T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞKEN ÜSLÜ LİNEER OLMAYAN ELİPTİK DENKLEMLER

CANER KAZAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. YUSUF ZEREN

İSTANBUL, 2019

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞKEN ÜSLÜ LİNEER OLMAYAN ELİPTİK DENKLEMKER

Caner KAZAR tarafından hazırlanan tez çalışması 10.01.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Özgür YILDIRIM

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK

İstanbul Ticaret Üniversitesi _____

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında, varyasyonel metodlar kullanılarak

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A(x,\nabla u) = \lambda |u|^{q(x)-2}u & \Omega \text{ da} \\ u = 0 & \partial\Omega \text{ da}, \end{cases}$$

tipi lineer olamayan eliptik problemlerin çözümleriyle ilgileniyoruz, burada Ω , $\mathbb{R}^N$ in bir sınırlı ya da bir dış bölgesi ve q bir sürekli pozitif fonksiyondur. Bu tez çalışmasında sunulan sonuçlar Lane-Emden denklemiyle ilgili birçok katkıyı genişletmektedir ve değişken üslerin varlığından kaynaklanan yeni olgulara odaklanmaktayız.

Bu tez çalışmasında ve yüksek lisans sürecinde bana bilgi ve tecrübeleriyle yol gösteren ve beni destekleyen tez danışmanım sayın Doç. Dr. Yusuf ZEREN hocama teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans sürecinin tamamında bana maddi, manevi her anlamda destek olan annem Resmiye KAZAR, babam Tamer KAZAR ve kardeşim Emir Can KAZAR'a çok teşekkür ediyorum.

Ocak, 2019

Caner KAZAR

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ vii

KISALTMA LİSTESİ viii

ŞEKİL LİSTESİ ix

ÖZET x

ABSTRACT xii

BÖLÜM 1

GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 2
1.3 Hipotez 2

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR 3

2.1 Tanımlar ve Teoremler 3

BÖLÜM 3

DEĞİŞKEN ÜSLÜ FONKSİYON UZAYLARI 16

3.1 Bazı Açıklamalar ve Önemli Bir Örnek 20

BÖLÜM 4

DEĞİŞKEN ÜSLÜ BİR PROBLEMDE BİRLEŞİK ALT LİNEER PERTÜRBASYONLAR 22

4.1 Enerji Fonksiyonelinin Nitel Özellikleri 23
4.2 Birden Çok Çözümün Varlığı 30

BÖLÜM 5

BİRDEN FAZLA DEĞİŞKEN ÜSTELE SAHİP ALT KRİTİK LANE-EMDEN DENKLEMLERİ 32

5.1 Problemin İfadesi ve Önceki Sonuçları 32
5.2 Sonsuzluktaki Konsantrasyon 34

BÖLÜM 6

DIŞ BÖLGELER ÜZERİNDE DEĞİŞKEN ÜSLÜ ÖZDEĞER PROBLEMLERİ..... 41

BÖLÜM 7

DEĞİŞKEN ÜSLÜ VE İŞARET DEĞİŞTİRME POTANSİYELLİ LİNEER OLMAYAN ÖZDEĞER PROBLEMLERİ..... 46

7.1 Spektrumun Konsantrasyonu 48
7.2 Değişken Üstellere Sahip Bir Rayleigh Katsayısı Hakkında Daha Fazlası... 50

BÖLÜM 8

DEJENERE BİR PROBLEM İÇİN MORSE TEORİSİ VE YEREL BAĞLANTI..... 53

8.1 Kritik Grupların Hesaplanması 55

BÖLÜM 9

DEĞİŞKEN ÜSLÜ FARK DENKLEMLERİ 60

9.1 Homoklinik Çözümler ve Nitel Özellikleri 62

BÖLÜM 10

SONUÇ VE ÖNERİLER 68

KAYNAKLAR..... 69

ÖZGEÇMİŞ..... 73

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks (karmaşık) sayılar kümesi
$\mathbb{R}^N$	N-boyutlu reel Öklid uzayı
$\mathbb{C}^N$	N-boyutlu kompleks Öklid uzayı
$\mathbb{F}$	Reel ve kompleks sayılar kümesinden biri
$\forall$	Her
$\in$	Elemanı olmak
∇	Gradient (vektör değerli kısmi türev operatörü)
Δ	Fark operatörü
Ω	Özellikleri belirtilmiş herhangi bir bölge
$\overline{\Omega}$	Ω bölgesinin kapanışı
$\partial\Omega$	Ω bölgesinin sınırı
$\times$	Kartezyen çarpım
$\|\cdot\|$	Norm fonksiyonu
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	İç çarpım fonksiyonu
$L_p(\Omega)$	p. Kuvveti integrallenebilen ölçülebilir fonksiyonların kümesi
$L^\infty(\Omega)$	Ölçülebilir ve ess $\sup\|f\| < \infty$ olacak şekilde f fonksiyonlarının kümesi
$W^{m,p}(\Omega)$	Sobolev Uzayı
ℓ^p	Terimlerinin p. dereceden toplamları sonlu olan dizilerin kümesi
$\ell^{p(\cdot)}$	Değişken üslü Lebesgue dizi uzayı
$L_{p(\cdot)}(\Omega)$	Değişken üslü Lebesgue uzayı
$W^{m,p(\cdot)}(\Omega)$	Değişken üslü Sobolev uzayı
$\Delta_{p(\cdot)}u$	u fonksiyonu için $p(\cdot)$-Laplace operatörü
$C^p(X,Y)$	Türev mertebesi p olan X den Y ye sürekli fonksiyonların uzayı

KISALTMA LİSTESİ

$(\mathrm{PS})_c$ Palais-Smale kompaktlık şartı
(PS) Palais-Smale
h.h.h. Hemen hemen her yerde

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 $\mathbb{R}^3$ teki Mountain Pass teoreminin bir geometrik gösterimi……14

Şekil 2.2 Şekil 2.1'de temsil edilen fonksiyonelin $\mathbb{R}^2$ deki gösterimi……14

ÖZET

DEĞİŞKEN ÜSLÜ LİNEER OLMAYAN ELİPTİK DENKLEMKER

Caner KAZAR

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Bu tez 9 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm literatür özeti, tezin amacı ve hipotez kısımlarından oluşmaktadır. İkinci bölümde, temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzaylarının temel özelliklerini hatırlıyoruz. Dördüncü bölüm, genel homojen olmayan bir diferansiyel operatörü içeren bir Dirichlet problemler sınıfı için bir çoklu sonuç içermektedir. Beşinci bölüm, iki tane değişken üstele sahip bir diferansiyel operatör için bir sürekli spektrumun varlığı ile ilgilidir. Spektrumun sonsuzluğundaki bir konsantrasyon özelliği, dış bölgeler üzerindeki $p(x)$-Laplace operatörü durumunda altıncı bölümde kurulmuştur. Birden fazla değişken üstel ve işaret değiştiren potansiyel durumu tezin bir sonraki bölümünde ele alınmıştır. Sekizinci bölümde Morse teorisini yerel bağlama teorisiyle kombinasyon halinde kullanarak birkaç varlık sonucunu oluşturulmuştur. Son bölümde ayrık yapı ele alınmıştır ve değişken üslü bir kısmi fark denklemleri sınıfı için homoklinik çözümlerin varlığıyla ilgilenilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lineer olamayan eliptik operatör, değişken üs, varyasyonel metodlar, sürekli spektrum

ABSTRACT

NONLINEAR ELLIPTIC EQUATIONS WITH VARIABLE EXPONENT

Caner KAZAR

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Yusuf ZEREN

This thesis contains 9 chapters. The first chapter is summary of the literature, aim of the thesis and hypothesis. Basic definitions and theorems are introduced in the second chapter. In the third chapter we recall the basic properties of Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponent. Chapter 4 contains a multiplicity result for a class of Dirichlet problems involving a general nonhomogeneous differential operator. Chapter 5 deals with the existence of a continuous spectrum for a differential operator with two variable exponents. A concentration property at infinity of the spectrum is established in Chapter 6 in the case of the $p(x)$-Laplace operator on exterior domains. The case of multiple variable exponents and sign-changing potential is considered in the next chapter of the thesis. In Chapter 8, by using the Morse theory in combination with local linking theory, we establish several existence results. Finally, we consider the discrete framework and we are concerned with the existence of homoclinic solutions for a class of partial difference equations with variable exponent.

Keywords: Nonlinear elliptic operator, variable exponent, variational methods, continuous spectrum

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Klasik Lebesgue ve Sobolev uzayları L^p ve $W^{1,p}$ $(1 \leq p \leq \infty)$ teorisindeki büyük gelişmenin nedenlerinden biri uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan birçok olgunun tanımlanmasıdır. Örneğin, pek çok materyal L^p ve $W^{1,p}$ fonksiyon uzayları kullanılarak yeterli doğrulukla modellenebilir, burada p sabittir. Homojen olmayan bazı materyaller örneğin elektro-reolojik sıvılar (bazen akıllı "akıllı sıvılar" olarak anılırlar) için bu yaklaşım yeterli değildir, ancak üstel p değişebilir olmalıdır. Bu bizi değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzayları $L^{p(x)}$ ve $W^{1,p(x)}$ in incelenmesine yönlendirir, burada p reel-değerli bir fonksiyondur. Değişken üslü Lebesgue uzayları literatürde ilk kez 1931 de Orlicz [38] in bir makalesinde yer aldı. 1950 lerde bu çalışma Nakano [37] tarafından devam ettirildi, Nakano değişken üslü uzayların ("modüler uzaylar" da denir) ilk sistematik çalışmasını yaptı. Nakano ele aldığı daha genel uzayların bir örneği olarak değişken üslü Lebesque uzaylarından açıkça bahsetti, bakınız Nakano [2, s. 284]. Daha sonra, Polonyalı matematikçiler modüler fonksiyon uzaylarını araştırdı, bakınız Musielak [35]. Reel eksendeki değişken üslü Lebesgue uzayları, Rus araştırmacılar tarafından bağımsız olarak geliştirildi. Bu bağlamda Tsenov [45], Sharapudinov [43] ve Zhikov [47] un çalışmalarına atıfta bulunuyoruz. Değişken üslü fonksiyon uzayları teorisi ve çeşitli uygulamalara bir kapsamlı giriş için Diening, Harjulehto, Hästö ve Ruzicka [10] nın monografisine atıfta bulunuyoruz. Ayrıca asıl amacı değşken üslü Sobolev Uzaylarında lineer olmayan potansiyel teoriyi incelemek olan "görüntü işleme ve

değişken üslü uzaylar üzerine Finlandiyalı araştırma gurubu" [22] nun çoklu katkılarına dikkat çekiyoruz.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez,

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\big(a(x,\nabla u)\big) = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

tipindeki lineer olmayan sınır değer problemleri tarafından tanımlanan olgularla motive edilir, burada $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ sınırı düzgün olan bir sınırlı bölge ya da bir dış bölgedir. Tezimiz değişken üslü diferansiyel operatörleri içeren matematiksel modelleri araştırmaktadır ve esas olarak (1.1) de olduğu gibi $p(x)$ büyümesine sahip problemler için çözümlerin nitel özellikleriyle ilgilenir.

1.3 Hipotez

Bu tez çalışmasında bir veya birkaç tane değişken üstelin varlığıyla üretilen ve Laplace ve p-Laplace operatörü gibi homojen diferansiyel operatöre karşılık gelen, klasik çerçevede artık geçerli olmayan yeni olgulara yer verilir. Özellikle yeni spektral özelliklerle örneğin orijin yakınında veya sonsuzdaki spektrumun konsantrasyonuyla ilgileniyoruz. Bu çalışmada incelenen tüm durumlarda, var olmayan özellikler oluşturarak çözümlerin davranışlarını değiştirebilecek çeşitli pertürbasyonlarla birlikte, denklemlerde ortaya çıkan terimler arasındaki çeşitli rekabet etkileri tarafından merkezi bir rol oynanmaktadır.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Çalışmamızın bu bölümünde, yararlanacağımız temel tanımlardan ve teoremlerden bahsedeceğiz.

2.1 Tanımlar ve Teoremler

Tanım 2.1 (Normlu Uzay) X, $\mathbb{F}$ üzerinde bir vektör uzayı olsun. X üzerinde bir norm aşağıdaki özellikleri sağlayan bir

$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$

fonksiyonudur: Her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ için

(a) $\|x\| \geq 0$;

(b) $\|x\| = 0$ ancak ve ancak $x = 0$;

(c) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

(d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Üzerinde bir $\|\cdot\|$ normu tanımlanmış olan bir X vektör uzayına **normlu vektör uzay** ya da sadece **normlu uzay** adı verilir ve $(X, \|\cdot\|)$ ile gösterilir.

Örnek 2.2 ℓ_p, $(1 \leq p < \infty)$ uzayı $\|\cdot\|_{\ell_p} : \ell_p \to \mathbb{R}$,

$$\|x\|_{\ell_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

normu ile bir normlu uzaydır.

Tanım 2.3 (Yakınsaklık - Cauchy dizisi) $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi $\{x_n\}$ olsun.

(a) $x \in X$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n > n_0$ için

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ 'e yakınsar (ya da $\{x_n\}$ dizisi yakınsaktır) denir. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

veya

$$x_n \to x$$

yazarız.

(b) Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $m, n > n_0$ için

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine bir **Cauchy dizisi** denir.

Reel sayıların bir dizisinin yakınsaklık fikrini kullanarak yukarıdaki tanımların sırasıyla

$n \to \infty$ için $\|x_n - x\| \to 0$

ve

$m, n > n_0$ için $\|x_n - x_m\| \to 0$

ye denk olduğu görülür.

Tanım 2.4 (Kuvvetli ve Zayıf Yakınsaklık) X bir normlu vektör uzay ve $\{x_n\}$, X içinde bir dizi olsun.

(a) X uzayının normu içindeki yakınsaklığa **kuvvetli yakınsaklık** denir. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

ise $\{x_n\}$, x e yakınsar (ya da kuvvetli yakınsar) denir ve $x_n \to x$ ile göserilir.

(b) Eğer $\forall f \in X^\star$ (X in dual uzayı) için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

özelliği sağlanırsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ e **zayıf yakınsar** (ya da zayıf olarak yakınsar) denir ve $x \in X$ elemanına $\{x_n\}$ dizisinin zayıf limiti denir ve $x_n \xrightarrow{w} x$ ile gösterilir.

Tanım 2.5 (Dual Uzay) X, $\mathbb{F}$ üzerinde bir normlu vektör uzayı olsun.

$B(X, \mathbb{F}) = \{f: X \to \mathbb{F} \mid f \text{ sınırlı lineer fonksiyonel}\}$

uzayına X in dual uzayı adı verilir ve $X^\star$ ile gösterilir.

Örnek 2.6 l_p nin dual uzayı l_q dur, burada $1 < p < \infty$ olup q, p nin konjugesi yani $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

Tanım 2.7 (Ayrılabilir Normlu Uzay) $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay olsun. X sayılabilir yoğun bir alt kümeye sahipse $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına **ayrılabilir normlu uzay** denir.

Örnek 2.8 $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ içinde sayılabilir yoğun bir küme olduğundan $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ayrılabilir normlu uzaydır.

Tanım 2.9 (Yoğun Küme) Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayının $\bar{A} = X$ biçimindeki bir $A \subset X$ alt kümesine X içinde **yoğun küme** adı verilir burada $\bar{A}$, A kümesinin kapanışını temsil eder.

Örnek 2.10 $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ içinde yoğundur. $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi $\mathbb{R}$ içinde yoğun değildir.

Tanım 2.11 (Banach Uzayı) Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzaydaki her Cauchy dizisi X içindeki bir limite yakınsıyorsa, bu $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına **tam normlu uzay** veya **Banach uzayı** adı verilir.

Teorem 2.12 $1 \leq p < \infty$ olsun. ℓ_p uzayı

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

normuyla bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.13 (Yansımalı Uzayı) X bir normlu uzay ve $(X^\star)^\star = X^{\star\star}$ uzayı X uzayının ikinci dual uzayı olsun. $X^{\star\star} = X$ ise X uzayına **yansımalı (refleksif) uzay** denir.

Örnek 2.14 ℓ_2 dizi uzayı yansımalı uzaydır. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ olduğundan $\ell_2 = (\ell_2)^\star = (\ell_2)^{\star\star}$.

Tanım 2.15 (Lebesgue Dizi Uzayı) $1 \leq p < \infty$ olsun. ℓ_p (Lebesgue) dizi uzayı,

$$\ell_p = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

kümesi olarak tanımlanır. Bu uzayda norm

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_p} = \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

olarak tanımlanan

$$\|\cdot\|_p : \ell_p \to [0, \infty)$$

ile gösterilir.

Tanım 2.16 (Lebesgue Uzayı) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de bir bölge ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$L_p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ ölçülebilir ve } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

sınıfına mutlak değerin p-inci kuvveti integrallenebilen fonksiyonların sınıfı denir.

f fonksiyonunun L_p normu

$$\|f\|_{L_p} = \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanır ve bu norm ile birlikte L_p ye **Lebesgue uzayı** adı verilir.

Teorem 2.17 (Young Eşitsizliği) $1< p,\ q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $\forall a, b > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Teorem 2.18 $p \geq 1$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$|a + b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.19 $p \geq 1$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b)(a - b) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.20 (Hölder Eşitsizliği) $1 < p,\ q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $f \in L_p$ ve $g \in L_q$ ise $f \cdot g \in L_1$ olur ve

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.21 (Minkowski Eşitsizliği) $1 \leq p < \infty$ için $f, g \in L_p$ ise $f + g \in L_p$ olur ve

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.22 (Sobolev Uzayı) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de bir bölge, m negatif olmayan herhangi bir tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) : D^{\alpha}u \in L_p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya **Sobolev uzayı** denir.

Teorem 2.23 $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_p^p \right)^{1/p} \ ;\ 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{\infty} \qquad ;\ p = \infty$$

normları ile bir Banach uzayıdır.

Örnek 2.24 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de bir sınırlı bölge olsun.

$$L_2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ ölçülebilir ve } \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

ve

$$W^{1,2}(\Omega) = \left\{ u \in L_2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega); 1 \leq i \leq n \right\}.$$

NOT: 1 sayısı, 1. Dereceden kısmi türevlerin $L_2(\Omega)$ ya ait olması gerektiğini belirtmek için kullanılır.

$W_{per}^{1,2}(\Omega) = \{u \in W^{1,2}(\Omega) : u,\ \ \Omega - \text{periyodik}\}$

ve

$W_0^{1,2}(\Omega) = \{u \in W^{1,2}(\Omega) : u,\ \ \partial\Omega \text{ sınırında sıfır }\}$

olarak tanımlanır. Bu drurumda $W_0^{1,2}(\Omega) \subset W_{per}^{1,2}(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ dır.

Ω bölgesi $X = [0,2\pi] \times [0,2\pi]$ karesi olarak tanımlansın. $u(x) = u(x_1, x_2) = \sin x_1 + \cos x_2$ fonksiyonunu ele alalım. $u \in L_2(X)$ dir.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \cos x_1 \in L_2(\Omega) \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\sin x_2 \in L_2(\Omega)$$

olduğundan $u \in W^{1,2}(X)$ dir, u periyodik olduğundan $u \in W_{per}^{1,2}(X)$ dir.

Ω bölgesi $Y = [0,1] \times [0,1]$ birim karesi olarak tanımlansın. $v(x) = v(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}$ fonksiyonunu ele alalım. $v \in L_2(Y)$ dir.

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \notin L_2(Y) \text{ ve } \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0 \in L_2(Y)$$

olduğundan $v \notin W^{1,2}(Y)$ dir yani v bir Sobolev fonksiyonu değildir.

Tanım 2.25 (Ess sup – Ess inf) $f : X \to \mathbb{R}$, X bölgesinde reel değerli fonksiyon olarak tanımlanmış olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $f(x) \leq a$ yani $f^{-1}(a, \infty) = \{x \in X : f(x) > a\}$ kümesi boş ise a reel sayısına f in bir üst sınırı denir. $U_f = \{a \in \mathbb{R} : f^{-1}(a, \infty) = \emptyset\}$, f in üst sınırlarının kümesi olsun. Eğer üst sınırların kümesi $U_f \neq \emptyset$ ve $\sup f = +\infty$ ise bu durumda f in supremumu $\sup f = \inf U_f$ olarak tanımlanır. İlave olarak farzedelim ki (X, Σ, μ) bir ölçüm uzayı olsun ve basitlik olması için f fonksiyonu ölçülebilir olsun. Eğer $f^{-1}(a, \infty)$ ölçülebilir kümesi ölçümü sıfır olan bir küme ise yani hemen hemen her $x \in X$ için $f(x) \leq a$ ise bir a sayısına f in essential üst sınırı denir. $U_f^{ess} = \{a \in \mathbb{R} : \mu(f^{-1}(a, \infty)) = 0\}$ essential üst sınırların kümesi olsun. Eğer $U_f^{ess} \neq \emptyset$ ve $\text{ess sup } f = +\infty$ ise essential supremum $\text{ess sup } f = \inf U_f^{ess}$ olarak tanımlanır.

Eğer essential alt sınırların kümesi boştan farklı ve $-\infty$ a eşit ise essential alt sınırların supremumu aynı yollarla tanımlanır.

$$\text{ess sup } f = \inf\{a \in \mathbb{R} : \ \mu(\{x : f(x) > a\}) = 0\}$$

$$\text{ess inf } f = \sup\{b \in \mathbb{R} : \ \mu(\{x : f(x) < b\}) = 0\}$$

Örnek 2.26 Reel eksende Lebesgue ölçümünü ve ona karşılık gelen σ-cebir Σ yı ele alalım.

$$f(x)=\begin{cases}5, & x=1 \text{ ise}\\ -4, & x=-1 \text{ ise}\\ 2, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

bir fonksiyon olsun. $\sup f(x)=5$ ve $\inf f(x)=-4$, ancak fonksiyon bu değerleri sadece $\{1\}$ ve $\{-1\}$ kümelerinde alır. Bu kümeler sıfır ölçümlüdür. Fonksiyon başka yerlerde 2 değerini alır. Bu durumda bu fonksiyon için $\operatorname{ess\,sup} f(x)=\operatorname{ess\,inf} f(x)=2$ olur.

$$f(x)=\begin{cases}x^3, & x\in\mathbb{Q} \text{ ise}\\ \arctan x, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyounu ele alalım. Bu fonksiyon alttan ve üstten sınırsızdır. $\sup f(x)=+\infty$ ve $\inf f(x)=-\infty$. Ancak Lebesgue ölçümü açısından rasyonel sayılar kümesi sıfır ölçümlüdür. Dolayısıyla önemli olan, bu kümenin tümleyeninde ne olduğudur. Burada fonksiyon $\arctan x$ olarak verilir. Burada $\operatorname{ess\,sup} f(x)=\frac{\pi}{2}$ ve $\operatorname{ess\,inf} f(x)=-\frac{\pi}{2}$ olur.

$\forall x\in\mathbb{R}$ için $f(x)=x^3$ fonksiyonu ele alalım. $\operatorname{ess\,sup} f(x)=+\infty$ ve $\operatorname{ess\,inf} f(x)=-\infty$ olur.

Tanım 2.27 (σ-Cebir) X bir küme olsun ve $2^X:=\mathcal{P}(X)$ onun kuvvet kümelerini göstersin. Bir $\Sigma\subseteq\mathcal{P}(X)$ alt kümesi aşağıdaki üç özelliği sağlıyorsa bu alt kümeye ***σ*-cebir** adı verilir.

(1) $X\in\Sigma$ dır ve X aşağıdaki bağlamda evrensel küme olarak düşünülür.

(2) Σ, tümleme altında kapalıdır: $A\in\Sigma\Rightarrow \mathrm{X}\backslash\mathrm{A}\in\Sigma$.

(3) Σ, sayılabilir birleşimler altında kapalıdır:A_1,A_2,A_3, … $\in\Sigma\Rightarrow A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots\in\Sigma$.

Bu özelliklerden σ-cebirin sayılabilir kesişimler altında da kapalı olduğu görülür (De Morgan yasaları). (1) ve (2) den $\emptyset\in\Sigma$ dır. Üstelik $\{X,\emptyset\}$ kümesi (3) koşulunu da sağladığından X üzerinde mümkün olan en küçük σ-cebirdir. X üzerinde mümkün olan en büyük σ-cebir $\mathcal{P}(X)$ dir.

Tanım 2.28 (Ölçülebilir Uzay) $X\neq\emptyset$ bir küme ve $\mathcal{A}$, X üzerinde bir σ-cebir olsun. Bu durumda $(X,\mathcal{A})$ iklisine ölçülebilir uzay denir.

Örnek 2.29 $X = \{1, 2, 3\}$ kümesini ele alalım. $\mathcal{A} = \{X, \emptyset\}$, X kümesi üzerinde bir σ-cebir olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{A})$ ikilisi bir ölçülebilir uzaydır.

Tanım 2.30 (Ölçülebilir Fonksiyon) (X, Σ) ve (Y, T) ölçülebilir uzaylar olsun yani X ve Y, sırasıyla Σ ve T σ-cebirleriyle donatılmış olsun. Eğer $\forall E \in \mathrm{T}$ için E nin f altındaki ters görüntüsü Σ da ise yani

$$f^{-1}(E) = \{x \in X : f(x) \in E\} \in \Sigma, \quad \forall E \in T$$

ise bir $f : X \to Y$ fonksiyonuna **ölçülebilir fonksiyon** adı verilir. $f : X \to Y$ ölçülebilir bir fonksiyon ise $f : (X, \Sigma) \to (Y, \mathrm{T})$ yazabiliriz.

Teorem 2.31 (Fatou Lemma) (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı $\Omega \in \Sigma$ ve $\{f_n\}$ negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu$$

olur.

Tanım 2.32 (Coercive fonksiyonel) X bir Banach uzayı ve $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ sınıfından bir fonksiyonel olmak üzere, $x \in X$ için

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$$

İse f fonksiyoneli X üzerinde **coercive fonksiyonel**dir denir.

Tanım 2.33 (Adi Türev) $D \subset \mathbb{R}$ ve $f : D \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

limiti varsa f fonksiyonuna $a \in D$ noktasında türevlenebilir denir. Bu limit değeri $f'(a)$, $\frac{df(a)}{df(x)}$, . . . gibi simgelerle gösterilir ve f in a noktasındaki **türev**i olarak adlandırılır. Eğer f fonksiyonu D nin her noktasında türevlenebiliyorsa f fonksiyonuna D de **türevlenebilir** denir. Ayrıca

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ifadesinde $h = x - a$ yazılırsa

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h+a)-f(a)}{h}=f'(a)$$

elde edilir.

Teorem 2.34 f fonksiyonu a noktasında türevli ise a noktasında süreklidir.

Teorem 2.35 (Ortalama Değer Teoremi) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $\forall x\in(a,b)$ noktasında türevli olsun. Bu durumda (a,b) aralığında

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır.

Tanım 2.36 (Yönlü Türev) Bir $f(\mathrm{x})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ skaler fonksiyonunun bir $\mathrm{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ birim vektörü boyunca **yönlü türev**i

$$\nabla_{\mathrm{v}}f(\mathrm{x})=\lim_{h\to 0}\frac{f(\mathrm{x}+h\mathrm{v})-f(\mathrm{x})}{h}$$

limiyle tanımlanan $\nabla_{\mathrm{v}}f$ fonksiyonudur. Yönlü türevde

$$\nabla_{\mathrm{v}}f(\mathrm{x})=\nabla f(\mathrm{x})\cdot\mathrm{v}$$

eşitliği sağlanır. Burada " ∇ " gradient, " $\cdot$ " iç (nokta) çarpımdır.

Örnek 2.37 Bir $f(x,y)=x^2y$ fonksiyonun $\mathrm{x}=(3,2)$ noktasında ve $\mathrm{v}=(1,2)$ vektörü yönündeki yönlü türevini hesaplayalım.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2xy\Rightarrow\frac{\partial f(3,2)}{\partial x}=12$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x^2\Rightarrow\frac{\partial f(3,2)}{\partial y}=9.$$

Bu durumda gradient $\nabla f(3,2)=12\,\mathrm{i}+9\,\mathrm{j}=(12,9)$. Daha sonra $\mathrm{v}=(1,2)$ vektörü yönünde bir $\mathrm{u}=(u_1,u_2)$ birim vektörü bulunmalıdır.

$$\mathrm{u}=\frac{\mathrm{v}}{\|\mathrm{v}\|}=\frac{(1,2)}{\|(1,2)\|}=\frac{(1,2)}{\sqrt{5}}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Son olarak yönlü türev hesaplanır.

$$\nabla_{\mathrm{u}}f(3,2)=\nabla f(3,2)\cdot\mathrm{u}=(12,9)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{12}{\sqrt{5}}+\frac{18}{\sqrt{5}}=\frac{30}{\sqrt{5}}=6\sqrt{5}.$$

Tanım 2.38 (Gâteaux Türevi) X ve Y normlu uzaylar olsun. $U \subset X$ açık bir alt küme ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun $\mathrm{v} \in X$ yönünde ve $\mathrm{x} \in U$ noktasındaki **Gâteaux türevi**,

$$df(\mathrm{x};\mathrm{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathrm{x}+t\mathrm{v}) - f(\mathrm{x})}{t} = \frac{d}{dt} f(\mathrm{x}+t\mathrm{v})\Big|_{t=0}$$

olarak tanımlanır. Eğer $\forall \mathrm{v} \in X$ için limit var ise f fonksiyonu $\mathrm{x} \in U$ noktasında **Gâteaux türevlenebilir** denir.

Örnek 2.39 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^4 x_2}{x_1^6 + x_2^3}, & (x_1,x_2) \neq (0,0) \text{ ise} \\ 0, & (x_1,x_2) = (0,0) \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $t \neq 0$ ve $\mathrm{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\frac{f(0+t\mathrm{v}) - f(0)}{t} = \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} = \begin{cases} \dfrac{1}{t} \cdot \dfrac{t^5 v_1^4 v_2}{t^6 v_1^6 + t^3 v_2^3}, & (v_1,v_2) \neq (0,0) \text{ ise} \\ 0, & (v_1,v_2) = (0,0) \text{ ise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{t v_1^4 v_2}{t^3 v_1^6 + v_2^3}, & (v_1,v_2) \neq (0,0) \text{ ise} \\ 0, & (v_1,v_2) = (0,0) \text{ ise} \end{cases}$$

elde edilir. Dolayısıyla herhangi bir $\mathrm{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0+t\mathrm{v}) - f(0)}{t} = 0$$

elde edilir. Bu nedenle f, $0 = (0,0)$ da Gâteaux türevlenebilir ve $df\big((0,0);\mathrm{v}\big) = 0 \in \mathbb{R}$ dir. Bununla birlikte f fonksiyonu $0 = (0,0)$ da sürekli değildir. Özel olarak $x_2 = x_1^2$ yaklaşımı seçildiğinde $\mathrm{x} = (x_1, x_1^2)$ olur. Buradan

$$f(x_1, x_1^2) = \frac{x_1^6}{x_1^6 + x_1^6} = \frac{1}{2} \neq 0 = df\big((0,0);\mathrm{v}\big)$$

elde edilir.

Teorem 2.40 (Gâteaux Türevinde Ortalama Değer Teoremi) X ve Y normlu uzaylar olsun. $U \subset X$ açık bir alt küme ve $f : U \to Y$, U üzerinde Gâteaux türevlenebilir olsun. Eğer $x, y \in U$ ve $[x,y] \subset U$ ise

$$\|f(x)-f(y)\| \leq \sup_{\omega\in[x,y]} \|f'(\omega)\|\|x-y\|$$

olacak şekilde en az bir $\omega \in [x,y]$ vardır.

Teorem 2.41 (Mountain Pass Teoremi) E bir Hilbert uzayı olsun ve aşağıdaki geometrik özellikleri sağlayan bir J fonksiyonelini ele alalım:

(1) $J(0)=0$ olacak şekilde $J \in C^1(E,\mathbb{R})$ dir ve $r,\rho>0$ vardır öyle ki $\forall u \in S_r$ için $J(u) \geq \rho$ dur, burada

$S_r = \{u \in E : \|u\| = r\}$.

(2) $\|e\| > r$ olacak şekilde $e \in E$ vardır öyle ki $J(e) \leq \rho$ dur.

J nin alttan sınırsız olabileceğine dikkat edelim. Biz sadace S_r üzerinde alttan sınırlı olmasını istiyoruz.

$u=0$ ve $u=e$ yi birleştiren E üzerindeki bütün sürekli yolların kümesini Γ ile gösteriyoruz, burada

$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],E) : \gamma(0)=0,\ \ \gamma(1)=e\}$.

$\Gamma \neq \emptyset$ olduğunu görebiliriz çünkü $\gamma(t)=te$ yolu Γ ya aittir.

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J\big(\gamma(t)\big) \tag{2.1}$$

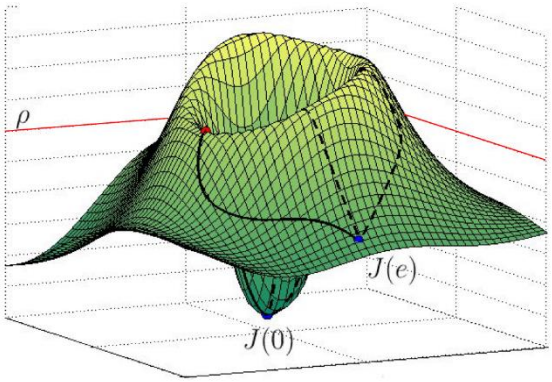
olarak seçelim. **(1)** özelliği, $\forall \gamma \in \Gamma$ için

$$\max_{t\in[0,1]} J\big(\gamma(t)\big) \geq \rho$$

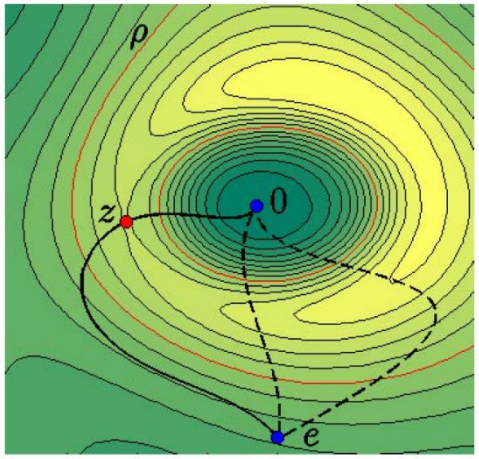
olmasını gerektirir, çünkü bu yolların hepsi S_r ile kesişir bu nedenle $c \geq \rho > 0$

dır. Diğer taraftan genel olarak (2.1) deki infimumun Γ da elde edildiğine emin olamayız, bu gerçeği gösteren sonlu boyutlu durumlarda bile örnekler vardır. Bu sorunu önlemek Palais-Smale kompaktlık şartı kullanılır.

J, **(1)** ve **(2)** özelliklerini sağlayan bir fonksiyonel olsun. c, (2.1) deki gibi tanımlansın ve Palais-Smale kompaktlık şartını sağlasın bu durumda c, J için bir kritik seviyedir. Kesin olarak $z \in E\backslash\{0,e\}$ vardır öyle ki $J(z)=c$ ve $J'(z)=0$ dır. Bu teoremde z noktasına bir **Mountain Pass kritik noktası**, c ye de bir **Mountain Pass kritik seviyes**i denir [48].



Şekil 2.1 $\mathbb{R}^3$ teki Mountain Pass teoreminin bir geometrik gösterimi



Şekil 2.2 Şekil 2.1'de temsil edilen fonksiyonelin $\mathbb{R}^2$ deki gösterimi

Tanım 2.42 (Palais-Smale Kompaktlık Şartı) E bir Hilbert uzayı ve $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ olsun. Eğer

- E uzayında $J(u_n)$ sınırlı
- $E^\star$ uzayında $J'(u_n) \to 0$

ise bir $u_n \in E$ dizisi bir Palais-Smale dizisidir. Eğer E deki her Palais-Smale dizisi yakınsak bir alt diziye sahipse bir J fonksiyoneli E üzerinde **Palais-Smale kompaktlık şartı**nı sağlar.

Eğer $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ fonksiyoneli Palais-Smale şartını sağlarsa, $J(u_n) \to c$ olacak şekilde E deki her u_n Palais-Smale dizisi için bir $u \in E$ elemanı vardır ve E de $u_n \to u$ olacak şekilde bir yakınsak alt dizi vardır. Bu nedenle süreklilikten $J(u) = c$ ve $J'(u) = 0$ elde ederiz. Diğer bir ifadeyle u, E üzerinde J nin bir kritik noktasıdır ve c ye bir kritik seviye denir [48].

Tanım 2.43 (Lineer Denklem ve Lineer Olmayan Denklem) Bir kısmi türevli denklemdeki bağımlı değişken (birden fazla bağımlı değişken varsa bağımlı değişkenler) ve bunların denklemdeki bütün kısmi türevleri birinci dereceden ve denklemi, bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazıldığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu oluyorsa bu denkleme **lineer denklem** denir, aksi halde denkleme **lineer olmayan denklem** denir.

Örnek 2.44 $U_t - k\left(U_{xx} + U_{yy}\right) = 0$ (k sabit) iki boyutlu ısı denklemi ikinci basamaktan lineer bir denklemdir. Diğer taraftan $z_x\left(z_{xy}\right)^2 + 2xzz_{yy} - 3xyz_y = 0$ ve $zz_{xy} - z_x z_y = 0$ denklemleri lineer olmayan bir denklemlerdir.

Tanım 2.45 (Yarı Lineer Denklem) Bir kısmi türevli denklem, denklemde bulunan en yüksek basamaktan kısmi türevlere göre (denklemdeki düşük basamaklı türevlerin ve bağımlı değişkenin bulunuş şeklinden bağımsız olarak) lineer ise bu denkleme **yarı lineer denklem** denir.

Örnek 2.46 $z_y z_{xx} + 2x^3 zz_{xy} + 2z_x - x^3 yz = 0$ denklemi yarı lineer bir denklemdir.

BÖLÜM 3

DEĞİŞKEN ÜSLÜ FONKSİYON UZAYLARI

Uygulamalı bilimlerde lineer olmayan problemlerin ortaya çıkmasıyla standart Lebesgue ve Sobolev uzaylarının uygulamalardaki kısıtlamaları ortaya çıkmaktadır. Değişken üslü lineer olamayan problemler sınıfının büyümesi yeni bir araştırma alanıdır ve yeni bir tür fiziksel olguyu yansıtmaktadır.

Bu bölümde değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzayları ve onların ana özellikleri sunulmaktadır.

$p : \overline{\Omega} \to (1, \infty)$ herhangi bir ölçülebilir foksiyonu için ve

$$p^- = \operatorname{ess}\inf_{x\in\Omega} p(x) \quad \text{ve} \quad p^+ = \operatorname{ess}\sup_{x\in\Omega} p(x)$$

olarak gösterelim.

Genellikle $p^+ < +\infty$ olduğu varsayılmaktadır, çünkü bu şart $L^{p(x)}(\Omega)$ değişken üslü Sobolev uzayıyla ilişkili olduğundan çoğu istenilen özelliği gerektirir. Bu fonksiyon uzayı

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : u \text{ ölçülebilir reel} - \text{değerli foksiyon, öyle ki } \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}\, dx < \infty \right\}$$

olarak tanımlanır. Bu uzayda Luxemburg normu olarak adlandırılan

$$\|u(x)\|_{p(x)} = \inf\left\{ \mu > 0 : \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{\mu}\right|^{p(x)} dx \le 1 \right\}$$

formülüyle verilen bir norm tanımlıyoruz. Değişken üslü Lebesque uzayı Orlicz-Musielak uzayının bir özel halidir. Sabit fonksiyon olan bir p için değişken üslü Lebesgue uzayı ile standart Lebesque uzayı denk olur.

Değişken üslü uzayların ayrılabilir ve yansımalı olduğunu hatırlayalım. Eğer $0 < |\Omega| < \infty$ ve Ω nın hemen heryerinde $p_1(x) \leq p_2(x)$ olacak şekilde p_1 , p_2 değişken üsler ise $L^{p_2(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1(x)}(\Omega)$ sürekli gömmesi vardır.

$L^{p(x)}(\Omega)$ nın eşlenik uzayı $L^{p'(x)}(\Omega)$ olarak gösterilir, burada $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$ dir. Herhangi bir $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ ve $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$ için

$$\left| \int_\Omega uv \, dx \right| \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-} \right) \|u\|_{p(x)} \|v\|_{p'(x)} \tag{3.1}$$

Hölder-tipi eşitsizlik sağlanır.

Değişken üslü Lebesgue uzaylarının ortalama süreklilik özelliği yoktur: Eğer p, bir B açık yuvarında sabit değil ve sürekli ise o zaman keyfi küçük normlu her $h \in \mathbb{R}^N$ için $u(x + h) \notin L^{p(x)}(\mathrm{B})$ olacak şekilde bir $u \in L^{p(x)}(\mathrm{B})$ fonksiyonu vardır (Kovacik ve Rákosnik [23]).

$L^{p(x)}$ uzayları teoreisinin geliştirilmesindeki problemlerin çoğu bu uzayda hemen hemen hiç değişmez öteleme olmadığı gerçeğinden kaynaklanır. Ayrıca konvolisyon kullanımı sınırlıdır: Young eşitsizliği

$$\|f * g\|_{L^{p(x)}} \leq C \|f\|_{L^{p(x)}} \|g\|_{L^1}$$

sağlanır ancak ve ancak p nin sabit olmasıyla.

Genelleştirilmiş Lebesgue-Sobolev uzaylarının manipüle edilmesinde önemli bir rol $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayının modülü tarafından oynanır, bu

$$\rho_{p(x)}(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} \, dx$$

olarak tanımlanan $\rho_{p(x)} : L^{p(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dönüşümüdür.

Lebesgue-Sobolev uzaylarının $p^+ = +\infty$ durumu [11,13] de araştırıldı. Böyle bir durumda $\Omega_\infty = \{x \in \Omega : p(x) = +\infty\}$ olarak belirtilir ve modül

$$\rho_{p(x)}(u) = \int_{\Omega \setminus \Omega_\infty} |u(x)|^{p(x)}\, dx + ess \sup_{x \in \Omega_\infty} |p(x)|$$

olarak tanımlanır.

Eğer (u_n) , $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ ise aşağıdaki ilişkiler sağlanır

$$\|u\|_{p(x)} > 1 \Rightarrow \|u\|_{p(x)}^{p^-} \leq \rho_{p(x)}(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^+}\,, \tag{3.2}$$

$$\|u\|_{p(x)} < 1 \Rightarrow \|u\|_{p(x)}^{p^+} \leq \rho_{p(x)}(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^-}\,, \tag{3.3}$$

$$\|u_n - u\|_{p(x)} \to 0 \Leftrightarrow \rho_{p(x)}(u_n - u) \to 0\,. \tag{3.4}$$

Daha sonra değişken üslü Sobolev uzayını

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{u \in L^{p(x)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\right\}$$

tanımlıyoruz.

$W^{1,p(x)}(\Omega)$ üzerinde aşağıdaki denk normları düşünebiliriz

$$\|u\| = |u|_{p(x)} + |\nabla u|_{p(x)}$$

ya da

$$\|u\| = \inf\left\{\mu > 0\,;\, \int_\Omega \left(\left|\frac{\nabla u(x)}{\mu}\right|^{p(x)} + \left|\frac{u(x)}{\mu}\right|^{p(x)}\right) dx \leq 1\right\}.$$

Ayrıca $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ yı, $W^{1,p(x)}(\Omega)$ da $C_0^\infty(\Omega)$ nın kapanışı olarak tanımlıyoruz. $p^- > 1$ olduğunu varsayarsak $W^{1,p(x)}(\Omega)$ ve $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ fonksiyon uzayları ayrılabilir ve yansımalı Banach uzaylarıdır.

$$\varrho_{p(x)}(u) = \int_\Omega \left(|\nabla u(x)|^{p(x)} + |u(x)|^{p(x)}\right) dx$$

seçelim. Her (u_n) , $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ için aşağıdaki ilişkiler sağlanır

$$\|u\| > 1 \Rightarrow \|u\|^{p^-} \leq \varrho_{p(x)}(u) \leq \|u\|^{p^+}\,, \tag{3.5}$$

$$\|u\| < 1 \Rightarrow \|u\|^{p^+} \leq \varrho_{p(x)}(u) \leq \|u\|^{p^-}\,, \tag{3.6}$$

$$\|u_n - u\| \to 0 \Leftrightarrow \varrho_{p(x)}(u_n - u) \to 0\,. \tag{3.7}$$

Daha sonra, değişken üslü bazı Lebesgue-Sobolev uzaylarına ilişkin bazı gömme sonuçlarını hatırlayalım. Eğer $p, \theta: \Omega \to (1, \infty)$ Lipschitz sürekli ise ve herhangi bir $x \in \Omega$ için $p^+ < N$ ve $p(x) \leq \theta(x) \leq p(x)^\star$ ise burada $p(x)^\star = \frac{Np(x)}{N-p(x)}$, bu durumda $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{\theta(x)}(\Omega)$ sürekli gömmesi vardır. Üstelik Ω_0, Ω nın bir sınırlı alt kümesi ise $W_0^{1,p(x)}(\Omega_0) \hookrightarrow L^{\theta(x)}(\Omega_0)$ gömmesi sürekli ve kompakttır.

Zhikov[47] un makalesinde görüldüğü gibi düzgün fonksiyonlar genel olarak $W^{1,p(x)}(\Omega)$ da yoğun değildir. Bu özellik *Lavrentiev olgusu*yla ilişki içerisindedir, bu olgu düzgün foksiyonlar üzerine infimumun, aynı sınır koşullarını sağlayan bütün fonksiyonlar üzerine infimumdan kesinlikle daha büyük olduğu varyasyonel problemlerin varlığını ileri sürer. Başka bir formülasyon, eğer Lipschitz yörüngeler kümesi $\mathbf{AC}[0,1]$ üzerinden alınan infimum sabit sınır koşullarına sahip Lipschitz yörüngeler kümesi $\mathbf{Lip}[0,1]$ üzerinden alınan infimumdan kesinlikle daha küçük ise bir Lagrange L nin Lavrentiev olgusunu gösterdiğini ileri sürer. Böyle bir olgunun ilk örneği,

$$\inf_{u \in W^{1,\infty}(0,1),\ u(0)=0,\ u(1)=1} \int_0^1 (x-u^3)^2 |u'(x)|^6\, dx > 0$$

iken

$$\inf_{u \in W^{1,1}(0,1),\ u(0)=0,\ u(1)=1} \int_0^1 (x-u^3)^2 |u'(x)|^6\, dx = 0$$

olduğunu kanıtlayan Lavrentiev[24] den kaynaklanır. $[0,1]$ aralığındaki Lagrange $L(t,x,x') = (x^3 - t^2)x'^6$ ya karşılık gelen ilgili bir örnek Manià[27] dan kaynaklanır.Üstelik Foss, Hrusa and Mizel[17] lineer olmayan elastik bir materyalin hareketini verdi, burada Lavrentiev olgusunun ortaya çıkışı , anlamlı bir fiziksel olayın ortaya çıkışıdır.

Eğer p logaritmik Hölder sürekli ise (gösterim: $p \in C^{0,\frac{1}{|\log t|}}(\overline{\Omega})$), yani $\forall x, y \in \overline{\Omega}$ için

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{|\log|x-y||}, \quad |x-y| \leq \frac{1}{2}$$

ise bu durumda düzgün fonksiyonlar $W^{1,p(x)}(\Omega)$ da yoğundur ve böylece Sobolev uzayı $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, $\|\cdot\|$ normu altında $C_0^\infty(\Omega)$ nın kapanışıdır. Edmunds and Rakosnik [12] aynı sonucu p üzerindeki bir yerel monotonluk koşulu altında türetmiştir.

Ω sınırlı ve $p \in C_+(\overline{\Omega})$ logaritmik Hölder sürekli ise $\forall u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ için

$$|u|_{p(x)} \leq C|\nabla u|_{p(x)} \quad [\text{Poincaré eşitsizliği}]$$

sağlanır, burada $C = C(p, |\Omega|, \text{diam}(\Omega), N)$. Poincàre eşitsizliği p üzerinde Sobolev eşitsizliği ve gömmesinden çok daha zayıf bir varsayım altında geçerli olur yani eğer üstel p *çok süreksiz değil* ise.

3.1 Bazı Açıklamalar ve Önemli Bir Örnek

Değişken üslü fonksiyon uzayları çerçevesinde bazı yararlı açıklamalar ile başlıyoruz.

Açıklama 3.1 Ω sınırlıysa aşağıdaki gömmeler geçerlidir:

$$C^{0,1}(\overline{\Omega}) \subset W^{1,q}(\Omega) \ \ (\text{eğer } q > N \text{ ise}) \subset C^{0,\frac{1}{|\log t|}}(\overline{\Omega}).$$

Açıklama 3.2 Ω sınırsızsa, $\forall x, y \in \overline{\Omega}$ için

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{|\log|x-y||}, \quad |x-y| \leq \frac{1}{2}$$

ve $\forall x, y \in \Omega$ için

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{|\log(e+|x|)|}, \quad |y| \geq |x|$$

ise p ye logaritmik Hölder süreklidir denir.

Değişken üslü bir-boyutlu Dirichlet enerjisinin minimizerleriyle ilgili aşağıdaki örneği veriyoruz.

$v(0) = 0$, $v(1) = a$ olan $\forall v \in W^{1,p(x)}(0,1)$ için $u(0) = 0$, $u(1) = a$ ve

$$\int_0^1 |u'(y)|^{p(y)}\, dy \leq \int_0^1 |v'(y)|^{p(y)}\, dy$$

ise bir $u \in W^{1,p(x)}(0,1)$ fonksiyonuna ve 0 ve $a > 0$ sınır değerleri olan bir **minimizer** deriz.

Eğer p sabitse, minimizer lineerdir yani $u(x) = ax.\ p(x) = 3_{\chi_{(0,1/2)}} + 2_{\chi_{(1/2,1)}}$ olsun. u bir minimizer olsun ve $u(1/2) = b$ olsun. Bu durumda $u|_{(0,1/2)}$, 0 ve b değerleri olan klasik enerji integrali probleminin çözümüdür ve $u|_{(1/2,1)}$, b ve a sınır değerleri olan çözümüdür. Bu durumda bu fonksiyonlar lineerdir. Bu u, $4b^3 - 2(a-b)^2$ Dirichlet enerjisine sahiptir. $b \longrightarrow 2b^3 - (a-b)^2$ fonksiyonu değişken üslü problemin minimizerini belirleyen $b = (\sqrt{12a+1} - 1)/6$ da bir minimuma sahiptir. Bir hesaplamayla minimizerin $a > 2/3$ ise konveks, $a < 2/3$ ise konkav, $a = 2/3$ ise lineer olduğu görülür.

BÖLÜM 4

DEĞİŞKEN ÜSLÜ BİR PROBLEMDE BİRLEŞİK ALT LİNEER PERTÜRBASYONLAR

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırı düzgün olan sınırlı bir bölge olsun. Bu bölümde lineer olmayan Dirichlet problemini

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\big(a(x,\nabla u)\big) = \lambda\big(u^{\gamma-1} - u^{\beta-1}\big), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \\ u \geq 0, & x \in \Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

inceliyoruz, burada $1 < \beta < \gamma < \inf_{x\in\overline{\Omega}} p(x)$.

$a(x,\xi) : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $A(x,\xi) : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dönüşümünün ξ ye göre sürekli türevi olsun yani $a(x,\xi) = \nabla_\xi A(x,\xi)$. Farzedelimki a ve A aşağıdaki hipotezleri sağlasın:

$(\mathrm{A1})$ $\forall x \in \overline{\Omega}$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$A(x,0) = 0.$

$(\mathrm{A2})$ $\forall x \in \overline{\Omega}$ ve $\xi \in \mathbb{R}^N$ için

$|a(x,\xi)| \leq c_1\big(1 + |\xi|^{p(x)-1}\big)$

olacak şekilde bir c_1 pozitif saibiti vardır.

$(\mathrm{A3})$ $\forall x \in \overline{\Omega}$ ve $\xi, \psi \in \mathbb{R}^N$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$0 \leq \big(a(x,\xi) - a(x,\psi)\big) \cdot (\xi - \psi),$

eşitlik olması için gerek ve yeter şart $\xi = \psi$ olmasıdır.

$(\mathrm{A4})$ $\forall x \in \overline{\Omega}$ ve $\xi, \psi \in \mathbb{R}^N$ için

$$A\left(x, \frac{\xi+\psi}{2}\right) \leq \frac{1}{2}A(x,\xi) + \frac{1}{2}A(x,\psi) - k|\xi - \psi|^{p(x)}$$

olacak şekilde $k > 0$ vardır.

$(\mathrm{A5})$ $\forall x \in \overline{\Omega}$ ve $\xi \in \mathbb{R}^N$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$|\xi|^{p(x)} \leq a(x,\xi)\xi \leq p(x)A(x,\xi).$

Örnekler 1. $A(x,\xi) = \frac{1}{p(x)}|\xi|^{p(x)}$, $a(x,\xi) = |\xi|^{p(x)-2}\xi$ olsun, burada $p(x) \geq 2$. Bu durumda $p(x)$-Laplace operatörü

$$\Delta_{p(x)}u = \operatorname{div}\big(a(x,\nabla u)\big) = \operatorname{div}\big(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\big) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right]^2 + \left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\right]^2 + \cdots + \left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right]^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right]$$

elde ederiz.

2. $A(x,\xi) = \frac{1}{p(x)}\left[(1+|\xi|^2)^{p(x)/2} - 1\right]$, $a(x,\xi) = (1+|\xi|^2)^{(p(x)-2)/2}\xi$ olsun, burada $p(x) \geq 2$. Bu durumda genelleştirilmiş ortalama eğrilik operatörü

$$\operatorname{div}\big((1+|\nabla u|^2)^{(p(x)-2)/2}\nabla u\big)$$

elde ederiz.

Eğer Ω da h.h.h. $u \geq 0$ ve $\forall \phi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ için

$$\int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla\phi\,dx - \lambda\int_\Omega u^{\gamma-1}\phi\,dx + \lambda\int_\Omega u^{\beta-1}\phi\,dx = 0$$

ise $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, problem (4.1) in bir zayıf çözümüdür.

Bu bölümdeki ana sonuç, λ nın yeterinde büyük olması koşuluyla problem (4.1) in en azından iki trivial olmayan zayıf çözümü olduğunu ileri sürmektedir.

Teorem 4.1 $(A1)$–$(A5)$ hipotezlerinin yerine getirildiğini farzedelim. Daha sonra $\lambda^\star > 0$ vardır öyleki $\forall\lambda > \lambda^\star$ için problem (4.1) in $p^+ < \min\{N, Np^-/(N-p^-)\}$ olması koşuluyla en az iki farklı negatif olmayan, trivial olmayan zayıf çözümleri vardır.

4.1 Enerji Fonksiyonelinin Nitel Özellikleri

E, genelleştirilmiş Sobolev Uzayı $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ göstersin. $I : E \to \mathbb{R}$ enerji fonksiyonelini

$$I(u) = \int_\Omega A(x,\nabla u)\,dx - \frac{\lambda}{\gamma}\int_\Omega u_+^\gamma\,dx + \frac{\lambda}{\beta}\int_\Omega u_+^\beta\,dx$$

olarak tanımlayalım, burada $u_+(x) = \max\{u(x),0\}$ dır.

İlk olarak I nın bazı temel özelliklerini belirliyoruz.

Önerme 4.2 I fonksiyoneli E üzerinde *iyi tanımlıdır* ve $\forall u,\phi \in E$ için

$$\langle I'(u),\phi\rangle = \int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla\phi\,dx - \lambda\int_\Omega u_+^{\gamma-1}\phi\,dx + \lambda\int_\Omega u_+^{\beta-1}\phi\,dx$$

ile verilen türevle $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ dir.

Önerme 4.2 yi ispatlamak için $\Lambda : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonelini

$$\Lambda(u) = \int_\Omega A(x,\nabla u)\,dx, \qquad \forall u,\phi \in E$$

olacak şekilde tanımlıyoruz.

Yardımcı Teorem 4.3 (i) Λ fonksiyoneli E de *iyi tanımlıdır*.

(ii) Λ fonksiyoneli $C^1(E,\mathbb{R})$ sınıfındandır ve $\forall u, \phi \in E$ için

$$\langle \Lambda'(u), \phi \rangle = \int_\Omega a(x, \nabla u) \cdot \nabla \phi \, dx.$$

İspat (i) Herhangi $x \in \Omega$ ve $\xi \in \mathbb{R}^N$ için

$$\int_0^1 a(x, t\xi) \cdot \xi \, dt = \int_0^1 |t\xi|^{p(x)-1} \xi \, dt = \int_0^1 |t|^{p(x)-1} |\xi|^{p(x)} \, dt = |\xi|^{p(x)} \int_0^1 |t|^{p(x)-1} \, dt$$

$$= |\xi|^{p(x)} \frac{t^{p(x)}}{p(x)}\Big|_0^1 = \frac{|\xi|^{p(x)}}{p(x)} = A(x, \xi).$$

$(\mathrm{A2})$ hipotezini kullanarak

$$A(x,\xi) \le c_1 \int_0^1 \left(1 + |\xi|^{p(x)-1} t^{p(x)-1}\right) |\xi| \, dt = c_1 \int_0^1 |\xi| \, dt + c_1 \int_0^1 |\xi|^{p(x)} t^{p(x)-1} \, d$$

$$= c_1 |\xi| + \frac{c_1}{p(x)} |\xi|^{p(x)} \le c_1 |\xi| + \frac{c_1}{p^-} |\xi|^{p(x)}, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \xi \in \mathbb{R}^N \tag{4.2}$$

elde ederiz.

Yukarıdaki eşitsizlik ve $(\mathrm{A5})$

$$0 \le \int_\Omega A(x, \nabla u) \, dx \le c_1 \int_\Omega |\nabla u| \, dx + \frac{c_1}{p^-} \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} \, dx, \quad \forall u \in E$$

olmasını gerektirir.

(3.1) eşitsizliğini ve (3.2), (3.3) ilişkilerini kullanarak Λ nın E de iyi tanımlı olduğunu çıkarırız.

(ii) Şimdi Gâteaux türevinin varlığını tartışıyoruz. $u, \phi \in E$ olsun. $x \in \Omega$ ve $0 < |r| < 1$ olsun. Bu durumda ortalama değer teoreminden $v \in [0,1]$ vardır öyle ki

$$\frac{\left|A\left(x, \nabla u(x) + r\, \nabla \phi(x)\right) - A(x, \nabla u)\right|}{|r|} = \left|a\left(x, \nabla u(x) + v\, r\, \nabla \phi(x)\right)\right| |\nabla \phi(x)|.$$

$(\mathrm{A2})$ şartını kullanarak

$$\frac{\left|A\left(x, \nabla u(x) + r\, \nabla \phi(x)\right) - A(x, \nabla u)\right|}{|r|} = \left|a\left(x, \nabla u(x) + v\, r\, \nabla \phi(x)\right)\right| |\nabla \phi(x)|$$

$$\le \left[c_1 + c_1 (|\nabla u(x)| + |\nabla \phi(x)|)^{p(x)-1}\right] |\nabla \phi(x)|$$

$$\le \left[c_1 + c_1 2^{p^+} \left(|\nabla u(x)|^{p(x)-1} + |\nabla \phi(x)|^{p(x)-1}\right)\right] |\nabla \phi(x)|.$$

Hölder eşitsizliğinden

$$\int_\Omega c_1 |\nabla \phi| \, dx \le |c_1|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}} \cdot |\nabla \phi|_{p(x)}$$

ve

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-1}|\nabla \phi|\,dx \le \left||\nabla u|^{p(x)-1}\right|_{\frac{p(x)}{p(x)-1}} \cdot |\nabla \phi|_{p(x)}.$$

Bu nedenle $c_1\left[1+2^{p^+}\left(|\nabla u(x)|^{p(x)-1}+|\nabla \phi(x)|^{p(x)-1}\right)\right]|\nabla \phi(x)| \in L^1(\Omega)$.

Lebesgue teoreminden

$$\langle \Lambda'(u), \phi\rangle = \langle \left(\int_\Omega A(x,\nabla u)\,dx\right)', \phi\rangle = \langle A(x,\nabla u), \phi\rangle = \int_\Omega \nabla A(x,\nabla u)\cdot\nabla\phi\,dx$$

$$= \int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla\phi\,dx$$

olduğu görülür.

Gâteaux türevinin sürekliliğini sağlamak için E de $u_n \to u$ olduğunu farzedelim. $\theta(x,u) = a(x,\nabla u)$ olarak tanımlayalım. (A2) hipotezi ve Fan and Zhang [14] deki Önerme 2.2 yi kullanarak $(L^{q(x)}(\Omega))^N$ de $\theta(x,u_n) \to \theta(x,u)$ sonucuna varırız, burada $q(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$ dir. (3.1) eşitsizliğinden

$$|\langle \Lambda'(u_n) - \Lambda'(u), \phi\rangle| \le |\theta(x,u_n) - \theta(x,u)|_{q(x)} |\nabla\phi|_{p(x)}$$

ve böylece

$n \to \infty$ iken $\|\Lambda'(u_n) - \Lambda'(u)\| \le |\theta(x,u_n) - \theta(x,u)|_{q(x)} \to 0$.

Yardımcı Teorem 4.3 ün ispatı tamamlandı. □

Bir sonraki sonuç Stampacchia [44] e bağlı klasik bir özelliği genelleştirmektedir. İspat Lebesgue in domine ettiği yakınsaklık teoremini ve Sobolev-tipi gömmeleri birleştirir.

Yardımcı Teorem 4.4 $u \in E$ ise bu durumda $u_+,\ u_- \in E$ ve

$$\nabla u_+ = \begin{cases} 0, & [u \le 0] \text{ ise} \\ \nabla u, & [u > 0] \text{ ise,} \end{cases} \qquad \nabla u_- = \begin{cases} 0, & [u \ge 0] \text{ ise} \\ \nabla u, & [u < 0] \text{ ise} \end{cases}$$

burada $\forall x \in \Omega$ için $u_\pm = \max\{\pm u(x), 0\}$.

Yardımcı Teorem 4.3 ve 4.4 ten Önerme 4.2 nin geçerli olduğu açıktır.

u, I nın bir kritik noktasıysa bu durumda Yardımcı Teorem 4.4 ve (A5) şartını kullanarak

$$0 = \langle I'(u), u_-\rangle = \int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla u_-\,dx - \lambda\int_\Omega (u_+)^{\gamma-1}u_-\,dx + \lambda\int_\Omega (u_+)^{\beta-1}u_-\,dx$$

$$= \int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla u_-\,dx = \int_\Omega a(x,\nabla u_-)\cdot\nabla u_-\,dx \ge \int_\Omega |\nabla u_-|^{p(x)}\,dx.$$

Bu durumda $u \ge 0$ sonucuna varırız. Sonuç olarak I nın trivial olmayan kritik noktaları problem (4.1) in negatif olmayan çözümleridir.

Yukarıdaki ifade kritik noktalar teorisini kullanarak Teorem 4.1 i ispatlayabileceğimizi gösterir. Daha doğrusu, ilk olarak yeterince büyük $\lambda > 0$ için, I fonksiyonelinin $I(u_1) < 0$ olacak şekilde bir global minimizer $u_1 \ge 0$ e sahip olduğunu gösteririz. Daha sonra,

Dağ Geçiş Teoremin vasıtasıyla $I(u_2) > 0$ olacak şekilde bir ikinci kritik nokta u_2 elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.5 Λ fonksiyoneli zayıf alt yarı-süreklidir.

İspat Brezis [7] deki Sonuç III.8 e göre Λ nın alt yarı-sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. Bu amaçla $u \in E$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Λ konveks ((A4)şartından) olduğu için, herhangi $v \in E$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır

$$\int_\Omega A(x, \nabla v)\, dx \geq \int_\Omega A(x, \nabla u)\, dx + \int_\Omega a(x, \nabla u) \cdot (\nabla v - \nabla u)\, dx.$$

(A2) şartını ve (3.1) eşitsizliğini kullanarak $\|v - u\| \leq \delta = \varepsilon / c_4$ olacak şekilde $\forall v \in E$ için

$$\begin{aligned}
\int_\Omega A(x, \nabla v)\, dx &\geq \int_\Omega A(x, \nabla u)\, dx - \int_\Omega |a(x, \nabla u)||\nabla v - \nabla u|\, dx \\
&\geq \int_\Omega A(x, \nabla u)\, dx - \int_\Omega c_1\big(1 + |\nabla u|^{p(x)-1}\big)|\nabla v - \nabla u|\, dx \\
&= \int_\Omega A(x, \nabla u)\, dx - c_1 \int_\Omega |\nabla v - \nabla u|\, dx - c_1 \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-1} |\nabla (v - u)|\, dx \\
&\geq \int_\Omega A(x, \nabla u)\, dx - c_2 |1|_{q(x)} |\nabla (v - u)|_{p(x)} \\
&\quad - c_3 \big| |\nabla u|^{p(x)-1} \big|_{q(x)} |\nabla (v - u)|_{p(x)} \\
&\geq \int_\Omega A(x, \nabla u)\, dx - c_4 \|v - u\| \geq \int_\Omega A(x, \nabla u)\, dx - \varepsilon
\end{aligned}$$

elde ederiz burada c_1, c_2, c_3, c_4 pozitif sabitler ve $q(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$ dir. Λ nın zayıf alt yarı-sürekli olduğu sonucuna vardık. Yardımcı Teorem 4.5 in ispatı tamamlandı. □

Standart argümanlar ilişkili Rayleigh bölümlerinden (katsayılarından) birinin pozitif infimuma sahip olduğunu göstermektedir. Daha doğrusu aşağıdaki özelliğe sahibiz.

Yardımcı Teorem 4.6 $\lambda_1 > 0$ vardır öyle ki

$$\lambda_1 = \inf_{u \in E,\ \|u\| > 1} \frac{\int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)}\, dx}{\int_\Omega |u|^{p^-}\, dx}.$$

Önerme 4.7 (i) I fonksiyoneli alttan sınırlıdır ve coercivedir.

(ii) I fonksiyoneli zayıf alt yarı-süreklidir.

İspat (i) $1 < \beta < \gamma < p^-$ olduğu için

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\frac{1}{\gamma} t^\gamma - \frac{1}{\beta} t^\beta}{t^{p^-}} = 0.$$

Daha sonra herhangi bir $\lambda > 0$ için $C_\lambda > 0$ vardır öyle ki

$$\lambda \left(\frac{1}{\gamma} t^\gamma - \frac{1}{\beta} t^\beta \right) \leq \frac{\lambda_1}{2} t^{p^-} + C_\lambda, \quad \forall t \geq 0,$$

burada λ_1, Yardımcı Teorem 4.6 da tanımlıdır.

$(A5)$ şartı ve yukarıdaki eşitsizlik, $\|u\| > 1$ olacak şekilde herhangi bir $u \in E$ için

$$I(u) \geq \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)}\, dx - \frac{\lambda_1}{2} \int_\Omega |u|^{p^-}\, dx - C_\lambda \mu(\Omega)$$
$$\geq \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)}\, dx - C_\lambda \mu(\Omega)$$
$$\geq \frac{1}{2p^+} \|u\|^{p^-} - C_\lambda \mu(\Omega).$$

Bu I nın alttan sınırlı ve coercive olduğunu gösterir.

(ii) Yardımcı Teorem 4.5 i kullanarak Λ nın zayıf alt yarı-sürekli olduğu sonucuna varırız. I nın zayıf alt yarı sürekli oduğunu gösteririz. $(u_n) \subset E$, E deki u ya zayıf yakınsayan bir dizi olsun. Λ zayıf alt yarı-sürekli olduğu için

$$\Lambda(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \Lambda(u_n). \tag{4.3}$$

Diğer yandan; E, $L^\gamma(\Omega)$ ve $L^\beta(\Omega)$ da kompakt olarak gömüldüğünden (u_{n+}) hem $L^\gamma(\Omega)$ hem de $L^\beta(\Omega)$ da u_+ ya kuvvetli yakınsar. Bu gerçek, (4.3) ilişksiyle birlikte

$$I(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \Lambda(u_n)$$

olmasını gerektirir. Bu nedenle I zayıf alt yarı-süreklidir. Önerme 4.7 nin ispatı tamamlanır. □

Önerme 4.7 den I nın bir $u_1 \in E$ global minimizeri var olduğu sonucuna varırız. Aşağıdaki sonuç λ nın yeterince büyük olması şartıyla $u_1 \neq 0$ olduğu gerektirir.

Bir sonraki özellik, enerji fonksiyonelinin, parametrenin büyük değerleri için negatif değerlere ulaştığını iddaa eder.

Önerme 4.8 $\lambda^\star > 0$ vardır öyle ki her $\lambda > \lambda^\star$ için $\inf_E I < 0$.

İspat $\Omega_1 \subset \Omega$ yeterince büyük bir kompakt alt küme ve Ω_1 de $u_0(x) = t_0$ olacak şekilde $u_0 \in E$ ve $\Omega \backslash \Omega_1$ de $0 \leq u_0(x) \leq t_0$ olsun, burada $t_0 > 1$,

$$\frac{1}{\gamma} t_0^\gamma - \frac{1}{\beta} t_0^\beta > 0$$

olacak şekilde seçilmiştir.

$$\frac{1}{\gamma} \int_\Omega u_0^\gamma\, dx - \frac{1}{\beta} \int_\Omega u_0^\beta\, dx \geq \frac{1}{\gamma} \int_{\Omega_1} u_0^\gamma\, dx - \frac{1}{\beta} \int_{\Omega_1} u_0^\beta\, dx - \frac{1}{\beta} \int_{\Omega\backslash\Omega_1} u_0^\beta\, dx$$
$$\geq \frac{1}{\gamma} \int_{\Omega_1} u_0^\gamma\, dx - \frac{1}{\beta} \int_{\Omega_1} u_0^\beta\, dx - \frac{1}{\beta} t_0^\beta \mu(\Omega\backslash\Omega_1) > 0$$

ve böylece yeterince büyük $\lambda > 0$ için $I(u_0) < 0$ dır. □

Böylece Önerme 4.8 geçerli olduğundan, $u_1 \in E$ problem (4.1) in bir trivial olmayan zayıf çözümüdür.

$\lambda \geq \lambda^\star$ olsun.

$$g(x,t)=\begin{cases}0, & t<0 \text{ için}\\ t^{\gamma-1}-t^{\beta-1}, & 0\le t\le u_1(x) \text{ için}\\ u_1(x)^{\gamma-1}-u_1(x)^{\beta-1}, & t>u_1(x) \text{ için}\end{cases}$$

ve

$$G(x,t)=\int_0^t g(x,s)\,ds$$

seçelim.

$J:E\to\mathbb{R}$ fonksiyonelini

$$J(u)=\int_\Omega A(x,\nabla u)\,dx-\lambda\int_\Omega G(x,u)\,dx$$

olarak tanımlayalım. I fonksiyoneli için kullanılan aynı argümanlar $J\in C^1(E,\mathbb{R})$ ve her $u,\phi\in E$ için

$$\langle J'(u),\phi\rangle=\int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla\phi\,dx-\lambda\int_\Omega g(x,u)\phi\,dx$$

olmasını gerektirir.

Diğer yandan, eğer $u\in E$, J nin bir kritik noktası ise o zaman $u>0$ olduğuna dikkat çekiyoruz. İspat fonksiyonel I durumunda olduğu gibi uygulanabilir.

Yardımcı Teorem 4.9 u, J nin bir kritik noktası ise o zaman $u\le u_1$ dir.

İspat

$$\begin{aligned}0&=\langle J'(u)-I'(u),(u-u_1)_+\rangle\\ &=\int_\Omega\big(a(x,\nabla u)-a(x,\nabla u_1)\big)\cdot\nabla(u-u_1)_+\,dx\\ &\quad-\lambda\int_\Omega\Big[g(x,u)-\Big(u_1^{\gamma-1}-u_1^{\beta-1}\Big)(u-u_1)_+\Big]dx\\ &=\int_{[u>u_1]}\big(a(x,\nabla u)-a(x,\nabla u_1)\big)\cdot\nabla(u-u_1)dx.\end{aligned}$$

$(A3)$ şartından, yukarıdaki eşitlik sağlanır ancak ve ancak $\nabla u=\nabla u_1$. Bu

$\forall x\in\omega:=\{y\in\Omega: u(y)>u_1(y)\}$ için $\nabla u(x)=\nabla u_1(x)$ olduğunu gösterir. Buradan

$$\int_\omega|\nabla(u-u_1)|^{p(x)}\,dx=0$$

ve böylece

$$\int_\Omega|\nabla(u-u_1)_+|^{p(x)}\,dx=0.$$

İlişki (3.3) den

$$\|(u-u_1)_+\|=0$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 4.4 ten $u-u_1 \in E$ olduğun için $(u-u_1)_+ \in E$ dir. Böylece, Ω da $(u-u_1)_+ = 0$ yani Ω da $u \leq u_1$ dir. Yardımcı Teorem 4.9 un ispatı tamamlandı. □

Aşağıda mountain pass teoremi üzerinden $J(u_2) > 0$ olacak şekilde J nin bir $u_2 \in E$ kritik nokltasını belirleyeceğiz. Yukarıdaki yardımcı teoremden Ω da $0 \leq u_2 \leq u_1$ olduğunu çıkaracağız. Bu nedenle

$g(x,u_2) = u_2^{\gamma-1} - u_2^{\beta-1}$ ve $G(x,u_2) = \frac{1}{\gamma}u_2^{\gamma} - \frac{1}{\beta}u_2^{\beta}$

ve böylece

$J'(u_2) = I'(u_2)$ ve $J(u_2) = I(u_2)$.

Daha doğrusu

$I(u_2) > 0 = I(0) > I(u_1)$ ve $I'(u_2) = 0$.

Bu, u_2 nin $0 \leq u_2 \leq u_1$, $u_2 \neq 0$ ve $u_2 \neq u_1$ olacak şekilde problem (4.1) in bir zayıf çözümü olduğunu gösterir.

Yukarıda tanımlanan u_2 yi bulmak için J enerjisinin aşağıdaki geometrik özelliği sağladığını ispatlıyoruz (ayrıntılar için [28] e bakınız).

Yardımcı Teorem 4.10 $\|u\| = \rho$ olacak şekilde $\forall u \in E$ için $J(u) \geq a$ olacak şekilde $\rho \in (0, \|u_1\|)$ vardır ve $a > 0$ dır.

Yardımcı Teorem 4.11 J fonksiyoneli coercivedir.

İspat, ilişki (3.2) ve eşitsizlik (3.1) ile $(\mathrm{A5})$ varsayımımızı birleştirir.

Aşağıdaki sonuç, E deki zayıf yakınsayan bir dizinin de kuvvetli yakınsamasını sağlayan yeterli bir şartı verir.

Yardımcı Teorem 4.12 Farz edelim ki (u_n) dizisi, E deki u ya zayıf yakınsasın ve

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\Omega} a(x,\nabla u_n)\cdot(\nabla u_n - \nabla u)\,dx \leq 0$$

olsun. O zaman (u_n), E deki u ya kuvvetli yakınsar.

İspat İlişki (4.2) yi kullanarak,

$A(x,\xi) \leq c_5\big(|\xi| + |\xi|^{p(x)}\big),\ \ \forall x \in \overline{\Omega},\ \ \xi \in \mathbb{R}^N$

olacak şekilde bir c_5 pozitif saibiti vardır.

Yukarıdaki eşitsizlik

$$A(x,\nabla u_n) \leq c_5\big(|\nabla u_n| + |\nabla u_n|^{p(x)}\big),\ \ \forall x \in \overline{\Omega},\ \ n \qquad (4.4)$$

olmasını gerektirir.

u_n nin E deki u ya zayıf yakınsaması gerçeği her n için $\|u_n\| \leq R$ olacak şekilde $R > 0$ var olmasını gerektirir. İlişki (4.4), eşitsizlik (3.1)–(3.3) den $\{\int_{\Omega} A(x,\nabla u_n)\,dx\}$ sınırlıdır. O zaman bir alt diziye kadar $\int_{\Omega} A(x,\nabla u_n)\,dx \to c$ olduğu çıkarılır. Yardımcı Teorem 4.5 ten

$$\int_\Omega A(x,\nabla u)\,dx \le \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega A(x,\nabla u_n)\,dx = c$$

elde edilir. Diğer yandan Λ konveks olduğu için

$$\int_\Omega A(x,\nabla u)\,dx \ge \int_\Omega A(x,\nabla u_n)\,dx + \int_\Omega a(x,\nabla u_n)\cdot(\nabla u - \nabla u_n)\,dx.$$

Daha sonra, $\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega a(x,\nabla u_n)\cdot(\nabla u_n - \nabla u)\,dx \le 0$ hipotezinden, $\int_\Omega A(x,\nabla u)\,dx = c$ sonucuna varılır.

$(u_n + u)/2$ nin E deki u ya zayıf yakınsadığını hesaba katarak ve Yardımcı Teorem 4.5 kullanarak

$$c = \int_\Omega A(x,\nabla u)\,dx \le \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega A\left(x,\nabla\frac{u_n+u}{2}\right)dx \tag{4.5}$$

elde ederiz.

Çelişkiden, u_n in E deki u ya yakınsamadığını varsayıyoruz. Daha sonra (3.4) den, $\varepsilon > 0$ ve u_n in bir u_{n_m} alt dizisi vardır öyle ki

$$\int_\Omega \left|\nabla\left(u_{n_m}-u\right)\right|^{p(x)}dx \ge \varepsilon, \quad \forall m. \tag{4.6}$$

$(\mathrm{A4})$ şartından

$$\frac{1}{2}A(x,\nabla u) + \frac{1}{2}A\left(x,\nabla u_{n_m}\right) - A\left(x,\nabla\frac{u_{n_m}+u}{2}\right) \ge k\left|\nabla\left(u_{n_m}-u\right)\right|^{p(x)} \tag{4.7}$$

elde edilir.

(4.6) ve (4.7) ilişkileri

$$\frac{1}{2}\int_\Omega A(x,\nabla u)\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega A\left(x,\nabla u_{n_m}\right)dx - \int_\Omega A\left(x,\nabla\frac{u_{n_m}+u}{2}\right)dx \ge k\int_\Omega \left|\nabla\left(u_{n_m}-u\right)\right|^{p(x)}dx \ge k\varepsilon$$

verir. Yukarıdaki eşitsizlikte $m\to\infty$ olursa

$$c - k\varepsilon \ge \limsup_{m\to\infty}\int_\Omega A\left(x,\nabla\frac{u_{n_m}+u}{2}\right)dx$$

olur ve bu (4.5) le bir çelişkidir. Bu u_n in E deki u ya kuvvetli yakınsadığını gösterir ve Yardımcı Teorem 4.12 ispatlandı. □

4.2 Birden Çok Çözümün Varlığı

Yardımcı Teorem 4.10 ve mountain pass teoremini (Ambrosetti ve Rabinowitz [2] bakınız) kullanarak, bir $(u_n)\subset E$ dizisi vardır öyleki

$$J(u_n)\to c > 0 \text{ ve } J'(u_n)\to 0 \tag{4.8}$$

Burada

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t))$$

ve

$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E);\ \gamma(0) = 0,\ \ \gamma(1) = u_1\}.$

İlişki (4.8) ve Yardımcı Teorem 4.11 den (u_n) sınırlıdır ve böylece halâ (u_n) ile gösterilen bir alt diziye geçersek, $u_2 \in E$ var olduğunu varsayabiliriz öyle ki u_n, u_2 ye zayıf yakınsar. E, herhangi $i \in [1, p^-]$ için $L^i(\Omega)$ da kompakt olarak gömüldüğünden, bu u_n in, $\forall i \in [1, p^-]$ için $L^i(\Omega)$ daki u_2 ye kuvvetli yakınsadığını gösterir. Böylece $n \to \infty$ iken

$$\langle \Lambda'(u_n) - \Lambda'(u_2), u_n - u_2 \rangle = \langle J'(u_n) - J'(u_2), u_n - u_2 \rangle + \lambda \int_\Omega [g(x, u_n) - g(x, u_2)](u_n - u_2)\, dx = o(1).$$

Yardımcı Teorem 4.12 den u_n, E deki u_2 ye kuvvetli yakınsar ve ilişki (4.8) kullanılarak

$J(u_2) = c > 0$ ve $J'(u_2) = 0$

buluruz. Dolayısıyla $J(u_2) = c > 0$ ve $J'(u_2) = 0$ dır. Yardımcı Teorem 4.9 dan Ω da $0 \le u_2 \le u_1$.

Dolayısıyla

$g(x, u_2) = u_2^{\gamma-1} - u_2^{\beta-1}$ ve $G(x, u_2) = \frac{1}{\gamma} u_2^{\gamma} - \frac{1}{\beta} u_2^{\beta}$

ve böylece

$J(u_2) = I(u_2)$ ve $J'(u_2) = I'(u_2)$.

u_2 nin I nın bir kritik noktası olduğuna ve sonuç olarak (4.1) in bir çözümü olduğuna karar veriyoruz. Üstelik $I(u_2) = c > 0$ ve $I(u_2) > 0 > I(u_1)$. Böylece u_2 trivial değildir ve $u_2 \neq u_1$ dir. Teorem 4.1 in ispatı tamamlandı. □

BÖLÜM 5

BİRDEN FAZLA DEĞİŞKEN ÜSSE SAHİP ALT KRİTİK LANE-EMDEN DEKLEMLERİ

5.1 Problemin İfadesi ve Önceki Sonuçları

Standart Lane-Emden denklemi

$$\begin{cases} -\nabla u = \lambda |u|^{q-2}u, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

burada $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ bir sınırlı bölgedir. Tezimizin bu bölümünde çözümlerin yapısı ayrıntılı incelenmiştir ve çözümlerin davranışı, kritik Sobolev üssüne göre q değerlerine kuvvetle bağlıdır. Bu tezimizde birkaç tane değişken üssün varlığında çözümlerin bazı çarpıcı özelliklerine dikkat çekiyoruz. Özellikle, homojen olmayan diferansiyel operatörle olan ilişkide standart olmayan lineer olmama durumları tarafından üretilen spektrumun bazı konsantrasyon özelliklerine dikkat çekiyoruz.

Aşağıdaki lineer olamayan Dirichlet problemini ele alalım

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) = \lambda |u|^{q(x)-2}u, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

$\overline{\Omega}$ üzerinde $p(x) = q(x)$ durumunda Fan, Zhang ve Zhao [15], Lyusternik–Schnirelmann kritik nokta teoremine dayanan bir argümanı kullanarak problem (5.1) için sonsuz sayıda özdeğerin varlığını ortaya koymuştur. Bütün negatif olmayan özdeğerlerin kümesi Λ ile gösterildiğinde Fan, Zhang ve Zhao, Λ nın ayrık, $\sup \Lambda = +\infty$ olduğunu gösterdiler ve sadece özel koşullar altında $p(x)$ fonksiyonunun bir çeşit monotonluğuyla bir şekilde bağlanltılı olduğuna dikkat çektiler, $\inf \Lambda > 0$ elde edilir (bu $p(x)$ in sabit olması durumuyla çelişkilidir, o zaman daima $\inf \Lambda > 0$ dır).

$\min_{x\in\overline{\Omega}} q(x) < \min_{x\in\overline{\Omega}} p(x)$ ve $q(x)$ in bir alt kritik büyümeye sahip olduğu durumda Mihăilescu ve Rădulescu [29], orijinin bir komşuluğunda yatan özdeğerlerin sürekli bir ailesinin varlığını ispatlamak için Ekeland ın varyasyonel prensibini kullandı. Eğer $\max_{x\in\overline{\Omega}} p(x) < \min_{x\in\overline{\Omega}} q(x)$ ve $q(x)$ mountain-pass argümanı olan bir alt kritik büyümeye sahipse, o zaman herhangi bir $\lambda > 0$ problem (5.1) in bir özdeğeridir.

$\max_{x\in\overline{\Omega}} q(x) < \min_{x\in\overline{\Omega}} p(x)$ olduğunu varsayarsak, problem (5.1) le ilişkili enerji fonksiyoneli herhangi $\lambda > 0$ için bir minimuma sahiptir, bakınız [14, Theorem 4.3]. Şimdi [29] daki ana sonucu kullanarak $\lambda^{\star}$ ve $\lambda^{\star\star}$ iki pozitif sabitini elde ederiz öyle ki herhangi bir $\lambda \in (0,\lambda^{\star}) \cup (\lambda^{\star\star},\infty)$ problem (5.1) in bir özdeğeridir.

Bu bölümde

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\left(|\nabla u|^{p_1(x)-2} + |\nabla u|^{p_2(x)-2}\right)\nabla u\right) = \lambda |u|^{q(x)-2}u, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5.2}$$

problemiyle ilgileniyoruz.

Aşağıdaki hipotezleri ortaya koyalım:

$$1 < p_2(x) < \min_{y\in\overline{\Omega}} q(y) \le \max_{y\in\overline{\Omega}} q(y) < p_1(x), \quad \forall x \in \overline{\Omega} \tag{5.3}$$

ve

$$\max_{y\in\overline{\Omega}} q(y) < p_2^{*}(x), \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \tag{5.4}$$

burada $p_2(x) < N$ ise $p_2^{\star}(x) \coloneqq \frac{Np_2(x)}{N-p_2(x)}$ ve $p_2(x) \ge N$ ise $p_2^{\star}(x) = +\infty$ olur.

Bu koşullar altında, sonsuzluktaki spektrumun bir konsantrasyon özelliğini gösteririz. Daha doğrusu, $\lambda_0 \le \lambda_1$ olacak şekilde λ_0 ve λ_1 iki pozitif sabiti vardır öyle ki herhangi bir $\lambda \in (0,\lambda_0)$ problem (5.2) nin bir özdeğeri değilken herhangi bir $\lambda \in (\lambda_1,\infty)$ problem (5.2) nin bir özdeğeridir. Çalışmamızın önemli bir sonucu, (4.1) ve (5.4) hipotezleri altında

$$\inf_{u\in W_0^{1,p(x)}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega \frac{1}{p_1(x)}|\nabla u|^{p_1(x)}\,dx + \int_\Omega \frac{1}{p_2(x)}|\nabla u|^{p_2(x)}\,dx}{\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}\,dx} > 0$$

elde edilir. Bu gerçek Lagrange çarpanı teoremi kullanılarak ispatlanmıştır. Homojenliğin olmayışı, varsayım (4.1) ve (5.4) ün

$$\lim_{\|u\|_{p_1(x)}\to 0} \frac{\int_\Omega \frac{1}{p_1(x)}|\nabla u|^{p_1(x)}\,dx + \int_\Omega \frac{1}{p_2(x)}|\nabla u|^{p_2(x)}\,dx}{\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}\,dx} = \infty$$

ve

$$\lim_{\|u\|_{p_1(x)}\to \infty} \frac{\int_\Omega \frac{1}{p_1(x)}|\nabla u|^{p_1(x)}\,dx + \int_\Omega \frac{1}{p_2(x)}|\nabla u|^{p_2(x)}\,dx}{\int_\Omega \frac{1}{q(x)}|u|^{q(x)}\,dx} = \infty$$

verdiği gerçeğiyle dengelenir, burada $\|\cdot\|_{p_1(x)}$, değişken üslü Sobolev uzayı $W_0^{1,p_1(x)}(\Omega)$ daki normu temsil eder.

5.2 Sonsuzluktaki Konsantrasyon

Herhangi bir $x \in \overline{\Omega}$ için $p_2(x) < p_1(x)$ olduğunda bu, $W_0^{1,p_1(x)}(\Omega)$ nın $W_0^{1,p_2(x)}(\Omega)$ da sürekli gömüldüğünü gösterir. Böylece, (5.2) tipindeki bir problemin bir çözümü $W_0^{1,p_1(x)}(\Omega)$ değişken üslü uzayında aranacaktır.

$\forall v \in W_0^{1,p_1(x)}(\Omega)\backslash\{0\}$ için

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p_1(x)-2} + |\nabla u|^{p_2(x)-2}\right)\nabla u \nabla v \, dx - \lambda \int_\Omega |u|^{q(x)-2} uv \, dx = 0$$

olacak şekilde $u \in W_0^{1,p_1(x)}(\Omega)\backslash\{0\}$ varsa $\lambda \in \mathbb{R}$, problem (5.2) nin bir özdeğeridir. λ, problem (5.2) nin bir özdeğeri ise buna karşılık gelen özfonksiyon $u \in W_0^{1,p_1(x)}(\Omega)\backslash\{0\}$, problem (5.2) nin bir zayıf çözümüdür.

Bir ilk Rayleigh kat sayısını

$$\lambda_1 := \inf_{u \in W_0^{1,p_1(x)}(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\int_\Omega \frac{1}{p_1(x)} |\nabla u|^{p_1(x)} \, dx + \int_\Omega \frac{1}{p_2(x)} |\nabla u|^{p_2(x)} \, dx}{\int_\Omega \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} \, dx} \tag{5.5}$$

olarak tanımlayalım.

Bu bölümdeki ana sonuç aşağıdaki teoremle verilmiştir. Bu sonuç (5.5) de tanımlanan bölümün (kat sayının) ve λ_0 ile tanımlanan bir ikinci Rayleigh katsayısının önemini gösterir.

Teorem 5.1 (5.3) ve (5.4) şartlarının yerine getirildiğini varsayalım varsayalım. Bu durumda $\lambda_1 > 0$ dır. Üstelik, herhangi $\lambda \in [\lambda_1, \infty)$ problem (5.2) nin bir özdeğeridir. Ayrıca, bir λ_0 pozitif sabiti vardır öyle ki $\lambda_0 \leq \lambda_1$ ve herhangi $\lambda \in (0, \lambda_0)$ problem (5.2) nin bir özdeğeri değildir.

İspat E, genelleştirilmiş sobolev uzayı $W_0^{1,p_1(x)}(\Omega)$ yı göstersin. $W_0^{1,p_1(x)}(\Omega)$ üzerindeki norm $\|\cdot\|_1$ ve $W_0^{1,p_2(x)}(\Omega)$ üzerindeki norm $\|\cdot\|_2$ olarak gösterilsin.

$J, I, J_1, I_1 : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonellerini

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{p_1(x)} |\nabla u|^{p_1(x)} \, dx + \int_\Omega \frac{1}{p_2(x)} |\nabla u|^{p_2(x)} \, dx,$$

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)} \, dx,$$

$$J_1(u) = \int_\Omega |\nabla u|^{p_1(x)} \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^{p_2(x)} \, dx,$$

$$I_1(u) = \int_\Omega |u|^{q(x)} \, dx$$

olarak tanımlayalım. Standart argümanlar $J, I \in C^1(E, \mathbb{R})$ olmasını ve $\forall u, v \in E$ için

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p_1(x)-2} + |\nabla u|^{p_2(x)-2}\right)\nabla u \nabla v \, dx,$$

$$\langle I'(u), v\rangle = \int_\Omega |u|^{q(x)-2} uv \, dx$$

olmasını gerektirir.

Teorem 5.1 in ispatını dört adıma ayıralım.

Adım 1. $\lambda_1 > 0$ olduğunu gösterelim.

Herhangi bir $x \in \overline{\Omega}$ için $p_1(x) > q^+ \geq q(x) \geq q^- > p_2(x)$ olduğundan herhangi bir $u \in E$ için

$$2\left(|\nabla u(x)|^{p_1(x)} + |\nabla u(x)|^{p_2(x)}\right) \geq |\nabla u(x)|^{q^+} + |\nabla u(x)|^{q^-}$$

ve

$$|u(x)|^{q^+} + |u(x)|^{q^-} \geq |u(x)|^{q(x)}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizliklerin integrali alınırsa

$$2\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p_1(x)} + |\nabla u|^{p_2(x)}\right) dx \geq \int_\Omega \left(|\nabla u|^{q^+} + |\nabla u|^{q^-}\right) dx, \quad \forall u \in E \tag{5.6}$$

ve

$$\int_\Omega \left(|u|^{q^+} + |u|^{q^-}\right) dx \geq \int_\Omega |u|^{q(x)} \, dx, \quad \forall u \in E \tag{5.7}$$

bulunur. Sobolev gömmelerinden, λ_{q^+} ve λ_{q^-} pozitif sabitleri vardır öyle ki

$$\int_\Omega |\nabla u|^{q^+} \, dx \geq \lambda_{q^+} \int_\Omega |u|^{q^+} \, dx, \quad \forall u \in W_0^{1,q^+}(\Omega) \tag{5.8}$$

ve

$$\int_\Omega |\nabla u|^{q^-} \, dx \geq \lambda_{q^-} \int_\Omega |u|^{q^-} \, dx, \quad \forall u \in W_0^{1,q^-}(\Omega). \tag{5.9}$$

Herhangi bir $x \in \overline{\Omega}$ için $q^- \leq q^+ < p_1(x)$ gerçeğini yeniden kullanırsak E, $W_0^{1,q^+}(\Omega)$ ve $W_0^{1,q^-}(\Omega)$ da sürekli olarak gömülmüştür. Böylece herhangi bir $u \in E$ için (5.8) ve (5.9) eşitsizlikleri geçerlidir.

(5.8), (5.9) ve (5.7) eşitsizlikleri kullanılarak bir μ pozitif sabitinin var olduğu açıktır öyle ki

$$\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^{q^+}+|\nabla u|^{q^-}\right)dx \geq \mu\int_{\Omega}|u|^{q(x)}\,dx,\ \ \forall u\in E. \tag{5.10}$$

Daha sonra (5.10) ve (5.6) eşitsizlikleri

$$\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^{p_1(x)}+|\nabla u|^{p_2(x)}\right)dx \geq \frac{\mu}{2}\int_{\Omega}|u|^{q(x)}\,dx,\ \ \forall u\in E \tag{5.11}$$

verir. İlişki (5.11) den

$$\lambda_0=\inf_{v\in E\setminus\{0\}}\frac{J_1(v)}{I_1(v)}>0 \tag{5.12}$$

ve böylece

$$J_1(u)\geq\lambda_0 I_1(u),\ \ \forall u\in E. \tag{5.13}$$

Yukarıdaki eşitsizlik

$$p_1^+\cdot J(u)\geq J_1(u)\geq\lambda_0 I_1(u)\geq\lambda_0 I(u)\ \ \forall u\in E \tag{5.14}$$

verir. Son eşitsizlik $\lambda_1>0$ sağlar ve böylece adım 1 ispatlanır.

Adım 2. λ_1 in problem (5.2) nin bir özdeğeri olduğunu göstermeliyiz.

Yardımcı Teorem 5.2 Aşağıdaki ilişkiler geçerlidir:

$$\lim_{\|u\|_1\to\infty}\frac{J(u)}{I(u)}=\infty \tag{5.15}$$

ve

$$\lim_{\|u\|_1\to 0}\frac{J(u)}{I(u)}=\infty. \tag{5.16}$$

İspat E, $L^{q^{\pm}}(\Omega)$ da sürekli gömüldüğünden, iki pozitif c_1 ve c_2 sabitleri vardır öyle ki

$$\|u\|_1\geq c_1|u|_{q^+},\ \ \forall u\in E \tag{5.17}$$

ve

$$\|u\|_1\geq c_2|u|_{q^-},\ \ \forall u\in E. \tag{5.18}$$

$\|u\|_1>1$ olacak şekilde herhangi bir $u\in E$ için (3.2), (5.7), (5.17), (5.18) ilişkilerinden

$$\frac{J(u)}{I(u)} \geq \frac{\frac{\|u\|_1^{p_1^-}}{p_1^+}}{\frac{|u|_{q^+}^{q^+} + |u|_{q^-}^{q^-}}{q^-}} \geq \frac{\frac{\|u\|_1^{p_1^-}}{p_1^+}}{\frac{{c_1}^{-q^+}\|u\|_1^{q^+} + {c_2}^{-q^-}\|u\|_1^{q^-}}{q^-}}$$

sonucunu çıkarırız. $p_1^- > q^+ \geq q^-$ olduğundan, yukarıdaki eşitsizlikte $\|u\|_1 \to \infty$ limitine geçerek, (5.15) ilişkisinin geçerli olduğu sunucuna varırız.

Daha sonra, herhangi bir $x \in \overline{\Omega}$ için $p_1(x) > p_2(x)$ olduğundan, $W_0^{1,p_1(x)}(\Omega)$ uzayı $W_0^{1,p_2(x)}(\Omega)$ da sürekli gömülüdür. Böylece $\|u\|_1 \to 0$ ise $\|u\|_2 \to 0$ dır.

Yukarıdaki açıklamalar yeterince küçük $\|u\|_1 < 1$ olacak şekilde herhangi bir $u \in E$ için $\|u\|_2 < 1$ elde ettiğimizi onaylamamıza olanak sağlar.

Diğer taraftan (5.4) geçerli olduğundan $W_0^{1,p_2(x)}(\Omega)$, $L^{q^\pm}(\Omega)$ da sürekli gömülüdür. Bu, iki pozitif d_1 ve d_2 sabitlerinin var olduğunu gösterir öyle ki

$$\|u\|_2 \geq d_1|u|_{q^+}, \quad \forall u \in W_0^{1,p_2(x)}(\Omega) \tag{5.19}$$

ve

$$\|u\|_2 \geq d_2|u|_{q^-}, \quad \forall u \in W_0^{1,p_2(x)}(\Omega). \tag{5.20}$$

Böylece, yeterince küçük $\|u\|_1 < 1$ olacak şekilde herhangi bir $u \in E$ için (3.3), (5.7), (5.19), (5.20) ilişkileri

$$\frac{J(u)}{I(u)} \geq \frac{\frac{\int_\Omega |\nabla u|^{p_2(x)}\,dx}{p_2^+}}{\frac{|u|_{q^+}^{q^+} + |u|_{q^-}^{q^-}}{q^-}} \geq \frac{\frac{\|u\|_2^{p_2^+}}{p_2^+}}{\frac{{d_1}^{-q^+}\|u\|_2^{q^+} + {d_2}^{-q^-}\|u\|_2^{q^-}}{q^-}}$$

olmasını gerektirir. $p_2^+ < q^- \leq q^+$ olduğundan, $\|u\|_1 \to 0$ (ve dolayısıyla $\|u\|_2 \to 0$) limitine geçerek yukarıdaki eşitsizlikte, (5.16) ilişkisinin geçerli olduğu sonucuna varırız. Yardımcı Teorem 5.2 nin ispatı tamamlanmıştır.

Yardımcı Teorem 5.3 $u \in E\backslash\{0\}$ vardır öyle ki $\frac{J(u)}{I(u)} = \lambda_1$.

İspat $\{u_n\} \subset E\backslash\{0\}$, λ_1 için bir azaltan (minimizing) dizi olsun, yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{J(u_n)}{I(u_n)} = \lambda_1 > 0. \tag{5.21}$$

İlişki (5.15) ten, $\{u_n\}$ in E de sınırlı olduğu açıktır. E yansımalı olduğundan, $u \in E$ vardır öyleki bir alt diziye kadar $\{u_n\}$, E deki u ya zayıf yakınsar. Diğer taraftan [28] deki

Yardımcı Teorem 3.4 ün ispatında kullanılanlarla benzer argümanlar J fonksiyonelinin zayıf alt yarı-sürekli olduğunu gösterir. Böylece

$$\liminf_{n\to\infty} J(u_n) \geq J(u) \tag{5.22}$$

buluruz. Değişken üslü uzaylar için kompakt gömme teoreminden ve $\forall x \in \overline{\Omega}$ için $1 \leq \max_{y\in\overline{\Omega}} q(y) \leq p_1(x)$ (bakınız (5.3)) varsayımından E, $L^{q(x)}(\Omega)$ da kompakt gömülmüştür. Böylece $\{u_n\}$, $L^{q(x)}(\Omega)$ da kuvvetli yakınsar. Daha sonra ilişki (3.4) ten

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = I(u). \tag{5.23}$$

İlişki (5.22) ve (5.23), eğer $u \not\equiv 0$ ise

$$\frac{J(u)}{I(u)} = \lambda_1$$

olmasını gerektirir. Böylece yardımcı teoremin geçerli olduğunu kanıtlamak için u nun trivial olmadığını göstermek yeterlidir. Çelişkiden aksini varsayalım. O zaman u_n, E deki sıfıra zayıf yakınsar ve $L^{q(x)}(\Omega)$ dakine kuvvetli yakınsar. Diğer bir ifadeyle

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = 0 \tag{5.24}$$

olacaktır. İlişki (5.21) den $\varepsilon \in (0, \lambda_1)$ sabit olursa, yeterince büyük n için

$$|J(u_n) - \lambda_1 I(u_n)| < \varepsilon I(u_n)$$

ya da

$$(\lambda_1 - \varepsilon) I(u_n) < J(u_n) < (\lambda_1 + \varepsilon) I(u_n)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliklerde limite geçerek ve ilişki (5.24) ün geçerli olduğunu hesaba katarak

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = 0$$

buluruz. İlişki (3.4) le birleştirilen bu gerçek aslında u_n in E deki sıfıra kuvvetli yakındığını gerektirir, yani $\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_1 = 0$ dır. Bu bilgi ve ilişki (5.16) dan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{J(u_n)}{I(u_n)} = \infty$$

elde ederiz ve bu bir çelişkidir. Böylece $u \not\equiv 0$ dır. Yardımcı Teorem 5.3 ün ispatı tamamlanmıştır.

Yardımcı Teorem 5.3 ten $u \in E\backslash\{0\}$ vardır öyle ki

$$\frac{J(u)}{I(u)} = \lambda_1 = \inf_{\omega\in E\backslash\{0\}} \frac{J(\omega)}{I(\omega)}. \tag{5.25}$$

O zaman herhangi bir $v \in E$ için

$$\frac{d}{d\varepsilon}\frac{J(u+\varepsilon v)}{I(u+\varepsilon v)}\Big|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Basit bir hesaplama

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p_1(x)-2} + |\nabla u|^{p_2(x)-2}\right)\nabla u \nabla v\, dx \cdot I(u) - J(u) \cdot \int_\Omega |u|^{q(x)-2} uv\, dx = 0, \quad \forall v \in E \quad (5.26)$$

$J(u) = \lambda_1 I(u)$ ve $I(u) \neq 0$ gerçeği ile birleştirilen ilişki (5.26), λ_1 in problem (5.2) nin bir özdeğeri olduğu gerçeğini gerektirir. Böylece adım 2 ispatlanır.

Adım 3. Herhangi bir $\lambda \in (\lambda_1, \infty)$ nın problem (5.2) nin bir özdeğeri olduğunu göstermeliyiz.

$\lambda \in (\lambda_1, \infty)$ keyfi ama sabit olsun. $T_\lambda : E \to \mathbb{R}$,

$T_\lambda(u) = J(u) - \lambda I(u)$

olarak tanımlansın. Açıkça

$\langle T_\lambda'(u), v\rangle = \langle J'(u), v\rangle - \lambda\langle I'(u), v\rangle, \quad \forall u \in E$

olacak şekilde $T_\lambda \in C^1(E, \mathbb{R})$ dir. Böylece λ, problem (5.2) nin bir özdeğeridir ancak ve ancak T_λ nın bir $u_\lambda \in E\backslash\{0\}$ kritik noktası vardır.

İlişki (5.15) in ispatında olduğu gibi benzer argümanlarla T_λ nın coercive olduğunu gösterebiliriz yani $\lim_{\|u\|_1 \to \infty} T_\lambda(u) = \infty$ dur. Diğer yandan, daha önce de belirttiğimiz gibi, [28] deki Yardımcı Teorem 3.4 ün ispatında kullanılanlar gibi benzer argümanlar T_λ nın zayıf alt yarı-sürekli olduğunu gösterir. Böylece T_λ nın bir $u_\lambda \in E$ yerel minimum noktası vardır ver böylece T_λ nın bir kritik noktasıdır. Adım 4 ün geçerli olduğunu ispatlamak için u_λ nın trivial olmadığını göstermek yeterlidir. Gerçekten de $\lambda_1 = \inf_{u \in E\backslash\{0\}} \frac{J(u)}{I(u)}$ ve $\lambda > \lambda_1$ olduğundan, $v_\lambda \in E$ vardır öyle ki

$J(v_\lambda) < \lambda I(v_\lambda)$

ya da

$T_\lambda(v_\lambda) < 0.$

Böylece

$\inf_E T_\lambda < 0$

ve u_λ, T_λ nın bir trivial olmayan kritik noktasıdır ya da λ, problem (5.2) nin bir özdeğeridir. Böylece adım 3 ispatlanır.

Adım 4. Herhangi bir $\lambda \in (0, \lambda_0)$, burada (5.12) de verilen λ_0 problem (5.2) nin bir özdeğeri değildir.

Gerçekten de çelişkiden, problem (5.2) nin bir $\lambda \in (0, \lambda_0)$ özdeğeri var olduğunu varsayarsak $u_\lambda \in E\backslash\{0\}$ vardır öyle ki

$\langle J'(u_\lambda), v\rangle = \lambda\langle I'(u_\lambda), v\rangle, \quad \forall v \in E.$

Böylece, $v = u_\lambda$ için

$\langle J'(u_\lambda), u_\lambda \rangle = \lambda \langle I'(u_\lambda), u_\lambda \rangle$

yani

$J_1(u_\lambda) = \lambda I_1(u_\lambda).$

$u_\lambda \in E \backslash \{0\}$ gerçeği $I_1(u_\lambda) > 0$ sağlar. $\lambda < \lambda_0$ olduğundan, yukarıdaki bilgi

$J_1(u_\lambda) \geq \lambda_0 I_1(u_\lambda) > \lambda I_1(u_\lambda) = J_1(u_\lambda)$

verir. Açıkça yukarıdaki eşitsizlik bir çelişkiye neden olur. Böylece adım 4 ispatlanır.

Adım 2,3 ve 4 ten $\lambda_0 \leq \lambda_1$ dir. Teorem 5.1 in ispatı şimdi tamamlandı.

BÖLÜM 6

DIŞ BÖLGELER ÜZERİNDE DEĞİŞKEN ÜSLÜ ÖZDEĞER PROBLEMLERİ

Bölüm 5 te belirtilen sonuç değişken üslü lineer olmayan diğer denlem sınıflarına genişletilebilir. Bu bölümde tek değişken üstele sahip homojen olmayan diferansiyel operatörlerin çerçevesinde bir örnek veriyoruz.

Lineer olmayan

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) + |u|^{p(x)-2}u + |u|^{q(x)-2}u = \lambda g(x)|u|^{r(x)-2}u, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (6.1)$$

özdeğer problemiyle ilgileniyoruz, burada Ω, $\mathbb{R}^N$ de bir düzgün dış bölge yani Ω, Lipschitz sınırına sahip bir sınırlı bölgenin tümleyenidir. Herhangi bir $x \in \Omega_0$ için $g(x) > 0$ olacak şekilde bir boş olmayan $\Omega_0 \subset \Omega$ kümesi var olduğu için $g : \overline{\Omega} \to [0, \infty)$ bir ölçülebilir fonksiyon iken $p, q, r : \overline{\Omega} \to [2, \infty)$ dönüşümleri Lipschitz sürekli fonksiyonlardır ve $\lambda \geq 0$ bir reel sayıdır. p, q ve r fonksiyonlarının

$$2 \leq p^- \leq p^+ < N, \quad (6.2)$$

$$p^+ < r^- \leq r^+ < q^- \leq q^+ < \frac{Np^-}{N - p^-} \quad (6.3)$$

hipotezlerini sağladığını varsayıyoruz. Üstelik $g(x)$ fonksiyonun

$$g \in L^\infty(\Omega) \cap L^{p_0(x)}(\Omega) \quad (6.4)$$

hipotezini sağladığını varsayıyoruz, burada herhangi bir $x \in \overline{\Omega}$ için

$p_0(x) = p^*(x)/(p^*(x) - r^-)$.

Eğer her $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p(x)-2}uv + |u|^{q(x)-2}uv\right) dx - \lambda \int_\Omega g(x)|u|^{r(x)-2}uv\, dx = 0$$

olacak şekilde $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)\backslash\{0\}$ var ise $\lambda \in \mathbb{R}$ problem (6.1) in bir özdeğeridir.

Rayleigh katsayılarını

$$\lambda_1 := \inf_{u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) dx + \int_\Omega \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)}\, dx}{\int_\Omega \frac{g(x)}{r(x)} |u|^{r(x)}\, dx}$$

ve

$$\lambda_0 := \inf_{u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) dx + \int_\Omega |u|^{q(x)}\, dx}{\int_\Omega g(x)|u|^{r(x)}\, dx}$$

olarak tanımlayalım.

Teorem 6.1 Ω, $\mathbb{R}^N$ de Lipschitz sınırına sahip bir dış bölge olsun, burada $N \geq 3$. Farz edelim ki $p, q, r : \overline{\Omega} \to [2, \infty)$ Lipschitz sürekli fonksiyonlar olsun ve Ω_0 da $g > 0$ olacak şekilde bir boş olmayan $\Omega_0 \subset \Omega$ kümesi var olduğu için $g : \overline{\Omega} \to [0, \infty)$ bir ölçülebilir fonksiyon olsun. (6.2), (5.3) ve (6.4) şartlarının yerine getirildiğini varsayalım.

O halde

$0 < \lambda_0 \leq \lambda_1$.

Üstelik herhangi bir $\lambda \in (0, \lambda_0)$, problem (6.1) in bir özdeğeri değilken her $\lambda \in [\lambda_1, \infty)$, problem (6.1) in bir özdeğeridir.

İspatın taslağı E, genelleştirilmiş Sobolev uzayı $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ göstersin.

$J_1, I_1, J_0, I_0 : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonellerini

$$J_1(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) dx + \int_\Omega \frac{1}{q(x)} |u|^{q(x)}\, dx$$

$$I_1(u) = \int_\Omega \frac{g(x)}{r(x)} |u|^{r(x)}\, dx$$

$$J_0(u) = \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) dx + \int_\Omega |u|^{q(x)}\, dx$$

$$I_0(u) = \int_\Omega g(x)|u|^{r(x)}\, dx$$

olarak tanımlayalım. Standart argümanlar $J_1, I_1 \in C^1(E, \mathbb{R})$ ve her $u, v \in E$ için

$$\langle J_1'(u), v\rangle = \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p(x)-2}uv + |u|^{q(x)-2}uv\right) dx,$$

$$\langle I_1'(u), v\rangle = \int_\Omega g(x)|u|^{r(x)-2}uv\, dx$$

olmasını gerektirir. Herhangi bir $\lambda > 0$ için ayrıca $T_\lambda : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonelini

$$T_\lambda(u) = J_1(u) - \lambda \cdot I_1(u), \quad \forall u \in E$$

olarak tanımlıyoruz. Açıkça λ, problem (6.1) için bir özdeğerdir ancak ve ancak T_λ fonksiyonelinin bir $u_\lambda \in E\setminus\{0\}$ kritik noktası vardır.

Teorem 6.1 nın ispatı aşağıdaki adımlara bölünmüştür.

Adım 1. λ_0 ve $\lambda_1 > 0$ vardır. Bu, Bölüm 5 teki gibi benzer argümanlar ve enerji kestirimleriyle yapılmaktadır.

Adım 2. Herhangi bir $\lambda \in (0, \lambda_0)$, problem (6.1) in bir özdeğeri değildir.

Adım 3. Herhangi bir $\lambda \in (\lambda_1, \infty)$, problem (6.1) in bir özdeğeridir. Bu özellik ilk olarak iki yardımcı sonucu ispatlayan aşağıdaki yardımcı sonuçlara dayanır.

Yardımcı Teorem 6.2 Teorem 6.1 in hipotezlerinin sağlandığını varsayalım ve s bir reel sayıdır öyle ki

$$r^+ < s < (p^-)^*,$$

burada $(p^-)^* = Np^-/(N - p^-)$. Daha sonra $g \in L^{\frac{s}{s-r^-}}(\Omega) \cap L^{\frac{s}{s-r^+}}(\Omega)$ ve

$$\int_\Omega g(x)|u|^{r(x)}\,dx \le |g|_{\frac{s}{s-r^-}}|u|_s^{r^-} + |g|_{\frac{s}{s-r^+}}|u|_s^{r^+}, \quad \forall u \in E. \tag{6.5}$$

Yardımcı Teorem 6.3 Herhangi bir $\lambda > 0$ için

$$\lim_{\|u\|\to\infty} T_\lambda(u) = \infty.$$

Adım 3 ün ispatına dönersek $\lambda \in (\lambda_1, \infty)$ dır. Yardımcı Teorem 6.3 ten $\lim_{\|u\|\to\infty} T_\lambda(u) = \infty$ yani T_λ coercivedir. Diğer yandan standart argümanlar T_λ fonksiyonelinin zayıf alt yarı-sürekli olduğunu gösterir. Bu nedenle T_λ nın bir $u_\lambda \in E$ yerel minimum noktası vardır ve dolayısıyla T_λ nın bir kritik noktası vardır. Adım 3 ün geçerli olduğuna karar vermek için u_λ nın trivial olmadığını göstermek yeterlidir. Gerçekten de $\lambda_1 = \inf_{u\in E\setminus\{0\}} \frac{J_1(u)}{I_1(u)}$ ve $\lambda > \lambda_1$ olduğunda, bu $v_\lambda \in E$ var olduğunu gösterir öyle ki

$$J_1(v_\lambda) < \lambda I_1(v_\lambda)$$

ya da

$$T_\lambda(v_\lambda) < 0.$$

Böylece

$$\inf_E T_\lambda < 0$$

dır ve u_λ, T_λ nın bit trivial olmayan kritik noktasıdır veya λ problem (6.1) in bir özdeğeridir. Böylece adım 3 ispatlanır.

Adım 4. λ_1, problem (6.1) in bir özdeğeridir.

Bu özellik aşağıdaki iki yardımcı sonucun kullanılmasıyla gösterilir.

İki yardımcı sonucu ispatlayarak başlıyoruz.

Yardımcı Teorem 6.4 Aşağıdaki ilişki geçerlidir

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{J_0(u)}{I_0(u)} = +\infty.$$

Yardımcı Teorem 6.5 $\{u_n\}$, E deki u ya zayıf yakınsasın. O zaman aşağıdaki ilişkiler geçerlidir

$$\lim_{n\to 0} I_0(u_n) = I_0(u), \tag{6.6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\langle I_1'(u_n), u_n - u\rangle = 0. \tag{6.7}$$

Adım 4 ün ispatına geri dönersek, $\lambda_n \to \lambda_1$ olsun. Adım 3 ten her n için $u_n \in E\backslash\{0\}$ vardır öyle ki

$$\langle J_1'(u_n), v\rangle = \lambda_n \cdot \langle I_1'(u_n), v\rangle, \quad \forall v \in E. \tag{6.8}$$

$v = u_n$ alırsak,

$$J_0(u_n) = \lambda_n \cdot I_0(u_n) \tag{6.9}$$

buluruz. İlişki (6.9) da $n \to \infty$ limitine geçersek ve ilişki (6.6) yı hesaba katarsak

$$\lim_{n\to\infty} J_0(u_n) = \lambda_1 \cdot I_0(u)$$

olur ve böylece $\{J_0(u_n)\}$, $\mathbb{R}$ de sınırlıdır. Bu açıklama, J_0 ın tanımı (3.5) ve (3.6) ilişkileri $\{u_n\}$ dizisinin E de sınırı olduğunu gösterir. E yansımalı Banach uzayı olduğundan $u \in E$ vardır öyle ki bir alt diziye kadar $\{u_n\}$, E deki u ya zayıf yakınsar. Böylece (6.6) ve (6.7) ilişkilerinden

$$\lim_{n\to\infty} I_0(u_n) = I_0(u)$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\langle I_1'(u_n), u_n - u\rangle = 0.$$

Diğer taraftan, [25] teki Yardımcı Teorem 4.2 den herhangi bir $\theta \geq 2$ ve herhangi $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ için

$$\frac{2}{2^{\theta-1}-1}|\xi-\eta|^\theta \leq \theta\big(|\xi|^{\theta-2}\xi - |\eta|^{\theta-2}\eta\big)\cdot(\xi-\eta) \tag{6.10}$$

elde ederiz.

(5.10) eşitsizliği ve yukarıdaki ilişkiler kullanılarak, iki pozitif L_1 ve L_2 sabitleri vardır öyle ki

$$L_1\int_\Omega \big(|\nabla(u_n-u)|^{p(x)} + |u_n-u|^{p(x)}\big)\,dx$$

$$\leq \int_\Omega \big(|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\big)\cdot(\nabla u_n - \nabla u)dx$$

$$+\int_\Omega \big(|u_n|^{p(x)-2}u_n - |u|^{p(x)-2}u\big)\cdot(u_n-u)dx$$

ve

$$L_2\int_\Omega |u_n-u|^{q(x)}\,dx \leq \int_\Omega \big(|u_n|^{q(x)-2}u_n - |u|^{q(x)-2}u\big)\cdot(u_n-u)dx.$$

Yukarıdaki iki ilişkiyi toplayarak, (6.8) ve (6.7) ilişkilerini ve $\{u_n\}$ nin E deki u ya zayıf yakınsadığı gerçeğini kullanarak $n \to \infty$ iken

$$L_1\int_\Omega \big(|\nabla(u_n-u)|^{p(x)} + |u_n-u|^{p(x)}\big)\,dx \leq \langle J_1'(u_n) - J_1'(u), u_n-u\rangle$$

$$= |\langle J_1'(u_n), u_n-u\rangle| + |\langle J_1'(u), u_n-u\rangle|$$

$= |\lambda_n \cdot \langle I_1'(u_n), u_n - u\rangle| + |\langle J_1'(u), u_n - u\rangle| \to 0.$

Yukarıdaki eşitsizlikler ve (3.4) ve (3.7) ilişkileri u_n in E deki u ya kuvvetli yakınsadığını gösterir. Daha sonra (6.8) de $n \to \infty$ limitine geçersek

$\langle J_1'(u), v\rangle = \lambda_1 \cdot \langle I_1'(u), v\rangle, \quad \forall v \in E$

olur. Böylece u, T_{λ_1} için bir kritik noktadır. λ_1 in problem (6.1) için bir özdeğer olduğunu ispatlamak için $u \neq 0$ olduğunu göstermeye devam edilir. Gerçekten de (6.9) da $n \to \infty$ limitine geçersek,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{J_0(u_n)}{I_0(u_n)} = \lambda_1$$

buluruz. Diğer taraftan, çelişkiden $u = 0$ olduğunu varsayarsak E de $u_n \to 0$ ya da $\|u_n\| \to 0$ elde ederiz. Ama Yardımcı Teorem 6.4 ten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{J_0(u_n)}{I_0(u_n)} = \infty$$

ve bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $u \neq 0$ dır ve böylece λ_1 problem (6.1) için bir özdeğerdir.

Adım 2, 3 ve 4 ten $\lambda_0 \leq \lambda_1$ dir. Teorem 6.1 in ispatı şimdi tamamlanmıştır. □

Teorem 6.1 de olanlar gibi benzer bir sonucun

$$\begin{cases} -\Delta u + u + |u|^{q(x)-2}u = \lambda g(x)|u|^{r(x)-2}u, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

problemi için benzer argümanlarla ispatlanabildiğini farkediyoruz, burada Ω, $\mathbb{R}^2$ de bir düzgün dış bölgedir. Herhangi bir $x \in \Omega_0$ için $g(x) > 0$ olacak şekilde bir boş olmayan $\Omega_0 \subset \Omega$ kümesi var olduğu için $g(x) : \overline{\Omega} \to [0, \infty)$ bir fonksiyon iken q ve $r : \overline{\Omega} \to [2, \infty)$ dönüşümleri halâ Lipschitz sürekli fonksiyonlardır ve $\lambda \geq 0$ bir reel sayıdır. Bu kez (6.2)–(6.4) şartları aşağıdaki şartlarla değiştirilmelidir

$2 < r^- \leq r^+ < q^- \leq q^+ < \infty$

ve

$g \in L^\infty(\Omega) \cap L^1(\Omega).$

BÖLÜM 7

DEĞİŞKEN ÜSLÜ VE İŞARET DEĞİŞTİRME POTANSİYELLİ LİNEER OLMAYAN ÖZDEĞER PROBLEMLERİ

Bu bölümde, birkaç değişken üslü ve işaret değiştirme potansiyelli lineer olmayan özdeğer problemlerinin bir sınıfındaki bazı birleştirilmiş etkileri tartışıyıoruz.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\left(|\nabla u|^{p_1(x)-2}+|\nabla u|^{p_2(x)-2}\right)\nabla u\right)+V(x)|u|^{m(x)-2}u=\lambda\left(|u|^{q_1(x)-2}+|u|^{q_2(x)-2}\right)u, & x\in\Omega \\ u=0, & x\in\partial\Omega \end{cases} \quad (7.1)$$

Dirichlet probleminin incelenmesiyle ilgileniyoruz, burada $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ sınırı düzgün olan sınırlı bir bölgedir.

$p_1, p_2, q_1, q_2, m : \overline{\Omega} \to (1, \infty)$, aşağıdaki hipotezleri sağlayan sürekli fonksiyonlar olduğunu varsayıyoruz:

$$\max_{\overline{\Omega}} p_2 < \min_{\overline{\Omega}} q_2 \leq \max_{\overline{\Omega}} q_2 \leq \min_{\overline{\Omega}} m \leq \max_{\overline{\Omega}} m \leq \min_{\overline{\Omega}} q_1 \leq \max_{\overline{\Omega}} q_1 < \min_{\overline{\Omega}} p_1, \quad (7.2)$$

$$\max_{\overline{\Omega}} q_1 < p_2^*(x) := \begin{cases} \dfrac{Np_2(x)}{N-p_2(x)}, & p_2(x) < N \\ +\infty, & p_2(x) \geq N. \end{cases} \quad (7.3)$$

$V : \Omega \to \mathbb{R}$ potansiyelinin

$$r \in C(\overline{\Omega}) \text{ ve } r(x) > \frac{N}{\min_{\overline{\Omega}} m} \ \forall x \in \overline{\Omega} \text{ olacak şekilde } V \in L^{r(x)}(\Omega) \quad (7.4)$$

sağladığını varsayıyoruz.

Denklem (7.1) de yer alan büyüme oranları arasındaki rekabeti tanımlayan (7.2) şartı mevcut araştırmanın *anahtarını* temsil eder çünkü o, problemde yer alan bütün değişken üsler arasında bir denge kurar. Böyle bir denge önemlidir çünkü düzenlememiz (homojen operatörler tarafından sunulan durumun aksine), (esas) özdeğerleri bulmak için uygulanamaz, Lagrange çarpanı teoremine dayanan bir minimizasyon tekniği için bir homojen olmayan özdeğer problemini varsayıyor. Dolayısıyla lineer olmayan ve homojen olmayan özdeğer problemleri durumunda, homojen durumda kullanılan klasik teori tamamen işe yaramamaktadır ancak bazı fikirleri halâ yararlı olabilir ve bazı yönlerden bazı özel sonuçlar halâ elde edilebilir

ancak diğer yönlerden tamamen yeni olgular meydana gelebilir. Durumumuza odaklanmak için, (7.3) ve (7.4) şartlarıyla birlikte (7.2) şartı

$$\lim_{\|u\|_{p_1(x)}\to 0} \frac{\int_\Omega \frac{1}{p_1(x)}|\nabla u|^{p_1(x)}\,dx + \int_\Omega \frac{1}{p_2(x)}|\nabla u|^{p_2(x)}\,dx + \int_\Omega \frac{V(x)}{m(x)}|u|^{m(x)}\,dx}{\int_\Omega \frac{1}{q_1(x)}|u|^{q_1(x)}\,dx + \int_\Omega \frac{1}{q_2(x)}|u|^{q_2(x)}\,dx} = \infty$$

ve

$$\lim_{\|u\|_{p_1(x)}\to \infty} \frac{\int_\Omega \frac{1}{p_1(x)}|\nabla u|^{p_1(x)}\,dx + \int_\Omega \frac{1}{p_2(x)}|\nabla u|^{p_2(x)}\,dx + \int_\Omega \frac{V(x)}{m(x)}|u|^{m(x)}\,dx}{\int_\Omega \frac{1}{q_1(x)}|u|^{q_1(x)}\,dx + \int_\Omega \frac{1}{q_2(x)}|u|^{q_2(x)}\,dx} = \infty$$

olmasını gerektirir, burada $\|\cdot\|_{p_1(x)}$, $W_0^{1,p_1(x)}(\Omega)$ değişken üslü Sobolev uzayındaki normu temsil eder. Diğer bir ifadeyle, homojenliğin olmaması, sonsuzda ve orijinde problem (7.1) le ilişkili Rayleigh katsayısının (bölümünün) davranışıyla (aslında, patlaması) dengelenir. Yukarıdaki ifadelerin sonuçları problem (7.1) le ilişkili Rayleigh katsayısının infimumunun bir reel sayı olmasıdır, yani

$$\inf_{u\in W_0^{1,p_1(x)}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega \frac{1}{p_1(x)}|\nabla u|^{p_1(x)}\,dx + \int_\Omega \frac{1}{p_2(x)}|\nabla u|^{p_2(x)}\,dx + \int_\Omega \frac{V(x)}{m(x)}|u|^{m(x)}\,dx}{\int_\Omega \frac{1}{q_1(x)}|u|^{q_1(x)}\,dx + \int_\Omega \frac{1}{q_2(x)}|u|^{q_2(x)}\,dx} \in \mathbb{R} \quad (7.5)$$

ve bir $u_0 \in W_0^{1,p_1(x)}(\Omega)\setminus\{0\}$ fonksiyonu için de elde edilecektir. Üstelik (7.5) teki değer, problem (7.1) e karşılık gelen u_0 öz fonksiyonu ile problemin özdeğerini temsil eder. Bununla birlikte, bu aşamada yukarıda tanımlanan özdeğerin problem (7.1) in en küçük özdeğeri olup olmadığını, yeterince küçük bir λ nın (7.1) in bir özdeğeri olmadığını gösterebilirsek bile söyleyemeyiz. Şu anda bu açık bir soru olarak kalmıştır. Diğer yandan, ilişki (7.5) te verilen değerden daha büyük herhangi bir λ nın ayrıca problem (7.1) in bir özdeğeri olduğunu ispatlayabiliriz. Böylece problem (7.1) bir sürekli özdeğerler ailesine sahiptir.

Eğer $\forall v \in W_0^{1,p_1(x)}(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p_1(x)-2} + |\nabla u|^{p_2(x)-2}\right)\nabla u \nabla v\,dx + \int_\Omega V(x)|u|^{m(x)-2}uv\,dx$$

$$-\lambda \int_\Omega \left(|u|^{q_1(x)-2} + |u|^{q_2(x)-2}\right)uv\,dx = 0$$

olacak şekilde $u \in W_0^{1,p_1(x)}(\Omega)\setminus\{0\}$ varsa $\lambda \in \mathbb{R}$, problem (7.1) in bir özdeğeri ise buna karşılık gelen $u \in W_0^{1,p_1(x)}(\Omega)\setminus\{0\}$ öz fonksiyonu problem (7.1) in bir zayıf çözümüdür.

Her $V \in L^{r(x)}(\Omega)$ poytansiyeli için

$$E(V) := \inf_{u\in W_0^{1,p_1(x)}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega \frac{1}{p_1(x)}|\nabla u|^{p_1(x)}\,dx + \int_\Omega \frac{1}{p_2(x)}|\nabla u|^{p_2(x)}\,dx + \int_\Omega \frac{V(x)}{m(x)}|u|^{m(x)}\,dx}{\int_\Omega \frac{1}{q_1(x)}|u|^{q_1(x)}\,dx + \int_\Omega \frac{1}{q_2(x)}|u|^{q_2(x)}\,dx}$$

ve

$$F(V) := \inf_{u \in W_0^{1,p_1(x)}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^{p_1(x)}\,dx + \int_\Omega |\nabla u|^{p_2(x)}\,dx + \int_\Omega V(x)|u|^{m(x)}\,dx}{\int_\Omega |u|^{q_1(x)}\,dx + \int_\Omega |u|^{q_2(x)}\,dx}$$

tanımlıyoruz. Böylece bir $E : L^{r(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu tanımlayabiliriz.

Bu bölümün ilk sonucu aşağıdaki teoremden verilir.

Teorem 7.1 (7.2)–(7.4) şartlarının yerine getirildiğini varsayalım. O zaman $E(V)$, problem (7.1) in bir özdeğeridir. Üstelik, $E(V)$ özdeğerine karşılık gelen bir $u \in W_0^{1,p_1(x)}(\Omega)\setminus\{0\}$ öz fonsiyonu vardır öyle ki

$$E(V) = \frac{\int_\Omega \frac{1}{p_1(x)}|\nabla u|^{p_1(x)}\,dx + \int_\Omega \frac{1}{p_2(x)}|\nabla u|^{p_2(x)}\,dx + \int_\Omega \frac{V(x)}{m(x)}|u|^{m(x)}\,dx}{\int_\Omega \frac{1}{q_1(x)}|u|^{q_1(x)}\,dx + \int_\Omega \frac{1}{q_2(x)}|u|^{q_2(x)}\,dx}.$$

Ayrıca, $F(V) \le E(V)$, her $\lambda \in \big(-\infty, F(V)\big)$ problem (7.1) in bir özdeğeri değil iken her $\lambda \in (E(V), \infty)$ problem (7.1) in bir özdeğeridir.

Daha sonra, $L^{r(x)}(\Omega)$ nın her konveks, sınırlı ve kapalı alt kümesinde yukarıda tanımlanan E fonksiyonunun alttan sınırlı olduğunu ve minimuma ulaştığını gösteriyoruz. Sonuç şu şekildedir:

Teorem 7.2 (7.2)–(7.4) şartlarının yerine getirildiğini varsayalım. S, $L^{r(x)}(\Omega)$ nın bir konveks, sınırlı ve kapalı bir alt kümesi olsun. O zaman S üzerindeki $E(V)$ yi minimize eden $V_\star \in S$ vardır yani

$$E(V_\star) = \inf_{V \in S} E(V).$$

7.1 Spektrumun Konsantrasyonu

Teorem 7.1 in ispatındaki ana adımları açıklıyoruz. X genelleştirilmiş Sobolev uzayı $W_0^{1,p_1(x)}(\Omega)$ yı göstersin. $W_0^{1,p_1(x)}(\Omega)$ üzerindeki normu $\|\cdot\|_1$ olarak, $W_0^{1,p_2(x)}(\Omega)$ üzerindeki normu $\|\cdot\|_2$ olarak gösteriyoruz.

$J_V, I : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonellerini

$$J_V(u) = \int_\Omega \frac{1}{p_1(x)}|\nabla u|^{p_1(x)}\,dx + \int_\Omega \frac{1}{p_2(x)}|\nabla u|^{p_2(x)}\,dx + \int_\Omega \frac{V(x)}{m(x)}|u|^{m(x)}\,dx,$$

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{q_1(x)}|u|^{q_1(x)}\,dx + \int_\Omega \frac{1}{q_2(x)}|u|^{q_2(x)}\,dx$$

olarak tanımlayalım. (7.4) şartını sağlayan herhangi bir V için

$$J_V(u) = J_0(u) + \int_\Omega \frac{V(x)}{m(x)}|u|^{m(x)}\,dx, \quad \forall u \in X$$

elde ederiz, burada J_0, Ω da $V = 0$ durumunda elde edilir.

Standart argümanlar $J_V, I \in C^1(X, \mathbb{R})$ ve $\forall u, v \in X$ için

$$\langle J_V'(u), v\rangle = \int_\Omega \big(|\nabla u|^{p_1(x)-2} + |\nabla u|^{p_2(x)-2}\big)\nabla u \nabla v\,dx + \int_\Omega V(x)|u|^{m(x)-2}uv\,dx,$$

$$\langle I'(u), v\rangle = \int_\Omega |u|^{q_1(x)-2}uv\,dx + \int_\Omega |u|^{q_2(x)-2}uv\,dx$$

olmasını gerektirir.

Teorem 7.1 in ispatı bazı yardımcı sonuçlara dayanır.

Yardımcı Teorem 7.3 $(7.2)-(7.4)$ şartlarının yerine getirildiğini varsayalım. O zaman $\forall \varepsilon > 0$ için $C_\varepsilon > 0$ vardır öyle ki $\forall u \in X$ için

$$\left|\int_\Omega \frac{V(x)}{m(x)}|u|^{m(x)}\,dx\right| \le \varepsilon \int_\Omega \left(\frac{1}{p_1(x)}|\nabla u|^{p_1(x)} + \frac{1}{p_2(x)}|\nabla u|^{p_2(x)}\right)dx$$
$$+C_\varepsilon |V|_{r(x)} \int_\Omega \left(|u|^{m^-} + |u|^{m^+}\right)dx.$$

Yardımcı Teorem 7.4 Aşağıdaki ilişkiler geçerlidir:

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{J_V(u)}{I(u)} = \infty \tag{7.6}$$

ve

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{J_V(u)}{I(u)} = \infty. \tag{7.7}$$

Yardımcı Teorem 7.5 $u \in X\backslash\{0\}$ vardır öyle ki $\frac{J_V(u)}{I(u)} = E(V)$.

Yardımcı Teorem 7.3–7.5 in ayrıntılı ispatları için [23] e bakınız.

Teorem 7.1 in ispatına dönersek, Yardımcı Teorem 7.5 ten $u \in X\backslash\{0\}$ vardır öyle ki

$$\frac{J_V(u)}{I(u)} = E(V) = \inf_{\omega\in X\backslash\{0\}} \frac{J_V(\omega)}{I(\omega)}. \tag{7.8}$$

O zaman herhangi bir $\omega \in X$ için

$$\frac{d}{d\varepsilon}\frac{J_V(u+\varepsilon\omega)}{I(u+\varepsilon\omega)}\bigg|_{\varepsilon=0} = 0$$

elde edilir. Basit bir hesaplama $\forall \omega \in X$ için

$$\langle J_V'(u), \omega\rangle I(u) - J_V(u)\langle I'(u), \omega\rangle = 0 \tag{7.9}$$

verir. $J_V(u) = E(V)\cdot I(u)$ ve $I(u) \neq 0$ gerçeğiyle bağlantılı (7.9) ilişkisi $E(V)$ nin problem (7.1) in bir özdeğeri olduğu gerçeğini gerektirir.

Daha sonra, herhangi bir $\lambda \in (E(V), \infty)$ nın problem (7.1) in bir özdeğeri olduğunu gösteriyoruz.

$\lambda \in (E(V), \infty)$ keyfi ama sabit olsun. $T_{V,\lambda} : X \to \mathbb{R}$,

$T_{V,\lambda}(u) = J_V(u) - \lambda I(u)$

olarak tanımlansın. Açıkça

$\langle T_{V,\lambda}'(u), v\rangle = \langle J_V'(u), v\rangle - \lambda\langle I'(u), v\rangle, \quad \forall u \in X$

olacak şekilde $T_{V,\lambda} \in C^1(X, \mathbb{R})$ dir. Böylece λ, problem (7.1) in bir özdeğeridir ancak ve ancak $T_{V,\lambda}$ nın bir $u_\lambda \in X\backslash\{0\}$ kritik noktası vardır.

İlişki (7.6) nın ispatındaki gibi benzer argümanlarla $T_{V,\lambda}$ nın coercive olduğunu yani $\lim_{\|u\|_1 \to \infty} T_{V,\lambda}(u) = \infty$ olduğunu gösterebiliriz. Diğer taraftan daha önce de belirttiğimiz gibi [28] deki Yardımcı Teorem 3.4 ün ispatında kullanılanlarla benzer argümanlar $T_{V,\lambda}$ fonksiyonelinin zayıf alt yarı-sürekli olduğunu gösterir. Böylece $T_{V,\lambda}$ nın bir $u_\lambda \in X$ yerel minimum noktası vardır ve böylece $T_{V,\lambda}$ nın bir kritik noktasıdır. u_λ nın trivial olmadığını göstermek yeterlidir. Gerçekten de $E(V) = \inf_{u \in X\backslash\{0\}} \frac{J_V(u)}{I(u)} = \infty$ ve $\lambda > E(V)$ olduğundan $v_\lambda \in X$ vardır öyle ki

$J_V(v_\lambda) < \lambda I(v_\lambda)$

ya da

$T_{V,\lambda}(v_\lambda) < 0.$

Böylece

$\inf_X T_{V,\lambda} < 0$

dır ve u_λ, $T_{V,\lambda}$ nın bir trivial olamayan kritik noktasıdır ya da λ problem (7.1) in bir özdeğeridir.

Son olarak her $\lambda < F(V)$ nin problem (7.1) in bir özdeğeri olmadığını ispatlıyoruz. Bu görüşle çelişkiden problem (7.1) in bir $\lambda < F(V)$ özdeğeri var olduğunu varsayıyoruz. $u_\lambda \in X\backslash\{0\}$ vardır öyle ki

$\langle J_V'(u_\lambda), u_\lambda\rangle = \lambda\langle I'(u_\lambda), u_\lambda\rangle.$

$u_\lambda \neq 0$ olduğundan $\langle I'(u_\lambda), u_\lambda\rangle > 0$ elde ederiz. Bu gerçek ve $F(V)$ nin tanımı kullanılarak aşağıdaki ilişki geçerlidir

$\langle J_V'(u_\lambda), u_\lambda\rangle = \lambda\langle I'(u_\lambda), u_\lambda\rangle < F(V)\langle I'(u_\lambda), u_\lambda\rangle \leq \langle J_V'(u_\lambda), u_\lambda\rangle.$

Açıkçası bu bir çelişkidir. Her $\lambda \in \big(-\infty, F(V)\big)$, problem (7.1) in bir özdeğeri değildir. Üstelik, $E(V) \geq F(V)$ olduğu açıktır. Torem 21 in ispatı tamamlandı. □

7.2 Değişken Üstellere Sahip Bir Rayleigh Katsayısı Hakkında Daha Fazlası

Bu bölümde Rayleigh katsayısı $E(V)$ nin infimumunu elde etmek için bir yeterli şartı veren Teorem 7.2 nin ispatını veriyoruz.

S, $L^{r(x)}(\Omega)$ nın bir konveks, sınırlı ve kapalı alt kümesi olsun ve

$E_\star \coloneqq \inf_{V \in S} E(V)$

olsun.

$(V_n) \subset S$, $E_\star$ için bir minimize eden dizi olsun, yani

$n \to \infty$ iken $E(V_n) \to E_\star$.

O halde (V_n) sınırlı bir dizidir, bu nedenle $V_\star \in L^{r(x)}(\Omega)$ vardır öyle ki V_n, $L^{r(x)}(\Omega)$ daki $V_\star$ a zayıf yakınsar. Üstelik S konveks ve kapalı olduğundan ayrıca zayıf kapalıdır (Brezis [7] deki Teorem III.7 ye bakınız) ve sonuç olarak $V_\star \in S$ dir.

Daha sonra, $E(V_\star) = E_\star$ olduğunu gösteriyoruz. Gerçekten de Teorem 7.1 den her pozitif n tamsayısı için $u_n \in X\backslash\{0\}$ vardır öyle ki

$$\frac{J_{V_n}(u_n)}{I(u_n)} = E(V_n). \tag{7.10}$$

$\big(E(V_n)\big)$ bir sınırlı dizi olduğundan herhangi bir n için

$$\frac{J_{V_n}(u_n)}{I(u_n)} \geq \beta \frac{J_0(u_n)}{I(u_n)} - C$$

elde edilir, burada C bir pozitif sabittir, (u_n) in X de sınırlı olduğunu ve sıfıra yakınsayan bir alt diziye sahip olamadığını çıkarırız (aksi halde, Yardımcı Teorem 7.4 ü uygulayarak bir çelişki elde ederiz). Böylece $u_0 \in X\backslash\{0\}$ vardır öyle ki (u_n), X deki u_0 a zayıf yakınsar. Rellich–Kondrachov teoremini kullanırsak (u_n), herhangi bir $x \in \overline{\Omega}$ için $1 < s(x) < \frac{Np_1(x)}{N-p_1(x)}$ sağlayan herhangi bir $s(x) \in C(\overline{\Omega})$ için $L^{s(x)}(\Omega)$ daki u_0 a kuvvetli yakınsar. Özellikle, (7.2)−(7.4) şartları kullanılarak (u_n), $L^{m(x)}(\Omega)$ daki ve $L^{m(x)\cdot r'(x)}(\Omega)$ daki u_0 a yakınsar burada $r'(x) = \frac{r(x)}{r(x)-1}$. Bu bilgiyi, Hölder eşitsizliğini ve $V_\star \in L^{r(x)}(\Omega)$ gerçeğini ve (V_n) in $L^{r(x)}(\Omega)$ da sınırlı olduğunu kullanarak

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{V_\star(x)}{m(x)} |u_n|^{m(x)}\, dx = \int_\Omega \frac{V_\star(x)}{m(x)} |u_0|^{m(x)}\, dx \tag{7.11}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left(\frac{V_n(x)}{m(x)} |u_n|^{m(x)} - \frac{V_n(x)}{m(x)} |u_0|^{m(x)} \right) dx = 0 \tag{7.12}$$

buluruz. Diğer taraftan (V_n), $L^{r(x)}(\Omega)$ daki $V_\star$ a zayıf yakınsadığından ve $u_0 \in L^{m(x)\cdot r'(x)}(\Omega)$ olduğundan, burada $r'(x) = \frac{r(x)}{r(x)-1}$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{V_n(x)}{m(x)} |u_0|^{m(x)}\, dx = \int_\Omega \frac{V_\star(x)}{m(x)} |u_0|^{m(x)}\, dx \tag{7.13}$$

dir. (7.11)−(7.13) ilişkileriyle

$$\int_\Omega \frac{V_\star(x)}{m(x)} |u_n|^{m(x)}\, dx - \int_\Omega \frac{V_n(x)}{m(x)} |u_n|^{m(x)}\, dx$$

$$= \int_\Omega \frac{V_\star(x)}{m(x)} |u_n|^{m(x)}\, dx - \int_\Omega \frac{V_\star(x)}{m(x)} |u_0|^{m(x)}\, dx + \int_\Omega \frac{V_\star(x)}{m(x)} |u_0|^{m(x)}\, dx$$

$$- \int_\Omega \frac{V_n(x)}{m(x)} |u_0|^{m(x)}\, dx + \int_\Omega \frac{V_n(x)}{m(x)} |u_0|^{m(x)}\, dx - \int_\Omega \frac{V_n(x)}{m(x)} |u_n|^{m(x)}\, dx$$

eşitliği birleştirilerek

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left(\frac{V_\star(x)}{m(x)} |u_n|^{m(x)} - \frac{V_n(x)}{m(x)} |u_n|^{m(x)} \right) dx = 0 \tag{7.14}$$

elde edilir.

$$E(V_\star) = \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{J_{V_\star}(u)}{I(u)}$$

olduğundan

$$E(V_\star) \leq \frac{J_{V_\star}(u_n)}{I(u_n)}$$

dir. Yukarıdaki eşitsizlik ve (7.10) eşitliğini birleştirerek

$$E(V_\star) \leq \frac{J_{V_\star}(u_n) - J_{V_n}(u_n)}{I(u_n)} + E(V_n)$$

elde edilir. (7.14) ilişkisinin sonucunu, $I(u_n)$ in sınırlı olduğu ve sıfıra yakınsamadığı gerçeğini ve $(E(V_n))$ in $E_\star$ a yakınsadığını hesaba katarsak ve son eşitsizlikte $n \to \infty$ limitine geçersek

$$E(V_\star) \leq E_\star$$

sonucunu çıkarırız. Ancak, $E_\star$ ın tanımını ve $V_\star \in S$ gerçeğini kullanarak aslında

$$E(V_\star) = E_\star$$

sonucunu çıkarırız. Teorem 7.2 nin ispatı tamamlandı. □

BÖLÜM 8

DEJENERE BİR PROBLEM İÇİN MORSE TEORİSİ VE YEREL BAĞLANTI

Bu bölümde aşağıdaki lineer olmayan

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u + |u|^{p(x)-2} := f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{8.1}$$

probleminin incelenmesiyle ilgileniyoruz, burada Ω, $\mathbb{R}^N$ de sınırı düzgün olan bir sınırlı bölgedir. $p \in C(\overline{\Omega})$ ve $1 < p_- := \min_{x\in\overline{\Omega}} p(x) \le p(x) \le p_+ := \max_{x\in\overline{\Omega}} p(x) < \infty$ ve $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\,ds$, $\mathcal{F}(x,t) = f(x,t)t - p_+F(x,t)$ olsun.

$f(x,u)$ reaksiyon teriminin aşağıdaki hipotezleri sağladığını varsayıyoruz:

(H1) $f(x,0) = 0$ olacak şekilde $f \in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$ dir ve $C_1 > 0$ vardır öyle ki

$|f(x,t)| \le C_1\left(1 + |t|^{q(x)-1}\right)$, $\forall (x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}$,

burada $\forall x \in \overline{\Omega}$ için $q(x) \in C(\overline{\Omega})$, $1 < q(x) < p^*(x)$ ve $p(x) < N$ ise $p^*(x) = \frac{Np(x)}{N-p(x)}$, $p(x) \ge N$ ise $p^*(x) = +\infty$;

(H2) $x \in \overline{\Omega}$ için $\lim_{|t|\to\infty} \frac{F(x,t)}{|t|^{p+}}$ (düzgün yakınsama);

(H3) $\theta \ge 1$ vardır öyle ki $(x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}$ ve $s \in [0,1]$ için $\theta\mathcal{F}(x,t) \ge \mathcal{F}(x,st)$;

(H4) $v > 0$ vardır öyle ki

$\frac{f(x,t)}{|t|^{p_+-2}t}$, $t \ge v$ iken artan $t \le -v$ iken azalandır.

(H5) $0 < r < R$ olacak şekilde r ve R küçük sabitleri vardır öyle ki $r \le |t| \le R$ ve h.h.h. $x \in \Omega$ olacak şekilde $t \in \mathbb{R}$ için

$$C_2|t|^{\alpha(x)} \le p(x)F(x,t) \le C_3|t|^{p(x)}, \tag{8.2}$$

burada $0 < C_2 < C_3 < 1$, $\alpha(x) \in C(\overline{\Omega})$ ve $1 < \alpha(x) < p(x)$ olacak şekilde C_2 ve C_3 birer sabittir. Üstelik $C_4 > 0$ vardır öyle ki $\forall (x,t) \in \Omega\times\mathbb{R}$ için

$$F(x,t) \ge -C_4|t|^{p_+}. \tag{8.3}$$

(H2) varsayımı problem (8.1) in soznsuzda süperlineer olmasını gerektirir. Alışılmış Ambrosetti–Rabinowitz şartı kullanılarak süperlineer eliptik sınır değer problemiyle ilgili birçok çalışma yapıldı yani,

(AR) $\mu > p_+$ ve $M > 0$ vardır öyle ki $\forall x \in \Omega$ ve $|t| \geq M$ için

$$0 < p_+ F(x,t) \leq f(x,t)t. \tag{8.4}$$

(8.4) ten, bazı $a, b > 0$ için ve $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ için

$$F(x,t) \geq a|t|^{\mu} - b \tag{8.5}$$

ve (H2) şartımızdan daha kuvvetli bir varsayımdır.

Aşağıdaki fonksiyonu ele alalım (basitlik için x-bağımlılığını kaldırıyoruz):

$$f(x,t) = |t|^{p_+ - 2}t\left(p_+ \log(1+|t|) + \frac{|t|}{1+|t|}\right).$$

O zaman $F(x,t) = |t|^{p_+}\log(1+|t|)$ dır ve f, (AR) şartını sağlamaz ama (H2) ve (H3) şartlarımızı sağlar. Üstelik bu fonksiyonun bütün (H1)–(H5) hipotezlerini yerine getirdiğini gösterebiliriz.

Yukarıdaki hipotezlerin problem (8.1) in bir ya da daha fazla trivial olayan çözümlerinin varlığı için yeterli şartları sağladığını kanıtlıyoruz.

Teorem 8.1 (H1), (H2), (H3) ve (H5) geçerli olsun. O zaman problem (8.1) in $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ da en az bir trivial olmayan zayıf çözümü vardır.

Teorem 8.2 (H1), (H2), (H4) ve (H5) geçerli olsun. O zaman problem (8.1) in $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ da en az bir trivial olmayan zayıf çözümü vardır.

Bir sonraki sonucun ifadesinden önce, $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ daki homojen olmayan $-\Delta_{p(x)}$ diferansiyel operatörünün özdeğerleri hakkındaki bazı bilinen özellikleri hatırlıyoruz.

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = \lambda|u|^{p(x)-2}u, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

problemi sıfırdan farklı çözüme sahipse λ, Dirichlet olacak şekilde $-\Delta_{p(x)}$ in bir özdeğeridir. Fan, Zhang ve Zhao [15] aşağıdaki şartın getirilmesiyle $\lambda_* > 0$ esas özdeğerini elde etti:

(P) Bir $l \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ vektörü vardır öyle ki herhangi bir $x \in \Omega$ için $c(t) = p(x+tl)$ monotondur, $t \in I_x = \{t : x + tl \in \Omega\}$.

Teorem 8.3 (P), (H1), (H5) şartlarının yerine getirildiğini varsayalım ve

(H6) $x \in \overline{\Omega}$ için $\limsup_{|t|\to\infty} \frac{p(x)F(x,t)}{|t|^{p(x)}} < \frac{p_-}{p_+}\lambda_* + 1$ (düzgün);

(H7) $\forall x \in \Omega$ ve $|t| \leq r$ için $F(x,t) \geq 0$ olsun.

O zaman problem (8.1) in $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ da en az iki trivial olmayan zayıf çözümü vardır.

(H1) varsayımından

$$\Phi(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right)dx - \int_\Omega F(x,u)\,dx$$

ile verilen $\Phi : W_0^{1,p(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$ enerji fonksiyoneli iyi tanımlıdır ve C^1 sınıfındandır. Φ nin u ya göre türevi, $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ için

$$\langle \Phi'(u), v\rangle = \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \cdot \nabla v + |u|^{p(x)-2}u \cdot v\right) dx - \int_\Omega f(x,u)v\, dx$$

olarak verilir.

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) dx, \qquad J(u) = \int_\Omega F(x,u)\, dx$$

olarak belirleyelim. O zaman $\Phi(u) = I(u) - J(u)$ dur.

Herhangi bir $\phi \in X$ için

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \cdot \nabla \phi + |u|^{p(x)-2}u \cdot \phi\right) dx - \int_\Omega f(x,u)\phi\, dx = 0$$

ise $u \in X$ problem (8.1) in bir zayıf çözümüdür.

$c \in \mathbb{R}$ için, herhangi bir $\{u_n\} \subset X$ dir öyle ki $\Phi(u) \to c$, $(1 + \|u_n\|)\|\Phi'(u_n)\|_{X^*} \to 0$ bir yakınsak alt diziye sahip ise Φ fonksiyoneli (C) şartını sağlar. Herhangi bir dizi $\{u_n\} \subset X$ öyleki $\Phi(u_n)$ sınırlıdır ve $\Phi'(u_n) \to 0$ bir yakınsak alt diziye sahip ise Φ fonksiyoneli (PS) şartını sağlar.

Standart argümanlar Φ enerji fonksiyonelinin Teorem 8.1 ve 8.2 veya 8.3 ün hipotezleri altında (C) şartını gösterir.

8.1 Kritik Grupların Hesaplanması

X bir reel Banach uzayı ve $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $K = \{u \in X : \Phi'(u) = 0\}$ olsun, o zaman $\Phi(u) = c$ olacak şekilde bir izole edilmiş kritik $u \in K$ noktasındaki Φ nin q. kritik grubu $C_q := H_q(\Phi^c \cap U, \Phi^c \cap U\backslash\{u\})$, $q \in \mathbb{N} := \{0,1,2,\dots\}$ olarak tanımlanır, burada $\Phi^c = \{u \in X : \Phi(u) \le c\}$, U tek kritik noktayı içeren, u nun herhangi bir komşuluğudur, H_* bir G Abelyen grubundaki katsayılarla singüler bağıl (göreceli) homolojidir.

Kritik grupların en az bir tanesi trivial değilse $u \in K$, Φ nin bir homolojik trivial olmayan kritik noktasıdır.

Aşağıdaki kritik nokta sonucu, sonrasında kullanılacaktır.

Önerme 8.4 (Bakınız [35, Teorem 2.1])**.** X bir reel Banach uzayı olsun ve $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, (PS) şartını sağlasın ve alttan sınırlı olsun. Φ, homolojik trivial olmayan ve Φ nin bir minimizeri olmayan bir kritik noktaya sahipse o zaman Φ en az üç kritik noktaya sahiptir.

Eğer Φ, (C) şartını sağlarsa ve Φ nin kritik değerleri bir $a < \inf \Phi(K)$ ile alttan sınırlı ise o zaman sonsuzdaki Φ nin kritik grupları

$$C_q(\Phi, \infty) := H_q(\mathrm{X}, \Phi^a), \quad q \in \mathbb{N} \tag{8.6}$$

olarak Bartsch ve Li [6] tarafından ortaya koyulur. Eğer Φ, (C) şartını sağlarsa, deformasyon şartını da sağlar. Deformasyon lemmasından (5.1) in sağ tarafı a nın seçimine bağlı değildir.

Açıklama 8.5 Morse teorisi [8] bize der ki $K = \{0\}$ ise $\forall q \in \mathbb{N}$ için $C_q(\Phi, \infty) = C_q(\Phi, 0)$ dır. Bu, bir $q \in \mathbb{N}$ için $C_q(\Phi, \infty) \neq C_q(\Phi, 0)$ ise Φ nin bir trivial olmayan kritik noktaya sahip olması gerektiğini gösterir. Öyleyse sıfırdaki ve sonsuzdaki kritik grupları hesaplamalıyız.

Teoremlerimizin ispatları için, Φ nin sadece sonlu sayıda kritik noktalara sahip olduğunu varsayabiliriz. Φ, (C) şartını sağladığından sonsuzdaki $C_q(\Phi, \infty)$ kritik grupları anlamlı olur.

Teorem 8.6 Farzedelim ki Φ; (H1), (H2) ve (H3) ü sağlasın. O zaman $\forall q \in \mathbb{N}$ için $C_q(\Phi, \infty) = 0$ dır.

İspat $S = \{u \in X : \|u\| = 1\}$ olsun. $u \in S$ için Fatou lemması ve (H2) den

$$\lim_{t\to+\infty} \int_\Omega \frac{F(x,tu)}{|t|^{p_+}} dx \geq \int_\Omega \lim_{t\to+\infty} \frac{F(x,tu)}{|tu|^{p_+}} |u|^{p_+} dx = +\infty$$

elde ederiz. Bu nedenle

$$t \to +\infty \text{ iken } \Phi(tu) \leq \frac{t^{p_+}}{p_-} - \int_\Omega F(x,tu)\, dx \leq t^{p_+} \left(\frac{1}{p_-} - \int_\Omega \frac{F(x,tu)}{|t|^{p_+}} dx \right) \to -\infty \text{ dir.}$$

$a < \min\left\{ \inf_{\|u\|\leq 1} \Phi(u), 0 \right\}$ seçelim, o zaman herhangi bir $u \in S$ için $t_0 > 1$ vardır öyle ki $\Phi(t_0 u) \leq a$ dır. (H3) ten $(x, m) \in \Omega \times \mathbb{R}$ için

$$\mathcal{F}(x,m) \geq 0 \tag{8.7}$$

elde ederiz. Bu nedenle, eğer

$$\Phi(tu) = \int_\Omega \frac{t^{p(x)}}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)} \right) dx - \int_\Omega F(x,tu)\, dx \leq a$$

ise o zaman

$$\int_\Omega t^{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)} \right) dx \leq p_+ a + \int_\Omega p_+ F(x,tu)\, dx$$

olur. İlişki (8.7) kullanılarak,

$$\frac{d}{dt}\Phi(tu) = \frac{1}{t}\left[\int_\Omega t^{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)} \right) dx - \int_\Omega f(x,tu) tu\, dx \right]$$
$$\leq \frac{1}{t}\left[p_+ a - \int_\Omega \mathcal{F}(x,tu)\, dx \right] < 0$$

elde edilir. O zaman implisit (kapalı) fonksiyon teoreminden, bir tek $T \in C(S, \mathbb{R})$ vardır öyle ki $\Phi(T(u)u) = a$ dır. Daha sonra $X\backslash\{0\}$ dan Φ^a ya güçlü bir deformasyon çekimi oluşturmak için T fonksiyonu kullanıyoruz. Bu nedenle

$$C_q(\Phi, \infty) = H_q(\mathrm{X}, \Phi^a) = H_q(\mathrm{X}, X\backslash\{0\}) = 0, \quad \forall q \in \mathbb{N}$$

sonucunu çıkarırız. İspat tamamlandı. □

Teorem 8.7 Farz edelim ki Φ; (H1), (H2) ve (H4) ü sağlasın. O zaman $\forall q \in \mathbb{N}$ için $C_q(\Phi, \infty) = 0$ dır.

İspat standarttır ve ayrıntıları atlarız.

[21] de olduğu gibi, X ayrılabilir ve yansımalı bir Banach uzayı olduğundan, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ ve $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ vardır öyle ki

$$f_n(e_m) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n \neq m \\ 0, & n = m \end{cases}$$

$$X = \overline{\operatorname{span}\{e_n : n = 1,2, \dots\}}, \qquad X^* = \overline{\operatorname{span}\{f_n : n = 1,2, \dots\}}.$$

$k = 1,2, \dots$, için $Y_k = \operatorname{span}\{e_1, e_1, \dots, e_k\}$ olsun, dolayısıyla Y_k, X de bir kapalı tümleyen Z_k alt uzayına sahiptir. Böylece $X = Y_k \oplus Z_k$ (bakınız [7]).

Yardımcı Teorem 8.8 Farz edelim ki $\varphi : X \to \mathbb{R}$ zayıf-güçlü sürekli, $\varphi(u) = 0$, $\rho > 0$ verilen bir pozitif sayı olsun. $\eta_k = \sup_{u \in Z_k, \|u\| \leq \rho} |\varphi(u)|$ seçelim. O zaman $k \to \infty$ iken $\eta_k \to 0$ olur.

Bu sonucun ispatı için Fan ve Han [13, Yardımcı Teorem 3.3] e bakarız.

Sıfır noktasındaki kritik grupları hesaplamak için aşağıdaki klasik bağlantı teoremine ihtiyacımız var.

Önerme 8.9 Farz edelim ki Φ, $\Phi(0) = 0$ olacak şekilde bir $u = 0$ kritik noktasına sahip olsun. Farz edelim ki Φ; $X = V \oplus W$, $k = \dim V < \infty$ a göre 0 noktasında bir yerel bağlantıya sahip olsun yani küçük $\rho > 0$ vardır öyle ki

$$\begin{cases} \Phi(u) \leq 0, & u \in V, \quad \|u\| \leq \rho; \\ \Phi(u) > 0, & u \in W, \quad 0 < \|u\| \leq \rho \end{cases}$$

olur. O zaman $C_k(\Phi, 0) \neq 0$ dır dolayısıyla sıfır, Φ nin bir homolojik trivial olmayan kritik noktasıdır.

Teorem 8.10 Farz edelim ki Φ, $(\mathrm{H1})$ ve $(\mathrm{H5})$ i sağlasın. O halde $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $C_{k_0}(\Phi, 0) \neq 0$ dır.

İspat $f(x, 0) = 0$ olduğundan sıfır fonsiyonu 0, Φ nin bir kritik noktasıdır. Dolayısıyla sadece $X = Y_k \oplus Z_k$ ya göre sıfırda Φ nin bir yerel bağlantıya sahip olduğunu göstermemiz gerekiyor. İki adım atıyoruz:

Adım 1. $u \in Y_k$ alalım. Y_k sonlu boyutlu olduğundan verilen $R > 0$ için küçük $0 < \rho < 1$ vardır öyle ki

$$u \in Y_k, \ \ \|u\| < \rho \Rightarrow |u(x)| < R, \ \ \forall x \in \Omega.$$

$0 < r < R$ için, $\Omega_1 = \{u \in \Omega : |u(x)| < r\}$, $\Omega_2 = \{u \in \Omega : r \leq |u(x)| \leq R\}$, $\Omega_3 = \{u \in \Omega : |u(x)| > R\}$ olsun. $\Omega = \bigcup_{i=1}^{3} \Omega_i$ ve Ω_i ler ikili ayrıktır. Kolaylık olması için, $G(x, u) = F(x, u) - \frac{C_2}{p(x)} |u|^{\alpha(x)}$ olsun. Bu nedenle $(\mathrm{H5})$ ten

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)} \right) dx - \left(\int_{\Omega_1} + \int_{\Omega_2} + \int_{\Omega_3} \right) F(x, u) dx \\ &= \int_\Omega \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)} \right) dx - \int_\Omega \frac{C_2}{p(x)} |u|^{\alpha(x)} \, dx - \int_{\Omega_1} G(x, u) \, dx \\ &\quad - \int_{\Omega_2} G(x, u) \, dx - \int_{\Omega_3} G(x, u) \, dx \end{aligned}$$

$$\leq \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) dx - \frac{C_2}{p_+} \int_{\Omega} |u|^{\alpha(x)}\, dx - \int_{\Omega_1} G(x,u)\, dx.$$

$\alpha(x)$ üzerindeki varsayımlar ve Ω nın $\mathbb{R}^N$ de bir sınırlı bölge olması açısından, $L^{p(x)}(\Omega) \to L^{\alpha(x)}(\Omega)$ gömmesi süreklidir. Bu bir $C > 1$ sabitinin var olduğunu gerektirir öyle ki

$$\|u\|_{\alpha(x)} \leq C\|u\|_{p(x)} \leq C\|u\|_{1,p(x)} \leq 2C\|u\| \leq 2C\rho.$$

$\rho \leq \frac{1}{2C}$ ise o zaman $\|u\|_{\alpha(x)} \leq 1$ dir. Y_k üzerindeki normların birbirine denk olduğuna, $\|u\|_{\alpha(x)}$ in $\|u\|$ ya denk olduğuna dikkat edelim. $\alpha(x), p(x) \in C(\overline{\Omega})$ ve $\alpha(x) < p(x)$ olduğundan, $\forall x \in \Omega$ için $\overline{\Omega}$ nın bir $B_\delta(x)$ açık alt kümesi vardır öyle ki

$$\alpha_x := \sup_{x \in B_\delta(x)} \alpha(x) < \inf_{x \in B_\delta(x)} p(x) := p_x.$$

O zaman $\{B_\delta(x)\}_{x \in \overline{\Omega}}$, $\overline{\Omega}$ nın bir açık örtüsüdür. $\overline{\Omega}$ kompakt olduğundan sonlu bir $\{B_\delta(x_i)\}_{i=1}^m$ alt örtüsü vardır. $\{B_\delta(x_i)\}_{i=1}^m$ yi karşılıklı ortak noktalara sahip olmayan sonlu açık $\{Q\}_{j=1}^m$ hiperküpüne bölmek için, $\{B_\delta(x_i)\}_{i=1}^m$ nin en az bir hiperyüzeyinin bulunduğu her bir hiperdüzlemi kullanabiliriz. $\overline{\Omega} = \cup_{j=1}^n \overline{Q_j}$ ve

$$\alpha_{j+} := \sup_{x \in Q_j} \alpha(x) < \inf_{x \in Q_j} p(x) := p_{j-}$$

olduğu açıktır. $r \to 0$ iken $\int_{\Omega_1} G(x,u)\, dx \to 0$ ve $\|u\|_{Q_j} \leq \|u\|$ olduğuna dikkat edelim. Dolayısıyla, bir $C > 0$ sabiti vardır öyle ki küçük $0 < \rho < 1$ ve yeterince küçük r için

$$\Phi(u) = \sum_{j=1}^{n} \left[\int_{Q_j} \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) dx - \frac{C_2}{p_-} \int_{Q_j} |u|^{\alpha(x)}\, dx \right] + \int_{\Omega_1} G(x,u)\, dx$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \left(\|u\|_{Q_j}^{p_{j-}} - C\|u\|_{Q_j}^{\alpha_{j+}} \right) - \int_{\Omega_1} G(x,u)\, dx \leq 0.$$

Adım 2. (H1) hipotezinden ve Young eşitsizliğinden $C > 0$ vardır öyle ki $\forall x \in \Omega$ ve $|u| \geq R$ için

$$|F(x,u)| \leq \frac{C_3}{p_+} |u|^{p(x)} + C|u|^{s(x)} \tag{8.8}$$

olur burada $s(x) \in C(\overline{\Omega})$ ve $p(x) < s(x) < p^*(x)$ dir. Kolaylık olması için

$H(x,u) = F(x,u) - \frac{C_3}{p(x)} |u|^{p(x)}$ olsun. Dolayısıyla $u \in Z_k$ ve $\|u\| \leq 1$ ise, (H5) ve (8.8) den

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) dx - \left(\int_{\Omega_1} + \int_{\Omega_2} + \int_{\Omega_3} \right) F(x,u) dx$$

$$= \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) dx - \int_{\Omega} \frac{C_3}{p(x)} |u|^{p(x)}\, dx - \int_{\Omega_1} H(x,u)\, dx$$

$$- \int_{\Omega_2} H(x,u)\, dx - \int_{\Omega_3} H(x,u)\, dx$$

$$\geq \frac{1-C_3}{p_+}\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)dx - C\int_\Omega |u|^{s(x)}\,dx - \int_{\Omega_1} H(x,u)\,dx.$$

Daha sonra $\varphi : X \to \mathbb{R}$, $\varphi(u)=\int_\Omega |u|^{s(x)}\,dx$ fonksiyonelini ele alalım. $X \to L^{s(x)}(\Omega)$ gömmesinin kompakt olduğunu zaten biliyoruz. Dolayısıyla Yardımcı Teorem 8.8 den

$$k \to \infty \text{ iken } \eta_k = \sup_{u\in Z_k, \|u\|\leq 1} |\varphi(u)| \to 0. \tag{8.9}$$

$r \to 0$ iken $\int_{\Omega_1} H(x,u)\,dx \to 0$ olduğuna dikkat edelim. Dolayısıyla Adım 1 deki gibi aynı argümanları kullanarak

$$\Phi(u) \geq \sum_{i=1}^{l}\left[\frac{1-C_3}{p_+}\int_{\mathbb{Q}_i}\left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)dx - C\int_{\mathbb{Q}_i}|u|^{s(x)}\,dx\right] + \int_{\Omega_1} H(x,u)\,dx$$

$$\geq \sum_{i=1}^{l}\left[\frac{1-C_3}{p_+}\|u\|_{\mathbb{Q}_i}^{p_{i+}} - C\eta_k\|u\|_{\mathbb{Q}_i}^{s_{i-}}\right] - \int_{\Omega_1} H(x,u)\,dx$$

(8.9) dan $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\eta_{k_0} \leq \frac{1-C_3}{2Cp_+}$ dır. O zaman küçük $0<\rho<1$ ve yeterince küçük r için

$$\Phi(u) \geq \sum_{i=1}^{l}\frac{1-C_3}{2Cp_+}\left(\|u\|_{\mathbb{Q}_i}^{p_{i+}} - \|u\|_{\mathbb{Q}_i}^{s_{i-}}\right) - \int_{\Omega_1} H(x,u)\,dx > 0.$$

Böylece $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $u \in Z_{k_0}$ ve $0<\|u\|\leq\rho$ iken $\Phi(u)>0$ dır.

Adım 1 ve 2 yi birleştirerek, Önerme 8.9 dan dolayı Teorem 8.10 un ispatı tamamlandı. □

Açıklama 8.11 Teorem 8.10 un ispatından, Teorem 8.10 un sonucunun halâ $(\mathrm{H1})$, $(\mathrm{H5})$ ve $(\mathrm{H7})$ varsayımları altında geçerli olduğu sonucuna varırız.

Daha sonra Teorem 8.6 ve 8.10 dan bir $k_0 \in \mathbb{N}$ için $C_{k_0}(\Phi,\infty) \neq C_{k_0}(\Phi,0)$ dır. O zaman Teorem 8.1, Φ nin (C) şartını ve Açıklama 8.5 i sağladığı gerçeğinden hemen görülür.

Teorem 8.7 ve 8.10 dan bir $k_0 \in \mathbb{N}$ için $C_{k_0}(\Phi,\infty) \neq C_{k_0}(\Phi,0)$ dır. O zaman Teorem 8.2, Φ nin (C) şartını ve Açıklama 8.5 i sağladığı gerçeğinden hemen görülür.

Φ nin (PS) şartını sağladığını ve alttan sınırlı olduğunu biliyoruz. Varsayım $(\mathrm{H7})$ ve Açıklama 8.11 den $u=0$ trivial çözümü homolojik olarak trivial değildir ve minimizer değildir. Sonuç, Önerme 8.4 dan görülür.

BÖLÜM 9

DEĞİŞKEN ÜSLÜ FARK DENKLEMLERİ

Kısmi fark denklemleri genellikle belirli olayların zaman içerisindeki gelişimini tanımlamaktadır. Bu bölümde değişken üsler içeren bir ayrık problemi ele alacağız. Çoğu durumda sürekli bir çerçevedeki bir problem ayrık matematikten uygun bir yöntem kullanılarak ele alınabilir ve tersine bu tür olayların güzel bir tanımı Lovász [26] da bulunabilir. Ekonomi, biyolojik sinir ağları, optimal kontrol ve diğerlerinden bazı lineer olmayan problemlerin simülasyonu ve modellemesi doğal olarak fark denklemleri teorisinin hızlı gelişmesinde uygulanır. Fark denklemlerinin temel fakat ilgili örnekleri ısı dağılımı, ısı kontrolü, sıcaklık dağılımı, nüfus artışı, hücresel sinir ağları vb. ile ilgilidir.

$T > 0$ verilen bir doğal sayı olsun ve $p(\cdot), q(\cdot) : \mathbb{Z} \to [2, \infty), V(\cdot) : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ üç $T-$periyodik fonksiyonlar olsun ve $t \in \mathbb{R}$ de ve k da $T-$periyodik olacak şekilde $f(k,t) : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyon olsun.

Δ, fark operatörünü göstersin yani her $k \in \mathbb{Z}$ için

$$\Delta u(k) = u(k+1) - u(k).$$

$\Delta^2_{p(\cdot)}$, $p(\cdot)-$Laplace fark operatörünü göstersin yani her $k \in \mathbb{Z}$ için

$$\Delta^2_{p(k-1)} u(k-1) = |\Delta u(k)|^{p(k)-2}\Delta u(k) - |\Delta u(k-1)|^{p(k-1)-2}\Delta u(k-1). \qquad (9.1)$$

Bu bölüm

$$\begin{cases} \Delta^2_{p(k-1)} u(k-1) - V(k)|u(k)|^{q(k)-2}u(k) + f\big(k, u(k)\big) = 0 & k \in \mathbb{Z} \text{ için} \\ u(k) \to 0 & |k| \to \infty \text{ iken} \end{cases} \qquad (9.2)$$

tipindeki homojen olmayan fark denklemlerinin incelenmesine ayrılmıştır. Bu yazının amacı problem (9.2) nin trivial olmayan homoklinik çözümlerinin varlığını ortaya koymaktadır. Poincaré [39], $|k| \to \infty$ iken bir sabite asimptotik ise bir homoklinik yörünge (ya da çift katlı asimptotik yörünge) olan bir $x(t)$ yörüngesini çağırdı. $\lim_{|k|\to\infty} u(k) = 0$ sağlayan problem (9.2) için $u(k)$ çözümleri aramak istediğimizden problem (9.2) için trivial olmayan homoklinik çözümler bulmakla ilgileniyoruz.

$$p^+ := \sup_{k\in\mathbb{Z}} p(k) \qquad\qquad p^- := \inf_{k\in\mathbb{Z}} p(k)$$

$$q^+ \coloneqq \sup_{k\in\mathbb{Z}} q(k) \qquad\qquad q^- \coloneqq \inf_{k\in\mathbb{Z}} q(k)$$

olsun ve farz edelim ki

$$1 < q^- \le q^+ < p^- \le p^+ \tag{9.3}$$

olsun. Ayrıca $T-$periyodik olan V fonksiyonun

(V1) $0 < V_0 \coloneqq \min\{V(0), \dots, V(T-1)\}$;

(V2) $V_0 < q^+$

ek şartlarını sağladığını varsayalım. k da $T-$periyodik olduğu varsayılan sürekli

$f = f(k,t) : \mathbb{Z}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

(F1) $\alpha > p^+$ ve $r > 0$ vardır öyle ki

$$\alpha F(k,t) \coloneqq \alpha \int_0^t f(k,s)\,ds \le t f(k,t), \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad t \ne 0$$

ve

$$F(k,t) > 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad t \ge r;$$

(F2) $|t| \to 0$ iken $f(k,t) = o\left(|t|^{q^+-1}\right)$

sağlar.

$p : \mathbb{Z} \to (1,\infty)$ için

$$\ell^{p(\cdot)} \coloneqq \left\{u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R};\ \rho_{p(\cdot)}(u) \coloneqq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u(k)|^{p(k)} < \infty\right\}$$

fonksiyon uzayını tanımlayalım. $\ell^{p(\cdot)}$ üzerindeki norm, Luxemburg normu

$$\|u\|_{p(\cdot)} \coloneqq \inf\left\{\mu > 0;\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\frac{u(k)}{\mu}\right|^{p(k)} \le 1\right\}$$

dır. O halde aşağıdaki ilişkiler geçerlidir

$$\|u\|_{p(\cdot)} < 1 \Rightarrow \|u\|_{p(\cdot)}^{p^+} \le \rho_{p(\cdot)}(u) \le \|u\|_{p(\cdot)}^{p^-}, \tag{9.4}$$

$$\|u\|_{p(\cdot)} > 1 \Rightarrow \|u\|_{p(\cdot)}^{p^-} \le \rho_{p(\cdot)}(u) \le \|u\|_{p(\cdot)}^{p^+}, \tag{9.5}$$

$$\|u\|_{p(\cdot)} \to 0 \Leftrightarrow \rho_{p(\cdot)}(u) \to 0. \tag{9.6}$$

Ayrıca

$$\ell^{\infty} = \left\{u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R};\ |u|_{\infty} \coloneqq \sup_{k\in\mathbb{Z}} |u(k)| < \infty\right\}$$

uzayını ele alıyoruz.

Önerme 9.1 (9.3) şartının yerine getirildiğini varsayalım. O halde $\ell^{p(\cdot)} \subset \ell^{q(\cdot)}$ dur.

İspat $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u(k)|^{p(k)} < \infty$ ise o zaman $S > 0$ vardır öyle ki

$|u(k)|^{q(k)} \le 1, \quad \forall |k| > S.$

Bu

$$|u(k)| \leq 1, \ \ \forall |k| > S$$

olduğunu gösterir. İlişki (9.3) ten her $k \in \mathbb{Z}$ için $q(k) < p(k)$ olduğunu çıkarırız. Bu gerçek ve yukarıdaki eşitsizlik

$$|u(k)|^{p(k)} \leq |u(k)|^{q(k)}, \ \ \forall |k| > S$$

sağlar ve ispat tamamlanır. □

Önerme 9.1, ilişki (9.3) ve V ve f fonksiyonları üzerindeki hipotezlerden, (9.2) için homoklinik çözümler aramamız gereken doğal uzayın $\ell^{q(\cdot)}$ olduğunu çıkarırız. Böylece $\forall v \in \ell^{q(\cdot)}$ ve $\lim_{|k|\to\infty} u(k) = 0$ için

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\Delta u(k-1)|^{p(k-1)-2}\Delta u(k-1)\Delta v(k-1) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} V(k)|u(k)|^{q(k)-2}u(k)v(k)$$

$$-\sum_{k\in\mathbb{Z}} f\big(k,u(k)\big)v(k) = 0$$

ise $u \in \ell^{q(\cdot)}$, (9.2) için bir homoklinik çözümdür.

Bu bölümün ana sonucu aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 9.2 (9.3), (V1)–(V2) ve (F1)–(F2) hipotezlerinin yerine getirildiğini varsayalım. O zaman problem (1.1), en az bir trivial olmayan homoklinik çözüme sahiptir. Üstelik problem (9.2) nin bir trivial u homoklinik çözümü göz önüne alındığında $S_1 \leq S_2$ olacak şekilde iki S_1 ve S_2 tam sayıları vardır öyle ki her $k > S_2$ için ve her $k < S_1$ için $u(k)$ dizisi kesin monotondur.

9.1 Homoklinik Çözümler ve Nitel Özellikleri

Teorem 9.2 yi ispatlamadaki temel fikir problem (9.2) nin bağlantılı (ortak) enerjisel fonksiyonelini ele almak ve mountain-pass teoremini kullanarak bir trivial olmayan kritik noktaya sahip olduğunu göstermektedir.

$$\phi_{p(t)}(t) \coloneqq |t|^{p(t)-2}t \qquad \Phi_{p(t)}(t) \coloneqq \frac{|t|^{p(t)}}{p(t)}$$

olsun.

$$\Delta^2_{p(k-1)}u(k-1) = \Delta\left(\phi_{p(k-1)}\big(\Delta u(k-1)\big)\right)$$

olduğuna dikkat edelim. Daha sonra

$$A(u) \coloneqq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Phi_{p(k-1)}\big(\Delta u(k-1)\big) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} V(k)\Phi_{p(k)}\big(u(k)\big)$$

olarak tanımlanan $A : \ell^{q(\cdot)} \to \mathbb{R}$ fonksiyonelini tanıtıyoruz.

Problem (9.2) ile ilişkili enerji fonksiyonelini

$$J(u) \coloneqq A(u) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} F\big(k,u(k)\big)$$

ile tanımlanan $J: \ell^{q(\cdot)} \to \mathbb{R}$ olarak tanımlıyoruz. Standart argümanlar $\forall u, v \in \ell^{q(\cdot)}$ için

$$\langle J'(u), v\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big[|\Delta u(k-1)|^{p(k-1)-2}\Delta u(k-1)\Delta v(k-1) + V(k)|u(k)|^{q(k)-2}u(k)v(k) - f\big(k, u(k)\big)v(k)\big]$$

ile verilen türevle $J \in C^1\big(\ell^{q(\cdot)}, \mathbb{R}\big)$ olduğunu gösterir.

$\ell^{q(\cdot)}$ üzerinde $\|\cdot\|_{q(\cdot)}$ ile denk bir normu tanıtabiliriz, yani

$$\|u\|_{q(\cdot)} \coloneqq \inf\left\{\mu > 0;\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{V(k)}{q(k)}\left|\frac{u(k)}{\mu}\right|^{q(k)} \le 1\right\}.$$

Basit hesaplamayla

$$\|u\|_{q(\cdot)} < 1 \Rightarrow \|u\|_{q(\cdot)}^{q^+} \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{V(k)}{q(k)}|u(k)|^{q(k)} \le \|u\|_{q(\cdot)}^{q^-}, \tag{9.7}$$

$$\|u\|_{q(\cdot)} > 1 \Rightarrow \|u\|_{q(\cdot)}^{q^-} \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{V(k)}{q(k)}|u(k)|^{q(k)} \le \|u\|_{q(\cdot)}^{q^+}, \tag{9.8}$$

$$\|u\|_{q(\cdot)} \to 0 \Leftrightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{V(k)}{q(k)}|u(k)|^{q(k)} \to 0 \tag{9.9}$$

olduğunu gösteririz.

Bir sonraki sonuç J nin bir mountain-pass geometrisine sahip olduğunu gösterir.

Yardımcı Teorem 9.3 Teorem 9.2 in hipotezlerinin yerine getirildiği varsayalım. O zaman $\varrho > 0$ ve $v > 0$ ve $\|e\|_{q(\cdot)} > \varrho$ olacak şekilde $e \in \ell^{q(\cdot)}$ vardır öyle ki

(i) $\|u\|_{q(\cdot)} > \varrho$ olacak şekilde $\forall u \in \ell^{q(\cdot)}$ için $J(u) \ge v$;

(ii) $J(e) < 0$ dır.

Verilen $c \in \mathbb{R}$ için

$J\big(u(k)\big) \to c$ ve $J'\big(u(k)\big) \to 0$

ise bir $\big(u(k)\big) \subset \ell^{q(\cdot)}$ dizisi Palais–Smale $(\mathrm{PS})_c$ şartını sağlar.

Yardımcı Teorem 9.4 Teorem 9.2 nin hipotezlerinin yerine getirildiğini varsayalım. O zaman $\ell^{q(\cdot)}$ daki J için $c > 0$ve bir sınırlı $(\mathrm{PS})_c$ dizisi vardır.

Teorem 9.2 nin ispatına dönersek, $\{u_n\}$ Yardımcı Teorem 9.4 ile verilen bir dizi olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $\{|u_n(k)|; k \in \mathbb{N}\} \subset \ell^{q(\cdot)}$ dizisi sınırlıdır ve $|k| \to \infty$ iken $|u_n(k)| \to 0$ dır.

$\{|u_n(k)|\}_{k\in\mathbb{N}}$ nin $k_n \in \mathbb{Z}$ deki maksimumuna ulaştığını varsayalım. O zaman $j_n \in \mathbb{Z}$ vardır öyle ki $j_nT \le k_n < (j_n+1)T$ dir.

$\omega_n(k) \coloneqq u_n(k - j_nT)$

olarak tanımlayalım. O zaman $\{|\omega_n(k)|\}_{k\in\mathbb{N}}$,

$i_n \coloneqq k_n - j_nT \in [0, T]$

deki maksimuma ulaşır. $p(\cdot)$, $q(\cdot)$ ve $V(\cdot)$ nin T-periyodik olması

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{V(k)}{q(k)} |u_n(k)|^{q(k)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{V(k)}{q(k)} |\omega_n(k)|^{q(k)}$$

ve $J(u_n) = J(\omega_n)$ olmasını gerektirir. $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\ell^{q(\cdot)}$ da sınırlı olduğundan yukarıdaki kestirimler ve (9.7) ve (9.8) ilişkileri $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nin de $\ell^{q(\cdot)}$ da sınırlı olduğunu verir. O halde $\omega \in \ell^{q(\cdot)}$ vardır öyle ki ω_n, $n \to \infty$ iken $\ell^{q(\cdot)}$ daki ω ya zayıf yakınsar.

Her $k \in \mathbb{Z}$ için $n \to \infty$ iken $\omega_n(k) \to \omega(k)$ olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten de,

$$v_m(j) := \begin{cases} 1, & j = m \text{ ise} \\ 0, & j \neq m \text{ ise,} \end{cases}$$

ile verilen $v_m \in \ell^{q(\cdot)}$ test fonksiyonunu tanımlayarak ve ω_n nin $\ell^{q(\cdot)}$ daki ω ya zayıf yakınsaklığını hesaba katarak

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n(k) = \lim_{n\to\infty} \langle \omega_n, v_k \rangle = \langle \omega, v_k \rangle = \omega(k)$$

buluruz. İddia şu anda açıktır.

Daha sonra her $v \in \ell^{q(\cdot)}$ için, $n \to \infty$ iken $J'(\omega_n) \to 0$ olmasını gerektiren

$$|\langle J'(\omega_n), v\rangle| = |\langle J'(u_n), v(\cdot + j_n T)\rangle| \leq \|J'(u_n)\| * \|v\|_{q(\cdot)}$$

olduğunu belirtiyoruz. Bu her $v \in \ell^{q(\cdot)}$ için $n \to \infty$ iken

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\phi_{p(k-1)}\big(\Delta\omega_n(k-1)\big)\Delta v(k-1) + V(k)\phi_{q(k)}\big(\omega(k)\big)v(k) - f\big(k, \omega_n(k)\big)v(k) \to 0\right] \to 0 \qquad (9.10)$$

olduğunu gösterir.

$v \in \ell^{q(\cdot)}$ nun kompakt desteğe sahip olduğunu düşünelim, buradan $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$ vardır öyle ki $k \in \mathbb{Z}\backslash[a, b]$ ise $v(k) = 0$ ve $k \in \{a+1, b-1\}$ ise $v(k) \neq 0$ dır. Kompakt destek fonksiyonlarının kümesi $\ell_0^{q(\cdot)}$ ile gösterilir ve $\ell^{q(\cdot)}$ da yoğundur. Gerçekten de her $v \in \ell^{q(\cdot)}$ için $|j| \geq n+1$ ise $v_n(j) = 0$ ve $|j| \neq n$ ise $v_n(j) = v(j)$ ile verilen $v_n \in \ell_0^{q(\cdot)}$ tanımlayabiliriz ve $n \to \infty$ iken $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{V(j)}{q(j)} |v(j) - v_n(j)| \to 0$ ya da ilişki (9.9) dan $n \to \infty$ iken $\|v - v_n\|_{q(\cdot)} \to 0$ elde ederiz.

Şimdi (9.10) daki her $v \in \ell_0^{q(\cdot)}$ için $f(k,\cdot)$ nın sonlu toplamlarını ve sürekliliğini göz önüne alarak, $n \to \infty$ limitine geçersek

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\phi_{p(k-1)}\big(\Delta\omega(k-1)\big)\Delta v(k-1) + V(k)\phi_{q(k)}\big(\omega(k)\big)v(k) - f\big(k, \omega(k)\big)v(k) \to 0\right] \to 0$$

elde ederiz. ω nın, J nin bir kritik noktrası olduğunu ve sonuç olarak problem (9.2) nin bir çözümü olduğunu tespit ettik.

$\omega \neq 0$ olduğunu gösterelim. Çelişkiden $\omega = 0$ olsun. Böylece $n \to \infty$ iken

$$|u_n|_\infty = |\omega_n|_\infty = \max\{|\omega_n(k)|;\ k \in \mathbb{Z}\} \to 0$$

olur. Diğer yandan $(F2)$ şartı, verilen bir $\varepsilon > 0$ için $\delta \in (0,1)$ var olmasını gerektirir öyle ki her $k \in \{0,1,\dots,T-1\}$ ve her $|t| < \delta$ için

$$\begin{cases} |F(k,t)| \le \varepsilon |t|^{q^+} \\ |f(x,t)t| \le \varepsilon |t|^{q^+} \end{cases} \tag{9.11}$$

olur. Yukarıdaki eşitsizlik her $k \in \{0,1,\dots,T-1\}$ için M_k var olduğunu gösterir öyle ki $n > M_k$ için

$|\omega_n(k)| < \delta$

elde ederiz. $i_n \in \{0,1,\dots,T-1\}$ olduğundan

$n > M := \max\{M_n;\ k \in \{0,1,\dots,T-1\}\}$ ve her $k \in \mathbb{Z}$ için

$|\omega_n(k)| \le |\omega_n(i_n)| < \delta < 1$

elde ederiz. Bu gerçek ve ilişki (9.11)

$|F(k,\omega_n(k))| \le \varepsilon |\omega_n(k)|^{q^+} \le \varepsilon |\omega_n(k)|^{q(k)}$

ve

$|f(k,\omega_n(k))\omega_n(k)| \le \varepsilon |\omega_n(k)|^{q^+} \le \varepsilon |\omega_n(k)|^{q(k)}$

olmasını gerektirir. Her $n > M$ ve her $k \in \mathbb{Z}$ için aşağıdaki kestirimleri geçerli kabul ederiz

$$\begin{aligned} 0 < q^- J(\omega_n) &= q^- \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{p(k)} |\Delta\omega_n(k-1)|^{p(k-1)} + q^- \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{V(k)}{q(k)} |\omega_n(k)|^{q(k)} \\ &\quad - q^- \sum_{k\in\mathbb{Z}} F\big(k,\omega_n(k)\big) \\ &\le \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\Delta\omega_n(k-1)|^{p(k-1)} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} V(k)|\omega_n(k)|^{q(k)} - \sum_{k\in\mathbb{Z}} f\big(k,\omega_n(k)\big)\omega_n(k) \\ &\quad - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(q^- F\big(k,\omega_n(k)\big) - f\big(k,\omega_n(k)\big)\omega_n(k)\Big) \\ &\le \langle J'(\omega_n),\omega_n\rangle + q^- \sum_{k\in\mathbb{Z}} F\big(k,\omega_n(k)\big) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big|f\big(k,\omega_n(k)\big)\omega_n(k)\big| \\ &\le \langle J'(\omega_n),\omega_n\rangle + q^-\varepsilon \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\omega_n(k)|^{q(k)} + \varepsilon \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\omega_n(k)|^{q(k)} \\ &\le \langle J'(\omega_n),\omega_n\rangle + \left(q^-\varepsilon \frac{q^+}{V_0} + \varepsilon \frac{q^+}{V_0}\right) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{V(k)}{q(k)} |\omega_n(k)|^{q(k)} \\ &\le \|J'(\omega_n)\| * \|\omega_n\|_{q(\cdot)} + \varepsilon \frac{q^+(q^-+1)}{V_0} \Big[\|\omega_n\|_{q(\cdot)}^{q^+} + \|\omega_n\|_{q(\cdot)}^{q^-}\Big]. \end{aligned}$$

$\|u_n\|_{q(\cdot)}$ nun sınırlı olduğunu göz önüne alırsak, $n \to \infty$ iken $J'(u_n) \to 0$ dır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan yukarıdaki kestirimlerden $n \to \infty$ iken $J(\omega_n) \to c > 0$ olacak şekilde bir çelişki buluruz. Böylece ω, problem (9.2) nin bir trivial olmayan çözümüdür.

Daha sonra u, problem (9.2) nin sıfırdan farklı bir homoklinik çözümü olsun. Farz edelim ki sonsuz sayıdaki k_n noktalarında pozitif yerel maksimumlarına ve negatif

yerel minimumlarına ulaşsın. Özellikle $\{|k_n|\} \to \infty$ olduğunu varsayabiliriz. Sonuç olarak

$$\Delta^2_{p(k_n-1)} u(k_n - 1) u(k_n) \leq 0$$

ve $n \to \infty$ iken

$$u(k_n) \to 0$$

olur. Bu gerçekleri kullanarak ve (9.2) de $u(k_n)/|u(k_n)|^{q(k_n)}$ ile çarparak

$$\frac{f\big(k_n, u(k_n)\big)u(k_n)}{|u(k_n)|^{q(k_n)}} \geq \frac{\Delta^2_{p(k_n-1)} u(k_n - 1) u(k_n)}{|u(k_n)|^{q(k_n)}} + \frac{f\big(k_n, u(k_n)\big)u(k_n)}{|u(k_n)|^{q(k_n)}}$$

$$= V(k_n) \geq V_0 > 0 \qquad (9.12)$$

elde ededriz. (9.12) ve $(\mathrm{F2})$ şartını kullanarak bir çelişkiyi temsil eden

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{f\big(k_n, u(k_n)\big)u(k_n)}{|u(k_n)|^{q(k_n)}} \geq V_0 > 0$$

sonucunu çıkarırız. Sonuç olarak u sonsuz sayıdaki noktalarda, pozitif yerel maksimumlara ve negatif yerel minimumlara ulaşmaz.

Şimdi u nun sonsuz sayıdaki l_n noktalarında sıfırlandığını (yok olduğunu) varsayalım. $(\mathrm{F2})$ şartından $\Delta^2_{p(l_n-1)} u(l_n - 1) = 0$ buluruz ve sonuç olarak $u(l_n - 1)u(l_n + 1) < 0$ dır. Bu nedenle önceki iddia ile çelişen pozitif yerel maksimumların ve negatif yerel minimumların bir sınırsız dizisi vardır.

Yeterince büyük $|k|$ için u fonksiyonunun sabit işareti olduğunu ve kesin monoton olduğunu kanıtladık. Teorem 9.2 nin ispatı tamamlandı. □

Homojen olan

$$\begin{cases} \Delta^2_{p(k-1)} u(k-1) - V(k)|u(k)|^{q(k)-2}u(k) = 0 & k \in \mathbb{Z} \text{ için,} \\ u(k) \to 0 & k \to \infty \text{ iken} \end{cases} \qquad (9.13)$$

probleminin sadece trivial olmayan çözüme sahip olduğunu gözlemliyoruz. Gerçekten de u pozitif ya da negatif ise k_0 onun pozitif maksimumu ya da negatif minimumu olsun. O zaman $\Delta^2_{p(k_0-1)} u(k_0 - 1) u(k_0) \leq 0$ ve bir çelişki anlamına gelen

$$0 = \Delta^2_{p(k_0-1)} u(k_0 - 1) u(k_0) - V(k_0)|u(k_0)|^{q(k_0)} < 0$$

olur. u işaret değiştirse de aynı sonuca varılabilir.

Teorem 9.2 nin varsayımları uyarınca, $\forall \lambda > 0$ için

$$\begin{cases} \Delta^2_{p(k-1)} u(k-1) - V(k)|u(k)|^{q(k)-2}u(k) + \lambda f\big(k, u(k)\big) = 0 & k \in \mathbb{Z} \text{ için,} \\ u(k) \to 0 & k \to \infty \text{ iken} \end{cases} \qquad (9.14)$$

özdeğer problemi için bir trivial olmayan çözümün varlığını aynı yaklaşımla belirleyebiliriz.

$(\mathrm{F1})$ ve $(\mathrm{F2})$ şartlarına ek olarak aşağıdaki şartın sağlanması durumunda problem (9.2) nin homoklinik çözümünün pozitif olduğunu ispatlayabiliriz:

$(\mathrm{F3})$ Herhangi bir $t < 0$ ve her $k \in \mathbb{Z}$ için $f(k, t) \geq 0$ dır.

Değişken üslü lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin kapsamlı bir yaklaşımı Rădulescu and Repovš [40] un monografisinde bulunabilir.

BÖLÜM 10

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında değişken üslü lineer olmayan eliptik denklemlerden oluşan problemler farklı başlıklar altında ele alınmıştır. Bu problemler genellikle $p(x)$-Laplace operatörü içeren problemlerdir. Bu problemlerin hangi koşullarda çözümlerinin var olduğu, bu çözümlerin nitel özellikleri, problemlerin hangi şartlarda özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının var olduğu ayrıntılı incelenmiştir. Bu incelemeler değişken üslü Sobolev ve değişken üslü Lebesgue uzayları üzerinde yapıldığı için bu uzaylar hakkında da ayrıntılı bilgiler verilmiştir. Problemlerin çözümleri araştırılırken Mountain Pass teoremi ve buna bağlı olarak Palais-Smale kompaktlık şartı uygulanmıştır. Değişken üslü uzayların araştırma alanı çok geniş olduğu için değişken üslere sahip farklı tipteki denklemler ve bu denklemleri içeren problemlerin çözümleri, özdeğerleri ve öz fonksiyonları araştırma konusu olarak kullanılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Acerbi, E. ve Mingione, G., (2001). "Regularity results for a class of functionals with nonstandard growth", Arch. Ration. Mech. Anal., 156:121–140.

[2] Ambrosetti, A. ve Rabinowitz, P., (1973). "Dual variational methods in critical point theory and applications", J. Funct. Anal., 14:349–381.

[3] Autuori, G., Colasuonno, F. ve Pucci, P., (2014). "On the existence of stationary solutions for higher order p-Kirchhoff problems via variational methods", Commun. Contemp. Math., 16 (1450002), 43.

[4] Autuori, G., Pucci, P. ve Salvatori, M.C., (2009). "Asymptotic stability for anisotropic Kirchhoff systems", J. Math. Anal. Appl., 352:149–165.

[5] Autuori, G., Pucci, P. ve Salvatori, M.C., (2010). "Global nonexistence for nonlinear Kirchhoff systems", Arch. Ration. Mech. Anal., 196:489–516.

[6] Bartsch, T. ve Li, S., (1997). "Critical point theory for asymptotically quadratic functionals and applications to problems with resonance", Nonlinear Anal., 28:419– 441.

[7] Brezis, H., (1992). Analyse Fonctionnelle: Théorie et Applications, Masson, Paris.

[8] Chang, K.C., (1993). Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solution Problems, Birkhäuser, Boston.

[9] Chen, Y., Levine, S. ve Rao, M., (2006). "Variable exponent, linear growth functionals in image restoration", SIAM J. Appl. Math., 66:1383–1406.

[10] Diening, L., Harjulehto, P., Hästö, P. ve Ruzicka, M., (2011). Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents, in: Lecture Notes in Mathematics, vol. 2017, Springer, Heidelberg.

[11] Edmunds, D.E., Lang, J. ve Nekvinda, A., (1999). "On $L^{p(x)}$ norms", Proc. R. Soc. Lond. Ser., A 455:219–225.

[12] Edmunds, D.E. ve Rákosník, J., (1992). "Density of smooth functions in $W^{k,p(x)}(\Omega)$", Proc. R. Soc. Lond. Ser., A 437:229–236.

[13] Fan, X.L. ve Han, X.Y., (2004). "Existence and multiplicity of solutions for $p(x)$-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$", Nonlinear Anal., 59:173–188.

[14] Fan, X.L. ve Zhang, Q.H., (2003). "Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem", Nonlinear Anal., 52:1843–1852.

[15] Fan, X., Zhang, Q. ve Zhao, D., (2005). "Eigenvalues of $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem", J. Math. Anal. Appl., 302:306–317.

[16] Filippucci, R., Pucci, P. ve Rădulescu, V., (2008). "Existence and non-existence results for quasilinear elliptic exterior problems with nonlinear boundary conditions", Comm. Partial Differential Equations, 33:706–717.

[17] Foss, M., Hrusa, W.J. ve Mizel, V.J., (2003). "The Lavrentiev gap phenomenon in nonlinear elasticity", Arch. Ration. Mech. Anal., 167:337–365.

[18] Fu, Y. ve Zhang, X., (2010). "Multiple solutions for a class of $p(x)$-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ involving the critical exponent", Proc. R. Soc. Lond. Ser. Phys. Eng. Sci., 466:1667–1686.

[19] Halsey, T.C., (1992). "Electrorheological fluids", Science, 258:761–766.

[20] Harjulehto, P., Hästö, P., Latvala, V. ve Toivanen, O., (2013). "Critical variable exponent functionals in image restoration", Appl. Math. Lett., 26:56–60.

[21] Harjulehto, P., Hästö, P., Lê, U.V. ve Nuortio, M., (2010). "Overview of differential equations with non-standard growth", Nonlinear Anal., 72:4551–4574.

[22] Variable Exponent Spaces And Image Processing, http://www.helsinki.fi/~pharjule/varsob/index.shtml, 3 Haziran 2016.

[23] Kováčik, O. ve Rákosník, J., (1991). "On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}(\Omega)$", Czechoslovak Math. J., 41:592–618.

[24] Lavrentiev, M., (1926). "Sur quelques problèmes du calcul des variations", Ann. Mat. Pura Appl., 4:7–28.

[25] Lindqvist, P., (1990). "On the equation $\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda|u|^{p-2}u = 0$", Proc. Amer. Math. Soc., 109:157–164.

[26] Lovász, L., (1999). "Discrete and continuous: two sides of the same?", GAFA 2000, Geom. Funct. Anal., vol. Part I, 2000, Special Volume, Tel Aviv, 359–382.

[27] Manià, B., (1934). "Sopra un esempio di Lavrentieff", Boll. Unione Mat. Ital., 13:147–153.

[28] Mihăilescu, M. ve Rădulescu, V., (2006). "A multiplicity result for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of electrorheological fluids", Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 462:2625–2641.

[29] Mihăilescu, M. ve Rădulescu, V., (2007). "On a nonhomogeneous quasilinear eigenvalue problem in Sobolev spaces with variable exponent", Proc. Amer. Math. Soc., 135:2929–2937.

[30] Mihăilescu, M. ve Rădulescu, V., (2008). “Continuous spectrum for a class of nonhomogeneous differential operators”, Manuscripta Math., 125:157–167.

[31] Mihăilescu, M. ve Rădulescu, V., (2008). “Spectrum in an unbounded interval for a class of nonhomogeneous differential operators”, Bull. Lond. Math. Soc., 40:972–984.

[32] Mihăilescu, M. ve Rădulescu, V., (2010). “Concentration phenomena in nonlinear eigenvalue problems with variable exponents and sign-changing potential”, J. Anal. Math., 111:267–287.

[33] Mihăilescu, M., Rădulescu, V. ve Tersian, S., (2011). “Homoclinic solutions of difference equations with variable exponents”, Topol. Methods Nonlinear Anal. 38:277–289.

[34] Molica Bisci, G. ve Repovš, D., (2014). “Multiple solutions for elliptic equations involving a general operator in divergence form”, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 39:259–273.

[35] Musielak, J., (1983). Orlicz Spaces and Modular Spaces, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1034, Springer, Berlin.

[36] Musielak, J., (1983). Orlicz Spaces and Modular Spaces, Springer, Berlin.

[37] Nakano, H., (1950). Modulared Semi-ordered Linear Spaces, Maruzen Co., Ltd., Tokyo.

[38] Orlicz, W., (1931). “Über konjugierte Exponentenfolgen”, Studia Math., 3:200–212.

[39] Poincaré, H., (1899). Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, Gauthier-Villars, Paris.

[40] Rădulescu, V. ve Repovš, D., (2015). Partial Differential Equations with Variable Exponents, Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Chapman & Hall, CRC, Boca Raton, FL, (baskıda).

[41] Rădulescu, V. ve Zhang, B., (2014). “Morse theory and local linking for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of electrorheological fluids”, Nonlinear Anal. RWA, 17:311–321.

[42] Ruzicka, M., (2002). Electrorheological Fluids Modeling and Mathematical Theory, Springer-Verlag, Berlin.

[43] Sharapudinov, I., (1978). “On the topology of the space $L^{p(t)}([0;1])$”, Mat. Zametki, 26:613–632.

[44] Stampacchia, G., (1966). Équations Elliptiques du Second Ordre à Coefficients Discontinus, Presses de l’Université de Montréal.

[45] Tsenov, I., (1961). “Generalization of the problem of best approximation of a function in the space L^s”, Uch. Zap. Dagestan Gos. Univ., 7:25–37.

[46] Winslow, W., (1949). “Induced fibration of suspensions”, J. Appl. Phys., 20:1137–1140.

[47] Zhikov, V., (1987). “Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory”, Math. USSR Izv., 29:33–66.

[48] Bermudez, R.F., (2016). Coupled system of nonlinear Schrödinger and Korteweg-de Vries equations, Master's Thesis, University Carlos III de Madrid, Madrid.

[49] Zeren, Y. ve Mamedov, F.I., (2016). “On boundedness of fractional maximal operator in weighted $L^{p(.)}$ spaces”, Mathematical Inequalities and Applications , 19:1–14.

[50] Zeren, Y. ve Mamedov, F.I., (2011). “On a two-weighted estimation of maximal operatör in the Lebesgue space with variable exponent”, Annali di Matematica, 190:263–275.

[51] Zeren, Y. Mamedov, F.I. ve Akın, L., (2011). “Compactification of weighted Hardy operator in variable exponent Lebesgues spaces”, Asian Journal of Mathematics and Computer Research, 17:38–47.

[52] Mamedov F.I., Mammadli S.M. ve Zeren Y., (2017). “On some Hardy-Sobolev’s type variable exponent inequality and its application”, Transactions Issue Mathematics, Azerbaijan National Academy of Sciences, 37:102-110.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Caner KAZAR

Doğum Tarihi ve Yeri : 03.08.1991, Edirne

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : canerkazar22@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Bülent Ecevit Üniversitesi	2015
Lise	Fen Bilimleri	Kadri Yörükoğlu Lisesi	2009

YAYINLARI

Bildiri

1. Kazar, C., Zeren, Y., Şimşir, K. ve Akın, L., (2018). “On a solvability for some variable exponent eigenvalue problem”, International Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA - 2018), 11-13 Mayıs 2018, İstanbul.