15- $w=e^z$ dönüşümü ile sanal eksene paralel doğruların resmini bulunuz.

16- $w=\frac{z+1}{z}$ fonksiyonu, $\frac{1}{2}\leq |z| \leq 3$ halkasını hangi bölgeye dönüştürür ?

17- $y^2=2x$ eğrisi, $w=1/\bar{z}$ fonksiyonu ile hangi eğriye tasvir olunur ?

18- $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$ doğruları ile sınırlanan D bölgesinin, $w=z^2$ fonksiyonu vasıtasıyla elde edilen tasvirinin alanını hesaplayınız.

19- $|z-1|=1$ dairesi $w=1/\bar{z}$ fonksiyonu ile hangi eğriye tasvir olunur ?

20- $w=\frac{z^2+1}{z}$ fonksiyonu $\frac{1}{2}\leq |z| \leq 1$ halkasını hangi bölgeye tasvir eder ?

21- $f(z)=z+\frac{1}{z}$ dönüşümü $|z|=1$ çemberini, x-ekseni üzerinde $[-2,2]$ aralığına dönüştürür. Gösteriniz.

22- $z\to\cos z$ dönüşümü altında ox ve oy eksenlerine paralel doğruların görüntüsünü bulunuz ?

23- $0\leq \mathrm{Re}z\leq 2\pi$, $0\leq \mathrm{Im}z\leq 2\pi$ bölgesinde $|\cos z|$ nin maksimum değerini hesaplayınız.

24- a) $z=1$ noktası orijine gelmek üzere, sağ yarı düzlemi birim daireye dönüştüren,

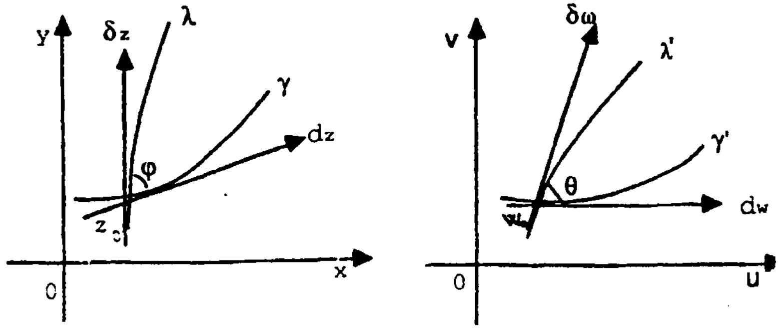
b) Orijin, i noktasına gelmek üzere birim daireyi üst yarı düzleme dönüştüren, bilineer dönüşümleri bulunuz.

4.6. Konform Dönüşüm

$w=f(z)=u+iv$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ dönüşümleri ile z düzlemindeki bir D bölgesi w de bir D' bölgesine dönüşür. Bir D bölgesinde analitik $w=f(z)$ fonksiyonunun D nin bir z_0 noktasındaki türevi sıfırdan farklı ise, bu nokta civarına ait tasvirlerin ayrı bir özelliği vardır. Bu durumdaki dönüşümlere "Konform " dönüşüm denir.

4.TEOREM : Konform tasvirde açılar sabit kalır. Sonsuz küçük bir civarda uzunluklar aynı oranda değişir.

İSPAT : z-düzleminde z_0 dan geçen , λ ve γ eğirilerini gözönüne alalım.



Şekil 4.21

Bunların resimleri λ' ve γ', φ nin resmi de θ olsun. O halde z_0 daki fonksiyonel determinantı yazalım.

$$J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}$$

fonksiyonel determinantı, Cauchy-Riemann denklemleri sağladığına göre,

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=|f'(z_0)|^2$$

olur. $f'(z_0)\neq 0 \Rightarrow J\neq 0$ olacaktır. $J\neq 0$ olması ise dönüşümün bire-bir olduğunu, $J>0$ olması da yön değiştirmediğini gösterir. z_0 noktasındaki teğet vektörler, dz ve δz ise bunlar arasındaki açı $\frac{\delta z}{dz}$ kompleks sayısının argumentidir. Aynı şekilde tasvirdeki teğet vektörler dw ve δw ise, bunlar arasındaki açı $\frac{\delta w}{dw}$ nin argümentidir.

$$\begin{aligned} dw &= f'(z_0)\,dz\\ \delta w &= f'(z_0)\,\delta z\end{aligned} \Rightarrow \frac{\delta w}{dw}=\frac{\delta z}{dz}.$$

olur ki, buradan açıların değişmediği anlaşılır.

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \right| = |f'(z_0)|$$

olacaktır. O halde w_0 ın çok küçük bir civarına ait uzunlukların karşılıklı asıllarına oranı $|f'(z_0)|$dır.Karşıt olarak,sonsuz küçük bir civarda açılar ve uzunluklar oranları değişmezse,

$$\arg \frac{\delta w}{dw} = \arg \frac{\delta z}{dz}, \frac{\delta w}{dw} = \frac{\delta z}{dz}$$

eşitliklerinden,

$$\frac{\delta w}{dw} = \frac{\delta z}{dz} \Rightarrow \frac{\delta w}{dz} = \frac{dw}{dz}$$

elde edilir. Bu bağıntı, w nin z ye göre yola bağlı olmayan bir türevinin varlığını gösterir.

4.7.Tek Katlı (Schlicht) Fonksiyonlar

4.TANIM : Bir D bölgesinde her değişken değerine bir ve yalnız bir fonksiyon değeri tekabül ediyorsa, bu fonksiyona uniform (tek değerli) denir.

5.TANIM: Bir D bölgesinde değişkenin farklı iki değerine fonksiyonun farklı iki değeri tekabül ediyorsa, bu fonksiyona ünivalent fonksiyon denir.

Üniform ve ünivalent olmayan fonksiyonlara sıra ile mültiform ve mültivalent fonksiyonlar denir.

6.TANIM : Bir D bölgesinde üniform ve ünivalent bir f(z) analitik fonksiyonuna tek katlı fonksiyon denir. D bölgesinde $f'(z) \neq 0$ olur. Bu fonksiyonun bir bölgeyi diğer bir bölgeye bire-bir konform dönüştüreceği açıktır.

5. TEOREM : Bir $w=f(z)$ fonksiyonu D de tek katlı ve $W=g(w)$ fonksiyonu da D nin tasviri olan D' de tek katlı ise,

$$W=g(w)= g(f(z)) = \varphi(z)$$

fonksiyonu da D de tek katlıdır.

İSPAT :

$$\left.\begin{array}{l} w=f(z) \text{ fonksiyonu D de tek katlı} \\ W=g(w) \text{ fonksiyonu D' de tek katlı} \end{array}\right\} \Rightarrow W_1 \neq W_2 \Rightarrow w_1 \neq w_2$$

olur ve $w_1 \neq w_2$ ise, $z_1 \neq z_2$ yazılır. Yine $z_1 \neq z_2$ ise $w_1 \neq w_2$ ve $w_1 \neq w_2$ ise, $W_1 \neq W_2$ elde edilir. O halde $W=\varphi(z)$ fonksiyonu tek katlıdır.