lambda) - P'^{(x,\lambda)}Q(x,\lambda)$$

şeklinde$x\epsilon[0,\pi]$'den bağımsız $w(\lambda)$ fonksiyonunu tanımlayalım. $w(\lambda)$ göz önüne aldığımız özdeğer probleminin sıfır olan özdeğerlerine sahip bir tam fonksiyondur. Özdeğerler kümesi sayılabilirdir, gerçek sayılardan oluşur ve her λ_n özdeğeri için,

$$Q(x,\lambda_n) = k_n P(x,\lambda_n) \qquad k_n \neq 0 \qquad \ldots(2.5)$$

olacak şekilde bir k_n sayısı vardır.

$H = L_2(0,\pi) \oplus \mathbb{C}$ Hilbert uzayında iç çarpımı tanımlayalım.

$$A = \begin{pmatrix} A_1(x) \\ A_2 \end{pmatrix} \in H, \qquad B = \begin{pmatrix} B_1(x) \\ B_2 \end{pmatrix} \in H \text{ olmak üzere;}$$

$$(A,B) \coloneqq \int_0^{\pi} A_1(x)\,\overline{B_1(x)}dx + \frac{1}{\rho}A_2\overline{B_2}.$$

$T(A)$ operatörünü ise;

$$D(T) = \{A\epsilon H |\ A_1,\ A_1'\epsilon\mathbb{C}[0,\pi], \ell A_1 \epsilon L_2[0,\pi], \cos\alpha\, A_1'(0) - \sin\alpha\, A_1(0) = 0,$$
$$A_1 = A_1'(\pi) + A_1(\pi)\}$$

olmak üzere;

$$T(A) = \begin{pmatrix} -A_1'' + q(x)A_1 \\ \cos\beta\, A_1'(\pi) + \sin\beta\, A(\pi) \end{pmatrix}$$

biçimdeifade edelim.

Böylece;

$$\phi_n = \begin{pmatrix} P(x,\lambda_n) \\ P'(\pi,\lambda_n) + P(\pi,\lambda_n) \end{pmatrix}$$

olur.$n \neq m$ için $(\phi_n, \phi_m) = 0$; biçimindeki $\{\phi_n, \phi_m\}$ A'nın ortogonal özvektörleridir. Ayrıca normlama sabitlerini de,

$$\gamma_n = \|\phi_n\|^2 = \int_0^{\pi} P^2(x,\lambda_n)\,dx + \frac{[P'(\pi,\lambda_n) + P(\pi,\lambda_n)]^2}{\rho}$$

eşitliği ile tanımlarız.

Burada $\lambda_n, \gamma_{n_{n\geq 0}}$ değerleri (2.1)-(2.3) probleminin spektral verileridir.

Lemma 2.2.1 $\dot{w}(\lambda) = \frac{dw(\lambda)}{d\lambda}$ olmak üzere

$$\dot{w}(\lambda_n) = k_n\gamma_n \qquad \ldots(2.6)$$

eşitliği sağlanır.

İspat Green özdeşliğini kullanarak aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$\int_0^\pi [P(x,\lambda_n)LQ(x,\lambda) - Q(x,\lambda)LP(x,\lambda_n)]dx = -[P(x,\lambda_n)Q'(x,\lambda) - Q(x,\lambda)P'(x,\lambda_n)]_0^\pi.$$

$$\int_0^\pi [P(x,\lambda_n)\lambda Q(x,\lambda) - Q(x,\lambda)\lambda P(x,\lambda_n)]dx = [Q(x,\lambda)P'(x,\lambda_n) - P(x,\lambda_n)Q'(x,\lambda)]_0^\pi.$$

(2.4) ve (2.5) eşitliklerini kullanarak;

$$(\lambda - \lambda_n)\int_0^\pi [P(x,\lambda_n)Q(x,\lambda)]dx = [Q(x,\lambda)P'(x,\lambda_n) - Q'(x,\lambda)P(x,\lambda_n)]_0^\pi$$

yazabiliriz. Burada aşağıdaki işlemler sonucunda,

$$\begin{aligned}(\lambda - \lambda_n)\int_0^\pi &[P(x,\lambda_n)Q(x,\lambda)]dx \\ &= [Q(x,\lambda)P'(x,\lambda_n) - P(x,\lambda_n)Q'(x,\lambda) + Q(x,\lambda)P'(x,\lambda) - Q(x,\lambda)P'(x,\lambda) \\ &\quad + Q'(x,\lambda)P(x,\lambda) - Q'(x,\lambda)P(x,\lambda)]_0^\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda - \lambda_n)\int_0^\pi &[P(x,\lambda_n)Q(x,\lambda)]dx \\ &= [Q(x,\lambda)P'(x,\lambda) - Q'(x,\lambda)P(x,\lambda) + Q(x,\lambda)\{P'(x,\lambda_n) - P'(x,\lambda)\} \\ &\quad - Q'(x,\lambda)\{P(x,\lambda_n) - P(x,\lambda)\}]_0^\pi\end{aligned}$$

$$= w(\lambda) + Q(\pi,\lambda)\{P'(\pi,\lambda_n) - P'(\pi,\lambda)\} - Q'(\pi,\lambda)\{P(\pi,\lambda_n) - P(\pi,\lambda)\}$$
$$-Q(0,\lambda)\{P'(0,\lambda_n) - P'(0,\lambda)\} + Q'(0,\lambda)\{P(0,\lambda_n) - P(0,\lambda)\}$$

$$= w(\lambda) + (\cos\beta - \lambda)\left[\frac{1}{k_n}(Q'(\pi,\lambda_n) - Q'(\pi,\lambda)\right] - (-\sin\beta + \lambda)[\frac{1}{k_n}(Q(\pi,\lambda_n) - Q(\pi,\lambda)]$$

$$= w(\lambda) + \frac{\cos\beta - \lambda}{k_n}(\lambda_n - \lambda) + \frac{\sin\beta - \lambda}{k_n}(\lambda_n - \lambda) = w(\lambda) + \frac{\lambda - \lambda_n}{k_n}(\sin\beta - \cos\beta)$$

ifadesini yazabiliriz. Buradan da;

$$\frac{w(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} = \int_0^\pi [P(x,\lambda_n)Q(x,\lambda)]dx + \frac{\rho}{k_n}$$

elde edilir ve $\lambda \to \lambda_n$ iken bu eşitlik bize (2.6) eşitliğini verir.

Lemma 2.2.2 $P(x,\lambda_n), Q(x,\lambda_n)$ öz fonksiyonları ve λ_n özdeğerleri reel sayıdır. Ayrıca $w(\lambda)$ ifadesinin tüm sıfırları basittir yani $\dot{w}(\lambda) \neq 0$.

Teorem 2.2.1 İncelediğimiz denklemin asimptotik değerleri aşağıdaki şekildedir.

$$s_n := \sqrt{\lambda_n} = n - 1 + \frac{\vartheta}{n\pi \cos\alpha} + \frac{\xi_n}{n}, \{\xi_n \epsilon I_2\} \dots (2.7)$$

$$\gamma_n = (\cos\alpha)^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\xi_n'}{n}\right), \{\xi_n' \epsilon I_2\} \dots (2.8)$$

Burada ϑ; aşağıdaki gibidir.

$$\vartheta = \sin\alpha + \cos\alpha + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(x)dx$$

İspat $D_\delta = \left\{s: \varepsilon \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \tau \geq 0, |s| \geq \delta\right\}$ kümesi için $s = \varepsilon + \tau i$ biçiminde tanımlansın. $P(x, \lambda)$ ifadesi (2.1) denkleminin bir çözümü olduğundan aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$P(x,\lambda) = \cos\alpha \cos sx + \frac{\sin sx}{s}\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt\right) + \frac{\cos\alpha}{2s}\left(\int_0^x \sin s(x-2t)\, q(t)dt\right) + O\left(\frac{e^{\tau|x|}}{|s|^2}\right)$$

$$P'(x,\lambda) = -s\cos\alpha \sin sx + \cos sx\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt\right) + \frac{\cos\alpha}{2s}\left(\int_0^x \cos s(x-2t)\, q(t)dt\right) + O\left(\frac{e^{\tau|x|}}{|s|}\right)$$

Yukarıdaki ifadelerde $x = \pi$ için (2.4) eşitliklerini kullanarak;

$$w(\lambda) = -s^3 \cos\alpha \sin s\pi + s^2 \cos s\pi\left(\cos\alpha + \sin\alpha + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt\right) + s^2 \cos\alpha\, I(s) \dots (2.9)$$

biçiminde yazılır. Burada,

$$I(s) = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\cos s(\pi - 2t)dt + O\left(\frac{e^{\tau|x|}}{|s|}\right) \text{şeklindedir.}$$

Şimdi Bessel eşitsizliğini kullanarak (2.7) ve (2.8) elde ederiz.

$w(\lambda)$ fonksiyonunun mertebesinin $1/2$ olduğundan Hadamard teoremini kullanarak (2.9) eşitliğini aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$w(\lambda) = -\pi(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)\prod_{n=2}^{\infty}\frac{\lambda_n - \lambda}{(n-1)^2}$$

3

PROBLEMİN İNŞASI VE TEKLİK

Bu bölümde (1.1) denkleminin $\cos\alpha\cos\sqrt{\lambda}x$ fonksiyonuna karşılık gelen çözümünü ve çözüme dönüştüren operatörün çekirdeğinin Gel'fald-Levitan-Marchenko tipi integral denklemini karşıladığını gösterdik. Ayrıca (1.1)-(1-3) sınır-değer probleminin benzersiz bir spektrumdan ve norm sabitlerinde belirleneceğini gösterdik.

3.1 Temel Denklem

Teorem3.1.1. $h(x) \in \mathcal{AC}[0,\pi]$olsun. Aşağıdaki gibi gösterilen $h(x)$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında düzgün yakınsar.

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{\gamma_n} \int_0^{\pi} h(t)P(t,\lambda_n)dt)P(x,\lambda_n)$$

İspat

$$G(x,t,\lambda) \coloneqq \frac{1}{w(\lambda)} \begin{cases} P(x,\lambda)Q(t,\lambda) & 0 \le x \le t \\ Q(x,\lambda)P(t,\lambda) & t \le x \le \pi \end{cases}$$

$$U(x,\lambda) \coloneqq \int_0^{\pi} G(x,t,\lambda)h(t)dt = \frac{1}{w(\lambda)}(Q(x,\lambda)\int_0^{x} P(t,\lambda)h(t)dt + P(x,\lambda)\int_x^{\pi} Q(t,\lambda)h(t)dt)$$

$G(x,t,\lambda)$ve $U(x,\lambda)$ fonksiyonunu ele alalım.

$G(x,t,\lambda)$; $P(q,\cos\alpha\,,\sin\alpha\,,\cos\beta\,,\sin\beta)$ sınır değer probleminin Green fonksiyonu olarak adlandırılır. Burada $G(x,t,\lambda)$, Sturm-Liouville operatörü için ters operatörün çekirdeğidir. Yani $U(x,\lambda)$;

$$\ell U - \lambda U + h(x) = 0$$
$$\cos\alpha\, U'(0) - \sin\alpha\, U(0) = 0,$$
$$\lambda[U'(\pi) + U(\pi)] = \cos\beta\ U'(\pi) + \sin\beta\, U(\pi),$$

sınır-değer probleminin çözümüdür. (2.5) eşitliğini ve lemma 2.2.2'yi kullanarak,

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} U(x,\lambda) = \frac{1}{\dot{w}(\lambda)}\left(Q(x,\lambda_n)\int_0^x P(t,\lambda_n)h(t)dt + P(x,\lambda_n)\int_x^\pi Q(t,\lambda_n)h(t)dt \right)$$

$$= \frac{k_n}{\dot{w}(\lambda)} P(x,\lambda_n)\int_0^\pi P(t,\lambda_n)h(t)dt = \frac{P(x,\lambda_n)}{\gamma_n}\int_0^\pi P(t,\lambda_n)h(t)dt$$

eşitliğini hesaplarız. Burada $P(x,\lambda)$ ve $Q(x,\lambda)$ (2.1) denkleminin çözümleri olduğundan;

$$U(x,\lambda) = -\frac{1}{\lambda w(\lambda)}\left(Q(x,\lambda)\int_0^x (-P''(t,\lambda) + q(t)P(t,\lambda))h(t)dt \right.$$

$$\left. + P(x,\lambda)\int_0^x (-Q''(t,\lambda) + q(t)Q(t,\lambda))h(t)dt \right)$$

şeklinde yazabilir ve kısmi integrasyon işlemleriyle ifadeyi,

$$U(x,\lambda) = \frac{h(x)}{\lambda} + \frac{Z(x,\lambda)}{\lambda}$$

biçimine dönüştürebiliriz. Burada;

$$Z(x,\lambda) = \frac{1}{w(\lambda)}[Q(x,\lambda)\int_0^x P'(t,\lambda)h'(t)dt + P(x,\lambda)\int_x^\pi Q'(t,\lambda)h'(t)dt + \sin\alpha\, h(0)Q(x,\lambda)$$

$$-(\lambda - \sin\beta)\, h(\pi)P(x,\lambda) + Q(x,\lambda)\int_0^x P(t,\lambda)q(t)h(t)dt + P(x,\lambda)\int_x^\pi Q(t,\lambda)q(t)h(t)dt]$$

şeklindedir.

$P(x,\lambda)$,$Q(x,\lambda)$ ve $w(\lambda)$ için bulduğumuz asimptotik değerleri kullanarak aşağıdaki eşitlikler kanıtlanabilir.

$$\lim_{|s|\to\infty} \max_{0\le x\le\pi} |Z(x,\lambda| = 0$$

$s \in G_\delta$ olup δ>0 olacak şekilde küçük δ değerleri için,

$G_\delta = \{s: |s-n| \ge \delta,\ n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ şeklindedir. Eğrisel integral kullanarak

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} U(x,\lambda)\, d\lambda\,, \qquad C_n = \left\{\lambda: \left|\lambda\right| = \left(N - {}^1\!/_2\right)^2\right\}$$

yazılır. Sahip olduğumuz yukarıdaki eşitliklerden,

$$I_n(x) = h(x) + \varepsilon_n(x), \qquad \lim_{N\to\infty} \max_{0\le x\le\pi}|\varepsilon_N(x)| = 0 \text{ olur.}$$

Diğer taraftan rezidü hesabını kullanarak;

$$I_n(x) = \sum_{n=0}^{N}(\frac{1}{\gamma_n}\int_0^{\pi} h(t)P(t,\lambda_n)dt)P(x,\lambda_n)$$

elde ederiz. Son iki eşitlikten teoremin ispatlanmış olur.

Lemma 3.1.1

$a(x) \in W_2^1(0,\pi)$ olmak üzere;

(2.7), (2.8) ve $\gamma_n \neq 0$ koşullarını sağlayan $\{s_n, \gamma_n\}_{n\ge 0}$ spektral verileri için;

$$a(x) := \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\alpha\cos s_n x}{\gamma_n} - \frac{\cos\alpha\cos(n-1)x}{\alpha_{n-1}^0}\right)$$

olur. Burada;

$$\alpha_n^0 = cos^2\alpha\begin{cases}\frac{\pi}{2} & n\ge 1\\ \pi & n=0\end{cases}$$

şeklindedir.

$F(x,t)$'yi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$F(x,t) = \frac{(\cos\alpha)^2\cos s_0 x\cos s_0 t}{\gamma_0}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(\cos\alpha)^2\cos s_n x\cos s_n t}{\gamma_n} - \frac{(\cos\alpha)^2\cos(n-1)x\cos(n-1)t}{\alpha_{n-1}^0}). \qquad \ldots(3.1)$$

Lemma 3.1.1'i kullanırsak;

$$F(x,t) = \frac{(\cos\alpha)^2\cos s_0 x\cos s_0 t}{\gamma_0} + \frac{a(x+t)+a(x-t)}{2}$$

biçiminde yazabiliriz. Ayrıca Lemma 3.1.1 bize $F(x,t)$ fonksiyonunun sürekli ve $\frac{d\,F(x,x)}{dx} \in \mathcal{L}_2(0,\pi)$ olduğunu ifade eder ve dönüşüm operatörlerini kullanarak aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$P(x,\lambda) = \cos\alpha \cos sx + \int_0^x \cos\alpha\, K(x,t) \cos st\, dt \qquad \ldots (3.2)$$

$$\cos\alpha \cos sx = P(x,\lambda) + \int_0^x H(x,t)\, P(t,\lambda) dt \qquad \ldots (3.3)$$

Yukarıda $K(x,t)$ ve $H(x,t)$reel değerli sürekli fonksiyonlar olmak üzere,

$$K(x,x) = \tan\alpha + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\, dt. \qquad \ldots \ (3.4)$$

şeklindedir.

Teorem 3.1.2 Her $x\epsilon[0,\pi]$ için çekirdek $K(x,t)$ fonksiyonu aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$F(x,t) + K(x,t) + \int_0^x K(x,\tau)F(\tau,t)d\tau = 0 \quad 0 < t < x \qquad \ldots (3.5)$$

İspat

(3.2) ve (3.3) eşitliklerini kullanarak,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{P(x,\lambda_n)\cos\alpha\cos s_n t}{\gamma_n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\left[\frac{\cos^2\alpha\cos s_n x\cos s_n t}{\gamma_n} + \frac{\cos\alpha\cos s_n t}{\gamma_n}\int_0^x K(x,\tau)\cos\alpha\cos s_n\tau d\tau\right].$$

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{\cos\alpha\cos s_n t\, P(x,\lambda_n)}{\gamma_n} = \sum_{n=0}^{N}\left[\frac{P(x,\lambda_n)P(t,\lambda_n)}{\gamma_n} + \frac{P(x,\lambda_n)}{\gamma_n}\int_0^x H(t,\tau)P(\tau,\lambda_n)d\tau\right].$$

Öyleyse;

$\phi_N(x,t) = I_N(x,t) + I'_N(x,t) + I''_N(x,t) + I'''_N(x,t)$ yazabiliriz.

Burada;

$$\phi_N(x,t) = \sum_{n=0}^{N}\frac{P(x,\lambda_n)P(t,\lambda_n)}{\gamma_n} - \sum_{n=0}^{N-1}\frac{\cos^2\alpha\cos nx\cos nt}{\alpha_n^0}$$

$$I_N(x,t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\cos^2\alpha \cos s_n x \cos s_n t}{\gamma_n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\cos^2\alpha \cos s_n x \cos s_n t}{\alpha_n^0}$$

$$I'_N(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\cos\alpha \cos nt}{\alpha_n^0} \int_0^x K(x,\tau)\cos\alpha \cos n\tau \, d\tau$$

$$I''_N(x,t) = \int_0^x K(x,\tau)\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{\cos^2\alpha \cos s_n x \cos s_n t}{\gamma_n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\cos^2\alpha \cos s_n x \cos s_n t}{\alpha_n^0}\right] d\tau$$

$$I'''_N(x,t) = -\sum_{n=0}^{N} \frac{P(x,\lambda_n)}{\gamma_n} \int_0^t H(t,\tau)P(\tau,\lambda_n)d\tau$$

şeklindedir. $h(x)$ mutlak sürekli bir fonksiyon olmak üzere Teorem 3.1.1'i kullanarak;

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^\pi h(t)\phi_N(x,t)dt = 0$$

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^\pi h(t)I_N(x,t)\,dt = \int_0^\pi h(t)F(x,t)dt$$

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^\pi h(t)I'_N(x,t)\,dt = \int_0^\pi h(t)K(x,t)dt$$

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^\pi h(t)I''_N(x,t)\,dt = \int_0^\pi h(t)\left[\int_0^x K(x,\tau)F(\tau,t)d\tau\right]dt$$

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^\pi h(t)I'''_N(x,t)\,dt = -\int_0^\pi h(t)H(x,t)dt$$

eşitlikleri bulunur.

$x < t$ olduğu durumlarda $K(x,t) = H(x,t) = 0$olur. Ayrıca $h(x)$keyfi seçilebildiğinden,

$$F(x,t) + K(x,t) + \int_0^x K(x,\tau)F(\tau,t)d\tau - H(t,x) = 0$$

elde ederiz.

$x > t$ olduğunda da denklem (3.5) sağlar ve ispat tamamlanır.

3.2 Teklik

Lemma 3.2.1 Her $x\epsilon[0,\pi]$için (3.5) denkleminin tek bir $K(x,t) \in \mathcal{L}_2(0,x)$çözümü vardır.

İspat İspat için

$$g(x) + \int_0^x F(\tau,t)g(\tau)d\tau = 0$$

homojen denkleminin yalnızca $g(t) = 0$ trivial(aşikar) çözüme sahip olduğunu göstermek yeterlidir. $g(t)$ yukarıdaki denklemin çözümü ayrıca $g(t) = 0 \quad t \in (x,\pi)$ olsun. Öyleyse ya

$$\int_0^x g^2(t)dt + \int_0^x \int_0^x F(\tau,t)g(\tau)g(t)d\tau dt = 0$$

ya da

$$\int_0^x \cos^2\alpha\, g^2(t)dt + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n}\left(\int_0^x g(t)\cos\alpha\, coss_n t dt\right)^2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^0}\left(\int_0^x g(t)\cos\alpha\, coss_n t dt\right)^2$$

olur.

Parseval eşitliğini kullanırsak;

$$\int_0^x g^2(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^0}\left(\int_0^x g(t)\cos\alpha\, coss_n t dt\right)^2$$

yazabiliriz ayrıca $\gamma_n > 0$ olduğunu dikkate alırsak

$$\int_0^x g(t)\cos\alpha\, coss_n t dt = 0 \quad n \geq 0$$

bulunur.

$\{\cos\alpha\cos s_n t\}, \mathcal{L}_2(0,\pi)$ kümesinde tamdır dolayısıyla sıfırdan farklı değerler alır. Buradan $g(t) = 0$ elde edilir ve ispat tamamlanır.

Lemma 3.2.2 (10, Lemma 1.5.2)

$A(t,\tau,\alpha)$ ve $h(t,\alpha)$'nin sürekli fonksiyonlar olduğu;

$$y(t,\alpha)+\int_a^b A(t,\tau,\alpha)y(\tau,\alpha)d\tau = h(t,\alpha), \qquad a\le x\le b, \qquad \ldots(3.6)$$

integral denklemini düşünelim. Bazı sabit $\alpha=\alpha_0$ için;

$$z(t)+\int_a^b A_0(t,\tau)z(\tau)d\tau = 0, \qquad A_0(t,\tau):=A(t,\tau,\alpha_0),$$

homojen denkleminin yalnızca aşikarçözümü olduğunu varsayalım. O zaman$\alpha=\alpha_0$ noktasının bazı komşuluklarında (3.6) denkleminin $y(t,\alpha)$ çözümü t ve a üzerinde süreklidir. Ayrıca $y(t,\alpha)$ fonksiyonu $A(t,\tau,\alpha)$ile $h(t,\alpha)$ fonksiyonları gibi düzgündür.

Teorem 3.2.1

$P(q,\sin\alpha,\cos\alpha,\ \cos\beta,\sin\beta)\ ve\ P\big(\tilde{q},\sin\tilde{\alpha},\cos\tilde{\alpha},\cos\tilde{\beta},\sin\tilde{\beta}\big)$ doğrusal olarak spektral parametreye bağlı olan ve bir sınır koşulu olan iki sınır değer problem ve $\lambda_n=\widetilde{\lambda_n},\ \gamma_n=\widetilde{\gamma_n}$, $n\ge 0$ olsun.

Burada $(0,\pi)$ aralığının hemen hemen her noktasında $q(x)=\tilde{q}(x)$ ayrıca

$$\sin\alpha=\sin\tilde{\alpha}, \qquad \cos\alpha=\cos\tilde{\alpha}, \qquad \cos\beta=\cos\tilde{\beta}, \qquad \sin\beta=\sin\tilde{\beta}$$

şeklindedir.

İspat

(3.1) formülüne göre $F(x,t)=\tilde{F}(x,t)dir$. Sonrasında (3.5) ana denkleminden $K(x,t)=\tilde{K}(x,t)$ elde edilir. (3.4) eşitliğinde,$(0,\pi)$ aralığının hemen hemen her noktasında,$\sin\alpha=\sin\tilde{\alpha}\ ve\ q(x)=\tilde{q}(x)$olduğu gösterilir. Ayrıca (3.2)'den $P(x,\lambda_n)=\tilde{P}(x,\lambda_n)$bulunur. (2.9) dikkate alınırsa $w(\lambda)\equiv\tilde{w}(\lambda)$ve $k_n=\widetilde{k_n}$ olduğu görülür. Son olarak (2.4) ve (2.5) kullanılarak teoremin geri kalanı ispat edilir.

4

SPEKTRAL VERİLERLE YENİDEN YAPILANDIRMA

Bu bölümde ise spektral özelliklerden problemin ve katsayıların yeniden oluşturulmasını Gel'fald ve Levitan'a benzer bir yöntem kullanarak gerçekleştirdik.

Aşağıdaki özelliklere sahip iki gerçel $\{\lambda_n\},\{\gamma_n\}(n \in \mathbb{Z}_+)$ sayı dizisini kullanarak;

$$s_n = \sqrt{\lambda_n} = n - 1 + \frac{\vartheta}{n\pi\cos\alpha} + \frac{\xi_n}{n}, \quad \gamma_n = (\cos\alpha)^2\,(\frac{\pi}{2} + \frac{\xi_n'}{n})\ \{\xi_n\},\{\xi_n'\}\ \in \ell_2 \qquad \ldots(4.1)$$

$$\lambda_n \neq \lambda_m, n \neq m, \gamma_n > 0 n \in \mathbb{Z}_+ \qquad \ldots(4.2)$$

elde edelim. (3.1)'i kullanarak $F(x,t)$ ve (3.5)'i kullanarak $K(x,t)$'yi belirleyebiliriz. (3.5) eşitsizliğinde $t \to tx,\ \tau \to \tau x$ şeklinde değişiklikleri yaparak,

$$F(x,xt) + K(x,xt) + x\int_0^1 K(x,x\tau)F(x\tau,xt)d\tau = 0, \quad 0 \le t \le 1$$

eşitliğini yazarız. Bu eşitlik ve lemma (3.2.1) ve lemma (3.2.2) ye göre $K(x,t)$ tek olarak belirlenir ve $\frac{d\,K(x,x)}{dx} \in \mathcal{L}_2(0,\pi)$'dir. Şimdi $q(x), P(x,\lambda), w(\lambda)$ fonksiyonlarını ve $\sin\alpha$değerini belirleyelim;

$$q(x) \coloneqq 2\frac{d}{dx}K(x,x), \qquad \tan\alpha \coloneqq K(0,0),$$

$$P(x,\lambda) = \cos\alpha\cos sx + \int_0^x \cos\alpha\cos st\,K(x,t)dt. \qquad \ldots(4.3)$$

$$w(\lambda) = -\pi(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)\prod_{n=2}^{\infty}\frac{\lambda_n-\lambda}{(n-1)^2}.$$

Burada

$$k_n \coloneqq \frac{\dot{w}(\lambda_n)}{\gamma_n}$$

yazarsak (4.1)'den $k_n \neq 0$ olduğunu elde ederiz.

Lemma 4.1

$u(z), v(z)$ fonksiyonlarının;

$$u(z) = \sin \pi z + A\pi \frac{4z}{4z^2 - 1} \cos \pi z + \frac{f(z)}{z}$$

$$v(z) = \cos \pi z - B\pi \frac{\sin \pi z}{z} + g(z)$$

şeklinde temsil edilebilmesi için,

$$u(z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} n^{-2} (u_n^2 - z^2), \qquad u_n = n - \frac{A}{n} + \frac{\alpha_n}{n}$$

$$v(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2}\right)^{-2} (v_n^2 - z^2), \qquad v_n = n - \frac{1}{2} - \frac{B}{n} + \frac{\beta_n}{n}$$

şeklinde temsil edilmesi gerekli ve yeterlidir. Burada;

$$f(z) = \int_0^{\pi} \tilde{f}\,(t) \cos zt\, dt, \quad \tilde{f}(t) \in \mathcal{L}_2(0, \pi), \qquad \int_0^{\pi} \tilde{f}\,(t) dt = 0$$

$$g(z) = \int_0^{\pi} \tilde{g}(t) \sin zt\, dt, \tilde{g}(t) \in \mathcal{L}_2(0, \pi)$$

ayrıca, α_n, β_n koşulları sağlayan rastgele diziler olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^2 < \infty$$

şeklindedir.

Lemma 4.2

Aşağıdaki eşitlik her zaman geçerlidir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(x, \lambda_n)}{k_n \gamma_n} = 0 \qquad \ldots (4.4)$$

İspat

Elde ettiğimiz rezidü hesaplarını kullanarak

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{P(x,\lambda_n)}{k_n\gamma_n}=\sum_{n=0}^{N}\frac{P(x,\lambda_n)}{\dot{w}(\lambda_n)}=\sum_{n=0}^{N}\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n}\frac{P(x,\lambda_n)}{w(\lambda_n)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_N}\frac{P(x,\lambda)}{w(\lambda)}d\lambda$$

yazabiliriz ve burada $C_N=\lambda:|\lambda|=(N-1/2)^2$ şeklinde olup Lemma 4.1'den;

$w(\lambda)=-s^3\cos\alpha\sin s\pi+O(|s|^2e^{|\tau\pi|})$ şeklindedir.

Daha önce $s\in G_\delta$ olup δ>0 olacak şekilde küçük δ değerleri için,

$G_\delta=\{s:|s-n|\geq\delta,\ n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ şeklinde olduğunu ifade etmiştik.

$$\sin s\pi\geq C_\delta e^{|\tau\pi|}$$

ifadesindeC_δ, s'ye bağlı değildir. Böylece yeterince büyük s_τ değerleri için;

$$|w(\lambda)|\geq C_\delta|s|^3e^{|\tau\pi|}s\in G_\delta,|s|\geq s_\tau$$

yazabiliriz. Öyleyse $|P(x,\lambda)|=O\left(e^{|\tau\pi|}\right),\ x\epsilon[0,\pi]$ şeklindedir.

Buradan (4.4) ü elde etmiş oluruz.

Klasik Sturm-Liouville problemleri teoreminde olduğu gibi aşağıdaki önermeler de ispatlanabilir.

Lemma 4.3 Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$-P''(x,\lambda)+q(x)P(x,\lambda)=\lambda P(x,\lambda),$$

$$P(0,\lambda)=\cos\alpha\ P'(0,\lambda)=\sin\alpha$$

Lemma 4.4 Herhangi $f(x),g(x)\in\mathcal{L}_2(0,\pi)$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$\int_0^\pi f(x)g(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n}\left(\int_0^\pi f(t)X(t,\lambda_n)dt\right)\left(\int_0^\pi g(t)X(t,\lambda_n)dt\right)$$

Önerme 4.1

$$\rho_n=n+\frac{a}{n}+\frac{\xi_n}{n},\qquad\{\xi_n\}\in\ell_2,\quad a\in\mathbb{C}$$

formundaki $\{\rho_n\}_{n\geq0},\ \ \rho_n^2\neq\rho_k^2,\ (n\neq k)$ sayıları verilsin. $\{\cos\alpha\cos\rho_nx\}_{n\geq0}$ dizisi $\mathcal{L}_2(0,\pi)$ uzayında bir Riesz tabanı oluşturur.

Lemma 4.5

Herhangi bir $h(x) \in \mathcal{W}_2^2(0,\pi)$ için, aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} \left(\int_0^{\pi} h(t) P(t,\lambda_n) dt \right) P(x,\lambda_n) \qquad \ldots (4.5)$$

İspat

$$h^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P(x,\lambda_n), \qquad \ldots (4.6)$$

serisini ele alalım. Burada,

$$c_n := \frac{1}{\gamma_n} \int_0^{\pi} h(t) P(t,\lambda_n) dt$$

şeklindedir.

Lemma 4.3 ü dikkate alıp kısmi integrasyon uygularsak,

$$c_n = \frac{1}{\gamma_n \lambda_n} \int_0^{\pi} h(t) \big(P''(t,\lambda_n) + q(t) P(t,\lambda_n) \big) dt$$

$$= \frac{1}{\gamma_n \lambda_n} \big(sin\,\alpha\, h(0) - h'(0) + h'(\pi) P(\pi,\lambda_n) - h(\pi) P'(\pi,\lambda_n) \big)$$

$$+ \frac{1}{\gamma_n \lambda_n} \int_0^{\pi} P(t,\lambda_n) \big(-h''(t) + q(t) h(t) \big) dt$$

elde ederiz. Burada $n \to \infty$ için;

$$c_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \qquad P(t,\lambda_n) = O(1) t \in [0,\pi]$$

olduğu kolayca ispatlanır.

Bu nedenle (4.6) serisi $x \in [0,\pi]$ aralığında mutlak ve düzgün bir şekilde yakınsar.

Lemma 4.4'e göre

$$\int_0^\pi h(x)g(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^\pi g(t)P(t,\lambda_n)dt = \int_0^\pi g(t)\sum_{n=0}^{\infty} c_n P(t,\lambda_n)\,dt$$

$$= \int_0^\pi g(t)h^*(t)dt.$$

g(x) keyfi olarak seçildiğinde $h^*(x) = h(x)$ olarak elde edilir.

(4.4)'ü herhangi bir $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ sayısı için aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\frac{P(x,\lambda_{n_0})}{\gamma_{n_0}} = -\sum_{n\neq n_0} \frac{k_{n_0}P(x,\lambda_n)}{k_n\gamma_n}$$

$m \neq n_0$ olan herhangi bir sayı ve $h(x) = P(x,\lambda_m)$ olsun. Daha sonra yukarıdaki eşitliği (4.5)'te yerine koyarak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$P(x,\lambda_m) = \sum_{n\neq n_0} c_{mn}\,P(x,\lambda_n)$$

burada;

$$c_{mn} = \frac{1}{\gamma_n}\int_0^\pi P(t,\lambda_m)\left(P(t,\lambda_n) - \frac{k_{n_0}}{k_n}P(t,\lambda_{n_0})\right)dt$$

şeklindedir.

Sonuç 4.1 dikkate alındığında $c_{mn} = \delta_{mn}$ olur. Burada δ_{mn} Kronecher delta fonksiyonudur bir başka deyişle

$$a_{mn} := \int_0^\pi X(t,\lambda_m)X(t,\lambda_n)dt, \qquad a_{mn} - \frac{k_n}{k_m}a_{mn} = \gamma_m, \quad m \neq n$$

biçiminde ifade edilebilir.

$a_{mn} = a_{nm}$ olduğu tanımdan açıktır. Bu bağıntıları kullanarak

$$k_m^2(\gamma_n - a_{mn}) = -k_m k_n a_{mn} = -k_n k_m a_{nm} = k_n^2(\gamma_n - a_{nn}), \quad m \neq n$$

hesaplayabiliriz.

Dolayısıyla $k_n^2(\gamma_n - a_{nn})$ ifadesi bir sabite eşit olup bu sabiti ρ ile gösterelim.

O zaman $m \neq n$ durumları için

$$\int_0^\pi P^2(t,\lambda_n)dt = \gamma_n - \frac{\rho}{k_n^2}, \qquad \int_0^\pi P(t,\lambda_m)P(t,\lambda_n)dt = -\frac{\rho}{k_m k_n}' \text{ dır.}$$

Şimdi,

$$P(\pi,\lambda)P'(\pi,\mu) - P'(\pi,\lambda)P(\pi,\mu) = (\lambda-\mu)\int_0^\pi P(t,\lambda)P(t,\mu)dt$$

eşitliğini kullanarak

$$\frac{k_n P(\pi,\lambda_n)k_m P'(\pi,\lambda_m) - k_n P'(\pi,\lambda_n)k_m P(\pi,\lambda_m)}{\lambda_n - \lambda_m} = -\rho, \qquad n \neq m$$

yazabiliriz.

$A_n \coloneqq k_n P(\pi,\lambda_n), \quad B_n \coloneqq k_n P'(\pi,\lambda_n)$ biçiminde ifade ederek yukarıdaki eşitsizliği,

$$A_n B_m - B_n A_m = \rho(\lambda_m - \lambda_n), \qquad n \neq m \qquad \ldots (4.7)$$

biçiminde ifade edebiliriz.

i, j, p ve n çift olarak negatif olmayan tam sayılar olsun. Öyleyse eşitlikleri toplarsak

$$A_n B_p - B_n A_p = \rho(\lambda_p - \lambda_n),$$

$$A_p B_i - B_p A_i = \rho(\lambda_i - \lambda_p),$$

$$A_i B_n - B_i A_n = \rho(\lambda_n - \lambda_i),$$

eşitlikleri toplarsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$A_n(B_p - B_i) + B_n(A_i - A_p) = B_p A_i - A_p B_i$$

Eşitliği tekrar yazarken n yerine j koyup bunları çıkararak,

$$(A_n - A_j)(B_p - B_i) = (A_p - A_i)(B_n - B_j)$$

sonucunu elde ederiz.

Bazı $n, j \in \mathbb{Z}_+$değerleri için $B_n = B_J$ ise, B_n bir sabittir.

(4.7) durumunda bazı κ_1, κ_2 sabitleri ile $A_n = \kappa_1\lambda_n + \kappa_2$ ifade edilir.$B_n \neq B_j$ durumu için benzer işlemleri uygularsak $A_n = \kappa_1\lambda_n + \kappa_2$ ve $B_n = \kappa_3\lambda_n + \kappa_4$ elde ederiz.

Yani her iki durumda da;

$$k_n P(\pi, \lambda_n) = \kappa_1\lambda_n + \kappa_2, \quad k_n P'(\pi, \lambda_n) = \kappa_3\lambda_n + \kappa_4 olur.$$

(5.1), (5.3) ve Lemma 5.1'i kullanırsak aşağıdaki ifadeleri elde ederiz.

$$k_n = (-1)^n n^2 + O(n), \quad P(\pi, \lambda_n) = (-1)^{n-1} + O(\frac{1}{n}), \qquad \lambda_n = n^2 + O(n)$$

Bu nedenle $\kappa_1 = -1$'dir. $\cos\beta \coloneqq \kappa_2$, $\sin\beta \coloneqq \kappa_4$ olduğunu gösterirsek bazı $\sin\beta, \cos\beta$ sabitleri için,

$$\lambda_n\big(P'(\pi, \lambda_n) - P(\pi, \lambda_n)\big) = \cos\beta\, P'(\pi, \lambda_n) + \sin\beta\, P(\pi, \lambda_n), n \in \mathbb{Z}_+ \ldots (4.8)$$

elde edilir. (4.7)'den $\rho = \cos\beta - \sin\beta$ bulunur. Dolayısıyla ispat tamamlanmıştır.

Teorem 4.1

$\{\lambda_n\}\, ve\, \{\gamma_n\}\ (n \in \mathbb{Z}_+)$ dizilerinin (2.1)-(2.3) tipi bir problemin spektral verileri olması için (4.1) ve (4.2) koşullarının sağlaması gerekli ve yeterlidir.

Örnek 4.1

(2.1) - (2.3) ile belirtilen özdeğer probleminin spektral verilerinin aşağıdaki gibi olduğunu kabul edelim.

$$\lambda_0 = 0 \qquad \lambda_1 = \frac{1}{4} \qquad \lambda_n = (n-1)^2, \quad n \geq 2$$

$$\gamma_0 = \pi\cos^2\alpha \qquad \gamma_n = \frac{\pi}{2}\cos^2\alpha, \qquad n \geq 1$$

(3.1)'den

$$F(x,t) = \frac{2}{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{t}{2}$$

(3.5) denklemini çözüp, (3.4) bağıntılarını kullanarak $K(x,t)$, $q(x)$ ve $\tan\alpha$ ifadelerini aşağıdaki gibi buluruz.

$$K(x,t) = -\frac{2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{t}{2}}{\pi + x + \sin x}, \quad q(x) = \frac{2(\pi + x)\sin x + 4(1 + \cos x)}{(\pi + x + \sin x)^2},$$

$\cos\alpha\, y'(0) - \sin\alpha\, y(0) = 0$ eşitliğini $y'(0) - \tan\alpha\, y(0) = 0$ biçiminde ifade edersek;

$$\tan\alpha = -\frac{2}{\pi}$$

olur.

İkinci sınır şartını yeniden oluşturmak için (4.3) ifadesini kullanarak $P(x,\lambda)$ çözümünü yeniden oluştururuz.

$$P(x,\lambda) = \begin{cases} \cos\alpha\cos sx - \dfrac{4s\sin sx\,(1+\cos x) - \cos\alpha\cos sx\sin x}{(4s^2-1)(\pi + x + \sin x)}, & \lambda \neq \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{\pi\cos\alpha\cos\frac{x}{2}}{(\pi + x + \sin x)}, & \lambda = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

(4.8) ifadesinden ise ikinci sınır koşul katsayılarını aşağıdaki gibi elde ederiz;

$$\cos\beta = \frac{1}{4}, \qquad \sin\beta = -\frac{1}{8\pi}.$$

5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Sonuç

Bu çalışmada

$$\ell y := -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x) x \epsilon [0, \pi]$$

denklemi ile

$$\cos\alpha\, y'(0) - \sin\alpha\ y(0) = 0,$$
$$\lambda[y'(\pi) + y(\pi)] = \cos\beta\ y'(\pi) + \sin\beta\ y(\pi),$$

sınır koşulları için ters Sturm-Liouville problemini denklemimizdeki potansiyel fonksiyon vesınır koşullarımızdaki öz değer dizilerinden ve norm sabitlerinden yararlanılarakçözülebilirliği gösterilmiştir.

Bundan sonraki çalışma problemin Banach Uzayında incelenmesi olacaktır.

KAYNAKÇA

[1] Naming J. Guliyev, Inverse Problems, Inverse eigenvalue problems for Sturm-Liouville equations with spectral parameter linearly contained in one of the boundary conditions, 2005.

[2] Ben Amara Zhamel, Mathematical Notes, Asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem with a small parameter and a spectral parameter in the boundary condition, 1996.

[3] J. Ben Amaraand A. A. Shkalikov, Mathematical Notes, A Sturm-Liouville problem with physical and spectral parameters in the boundary condition, 1999.

[4] P. A. Binding, P. J. Browneand B. A. Watson "Inverse spectral problems for Sturm-Liouville equations with eigenparameter dependent boundary conditions" in Journal of the London Math. Soc. 2000pp. 161-82

[5] I. Gel'fand and B. M. Levitan, "On the determination of a differential equation from its spectral function" in Amer. Math. Soc.1955, pp. 253-304.

[6] B. M. Levitan and M. G. Gasymov "Determination of a differential equation by two ofits spectra" in Russian Mathematical Surveys,1964,Volume19,Number2.

[7] C. M. McCarthyand W. Rundell "Eigen parameter dependent inverse Sturm-Liouville problems " in Numer. Funct. Anal. Optim. 2003, pp. 85-105

[8] G. Freiling and V. Yurko "Inverse Sturm- Liouville problems and their applications" in Nova Science Publishers, 2001, pp.60-75.

[9] Esin İnan Eskitaşçıoğlu, Mehmet Açil "An Inverse Sturm-Liouville Problem with ageneralized symmetric potential" in 2017 Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2017, No.41 ,pp. 1–7.

[10] M. Berteroand P. Boccacci "Introduction to Inverse Problems" in Imaging, Taylor&Francis, 1998, pp.15.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirileri

Seda Kızılbudak Çalışkan, Ayşegül Kılıç, “The Inverse Strum-Liouville Problem With One Of The Boundary Conditions Including Eigenvalue” 6th International HYBRID Conference on Mathematical Advancesand Applications May 10-13 2023.