T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÜSTEL DİOFANT DENKLEMLER VE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Ruhsar Gizem BİRATLI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Doç. Dr. Murat ALAN

Ağustos, 2021

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÜSTEL DİOFANT DENKLEMLER VE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Ruhsar Gizem BİRATLI tarafından hazırlanan tez çalışması 23.08.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Murat ALAN
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Murat ALAN, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi ____________________

Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi ____________________

Prof. Dr. Ünsal TEKİR , Üye
Marmara Üniversitesi ____________________

Danışmanım Doç. Dr. Murat ALAN sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Bazı Üstel Diofant Denklemler ve Çözüm Yöntemleri başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Ruhsar Gizem BİRATLI

İmza

Aileme ithafen

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, iki yıl boyunca değerli bilgilerini paylaşan saygıdeğer danışman hocam; Doç. Dr. Murat ALAN'a, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen tüm zorlukları benimle göğüsleyen ve hayatımın her evresinde bana destek olan annem Nurgül BİRATLI'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ruhsar Gizem BİRATLI

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

$\gcd(a,b)$	a ve b sayılarının en büyük ortak böleni
$S(l_0)$	Belirli koşullar altında tüm çözümlerin sınıfı
h(-4D)	Diskriminant $-4D$'nin pozitif ikinci dereceden formlarının sınıf numarası
$\Phi(n)$	Euler Fonksiyonu
D	Herhangi bir pozitif tam sayı
$\left(\frac{*}{*}\right)$	Jacobi Sembolü
F_n	n. Fibonacci sayısı
Λ	Lineer form
$h(\alpha)$	Logaritmik uzunluk
L_n	Lucas dizisi
l	(X,Y,Z) çözümünün karakteristik sayısı

ÖZET

Bazı Üstel Diofant Denklemler ve Çözüm Yöntemleri

Ruhsar Gizem BİRATLI

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Murat ALAN

Kabul edelim ki m pozitif bir tam sayı olsun. Bu tezde, öncelikle $(4m^2+1)^x + (5m^2-1)^y = (3m)^z$ üstel Diofant denklemi ve ispatı incelenmektedir. Sonrasında ise $(6m^2+1)^x + (3m^2-1)^y = (3m)^z$ üstel Diofant denklemi ele alınmaktadır ve bir tek pozitif tam sayı çözümünün $m > 1$ için $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ olduğu gösterilmektedir. İspatı ise genel olarak sınıflandırma methodu ve oldukça bilinen ilkel bölen teoremine dayanmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Üstel Diofant Denklemler, İlkel Bölen Teoremi, Sınıflandırma Metodu, Terai Sanısı

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

Some Exponential Diophantine Equations and Solution Methods

Ruhsar Gizem BİRATLI

Department of Mathematics
Master of Science Thesis

Advisor: Doc. Dr. Murat ALAN

Let m be positive integer. In this thesis, first of all we examined the exponential Diophantine equation $(4m^2+1)^x+(5m^2-1)^y = (3m)^z$. Then we consider the exponential Diophantine equation $(6m^2+1)^x+(3m^2-1)^y=(3m)^z$ and we show that it has only unique positive integer solution $(x,y,z)=(1,1,2)$ for all $m>1$. The proof depends on so called classification method and famous primitive divisor theorem.

Keywords: Exponential Diophantine equations, Primitive divisor theorem, Classification method, Terai's Conjecture

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Tanım 1.1. Kabul edelim ki u, v, w aralarında asal, 1'den büyük tam sayılar olsun. O halde

$$u^x + v^y = w^z \tag{1.1}$$

denklemine üstel Diofant denklem denir.

Denklem (1.1)'in (x, y, z) için çözümlerinin sonlu olduğu bilinmektedir ve tüm çözümler Baker'ın lineer form yöntemiyle etkin bir şekilde belirlenebilmektedir.

Jeśmanowicz [1], eğer a, b, c Pisagor sayısı ise, yani $a^2 + b^2 = c^2$ denklemini sağlayan pozitif tam sayılarsa, (1.1)'in tek pozitif çözümünün $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ olduğunu ifade etmiştir ([2], [3], [4]). Jeśmanowicz'in varsayımının bir benzeri olarak, eğer a, b, c, p, q, r pozitif tam sayıları $a^p + b^q = c^r$ denklemini sağlıyor ve $a, b, c, p, q, r \geq 2$ ile $\gcd(a, b) = 1$ şartlarını da taşıyorsa bu durumda (1.1) denkleminin birkaç istisna dışında tek pozitif tam sayı çözümü $(x, y, z) = (p, q, r)$ olduğu varsayılmıştır. Bu varsayım birçok özel durum için kanıtlanmıştır.

Terai Sanısı'nda ise $p, q, r \in \mathbb{N},\ r \geq 2$ koşulları altında

$$u^p + v^q = w^r \tag{1.2}$$

denkleminin bilinen birkaç (u, v, w) üçlüleri dışında tek pozitif tam sayı çözümü $(x, y, z) = (p, q, r)$'dir. Bu noktada

$$(am^2 + 1)^x + (bm^2 - 1)^y = (cm)^z \tag{1.3}$$

denkleminin (1.2)'nin bir özel hali olduğunu görebiliriz. Burada a, b, c, m pozitif tam sayıları $a + b = c^2$ eşitliğini sağlar. Denklem (1.3) üzerine çalışmalar yapılmış ve hepsi

Terai Sanısı'nı doğrulamıştır:

- (Terai [5], 2012) $(4^2+1)^x+(5m^2-1)^y=(3m)^z$,
- (Miyazaki-Terai [6], 2014) $(m^2+1)^x+(qm^2-1)^y=(rm)^z$, $1+q=r^2$,
- (Terai [7], 2015) $(12m^2+1)^x+(13m^2-1)^y=(5m)^z$,
- (Fu-Yang [8], 2017) $(pm^2+1)^x+(qm^2-1)^y=(rm)^z$, $r|m$,
- (Pan [9], 2017)$(pm^2+1)^x+(qm^2-1)^y=(rm)^z$, $m=\pm 1 \pmod r$,
- (Alan [10], 2018) $(18m^2+1)^x+(7m^2-1)^y=(5m)^z$,
- (Kızıldere [11], 2018) $((q+1)m^2+1)^x+(qm^2-1)^y=(rm)^z$, $2q+r=r^2$,
- (Terai [12], 2020) $(4^2+1)^x+(21m^2-1)^y=(5m)^z$

1.2 Tezin Amacı

Bu tezde, ilk olarak Terai [5] tarafından gösterilen

$$(4m^2+1)^x+(5m^2-1)^y=(3m)^z \tag{1.4}$$

üstel Diofant denklemi incelenecektir. Ardından, m pozitif tam sayı olmak üzere,

$$(6m^2+1)^x+(3m^2-1)^y=(3m)^z \tag{1.5}$$

üstel Diofant denklemi ele alınıp tek pozitif tam sayı çözümünün $(x,y,z)=(1,1,2)$ olduğu gösterilecektir.

1.3 Hipotez

Terai Sanısı'ndan yola çıkarak, 1.5'te bahsedildiği üzere, bu sanı $a=6$, $b=3$ ve $c=3$ için gösterilecektir. Bu noktada aşağıda verilen teorem ispatlanmaya çalışılacaktır.

Teorem 1.1. *Kabul edelim ki m bir pozitif tam sayı olsun. O halde*

$$(6m^2+1)^x+(3m^2-1)^y=(3m)^z \tag{1.6}$$

denkleminin tek pozitif tam sayı çözümü $(x,y,z)=(1,1,2)$*'dir.*

1.4 Temel Bilgiler

Bu kısımda daha sonra sıkça kullanılacak olan temel bilgilere değinilmiştir.

Tanım 1.2. Kabul edelim ki n pozitif bir tam sayı olsun. $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi üzerinde

$$\text{"}x \equiv y \pmod{n} \text{ olması için gerek ve yeter şart } x - y \in n\mathbb{Z} \text{ olmasıdır."} \tag{1.7}$$

şeklinde tanımlanan bağıntıya "$\equiv \pmod{n}$" bağıntısı adı verilir.

Teorem 1.2. "$\equiv \pmod{n}$" *bağıntısı $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır.*

İspat. (i). $x \in \mathbb{Z}$ için $x - x = n.0$ olacak şekilde $0 \in \mathbb{Z}$ var olup $x \equiv x \pmod{n}$ dir.
(ii). Kabul edelim ki $x, y \in \mathbb{Z}$ için $x \equiv y \pmod{n}$ olsun. O halde $x - y = nk$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}$ mevcuttur ve $y - x = n(-k)$ ve $-k \in \mathbb{Z}$ olduğundan $y \equiv x \pmod{n}$ olur.
(iii). Kabul edelim ki $x, y, z \in \mathbb{Z}$ için $x \equiv y \pmod{n}$ ve $y \equiv z \pmod{n}$ olsun. Bu durumda $x - y = nk_1$ ve $x - y = nk_2$ olacak şekilde k_1, k_2 vardır. Böylece $x - z = n(k_1 + k_2)$ ve $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ olur. Yani $x \equiv z \pmod{n}$ sağlanır. ■

Tanım 1.3. "$\equiv \pmod{n}$" bağıntısına göre denklik sınıflarına kongrüans sınıfları denir ve bu sınıfların kümesi $\mathbb{Z}_n$ ile gösterilir.

Teorem 1.3. *Eğer $a \equiv b \pmod{n}$ ve $x \in \mathbb{Z}$ ise*

$$(i)\ a + x \equiv b + x \pmod{n} \tag{1.8}$$

$$(ii)\ ax \equiv bx \pmod{n} \tag{1.9}$$

sağlanır.

İspat. Eğer $a \equiv b \pmod{n}$ ve $x \in \mathbb{Z}$ ise $a - b = nk$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}$ vardır.
(i). $x \in \mathbb{Z}$ için $(a + x) - (b + x) = nk$ olduğundan $a + x \equiv b + x \pmod{n}$ olur.
(ii). $a \equiv b \pmod{n}$ olduğundan $x \in \mathbb{Z}$ için $(a - b)x = (nk)x$ olup $ax - bx = n(kx)$ olacak şekilde $kx * in\mathbb{Z}$ vardır. Böylece $ax \equiv bx \pmod{n}$ olduğu görülür. ■

Teorem 1.4. *Kabul edelim ki $a \equiv b \pmod{n}$ ve $c \equiv d \pmod{n}$ olsun. O halde*

$$(i)\ a + c \equiv b + d \pmod{n} \tag{1.10}$$

$$(ii)\ ac \equiv bd \pmod{n} \tag{1.11}$$

sağlanır.

İspat. (i). $a \equiv b \pmod{n}$ ise Teorem 1.3 gereğince $c \in \mathbb{Z}$ için $a + c \equiv b + c \pmod{n}$ elde edilir. Bağıntının geçişme özelliğinden $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ bulunur.
(ii). Benzer şekilde, $a \equiv b \pmod{n}$ ise Teorem 1.3 gereğince $c \in \mathbb{Z}$ için $ac \equiv bc \pmod{n}$ elde edilir ve geçişme özelliğinden $ac \equiv bd \pmod{n}$ bulunur. ■

Tanım 1.4. $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı "*" olsun. Eğer $a * b$ ve $c * d$ şartlarını sağlayan her $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ için $(a + c) * (b + d)$ ve $(ac) * (bd)$ oluyorsa o zaman "*" bağıntısına tam sayılar kümesi üzerinde bir kongrüans bağıntısı adı verilir.

Teorem 1.5. "$\equiv \pmod{n}$" *bağıntısı $\mathbb{Z}$ kümesi üzerinde bir kongrüans bağıntısıdır.*

İspat. Eğer $a \equiv b \pmod{n}$ ve $c \equiv d \pmod{n}$ ise o zaman Teorem 1.4 gereğince $a+c \equiv b + d \pmod{n}$ ve $ac \equiv bd \pmod{n}$ olup "$\equiv \pmod{n}$" bağıntısı, $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi üzerinde bir kongrüans bağıntısıdır. ■

Teorem 1.6. *Aralarında asal her p asal sayısı ve a tam sayısı için*

$$a^p \equiv a \pmod{p} \tag{1.12}$$

sağlanır. Bu teorem, Fermat'ın küçük teoremi olarak bilinir.

Teorem 1.7. *Kabul edelim ki n>2 olacak şekilde bir tam sayı ve x, y, z pozitif tam sayılar olsun. O halde*

$$x^n + y^n = z^n \tag{1.13}$$

ifadesi sağlanamaz. Bu teorem, Andrew Wiles tarafından ispatlanan Fermat'ın son teoremi olarak bilinen sanıdır [13].

Tanım 1.5. Kabul edelim ki n pozitif tam sayı olsun. Bu n sayısından küçük ve n ile aralarında asal olan tam sayıların sayısına Euler fonksiyonu denir ve $\Phi(n)$ ile gösterilir. Bu fonksiyon aşağıda verilen özellikleri sağlar.

- $(m, a) = 1$ ise $a^{\Phi(m)} = 1 \pmod{m}$
- p bir asal sayı ise, $\Phi(p) = p - 1$ olur.
- p bir asal sayı ve a pozitif bir tam sayı ise, $\Phi(p^a) = p^a - p^{a-1}$ olur.
- m ve n aralarında asal ise, $\Phi(mn) = \Phi(m)\Phi(n)$ sağlanır.
- n pozitif tam sayısı $n = p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, p_3^{a_3}, \ldots$ şeklinde asal çarpanlarına ayrılıyorsa $\Phi(n) = n(\frac{p_1-1}{p_1})(\frac{p_2-1}{p_2})(\frac{p_3-1}{p_3})\ldots$ yazılabilir.

Teorem 1.8. *Eğer n ve a aralarında asal pozitif tam sayılarsa, $\Phi(n)$ Euler fonksiyonu olmak üzere*

$$a^{\Phi(n)} \equiv 1 \pmod{n} \tag{1.14}$$

eşitliği sağlanır. Birçok kaynakta Euler teoremi ya da Euler-Fermat teoremi olarak geçer.

Tanım 1.6. a pozitif bir tam sayı ve n pozitif tek tam sayı olmak üzere

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a}{p_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{a}{p_k}\right)^{\alpha_k} \tag{1.15}$$

şeklinde Jacobi sembolü ifade edilir ve aşağıda belirtilen özellikleri sağlar.

- Eğer $a \equiv b \pmod{n}$ ise $\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{a \pm mn}{n}\right)$ olur.
-
$$\left(\frac{a}{n}\right) = \begin{cases} 0, & \gcd(a,n) \neq 1 \\ \pm 1, & \gcd(a,n) = 1 \end{cases}$$
- $\left(\frac{ab}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right)\left(\frac{b}{n}\right)$ olur, yani $\left(\frac{a^2}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right)^2 = 1$ ya da 0 dır.
- $\left(\frac{a}{mn}\right) = \left(\frac{a}{m}\right)\left(\frac{b}{n}\right)$ olur, yani $\left(\frac{a}{n^2}\right) = \left(\frac{a}{n}\right)^2 = 1$ ya da 0 dır.
- Eğer m ve n aralarında asal tek pozitif tam sayılarsa

  $$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}\frac{n-1}{2}} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } n \equiv 1 \pmod{n} \text{ ya da } m \equiv 1 \pmod{n} \\ -1, & \text{eğer } n \equiv m \equiv 1 \pmod{n} \end{cases}$$

  sağlanır.
-
$$\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } n \equiv 1 \pmod{4} \\ -1, & \text{eğer } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

  sağlanır ve $\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n}{1}\right) = 1$ olur.
-
$$\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } n \equiv 1,7 \pmod{8} \\ -1, & \text{eğer } n \equiv 3,5 \pmod{8} \end{cases}$$

1.5 Ön Bilgiler

Herhangi bir pozitif tam sayı D için $h(4D)$, diskriminant $-4D$'nin pozitif ikinci dereceden formlarının sınıf numarasını göstersin.

Lemma 1.1. *([14], Teorem 11.4.3, 12.10.1 ve 12.14.3)*

$$h(-4D) < \frac{4}{\pi}\sqrt{D}\log(2e\sqrt{D})$$

D, D_1, D_2, k pozitif tam sayılar olsun öyle ki $\{D, D_1, D_2\} > 1$, $\gcd(D_1, D_2) = 1, 2 \nmid k$ ve $\gcd(D, k) = \gcd(D_1, D_2, k) = 1$ sağlansın.

Lemma 1.2. *([15], Teorem 1 ve 2) $D > 1$, $2 \nmid k$ ve $\gcd(D, k) = 1$ şartlarını sağlayan D ve k pozitif tam sayılar olsun. Eğer*

$$X^2 + DY^2 = k^Z, \qquad X, Y, Z \in \mathbb{Z}, \qquad \gcd(X, Y) = 1, \qquad Z > 0 \tag{1.16}$$

(X, Y, Z) çözümüne sahipse, o halde bu denklemin tüm çözümleri aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$Z = Z_1 t, \quad t \in \mathbb{N},$$

$$X + Y\sqrt{-D} = \lambda_1(X_1 + \lambda_2 Y_1\sqrt{-D})^t, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \{\pm 1\},$$

burada X_1, Y_1, Z_1 pozitif tam sayıları, $X_1^2 + DY_1^2 = k^{Z_1}$, $\gcd(X_1, Y_1) = 1$ ve $h(-4D) \equiv 0 \pmod{Z_1}$ eşitliklerini sağlar.

Lemma 1.3. *([15], Lemma 1) Kabul edelim ki D_1 ve D_2, 1'den büyük aralarında asal tam sayılar olsun. Aşağıda verilen denklemin sabit (X, Y, Z) çözümü için*

$$D_1X^2 + D_2Y^2 = k^z, \ \gcd(X, Y) = 1, \ Z > 0, \ X, Y, Z \in \mathbb{Z}, \tag{1.17}$$

bir tek pozitif tam sayı, l mevcuttur öyle ki

$$l = D_1\alpha X + D_2\beta Y, \ 0 < t < k \tag{1.18}$$

için $\beta X - \alpha Y = 1$ eşitliğini sağlayan α, β tam sayıları vardır.

Lemma 1.3'te bahsedilen pozitif tam sayı l, (X, Y, Z) çözümünün karakteristik sayısı olarak bilinir ve $< X, Y, Z >$ şeklinde gösterilir. Kabul edelim ki l_0 sabit bir tam sayı olsun. Eğer Lemma 1.3'ün $< X_0, Y_0, Z_0 >= l_0$ eşitliğini sağlayan çözümü (X_0, Y_0, Z_0) ise, o halde $< X, Y, Z >\equiv \pm l_0 \pmod{k}$ eşitliğini sağlayan tüm çözümlerin kümesi (X, Y, Z) Lemma 1.3'ün çözüm sınıfıdır ve $S(l_0)$ ile gösterilir.

Lemma 1.4. *([15], Lemma 6) Lemma 1.3'te bulunan gösterimle, eğer $< X, Y, Z >= l$ ise $D_1X \equiv -lY \pmod{k}$ sağlanır.*

Lemma 1.5. *([15], Teorem 1 ve 2) (1.17) denkleminin herhangi bir $S(l_0)$ çözüm sınıfı için $(X_1, Y_1, Z_1) \in S(l_0)$ olacak şekilde bir tek çözüm mevcuttur öyle ki $X_1 > 0$, $Y_1 > 0$ ve $Z_1 \geq Z$ olacak şekilde $(X, Y, Z) \in S(l_0)$ tüm çözümlerini kapsayacak Z vardır. Burada (X_1, Y_1, Z_1) üçlüsü $S(l_0)$ için en küçük çözüm olarak adlandırılır. $(X, Y, Z) \in S(l_0)$ olacak şekildeki her çözüm aşağıdaki şekilde açıklanabilir.*

$$Z = Z_1 t,\ 2t,\ t \in \mathbb{N}, \tag{1.19}$$

$$X\sqrt{D_1} + Y\sqrt{-D_2} = \lambda_1 \left(X_1\sqrt{D_1} + \lambda_2 Y_1 \sqrt{-D_2} \right)^t,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \{1, -1\}. \tag{1.20}$$

Lemma 1.6. *([16], Teorem 2) Kabul edelim ki (X_1, Y_1, Z_1), $S(l_0)$ için en küçük çözüm olsun. Eğer (1.17) denkleminin çözümü $(X, Y, Z) \in S(l_0)$, $X > 0$ ve $Y = 1$ şartlarını sağlıyorsa, $Y_1 = 1$ olduğu söylenebilir. Böylece, eğer $(X, Z) \neq (X_1, Z_1)$ ise aşağıda verilen koşullardan biri sağlanacaktır:*

(i) $D_1X_1^2 = \frac{1}{4}(k^{Z_1} \pm 1), D_1 = \frac{1}{4}(3k^{Z_1} \pm 1), (X, Z) = (X_1|D_1X_1^2 - 3D_2|, 3Z_1).$

(ii) $D_1X_1^2 = \frac{1}{4}F_{3r+3\epsilon}, D_2 = \frac{1}{4}L_{3r}, k^{Z_1} = F_{3r+\epsilon},$
$(X, Z) = (X_1|D_1^2X_1^4 - 10D_1D_2X_1^2 + 5D_2^2|, 5Z_1)$, *$r$ pozitif tam sayı, $\epsilon \in \{1, -1\}$ ve F_n n. Fibonacci sayısıdır.*

Kabul edelim ki α ve β cebirsel sayılar olsun. (α, β) bir Lucas ikilisidir öyle ki $\alpha + \beta$ ve $\alpha\beta$ sıfırdan farklı aralarında asal tam sayılardır ve $\dfrac{\alpha}{\beta}$ bir kök değildir. Eğer (α, β) herhangi bir Lucas ikilisi ise, karşılık gelen Lucas sayısı dizileri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$L_n(\alpha, \beta) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},\ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Bir asal sayı p, eğer $p \mid L_n(\alpha, \beta)$ ve $p \nmid (\alpha - \beta)^2 L_1(\alpha, \beta) \ldots L_{n-1}(\alpha, \beta)$ $(n > 1)$ şartlarını sağlıyorsa $L_n(\alpha, \beta)$ için ilkel bölen olarak isimlendirilir. Bu noktada [**Bilu**, **Voutier**] referanslarını göz önüne alırsak, kesin olarak hangi Lucas dizilerinin ilkel bölene sahip olduğunu biliyoruz. Ayrıca, eğer $n \geq 5$ ve $n \neq 6$ ise her n. terimli herhangi bir Lucas dizisi $L_n(\alpha, \beta)$, sonlu bir parametre dizisi (n, α, β) dışında ilkel bölene sahiptir.

2
TERAİ SANISI

Bu bölümde, m bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$(4m^2+1)^2+(5m^2-1)^2=(3m)^2$$

denkleminin tek pozitif çözümünün $(x,y,z) = (1,1,2)$ olduğu [5]'e dayanarak gösterilecektir.

2.1 Terai Sanısı'na Giriş

Teorem 2.1. *Kabul edelim ki, $m \not\equiv 3 \pmod 6$ sağlayan m bir pozitif tam sayı olsun. O halde,*

$$(4m^2+1)^2+(5m^2-1)^2=(3m)^2 \tag{2.1}$$

denkleminin tek pozitif tam sayı çözümü $(x,y,z)=(1,1,2)$'dir.

Tanım 2.1. Kabul edelim ki α_1 ve α_2 cebirsel reel sayılar olsun ve b_1, b_2 pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$\Lambda = b_2 \log \alpha_2 - b_1 \log \alpha_1 \tag{2.2}$$

şeklinde lineer form tanımlanır.

Tanım 2.2. Bir α cebirsel sayısının n. dereceden olduğu varsayılsın. Burada α'nın $\mathbb{Z}$ üzerindeki minimal polinomunun baş katsayısı α_0 ve $(\alpha^{(j)})_{1\leq j\leq n}$ ise α'nın eşleniği olsun. O halde logaritmik uzunluk

$$h(\alpha)=\frac{1}{n}\left(\log|\alpha_0|+\sum_{j=1}^{n}\log\max\{1,|\alpha^{(j)}|\}\right) \tag{2.3}$$

biçiminde ifade edilir.

Böylece, A_1 ve A_2 1'den büyük reel sayıları için

$$\log A_i \geq \max\left\{h(\alpha_i), \frac{|\log \alpha_i|}{D}, \frac{1}{D}\right\} \tag{2.4}$$

yazılabilir öyle ki $i \in \{1,2\}$ ve $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$ için derece D olmalıdır.

Bu noktada

$$b^{'} = \frac{b_1}{D\log A_2} + \frac{b_2}{D\log A_1} \tag{2.5}$$

yazılabilir.

Lemma 2.1. *[17] Kabul edelim ki $\alpha_1 > 1$ ve $\alpha_2 > 1$ olmak üzere Λ, (2.2)'deki gibi tanımlansın ve α_1, α_2 çarpımsal olarak bağımsız olsun. O halde*

$$\log|\Lambda| \geq -25.2\, D^4 \left(\max\left\{\log b^{'} + 0.38, \frac{10}{D}\right\}\right)^2 \log A_1 \log\log A_2 \tag{2.6}$$

olur.

2.2 Terai Sanısı İspatı

Lemma 2.2. *(2.1) denkleminde $m = 1$ için*

$$5^x + 4^y = 3^z \tag{2.7}$$

elde edilir. Bu denklem için tek pozitif tam sayı çözümü $(x, y, z) = (1, 1, 2)$'dir.

İspat. İspatı için [18] kaynağındaki $b = 4$ ve $c = 5$ durumunda Teorem (1.3)'e bakılabilir. ■

Lemma 2.3. *(2.1) denkleminde $m = 2$ için*

$$17^x + 19^y = 6^z \tag{2.8}$$

elde edilir. Bu denklem için tek pozitif tam sayı çözümü $(x, y, z) = (1, 1, 2)$'dir.

İspat. Eğer $z \leq 2$ ise, o halde $17^x + 19^y = 6^z$ denkleminin tek çözümü $(x, y, z) = (1, 1, 2)$'dir. Eğer $z \geq 3$ ise, $17^x + 19^y = 6^z$ denklemi (mod 8)'de düşünülürse,

$$1 + 3^y \equiv 0 \pmod 8$$

olur ve çözüm olmadığı görülür. ■

(2.1) denkleminin bir çözümü (x, y, z) olsun. Lemma (2.1)'den, kabul edebiliriz ki $m \geq 3$ olsun. Kolayca görülebilir ki eğer m çift ise, (2.1) denkleminin tek pozitif tam sayı çözümü $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ olur.

Lemma 2.4. *Eğer m çift ise (2.1) denkleminin tek pozitif tam sayı çözümü* $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ *olur.*

İspat. Eğer $z \leq 2$ ise (2.1) denklemi için $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ olur. Diğer yandan $z \geq 3$ ise, (2.1) denklemini $\pmod{m}$'de alırsak

$$1 + (-1)^2 \equiv 0 \pmod{m} \tag{2.9}$$

elde edilir ve y'nin tek olduğu görülür.

Şimdi kabul edelim ki $k \leq 1$ için m, 2^k ile tam bölünsün. Bu durumda

$$m^2 \equiv 2^{2k} \pmod{2^{2k+1}} \tag{2.10}$$

olur ve $a = 4m^2 + 1,\ b = 5m2 - 1$ yazılabilir. Ancak

$$a \equiv 1 \pmod{2^{2k+1}},\ b \equiv 2^{2k} - 1 \pmod{2^{2k+1}}, b^2 \equiv 1 \pmod{2^{2k+1}} \tag{2.11}$$

bulunur. Burada y'nin tek olduğu ve $z \geq 3$ olduğu bilindiğine göre, (2.1) denklemi $\pmod{m}$'de alınırsa

$$1 + 2^{2k} - 1 \equiv 0 \pmod{2^{2k+1}} \tag{2.12}$$

elde edilir fakat bu imkansızdır. Bu yüzden m çift olduğunda, (2.1) için tek pozitif tam sayı çözümü $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ olur. ■

Lemma 2.5. *Eğer m tek ve* $m \not\equiv 0 \pmod{3}$ *ise* $y = 1$ *ve* x *tek olur.*

İspat. Biliyoruz ki m tek ve $m \not\equiv 0 \pmod{3}$, o halde

$$\left(\frac{5m^2 - 1}{4m^2 + 1}\right) = 1,\ \left(\frac{3m}{4m^2 + 1}\right) = -1 \tag{2.13}$$

olduğu görülebilir. Gerçekten,

$$\left(\frac{5m^2 - 1}{4m^2 + 1}\right) = \left(\frac{m^2 - 2}{4m^2 + 1}\right) = \left(\frac{4m^2 + 1}{m^2 - 2}\right) = \left(\frac{9}{m^2 - 2}\right) = 1 \tag{2.14}$$

ve

$$\left(\frac{3m}{4m^2+1}\right)=\left(\frac{3}{4m^2+1}\right)\left(\frac{m}{4m^2+1}\right)=\left(\frac{4m^2+1}{3}\right)\left(\frac{4m^2+1}{m}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{m}\right)=-1 \tag{2.15}$$

olur. Bu doğrultuda (2.1) denkleminden z çifttir.

Kabul edelim ki $y \geq 2$ olsun. Denklem (2.1) $\pmod 8$'de alınırsa

$$5^x \equiv (3m)^z \equiv 1 \pmod 8 \tag{2.16}$$

olur ve x'in çift olduğu görülür.

Diğer yandan, $m \not\equiv 0 \pmod 3$ olduğundan, denklem (2.1) $\pmod 3$'te alınırsa

$$2^x + 1 \equiv 0 \pmod 3 \tag{2.17}$$

sağlanır ve x'in tek olması gerekir fakat bu mümkün değildir. O halde $y = 1$ olur.

Bu durumda, $y = 1$ için, denklem (2.1) $\pmod 8$'de alınırsa

$$5^x + 4 \equiv (3m)^z \equiv 1 \pmod 8 \tag{2.18}$$

olup x tektir. ■

Lemma (2.5)'ten $y = 1$ ve x'in tek olduğu görülür. Eğer $x = 1$ ise, denklem (2.1)'den $z = 2$ olur. Böylece bu noktadan sonra $x \geq 3$ olduğunu kabul edeceğiz. Dolayısıyla teoremimiz

$$c^z - a^x = b,\ x \geq 3,\ a = 4m^2+1,\ b = 5m^2-1,\ c = 3m \tag{2.19}$$

Pillai denkleminin çözümüne indirgenmiş olacaktır.

Şimdi x için bir alt sınır elde etmeliyiz.

Lemma 2.6. $x \geq \frac{1}{4}(m^2-5)$.

İspat. Biliyoruz ki $x \geq 3$, o halde denklem (2.19) aşağıdaki eşitsizliği verir:

$$(3m)^z = (4m^2+1)^x + 5m^2 - 1 \geq (4m^2+1)^3 + 5m^2 - 1 > (3m)^3. \tag{2.20}$$

Dolayısıyla $z \geq 4$ olur. Denklem (2.19) $\pmod{m^4}$'te alınırsa

$$1 + 4m^2x + 5m^2 - 1 \equiv 0 \pmod{m^4} \tag{2.21}$$

olur. Yani

$$m^2(4x45) \equiv 0 \pmod{m^4}. \tag{2.22}$$

Böylece iddiamıza ulaşırız. ■

Şimdi x için bir üst sınır elde etmeliyiz.

Lemma 2.7. $x < 2521\ \log c$.

İspat. Denklem (2.19)'dan, aşağıdaki lineer formu ele alıyoruz:

$$\Lambda = z\ \log c - x\ \log a\ (> 0). \tag{2.23}$$

Bu noktada $t > 0$ için $\log(1+t) < t$ eşitsizliğini kullanırsak

$$0 < \Lambda = \log(\frac{c^z}{a^x}) = \log(1 + \frac{b}{a^x}) < \frac{b}{a^x} \tag{2.24}$$

olur ve bu nedenle

$$\log \Lambda < \log b - x \log a \tag{2.25}$$

elde edilir. Diğer taraftan Λ için bir alt sınır bulmak adına (2.1)'den yararlanırız. Lemma (2.1)'den şu sonuç çıkarılabilir:

$$\log \Lambda \geq -25.2\ (\max\{\log b^{'} + 0.38,\ 10\})^2\ (\log a)(\log c) \tag{2.26}$$

Burada

$$b^{'} = \frac{x}{\log c} + \frac{z}{\log a} \tag{2.27}$$

olduğunu eklemek gerekir.

Ayrıca $a^{x+1} > c^z$ sağlanır. Gerçekten,

$$a^{x+1} - c^z = a(c^z - b) - c^z = (a-1)c^z - ab \geq 4m^2 \cdot 9m^2 - (4m^2+1)(5m^2-1) > 0 \tag{2.28}$$

olur. Bundan dolayı

$$b^{'} < \frac{2x+1}{\log c} \tag{2.29}$$

olduğuna ulaşılır.

$M = \frac{x}{\log c}$ olmak üzere, (2.26) ve (2.25) birleştirilirse

$$x \log a < \log b + 25.2 \left(\max \left\{ \log \left(2M + \frac{1}{\log c} \right) + 0.38,\ 10 \right\} \right)^2 (\log a)(\log c) \tag{2.30}$$

yani

$$M < 1 + 25.2 \left(\max \left\{ \log \left(2M + \frac{1}{2} \right) + 0.38,\ 10 \right\} \right)^2 \tag{2.31}$$

$\log c = \log(3m) \geq \log 9 > 2$ ve $b < a^2$ olduğu için sağlanır. Bu nedenle $M < 2521$ elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır. ■

Şimdi Teorem (2.1)'i kanıtlayacağız. Burada Lemma (2.6) ve Lemma (2.7)'den

$$m^2 - 5 < 10084 \log 3m \tag{2.32}$$

olur. Bunun sonucu olarak $m \leq 259$ olduğuna ulaşılır.

Lemma (2.6)'dan,

$$\left| \frac{\log a}{\log c} - \frac{z}{x} \right| < \frac{b}{x a^x \log c} \tag{2.33}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $x \geq 3$ olduğundan

$$\left| \frac{\log a}{\log c} - \frac{z}{x} \right| < \frac{1}{2x^2} \tag{2.34}$$

yazılabilir. Böylece $\log a / \log c$ basit sürekli kesir açılımına z/x yakınsaktır. Son olarak, $3 \leq x < 2521 \log c$ aralığında x ve z için

$$a = 4m^2 + 1, b = 5m^2 - 1, c = 3m,\ 3 \leq m \leq 259$$

ile birlikte (2.34) eşitsizliğini sağlayan çözüm olmadığı belirlenmiştir.

3
SONUÇ VE ÖNERİLER

3.1 Terai Sanısı'nın Uygulanması

Bu kısımda Terai Sanısı $a = 6$, $b = 3$ ve $c = 3$ değerleri için incelenecek ve kanıtlanacaktır.

Teorem 3.1. *Kabul edelim ki m bir pozitif tam sayı olsun. O halde*

$$(6m^2+1)^x + (3m^2-1)^y = (3m)^z \tag{3.1}$$

denkleminin tek pozitif tam sayı çözümü $(x,y,z) = (1,1,2)$*'dir.*

İspat. İlk olarak $2|m$ durumunu inceleyelim.

Eğer $z \leq 2$ ise, (3.1) denkleminden $(x,y,z) = (1,1,2)$ olduğu açıktır. Kabul edelim ki $z \geq 3$ olsun. O halde 3.1 denklemini $\pmod{m^3}$'te alırsak,

$$1^x + (-1)^y \equiv 0 \pmod{m} \tag{3.2}$$

elde ederiz. Buradan görülür ki y tek sayıdır. Benzer şekilde, yine (3.1) denkleminden

$$6x + 3y \equiv 0 \pmod{m} \tag{3.3}$$

buluruz. Bildiğimiz gibi y tek ve m çift olduğundan (3.3) denklemi için bir çözüm yoktur. Böylece $2|m$ durumu için tek pozitif tam sayı çözümü $(x,y,z) = (1,1,2)$ dir.

Şimdi, kabul edelim ki $2 \nmid m$ olsun.

(3.1) denkleminin herhangi bir çözümü (x,y,z) olsun. Denklemin bir çözümü $(x,y,z) = (1,1,2)$ olduğu açıkça görülebilir. Bir önceki durumdan, $m > 1$ için $\pmod{m^2}$'de (3.1) denkleminden

$$2 \nmid y \tag{3.4}$$

olduğunu biliyoruz.

Bundan sonra x için iki duruma ayırarak inceleme yapacağız. İlk olarak, kabul edelim ki $2 \nmid x$ olsun. Bu durumda

$$(6m^2+1)X^2+(3m^2-1)Y^2=(3m)^Z,\ Z>0,\ X,Y,Z\in\mathbb{Z} \tag{3.5}$$

denkleminin çözümü

$$(X,Y,Z)=\left((6m^2+1)^{\frac{x-1}{2}},(3m^2-1)^{\frac{y-1}{2}},z\right) \tag{3.6}$$

dır.

Biliyoruz ki $l=<(6m^2+1)^{\frac{x-1}{2}},(3m^2-1)^{\frac{y-1}{2}},z>$, o halde

$$(6m^2+1)^{\frac{x+1}{2}} \equiv -l(3m^2-1)^{\frac{y-1}{2}} \pmod{3m}, \tag{3.7}$$

eşitliğini elde edebiliriz. Buradan

$$l \equiv \pm 1 \pmod{3m} \tag{3.8}$$

olduğu açıkça görülebilir.

(3.1) denkleminin bir başka çözümü de $(X_1,Y_1,Z_1)=(1,1,2)$ olsun. Böylece $l_0=<1,1,2>$ yazabiliriz ve

$$\begin{aligned}(6m^2+1)\cdot 1 &\equiv -l_0\cdot 1 \pmod{3m},\\ l_0 &\equiv -1 \pmod{3m}\end{aligned} \tag{3.9}$$

olduğu bulunur. Sonuç olarak $l\equiv \pm l_0 \pmod{3m}$ eşitliğine ulaşılır. Yani $(X_1,Y_1,Z_1)=(1,1,2)$ ve (3.6), (3.1) denkleminin aynı çözüm sınıfı $S(l_0)$ içindedirler. Buradan hareketle $(x,y,z)=(1,1,2)$ için $S(l_0)$'ın en küçük çözümü olduğunu söyleyebiliriz. Lemma (1.5)'ten,

$$\begin{aligned}(6m^2+1)^{\frac{x-1}{2}}\sqrt{6m^2+1}+(3m^2-1)^{\frac{y-1}{2}}\sqrt{1-3m^2}&\\ =\lambda_1(\sqrt{6m^2+1}+\lambda_2\sqrt{1-3m^2}\,)^t&\end{aligned} \tag{3.10}$$

ve

$$z=2t,\ 2\nmid t,\ t\in\mathbb{N}.$$

dir.

(3.10) denkleminin sağ tarafını açarsak,

$$(3m^2-1)^{\frac{y-1}{2}} = \lambda_1\lambda_2 \sum_{i=0}^{\frac{t-1}{2}} \binom{t}{2i+1} (6m^2+1)^{\frac{t-1}{2}-i}(1-3m^2)^i \tag{3.11}$$

elde edilir.

Varsayalım ki $y > 1$ olsun. O halde (3.11)'den,

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \lambda_1\lambda_2 t\,(6m^2+1)^{\frac{t-1}{2}} \pmod{(3m^2-1)} \\ 0 &\equiv \mp 3^{\frac{t-1}{2}}t \pmod{(3m^2-1)}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

bulunur.Burada $2 \mid 3^{\frac{t-1}{2}}t$ olduğundan (3.12) bir çelişkidir. Böylece $y = 1$ olduğu görülür.

Şimdi, Lemma (1.6)'daki iki durumu kontrol etmeliyiz. $(X_1, Y_1, Z_1) = (1, 1, 2)$, $S(l_0)$'ın en küçük çözümü olduğu için, Lemma (1.6)'dan,

$$6m^2+1 = \frac{1}{4}(3^2m^2 \mp 1) \tag{3.13}$$

ve

$$F_{3r+\epsilon} = (3m)^2 \tag{3.14}$$

denklemlerinden birini sağlamalıdır. İlk olarak (3.13)'e bakalım. (3.13)'ün $4(6m^2+1) = (3^2m^2 \mp 1)$ eşitliğini sağladığı görülebilir fakat bu $4 \equiv \mp 1 \pmod{m^2}$ demektir ve bir çözüme ulaşamayız. İkinci denklem olan (3.14)'e baktığımızda ise, 1'den büyük olan kare Fibonacci sayısının $F_{12} = 12^2$ [19] olduğunu bildiğimizden, $3m = 12$ elde edilir. Bu eşitliğin $2 \nmid m$ koşulu altında yanlış olduğu açıktır.

Böylece (3.1) denklemi için x tek olduğunda, pozitif tam sayı çözümü $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ dışında mevcut değildir.

O halde x'in çift olduğu durumu inceleyelim. (3.1)'den,

$$X^2 + (3m^2-1)Y^2 = (3m)^Z,\ \gcd(X,Y) = 1,\ Z > 0 \tag{3.15}$$

denkleminin çözümü

$$(X, Y, Z) = \left((6m^2-1)^{\frac{x}{2}}, (3m^2-1)^{\frac{y-1}{2}}, z\right) \tag{3.16}$$

olur.

Lemma (1.2)'yi kullanırsak, X_1, Y_1, Z_1 pozitif tam sayıları için

$$z = Z_1 t,\ t \in \mathbb{N},$$
$$(6m^2+1)^{\frac{x}{2}} + (3m^2-1)^{\frac{y-1}{2}}\sqrt{1-3m^2} = \lambda_1\left(X_1 + \lambda_2 Y_1\sqrt{1-3m^2}\right)^t, \qquad (3.17)$$
$$\lambda_1, \lambda_2 \in \{1, -1\}$$

elde edilir ve, X_1, Y_1, Z_1 pozitif tam sayıları

$$X_1^2 + (3m^2-1)Y_1^2 = (3m)^{Z_1},\ \gcd(X_1, Y_1) = 1 \qquad (3.18)$$
$$h(-4(3m^2-1)) \equiv 0 \pmod{Z_1} \qquad (3.19)$$

denklemlerini sağlar.

Öncelikle t'yi çift olarak ele alalım. O halde

$$X_2 + Y_2\sqrt{1-3m^2} = \left(X_1 + \lambda_2 Y_1\sqrt{1-3m^2}\right)^{\frac{t}{2}} \qquad (3.20)$$

yazılabilir.

$\mathbb{Q}(\sqrt{1-3m^2})$ cisminde (3.20)'nin iki tarafının normunu alıp, (3.18) ile birleştirirsek

$$X_2^2 + (3m^2-1)Y_2^2 = (3m)^{\frac{Z_1 t}{2}} = (3m)^{\frac{z}{2}} \qquad (3.21)$$

bulunur.

(3.20) yerine (3.17) yazılırsa

$$(6m^2+1)^{\frac{x}{2}} + (3m^2-1)^{\frac{y-1}{2}}\sqrt{1-3m^2} = \lambda_1\left(X_2 + Y_2\sqrt{1-3m^2}\right)^2 \qquad (3.22)$$

denklemine ulaşılır ve buradan

$$(6m^2+1)^{\frac{x}{2}} = \lambda_1(X_2^2 - Y_2^2(3m^2-1)) \qquad (3.23)$$

$$(3m^2-1)^{\frac{y-1}{2}} = 2\lambda_1 X_2 Y_2 \qquad (3.24)$$

olduğu görülür.

Biliyoruz ki $\gcd(6m^2+1, 3m^2-1) = 1$, bu yüzden (3.23) ve (3.24)'ten

$$|X_2| = 1 \qquad (3.25)$$

sonucu çıkarılabilir.

Yani

$$|Y_2| = \frac{1}{2}(3m^2-1)^{\frac{y-1}{2}} \tag{3.26}$$

olur.

(3.21)'de $|X_2|$ ve $|Y_2|$ değerleri yerine yazılırsa

$$1+\frac{1}{4}(3m^2-1)^y = (3m)^{\frac{z}{2}} \tag{3.27}$$

elde edilir. Bunun sonucu olarak

$$3 \equiv 0 \pmod{3m} \tag{3.28}$$

eşitliği bulunur fakat her zaman $3m > 3$ olduğu için çelişkiye ulaşılmış olur. O halde t çift olduğunda bir çözüm yoktur.

Son olarak, t'nin tek olduğunu kabul edelim ve

$$\alpha = X_1 + Y_1\sqrt{1-3m^2},\ \beta = X_1 - Y_1\sqrt{1-3m^2} \tag{3.29}$$

olsun.

(3.17)'den, kompleks eşleniğini göz önüne alarak,

$$(3m^2-1)^{\frac{y-1}{2}} = Y_1\left|\frac{\alpha^t-\beta^t}{\alpha-\beta}\right| = Y_1|L_t(\alpha,\beta)| \tag{3.30}$$

olduğu söylenebilir.

(3.18)'den, $\alpha+\beta = 2X_1$, $\alpha-\beta = 2Y_1\sqrt{1-3m^2}$ ve $\alpha\beta = (3m)^{Z_1}$ görülebilir. Benzer şekilde yine (3.18)'den $\alpha+\beta = 2X_1$ ve $\alpha\beta = (3m)^{Z_1}$ tam sayılarının, $\gcd(X_1, Y_1) = 1$ olduğundan, aralarında asal olduğu elde edilir ve $\frac{\alpha}{\beta} \neq \mp 1$'dir.

Böylece $L_t(\alpha,\beta)$ bir dizidir. (3.30)'dan, $L_t(\alpha,\beta)$ dizisinin ilkel bölene sahip olmadığı ve (α,β) parametrelerinin [20] kaynağında verilenlerle eşleşmediğine ulaşılır. Yani BHV teoreminden ([21],[20])

$$t \leq 3. \tag{3.31}$$

eşitsizliğini buluruz.

Şimdi $t = 3$ için de sağlanmadığı gösterilecektir. O halde $t = 3$ olduğunu kabul edelim. (3.10)'da sağ tarafı $t = 3$ için açıp, daha sonra da her iki tarafın katsayıları eşitlenirse

$$(6m^2+1)^{\frac{x}{2}} = \lambda_1 X_1 \left(X_1^2 - 3(3m^2-1)Y_1^2\right). \tag{3.32}$$

$$(3m^2-1)^{\frac{y-1}{2}} = \lambda_1 \lambda_2 Y_1 \left(3X_1^2 - (3m^2-1)Y_1^2\right) \tag{3.33}$$

olur.

Burada (3.18)'den $\gcd(3X_1, 3m^2-1) = 1$ elde edilebileceğine dikkat etmek gerekir. Bu sebeple (3.33)'den $\left(3X_1^2 - (3m^2-1)Y_1^2\right) = \mp 1$ olduğu söylenebilir. Ayrıca (mod 3)'te alarak sadece pozitif olabileceği görülür ve

$$\left(3X_1^2 - (3m^2-1)Y_1^2\right) = 1 \tag{3.34}$$

yazılabilir.

(3.34)'ten

$$|Y_1| = (3m^2-1)^{\frac{y-1}{2}} \tag{3.35}$$

görülür.

(3.35)'i, (3.32)'de yerine koyarsak

$$(6m^2+1)^{\frac{x}{2}} = \lambda_1 X_1 \left(X_1^2 - 3(3m^2-1)^y\right). \tag{3.36}$$

bulunur.

(3.34) ve (3.35)'ten,

$$3X_1^2 - (-1)1 \equiv \mp 1 \pmod{3m} \tag{3.37}$$

ve bu

$$X_1 \equiv 0 \pmod{m} \tag{3.38}$$

demektir. Buradan hareketle (3.36)'dan

$$1^{\frac{x}{2}} \equiv 0 \pmod{m} \tag{3.39}$$

yazılabilir fakat yanlış olduğu açıktır. Bu nedenle sadece $t = 1$ olabilir. Yani, $z = Z_1 t = Z_1$ ve (3.19)'dan

$$Z_1 \leq h(-4(3m^2-1)) \tag{3.40}$$

olur. Lemma (1.1)'den,

$$z < \frac{4}{\pi}\sqrt{3m^2-1}\log\left(2e\sqrt{3m^2-1}\right) \tag{3.41}$$

üst sınırı bulunur.

Kabul edelim ki $z=3$ olsun. O halde en küçük x ve y, 1'den büyük olmalıdır. $x \geq 2$ olduğunda

$$(3m)^3 > (6m^2+1)^x \geq (6m^2+1)^2 > 6^2m^4 \tag{3.42}$$

ve buradan

$$3^3 > 6^2m > 36 \tag{3.43}$$

olup çelişki elde ederiz.

Benzer şekilde $y \geq 2$ için

$$(3m)^3 \geq (3m^2-1)^2+(6m^2+1) \tag{3.44}$$

eşitsizliği bir çelişkidir.

O halde $z \geq 4$ diyebiliriz. Eğer (3.1) denklemini $\pmod{9m^4}$'te alırsak

$$6m^2x+3m^2y \equiv 0 \pmod{9m^4} \tag{3.45}$$

ve buradan

$$2x+y \equiv 0 \pmod{3m^2} \tag{3.46}$$

buluruz. Yani

$$3m^2 < 2x+y. \tag{3.47}$$

olur.

$(6m^2+1)^x < (3m)^z$ ve $(3m^2-1)^y < (3m)^z$ olduğundan, $x<z$ ve $y<z$ diyebiliriz. Bu yüzden (3.47)'den

$$m^2 < z \tag{3.48}$$

olur. Bu eşitsizlikten

$$m^2 < z < \frac{4}{\pi}\sqrt{3m^2-1}\log\left(2e\sqrt{3m^2-1}\right) \tag{3.49}$$

ve $m \leq 11$ olduğuna ulaşılır. Yani tüm değişkenler sınırlıdır.

Bu noktada (3.41)'i $x,y<z$ ile birlikte düşünerek $3 \leq m \leq 11$ aralığındaki (3.1)'in tüm olası çözümlerini kontrol etmek için Maple ile kısa bir bilgisayar programı yazdık ve $z \geq 3$ olduğunda (m,x,y,z) için pozitif tam sayı çözümü olmadığını gördük.

3.2 Sonuç

İlk olarak Jeśmanowicz tarafından belirli koşullar altında çözümleri aranan üstel diofant denklemden bahsettik, daha sonra bu denklemin daha özel bir hali olan Terai Sanısı'nı inceledik.

Sonuç olarak, Terai Sanısı'nın $a = 6$, $b = 3$ ve $c = 3$ değerleri için özel hali olan

$$(6m^2 + 1)^x + (3m^2 - 1)^y = (3m)^z$$

denklemini tüm koşullar altında ayrı ayrı inceleyerek tek pozitif tam sayı çözümünün $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ olduğunu ispatladık.

■

KAYNAKÇA

[1] L. Jesmanowicz, "Several remarks on pythagorean numbers," *Wiadom. Mat*, vol. 1, no. 2, pp. 196–202, 1955.

[2] T. Miyazaki, "Generalizations of classical results on jeśmanowicz conjecture concerning pythagorean triples," *Journal of Number Theory*, vol. 133, no. 2, pp. 583–595, 2013.

[3] T. Miyazaki, P. Yuan, D. Wu, "Generalizations of classical results on jeśmanowicz'conjecture concerning pythagorean triples ıı," *Journal of Number Theory*, vol. 141, pp. 184–201, 2014.

[4] N. Terai, "On jeśmanowicz'conjecture concerning primitive pythagorean triples," *Journal of Number Theory*, vol. 141, pp. 316–323, 2014.

[5] N. Terai, T. Hibino, "On the exponential diophantine equation," *International Journal of Algebra*, vol. 6, no. 23, pp. 1135–1146, 2012.

[6] T. Miyazaki, N. Terai, "On the exponentıal dıophantıne equatıon," *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, vol. 90, no. 1, pp. 9–19, 2014.

[7] N. Terai, T. Hibino, "On the exponential diophantine equation (12m2+ 1) x+(13m2- 1) y=(5m) z," *International Journal of Algebra*, vol. 9, no. 6, pp. 261–272, 2015.

[8] R. Fu, H. Yang, "On the exponential diophantine equation," *Periodica Mathematica Hungarica*, vol. 75, no. 2, pp. 143–149, 2017.

[9] X. Pan, "A note on the exponential diophantine equation," in *Colloquium Mathematicum*, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, vol. 149, 2017, pp. 265–273.

[10] M. Alan, "On the exponential diophantine equation $(18m^2 + 1)x + (7m^2 - 1)y = (5m)z$," *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 42, no. 4, pp. 1990–1999, 2018.

[11] E. Kizildere, T. Miyazaki, G. SOYDAN, "On the diophantine equation $((c + 1)m\Gamma\{2\}+ 1)\{x\}+(cm\Gamma\{2\}$-$1)\{y\}= (am)\Gamma\{z\}$," *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 42, no. 5, pp. 2690–2698, 2018.

[12] Terai, "On the exponential diophantine equation," *Mathematicae Et Informaticae*, vol. 52, pp. 243–253, 2020.

[13] A. Wiles, "Modular elliptic curves and fermat's last theorem," *Annals of mathematics*, vol. 141, no. 3, pp. 443–551, 1995.

[14] L.-K. Hua, *Introduction to number theory*. Springer Science & Business Media, 2012.

[15] M. Le, “Some exponential diophantine equations. ı. the equation d1x2- d2y2= λkz,” *Journal of Number Theory*, vol. 55, no. 2, pp. 209–221, 1995.

[16] Y. Bugeaud, T. Shorey, “On the number of solutions of the generalized ramanujan-nagell equation,” 2001.

[17] M. Laurent, “Linear forms in two logarithms and interpolation determinants ıı,” *Acta Arithmetica*, vol. 4, no. 133, pp. 325–348, 2008.

[18] T. Miyazaki, “The shuffle varıant of jeśmanowıcz’conjecture concernıng pythagorean trıples,” *Journal of the Australian Mathematical Society*, vol. 90, no. 3, pp. 355–370, 2011.

[19] J. H. Cohn, “Square fibonacci numbers,” in *Exploring University Mathematics*, Elsevier, 1967, pp. 69–82.

[20] P. M. Voutier, “Primitive divisors of lucas and lehmer sequences,” *Mathematics of computation*, vol. 64, no. 210, pp. 869–888, 1995.

[21] Y. Bilu, G. Hanrot, P. M. Voutier, “Existence of primitive divisors of lucas and lehmer numbers,” 2001.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirisi

1. Ruhsar Gizem BİRATLI, Murat ALAN, 9th (Online) International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling Abstract Book, Primitive Divisor Theorem and An Application to the Diophantine Equations, pp. 81, 2021