SORULAR (seriler)

Soru 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ serisinin yakınsadığını gösterip toplamını bulunuz.

Çözüm: $a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2^2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2^2}} - \cancel{\frac{1}{3^2}}\right) + \cancel{\cdots} + \left(\cancel{\frac{1}{(n-1)^2}} - \cancel{\frac{1}{n^2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n^2}} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1 < \infty$ seri yakınsar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1.$$

Soru 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^4+2}$ serisinin karakterini belirleyin.

$$a_n = \frac{n^2-1}{n^4+2} < \frac{n^2}{n^4+2} < \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $(p=2>1)$ yakınsadığından terimleri $\frac{1}{n^2}$ den daha küçük olan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^4+2}$ serisi de yakınsar. (Doğrudan karşılaştırma testi)

Soru 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 2^n}$ serisinin karakterini belirleyiniz

Oran testi: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+3}{(n+1)^2 2^{n+1}}}{\frac{2n+1}{n^2 2^n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)\, n^2\, \cancel{2^n}}{(2n+1)(n+1)^2\, 2 . \cancel{2^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{2n+3}{2n+1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2}_{\to 1} = \frac{1}{2} < 1$$

Seri yakınsar.

Soru 4) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{3n}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$ serisinin karakterini belirleyin

Kök testi: $\lim_{n\to\infty} \left[e^{3n}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}\right]^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^3 \left(\frac{n}{n+2}\right)^n$

$$= \lim_{n\to\infty} e^3 \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n} = e^3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}_{\to e^2}}$$

$$= e^3 \cdot \frac{1}{e^2} = e > 1 \text{ olduğundan}$$

Seri ıraksar.

Soru 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2\, 4^{n-1}} (x-1)^n$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n+1)\cancel{(x-1)^{n+1}}}{(n+1)^2\, \cancel{4^{n}}} \cdot \frac{n^2\, \cancel{4^{n-1}}}{(2n-1)\cancel{(x-1)^n}} \right|$$

$$= \frac{|x-1|}{4} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{2n+1}{2n-1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{n^2}{(n+1)^2}}_{\to 1} = \frac{|x-1|}{4} < 1$$

$\Rightarrow \quad |x-1| < 4$

$-3 < x < 5$ aralığında seri mutlak yakınsar.

$x=5$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2\, \cancel{4^{n-1}}} \cdot \cancel{4^{n}} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2}$$

$$\frac{2n-1}{n^2} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$$ (doğrudan karşılaştırma yapamayız).

$b_n = \frac{1}{n}$ seçelim.

L.k.t. : $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4(2n-1)}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4(2n-1)}{n} = 8 \neq 0, \infty$

olduğundan iki seri aynı karakterdedir. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksadığından $4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2}$ serisi de ıraksar.

$x=-3$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2 4^{n-1}} \cdot (-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{n^2 \cancel{4^{n-1}}} \cancel{4^n}$

$= 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{n^2}$ serisi mutlak yakınsak değildir.

Alterne seri testine göre ;

1) $|a_n| \geq |a_{n+1}|$ olmalı. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2n+1}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{2n-1}$

$= \frac{2n^3+n^2}{2n^3+3n^2-1} < 1$

olduğundan $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ dir.

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n^2} = 0$

olduğundan seri yakınsar. Mutlak yakınsak olmadığından seri şartlı yakınsar.

Yakınsaklık aralığı $-3 \leq x < 5$ olur.