**T.C.**

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ İÇİN SIRALAMA YÖNTEMLERİ

**Ayşe Ayça DÜZEN**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman

Dr. Öğretim Üyesi Pınar ALBAYRAK

Haziran, 2025

**T.C.**

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ İÇİN SIRALAMA YÖNTEMLERİ

Ayşe Ayça DÜZEN tarafından hazırlanan tez çalışması 07.07.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Pınar ALBAYRAK
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

**Jüri Üyeleri**

Dr. Öğr. Üyesi Pınar ALBAYRAK, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Sebahat Ebru DAŞ, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Meltem UZUN, Üye
İstanbul Sabahattin Zaim Üniversitesi

Danışmanım Dr. Pınar ALBAYRAK sorumluluğunda tarafımca hazırlanan "Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri için Sıralama Yöntemleri" başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Ayşe Ayça DÜZEN

*Aileme*

*ve*

*eşime*

# TEŞEKKÜR

Bu tezde büyük emeği geçen, her zaman desteğini yanımda hissettiğim, öğrencisi olmaktan gurur duyduğum danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Pınar ALBAYRAK'a,

Çalışmanın gelişmesine kıymetli fikirleri ile destek verip, zaman ayıran Sayın Doç. Dr. Sebahat Ebru DAŞ'a,

Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgileriyle ışık tutan Yıldız Teknik Üniversitesi hocalarıma,

Çalışmamın destekçişi olan sayın müdürlerime,

Bu zamana kadar geçmiş olduğum tüm kademelerdeki öğretmenlerime,

Bugünlere gelmeme emeği olan, varlıkları ile bana güç veren annem ve babama,

Çalışmalarımda ve hayatımda destek olan, yıllar sonra beni cesaretlendiren eşime,

Oğlum ve kızıma,

Bana daima güvenen arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

Bu tezi, beni öğretmen olmam için destekleyen anneannem Adviye KIRBAŞ ve eğitim hayatı engellenmiş tüm kız çocuklarına ithaf ediyorum.

Ayşe Ayça DÜZEN

# İÇİNDEKİLER

**SİMGE LİSTESİ** vii

**KISALTMA LİSTESİ** viii

**ŞEKİL LİSTESİ** ix

**TABLO LİSTESİ** x

**ÖZET** xi

**ABSTRACT** xiii

**1 GİRİŞ** 1

**2 TEMEL KAVRAMLAR** 5

2.1 Bazı Özel Fonksiyonlar.....5

2.1.1 Gama Fonksiyonu…..…….……....5

2.1.2 Beta Fonksiyonu……...…6

2.1.3 Mittag - Leffer Fonksiyonu……..…...7

2.1.4 Hata (Error) Fonsiyonu……...8

2.2 Kesirli Analiz.....8

**3 HERMİT POLİNOMLARI VE HERMİT SIRALAMA YÖNTEMİ** 11

3.1 Hermit Diferansiyel Denklemi ve Hermit Polinomları .....11

3.2 Hermit Sıralama Yöntemi…… 12

3.3 Örnekler……17

**4 LUCAS POLİNOMLARI VE LUCAS SIRALAMA YÖNTEMİ** 27

4.1 İki Değişkenli Lucas Polinomları .....27

4.2. Tek Değişkenli Lucas Polinomları…….28

4.3. Lucas Sıralama Yöntemi……...28

4.4 Örnekler……...34

**5 SONUÇ……..44**

**KAYNAKÇA……46**

**TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR……49**

# SİMGE LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $\beta(z,w)$ | Beta Fonksiyonu |
| $E_\alpha(z)$ | Bir Parametreli Mittag-Leffler Fonksiyonu |
| ${}^{C}D^{b}f(t)$ | Caputo Kesirli Türevi |
| $\Gamma(z)$ | Gama Fonksiyonu |
| $D_\alpha^n f(x)$ | Grünwald–Letnikov Kesirli Türevi |
| $Erf(x)$ | Hata (Error) Fonksiyonu |
| $H_n(x)$ | Hermit Polinomu |
| $L_n(x,y)$ | İki Değişkenli Lucas Polinomu |
| $E_{\alpha,\beta}(z)$ | İki Parametreli Mittag-Leffler Fonksiyonu |
| ${}_{b}D_t^b f(t)$ | Riemann–Liouville Kesirli Türevi |
| $L_n(x)$ | Tek Değişkenli Lucas Polinomu |

# KISALTMA LİSTESİ

| | |
|---|---|
| AAY | Adomian Ayrıştırma Yöntemi |
| HAY | Homotopi Analiz Yöntemi |
| HSY | Hermit Sıralama Yöntemi |
| LOMY | Legendre Operasyonel Matris Yöntemi |
| LSY | Lucas Sıralama Yöntemi |
| SFY | Sonlu Farklar Yöntemi |
| VİY | Varyasyonel İterasyon Yöntemi |

# ŞEKİL LİSTESİ

**Şekil 3.1** Örnek 3.3.1'in tam çözümü ile $N = 5$ için HSY ile hesaplanan yaklaşık çözümünün grafik karşılaştırılması……..…..**20**

**Şekil 3.2** Örnek 3.3.1'in tam çözümü ile $N = 4$ için HSY ile hesaplanan yaklaşık çözümünün grafik karşılaştırılması……..…..**21**

**Şekil 3.3** Örnek 3.3.1'in tam çözümü ile $N = 3$ için HSY ile hesaplanan yaklaşık çözümünün grafik karşılaştırılması……..…..**21**

**Şekil 3.4** Örnek 3.3.2'nin tam çözümü ile $N = 8$ için HSY ile hesaplanan yaklaşık çözümünün grafik karşılaştırılması……..…..**25**

**Şekil 3.5** Örnek 3.3.2'nin tam çözümü ile $N = 4$ için HSY ile hesaplanan yaklaşık çözümünün grafik karşılaştırılması……..…..**26**

**Şekil 3.6** Örnek 3.3.2'nin tam çözümü ile $N = 3$ için HSY ile hesaplanan yaklaşık çözümünün grafik karşılaştırılması……..…..**26**

**Şekil 4.1** Örnek 4.4.1'in tam çözümü ile $N = 5$ için LSY ile hesaplanan yaklaşık çözümünün grafik karşılaştırılması……..…..**37**

**Şekil 4.2** Örnek 4.4.1'in tam çözümü ile $N = 4$ için LSY ile hesaplanan yaklaşık çözümünün grafik karşılaştırılması……..…..**38**

**Şekil 4.3** Örnek 4.4.1'in tam çözümü ile $N = 3$ için LSY ile hesaplanan yaklaşık çözümünün grafik karşılaştırılması……..…..**38**

**Şekil 4.4** Örnek 4.4.2'nin tam çözümü ile $N = 8$ için LSY ile hesaplanan yaklaşık çözümünün grafik karşılaştırılması……..…..**42**

**Şekil 4.5** Örnek 4.4.2'nin tam çözümü ile $N = 5$ için LSY ile hesaplanan yaklaşık çözümünün grafik karşılaştırılması……..…..**42**

**Şekil 4.6** Örnek 4.4.2'nin tam çözümü ile $N = 3$ için LSY ile hesaplanan yaklaşık çözümünün grafik karşılaştırılması……..…..**43**

# TABLO LİSTESİ

**Tablo 3.1** Örnek 3.3.1 için tam çözüm-yaklaşık çözüm karşılaştırılması…….**20**

**Tablo 3.2** Örnek 3.3.2 için tam çözüm-yaklaşık çözüm karşılaştırılması……...**25**

**Tablo 4.1** Örnek 4.4.1 için tam çözüm-yaklaşık çözüm karşılaştırılması……...**37**

**Tablo 4.2** Örnek 4.4.2 için tam çözüm-yaklaşık çözüm karşılaştırılması……...**41**

# ÖZET

## Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri İçin Sıralama Yöntemleri

Ayşe Ayça DÜZEN

Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğretim Üyesi Pınar ALBAYRAK

Kesirli analizde türev ve integral kavramları; fizik, mühendislik, biyoloji ve ekonomi gibi birçok alanda karşılaşılan karmaşık süreçlerin daha gerçekçi biçimde modellenmesine olanak sağlar. Bunun temel nedeni, kesirli türevlerin klasik (tamsayı mertebeli) türevlere kıyasla gerçek sistemlerin bellek ve geçiş özelliklerini daha doğru şekilde temsil etmesidir.

Kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde çeşitli analitik ve nümerik yöntemler kullanılmıştır. Ancak bu denklemlerin analitik çözümleri yalnızca sınırlı özel durumlarda mümkün olabildiğinden, sayısal yöntemlere olan ihtiyaç giderek artmaktadır.

Bu tez kapsamında, Hermit Sıralama Yöntemi (HSY) ve Lucas Sıralama Yöntemi (LSY) olmak üzere iki farklı sıralama tekniği kullanılarak, kesirli mertebeden diferansiyel denklemler için yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Öncelikle kesirli analizde sıklıkla karşılaşılan Gama, Beta, Mittag-Leffler ve Hata fonksiyonlarıyla birlikte Euler, Riemann–Liouville, Caputo ve Grünwald–Letnikov kesirli türev tanımları kuramsal olarak incelenmiştir. Ardından Hermit ve Lucas polinomlarının yapısı tanıtılmış; bu polinomlara dayalı sıralama yöntemleriyle, kesirli diferansiyel

denklemlerin çözümünde kullanılabilecek matris temelli yaklaşımlar geliştirilmiştir.

Yöntemlerin uygulanabilirliği seçilen örnek problemler üzerinde test edilerek değerlendirilmiş, elde edilen sayısal sonuçlar doğruluk açısından karşılaştırılmıştır. Sonuçlar hem Hermit hem de Lucas sıralama yöntemlerinin kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümünde etkili ve güvenilir alternatifler sunduğunu ortaya koymuştur. Bu çalışma, benzer nitelikteki problemler için yeni ve uygulanabilir bir sayısal çözüm yaklaşımı sunmayı hedeflemektedir.

**Anahtar Kelimeler:** Kesirli diferansiyel denklemler, Hermit polinomları, Lucas polinomları, sıralama yöntemleri, sayısal çözüm

# ABSTRACT

## Collocation Methods for Numerical Solutions of Fractional Order Differential Equations

Ayşe Ayça DÜZEN

Department of Mathematics

Master of Science

Supervisor: Dr. Pınar ALBAYRAK

Fractional calculus, which extends the concepts of differentiation and integration to non-integer orders, enables more accurate modeling of complex processes encountered in fields such as physics, engineering, biology, and economics. This is because fractional derivatives can more precisely capture memory and hereditary properties of real systems compared to classical integer-order derivatives.

Various analytical and numerical methods have been employed for solving fractional differential equations. However, since analytical solutions are generally limited to special cases, the demand for numerical approaches has steadily increased.

In this thesis, approximate solutions to fractional-order differential equations are obtained using two different collocation techniques: the Hermite Collocation Method and the Lucas Collocation Method. First, commonly used special functions in fractional analysis—such as Gamma, Beta, Mittag-Leffler, and Error functions—along with fractional derivative definitions including Euler, Riemann–Liouville, Caputo, and Grünwald–Letnikov, are theoretically examined. Then, the structures of Hermite and Lucas polynomials are introduced, and matrix-based numerical approaches based on these polynomials are developed for solving fractional differential equations.

The applicability of the proposed methods is demonstrated through selected example problems. Numerical results are evaluated and compared in terms of accuracy. The findings show that both the Hermite and Lucas Collocation Methods are effective and reliable tools for solving fractional-order differential equations. The approach presented in this thesis aims to offer a practical and efficient numerical solution alternative for similar types of problems.

**Keywords:** Fractional differential equations, Hermite polynomials, Lucas polynomials, collocation methods, numerical solution

# 1
# GİRİŞ

Diferansiyel denklemler; doğa bilimlerinden mühendisliğe, ekonomiden biyolojiye kadar birçok alanda karşılaşılan problemlerin matematiksel modellemesinde temel araçlardan biridir. Ancak klasik diferansiyel denklemler, bazı karmaşık fiziksel ve biyolojik süreçlerin modellenmesinde yetersiz kalabilmektedir. Bu tür sistemlerin daha gerçekçi biçimde modellenebilmesi için, türev ve integral kavramlarını tam sayı dışı (kesirli veya reel) mertebelere genelleyen kesirli analiz yaklaşımı geliştirilmiştir. Bu bağlamda kesirli diferansiyel denklemler, klasik modellerin genelleştirilmiş halleri olarak ortaya çıkmış ve birçok alanda etkin biçimde kullanılmaya başlanmıştır.

Kesirli türev ve kesirli integral, türev ve integralin tamsayı olmayan mertebelere genişletilmiş halidir. Kesirli analiz kavramı ilk kez 30 Eylül 1695 tarihinde, G. L'Hospital'ın G. Leibniz'e yazdığı bir mektupta, "Türevler kesirli mertebeye genişletilebilir mi?" sorusuyla gündeme gelmiştir. Leibniz, bu fikri "Bir gün faydalı sonuçlar çıkarılacak açık bir paradoks" olarak nitelendirmiştir [1]. Bu erken dönemde fikir olarak ortaya atılan kesirli analiz, zamanla birçok büyük matematikçinin dikkatini çekmiştir. Euler, Lagrange, Liouville, Riemann, Lacroix, Letnikov, Grünwald ve Caputo gibi bilim insanlarının katkılarıyla kavramsal ve analitik olarak gelişim göstermiştir [2]. Özellikle Joseph Liouville ve Bernhard Riemann'ın 19. yüzyıldaki çalışmaları, kesirli türev ve integrallerin matematiksel temelini atmıştır. Kesirli türev ve kesirli integral 20. yüzyılın ilk yarısında diğer bilim dallarında uygulanabilme özelliği ile gelişmeye başlamış ve Caputo'nun önerdiği kesirli türev tanımıyla birlikte kesirli analiz mühendislik ve fen bilimleri alanlarında daha fazla uygulama alanı bulmuştur [3-5].

Günümüzde kesirli diferansiyel denklemler; kontrol sistemleri, akışkanlar mekaniği, difüzyon süreçleri, biyolojik büyüme modelleri, elektrik devreleri, ekonomi ve finans gibi pek çok alanda kullanılmaktadır. Kesirli diferansiyel denklemler klasik diferansiyel denklemlerin yetersiz kaldığı alanlarda kapsamlı ve esnek bir çözüm sağlar. Özellikle, klasik türevlerin açıklamakta yetersiz kaldığı

“bellek” ve “geçmişe bağımlı” sistem davranışlarını başarılı bir şekilde modelleyebilme yetisine sahiptir. Bu nedenle, kesirli diferansiyel denklemlerin hem teorik hem de sayısal çözüm yöntemleri üzerine yapılan çalışmalar son yıllarda önemli bir artış göstermiştir [6-10].

Kesirli diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri çoğunlukla yalnızca özel durumlarda elde edilebildiğinden, sayısal çözüm yöntemleri büyük önem taşımaktadır [11-12]. Literatürde bu amaçla kullanılan çeşitli sayısal yöntemler bulunmaktadır. Adomian ayrıştırma yöntemi (AAY), Sonlu farklar yöntemi (SFY), Varyasyonel iterasyon yöntemi (VİY), Homotopi analiz yöntemi (HAY) ve Legendre operasyonel matris yöntemi (LOMY) gibi teknikler, kesirli denklemlerin çözümünde yaygın olarak kullanılmaktadır [13-18]. Bu yöntemlere ek olarak, son yıllarda ortogonal polinomlara dayalı sıralama yöntemleri dikkat çekmiştir. Özellikle Hermit ve Lucas polinomları, diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesinde etkili matematiksel araçlar olarak öne çıkmaktadır [19-22]. Hermit polinomları, 19. Yüzyılda yaşamış Fransız matematikçi Charles Hermite tarafından tanımlanmıştır. Hermit polinomlarına dayalı sıralama yöntemi, çözüm fonksiyonunun Hermit polinomları ile yaklaşık olarak ifade edilmesini sağlar. Bu yöntem başlangıç değerli ve sınır değerli problemler, diferansiyel ve integral denklemler, kesirli mertebeden denklemler gibi problemlerde uygulanır. El-Mesiry, El-Sayed ve El-Saka [23], çok terimli kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde Hermit sıralama yönteminin doğruluğunu ve kullanılabilirliğini göstermişlerdir. Ganaie ve Kukreja [24] Kübik Hermit sıralama yöntemiyle doğrusal olmayan Burgers denkleminin çözümünü elde etmişlerdir. Ş. Yüzbaşı, E. Gök ve M. Sezer [25] pantograph tipli geçikmeli diferansiyel denklemlerde Hermit polinomlarına dayalı sıralama yönteminin etkinliğini göstermişlerdir. Lucas polinomları ise 19. Yüzyıl sonlarında Fransız matematikçi Édouard Lucas tarafından tanımlanan Lucas sayılarına dayanır. Lucas ünlü Fibonacci sayılarını (1,1,2,3,5,8,13,21,34,…) genelleştirerek benzer özellikler taşıyan bir sayı dizisi geliştirmiştir. Lucas dizisi Fibonacci dizisine göre farklı başlangıç koşullarına sahiptir [26]. Lucas sıralama yöntemi, diferansiyel denklem çözümünü Lucas polinomları [27] cinsinden ifade ederek çözüm katsayılarını belirlemeyi sağlar. Bu yöntem, özellikle başlangıç değerli kesirli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde tercih edilir. Abd-Elhameed ve çalışma arkadaşları [28] zaman ve

fractional difüzyon denklemleri için Lucas polinomları temelli spektral tau tekniği geliştirmişlerdir. Ş. Yüzbaşı ve G. Yıldırım [29], Pell ve Lucas polinomlarını kullanarak fractional HIV-AIDS modeli üzerindeki sıralama yöntemi geliştirmiş, model parametreleri ve hata analizi sunmuşlardır. Y. Yazlık ve çalışma arkadaşları [30], Fibonacci ve Lucas dizilerini genelleştiren yeni bir dizi tanımlamışlar, bu diziyi kullanarak genelleştirilmiş matris dizileri kurmuşlar ve son olarak Fibonacci ve Lucas dizileri ve bunların matris dizileri arasındaki bazı önemli ilişkileri sunmuşlardır. G. Bilgici [31], $\{L_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ tarafından üretilen Lucas dizisinin genelleştirilmiş halini incelemiş, bu dizi için Binet formülleri ve özdeşlikler elde etmiştir. N. Bayku ve M. Sezer [32], yüksek mertebeden doğrusal homojen olmayan pantograf tipi gecikmeli diferansiyel denklemleri çözmek için Taylor ve Lucas polinomlarının birleşiminden oluşan yeni bir sıralama yöntemi incelemişlerdir. Ş. Yüzbaşı ve G. Yıldırım [33], yüksek mertebeden doğrusal Fredholm-Volterra tipli integro diferansiyel denklemleri için Pell ve Lucas polinomlarına dayalı bir sıralama yöntemini kullanmışlardır.

Bu tez çalışmasında, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için etkili iki yöntem: Hermit sıralama yöntemi (HSY) ve Lucas sıralama yöntemi (LSY) ele alınmıştır. Bu amaçla öncelikle Gama, Beta, Mittag-Leffler ve Hata fonksiyonu gibi özel fonksiyonların tanımları verilmiş; ardından kesirli türev tanımları ayrıntılı olarak açıklanmıştır. Tezin ilerleyen bölümlerinde Hermit ve Lucas polinomlarının temel özellikleri tanıtılmış ve bu polinomlara dayalı sıralama yöntemleri yardımıyla, belirli başlangıç ve sınır koşulları altında yaklaşık çözümler üretilmiştir. Matris biçiminde yapılan bu çözüm yaklaşımları, sistematik ve uygulanabilir bir yapı sunmaktadır.

Tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş olmak üzere, ikinci bölümde kesirli türev ve kesirli integralde kullanılan temel kavramlar (bazı özel fonksiyonlar ve kesirli türev tanımları) verilmiştir. Üçüncü bölümde Hermit polinomları ve Hermit sıralama yöntemi; dördüncü bölümde Lucas polinomları ve Lucas sıralama yöntemi ayrıntılı şekilde ele alınmış ve örnekler üzerinde uygulanmıştır. Son olarak beşinci bölümde elde edilen sonuçlar değerlendirilmiş ve Hermit ile Lucas sıralama yöntemlerinin etkinliği tartışılmıştır.

Bu çalışmayla, Hermit ve Lucas sıralama yöntemlerinin kesirli diferansiyel denklemlerin çözümündeki uygulanabilirliği ve başarı düzeyi ortaya konulmakta;

gelecekte benzer yapıya sahip problemlerin çözümüne katkı sağlayacak yöntemsel bir yaklaşım sunulması hedeflenmektedir.

# 2
# TEMEL KAVRAMLAR

## 2.1. Bazı özel fonksiyonlar

Kesirli analiz konusu için öncelikle bazı temel fonksiyon tanımlarını incelemek gerekir. Bu fonksiyonlar Gama, Beta, Mittag- Leffler ve Hata fonksiyonlarıdır.

### 2.1.1.Gama Fonksiyonu

Bu fonksiyon kesirli analiz, olasılık dağılımları, diferansiyel denklemler, fizik ve mühendislik alanlarında kullanılır. Kesirli mertebeden türev ve integral hesaplamaları gama fonksiyonu yardımıyla yapılmaktadır. Dolayısıyla bu fonksiyon kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde önemlidir. Gama fonksiyonu *Γ(z)* ile gösterilir.

**Tanım 2.1.1.1:** Gama fonksiyonunun Gauss tarafından yapılan ilk tanımı $\Gamma: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} \quad z \neq 0,-1,-2 \tag{2.1}$$

şeklindedir. Burada $z$ yerine $z+1$ yazılırsa,

$$\Gamma(z+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\dots(z+n+1)} = z\Gamma(z) \tag{2.2}$$

elde edilir. Tanımdan ;

$$\Gamma(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n}{1.2.3\dots n(n+1)} = 1$$

$$\Gamma(2) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1 = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3.2 = 3!$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(n) = 1.2.3 \ldots . (n-1) = (n-1)! \qquad (2.3)$$

olduğu görülür.

**Tanım 2.1.1.2:** Gama fonksiyonunun ünlü matematikçi Euler tarafından yapılan tanımı $\Gamma: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \qquad \mathrm{Re}(z) > 0 \qquad (2.4)$$

şeklindedir. $n$ tam sayıları için

$$n! = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n} dt \qquad (2.5)$$

olduğundan Gama fonksiyonuna bazen genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu da denir. Gama fonksiyonunu integral dönüşüm tanımına göre ispatlarsak,

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z} dt = [e^{-t} t^{z}] \begin{matrix} t = \infty \\ t = 0 \end{matrix} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\,\Gamma(z) \qquad (2.6)$$

elde edilir. Böylelikle (2.2) denkleminden elde ettiğimiz sonucu Tanım 2.1.1.2'yi kullanarak (2.6) denklemiyle de elde etmiş oluruz [34].

### 2.1.2. Beta Fonksiyonu

Kesirli hesaplamalarda bazı durumlarda Gama fonksiyonunun değerlerinin belirli kombinasyonları yerine başka bir özel fonksiyon olan Beta fonksiyonunun kullanılması daha uygundur. Euler'in tanımladığı Gama fonksiyonuna yakın özel

bir fonksiyondur. Özellikle istatiksel dağılım teorisi hesaplarında ve olasılık teorisinde çok kullanılmaktadır. Genellikle $B(z,w)$ şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.1.2.1**

Beta fonksiyonu

$$B(z,w)=\int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau \quad , \qquad Re(z)>0, Re(w)>0 \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır. $p>0$ ve $q>0$ olmak üzere Beta ve Gama fonksiyonları arasında ilişki

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}=B(q,p) \tag{2.8}$$

şeklinde verilebilir. Beta fonksiyonunu bazı temel özellikleri aşağıdaki gibidir:

1. $B(z,w)=B(w,z)$
2. $B(z,w)=B(z+1,w)=B(z,w+1)$
3. $B(z,w)=\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}}dt$
4. $B(z,w)=\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{1+t}dt=\frac{\pi}{\sin(z\pi)}$

Beta ve Gama fonksiyonları kesirli analizde birbirini tamamlayıcı rol oynarlar [34].

### 2.1.3 Mittag - Leffler Fonksiyonu

Mitter-Leffler fonksiyonu İsveç kökenli matematikçi Agarwal tarafından bulunmuş, kesirli analizde ve diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan özel bir fonksiyondur. Mittag-Leffler fonksiyonu öncelikle kesirli diferansiyel denklemlerde kullanılmış olsa da daha sonra kinetik denklemlerde de kullanılmıştır.

$\alpha>0$ olmak üzere bir parametreli Mittag - Leffler fonksiyonu seri açılımı ile

$$\mathrm{E}_{\boldsymbol{\alpha}}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \tag{2.9}$$

şeklinde verilir. $\alpha>0$ ve $\beta>0$ olmak üzere iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu;

$$\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{\Gamma(\alpha r + \beta)} \tag{2.10}$$

şeklinde gösterilir. Mittag-Leffler fonksiyonunun bazı değerleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\mathrm{E}_{\alpha,1}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{\Gamma(\alpha r + 1)} \equiv \mathrm{E}_{\boldsymbol{\alpha}}(z)$$

$$E_{1,1}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{\Gamma(r + 1)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{r!} = e^z$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{\Gamma(r + 2)} = \frac{1}{z} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^{r+1}}{(r+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{\Gamma(r + 3)} = \frac{1}{z^2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^{r+2}}{(r+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2} \tag{2.11}$$

Denklemleri bu şekilde bulmaya devam edersek,

$$E_{1,\beta}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{z^{r-1}} \left( e^z - \sum_{r=0}^{\beta-2} \frac{z^r}{r!} \right) \tag{2.12}$$

elde edilir [4].

### 2.1.4 Hata (Error) Fonksiyonu

Hata fonksiyonu Gauss hata fonksiyonu olarak da adlandırılabilir. Bu fonksiyon kesirli analiz, istatistik ve olasılık teorisinde kullanılır. Hata fonksiyonu,

$$\mathrm{erf}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \ , & x > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^0 e^{-t^2} dt \ , & x < 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

şeklinde tanımlanır.

## 2.2. Kesirli Analiz

Kesirli analizde ağırlıklı olarak kullanılan türev tanımları Euler, Riemann-Liouville, Grünwarld-Letnikov ve Caputo kesirli türev tanımlarıdır. Kullanılan tanımların fiziksel yorumları farklılık gösterir. Bu nedenle hangi problemde hangi

kesirli türev tanımı uygulandığında sonucun daha iyi olacağı bilinip, uygun olanının seçilmesi kesirli analizdeki tanımların çeşitliliğinin avantajıdır. Yapılan tanımlar ve yaklaşımlar aşağıdaki şekildedir;

a) Euler Kesirli Türev Tanımı:

Euler 1738 yılında,

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n} \tag{2.14}$$

formülünü Gama fonksiyonunu kullanarak

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \tag{2.15}$$

şeklinde tanımlamıştır [5].

b) Riemann-Lioville Kesirli Türev Tanımı:

Riemann tarafından Liouville'nin çalışmaları kullanılarak 1847'de tanımlanmıştır. Riemann-Liouville kesirli türev tanımı $b \epsilon \mathbb{R}$ için

$${}_bD_t^b f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-b)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_b^t \frac{f(w)}{(t-w)^{b-n+1}} dw \tag{2.16}$$

şeklindedir [35].

c) Caputo Kesirli Türev Tanımı:

İtalyan matematikçi Caputo tarafından 1967 yılında önerilen kesir dereceli türev hesaplama yöntemidir. Caputo, Riemann-Liouville ve Laplace dönüşümlerinde yaşanan sıkıntıları ortadan kaldırmak için yeni bir tanım formülleştirmiştir. Caputo kesirli türevi genellikle başlangıç koşulları ve türevlerin uyumlu şekilde ifade edilmesi gereken durumlarda kullanılır. Caputo kesirli türev tanımı,

$${}^C D^b f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-b)} \int_0^t f^{(n)}(w)(t-w)^{n-b-1} dw \ , \ n-1 < b \leq n \tag{2.17}$$

şeklinde tanımlanmıştır [4].

d) Grünwald-Letnikov Kesirli Türev Tanımı:

Grünwald-Letnikov kesirli türevi 1867 yılında Anton Karl Grünwald ve Aleksey Vasilievich Letkinov tarafından tanımlanmıştır. $n > 0$, $f \in C^{[n]}[a,b]$, $a < x \leq b$ ve $h_N = (x-a)/N$ olmak üzere $f$ fonksiyonunun $n$. mertebeden Grünwald-Letkinov kesirli türevi,

$$D_a^n f(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{\Delta_{h_N}^n f(x)}{h_N^n} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{h_N^n} \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh_N) \quad (2.18)$$

şeklinde tanımlıdır [3].

# 3
# HERMİT POLİNOMLARI VE HERMİT SIRALAMA YÖNTEMİ

## 3.1. Hermit Diferansiyel Denklemi ve Hermit Polinomları

**Tanım 3.1** Hermit polinomları matematik, fizik ve mühendislik problemlerinde sık karşılaşılan özel fonksiyonlar arasında yer alır. Bu polinomlar (3.1) diferansiyel denkleminin çözümleridir.

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0\,, \qquad (\ n = \ 0,1,2,\dots) \tag{3.1}$$

diferansiyel denklemine Hermit diferansiyel denklemi denir. Burada *n*, polinomun derecesini belirleyen sabittir ve Hermit polinomlarının indeksi olarak tanımlanır.

**Tanım 3.2** Hermit diferansiyel denkleminin verilen *n* pozitif tam sayısı için polinom olan çözümüne Hermit polinomu denir, $H_n$ ile gösterilir ve

$$H_n(x) = \sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^p \frac{n!}{p!\,(n-2p)!} (2x)^{n-2p} \tag{3.2}$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & , \quad n\ çift\ ise \\ \dfrac{n-1}{2} & , \quad n\ tek\ ise \end{cases} \tag{3.3}$$

olarak tanımlanır.

(3.2) formülü yardımıyla ilk birkaç Hermit polinomu hesaplanırsa

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x \tag{3.4}$$

elde edilir.

### 3.2 Hermit Sıralama Yöntemi

Hermit sıralama yöntemi, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü elde etmek amacıyla geliştirilen sayısal bir yöntemdir.

$a \leq x \leq b$ olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{m} P_i(x)\ {}^{C}D^{i\alpha}\, y(x) = g(x) \tag{3.5}$$

kesirli mertebeden diferansiyel denklemi

$${}^{C}D^{k}\, y(a) = \delta_k \qquad , (k = 0,1, \dots, [\![m\alpha]\!] - 1) \tag{3.6}$$

başlangıç koşulları altında göz önüne alınsın.

Burada $0 < \alpha \leq 1$, $n - 1 < m\alpha < n$ ve $m, n \in \mathbb{N}^+$ dır.

$N \in \mathbb{N}^+$ ve $[\![m\alpha]\!] \leq N$ olmak üzere, (3.5) kesirli diferansiyel denklemini Hermit polinomları ile yazarsak

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n H_n(x^\alpha) = a_0 H_0(x^\alpha) + a_1 H_1(x^\alpha) + \cdots + a_N H_N(x^\alpha) \tag{3.7}$$

elde ederiz. (3.7)'deki kesilmiş (sonlu) Hermit serisi formunda bir yaklaşık çözümünün var olduğu kabul edilsin. (3.7) deklemini

$$[y(x)] = H(x^\alpha).A = [H_0(x^\alpha) \dots H_N(x^\alpha)].[a_0 \dots a_N]^T \tag{3.8}$$

olacak şekilde matris biçiminde ifade edebiliriz. $a \leq x \leq b$ için $x_j$ sıralama noktaları

$$x_j = a + \frac{b-a}{N} j \ , \qquad (j = 0,1, \dots, N) \tag{3.9}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda (3.8) ifadesi $x_j$ sıralama noktaları için

$$\left[y(x_j)\right] = H\left(x_j^{\alpha}\right)A \ , \quad (j = 0,1, \dots N) \tag{3.10}$$

matris yapısını oluşturur. Bu yapı

$$\begin{bmatrix} y(x_0) \\ \vdots \\ y(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0(x_0^{\alpha}) & \cdots & H_N(x_0^{\alpha}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_0(x_N^{\alpha}) & \cdots & H_N(x_N^{\alpha}) \end{bmatrix}_{(N+1)x(N+1)} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}_{(N+1)x1} \tag{3.11}$$

şeklini alır. Tanım 3.2'de tanımlanan Hermit polinomlarının

$$H_n(x) = \sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^p \frac{n!}{p!\,(n-2p)!} (2x)^{n-2p} \tag{3.12}$$

özelliği kullanılarak Hermit polinomları *N*'nin tek ve çift değerlerine göre aşağıdaki gibi matris formuna dönüştürülebilir:

*N* tek ise:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} H_0(x^{\alpha}) \\ H_1(x^{\alpha}) \\ \vdots \\ H_{N-1}(x^{\alpha}) \\ H_N(x^{\alpha}) \end{bmatrix}}_{H^T(x^{\alpha})} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2^0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2^1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{\left(\frac{N-5}{2}\right)} \frac{2^0}{0!} \frac{(N-1)!}{\left(\frac{N-1}{2}\right)!} & 0 & \cdots & 2^{N-1} & 0 \\ 0 & (-1)^{\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{2^1}{1!} \frac{N!}{\left(\frac{N-1}{2}\right)!} & \cdots & 0 & 2^N \end{bmatrix}}_{\Delta} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ x^{\alpha} \\ \vdots \\ x^{(N-1)\alpha} \\ x^{N\alpha} \end{bmatrix}}_{X^T(x^{\alpha})} \tag{3.13}$$

*N* çift ise:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} H_0(x^{\alpha}) \\ H_1(x^{\alpha}) \\ \vdots \\ H_{N-1}(x^{\alpha}) \\ H_N(x^{\alpha}) \end{bmatrix}}_{H^T(x^{\alpha})} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2^0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2^1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & (-1)^{\left(\frac{N-2}{2}\right)} \frac{2^1}{1!} \frac{(N-1)!}{\left(\frac{N-1}{2}\right)!} & \cdots & 2^{N-1} & 0 \\ (-1)^{\left(\frac{N-4}{2}\right)} \frac{2^0}{0!} \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}\right)!} & 0 & \cdots & 0 & 2^N \end{bmatrix}}_{\Delta} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ x^{\alpha} \\ \vdots \\ x^{(N-1)\alpha} \\ x^{N\alpha} \end{bmatrix}}_{X^T(x^{\alpha})} \tag{3.14}$$

Bu durumda, (3.13) ve (3.14) denklemleri

$$H^T(x^{\alpha}) \ = \Delta . X^T(x^{\alpha}) \tag{3.15}$$

şeklinde yazılabilir. Her iki tarafın transpozesi alınırsa (3.15) denklemi kısa olarak

$$H = X.\Delta^T \tag{3.16}$$

şeklinde yazılır.. Burada $X(x^\alpha)$ matrisi, $c$ sayısı $a \le x \le b$ aralığındaki herhangi bir sayı olmak üzere

$$X(x^\alpha) = \left[(x-c)^0 \quad (x-c)^{1\alpha} \quad \dots \quad (x-c)^{N\alpha}\right] \tag{3.17}$$

olarak tanımlanır. (3.17) ile tanımlanmış $X(x^\alpha)$'nın $\alpha$. Caputo türevini hesaplamak için:

$${}^C D^\alpha \mathrm{X}(x^\alpha) = \left[{}^C D^\alpha (x-c)^0 \quad {}^C D^\alpha (x-c)^{1\alpha} \quad \dots \quad {}^C D^\alpha (x-c)^{N\alpha}\right] \tag{3.18}$$

yazalım. Bu durumda,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} {}^C D^\alpha (x-c)^0 \\ {}^C D^\alpha (x-c)^{1\alpha} \\ \vdots \\ {}^C D^\alpha (x-c)^{N\alpha} \end{bmatrix}}_{{}^C D^\alpha X^T(x^\alpha)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \Gamma(\alpha+1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\Gamma(N\alpha+1)}{\Gamma((N-1)\alpha+1)} & 0 \end{bmatrix}}_{R} \underbrace{\begin{bmatrix} (x-c)^0 \\ (x-c)^{1\alpha} \\ \vdots \\ (x-c)^{N\alpha} \end{bmatrix}}_{\mathrm{X}^T(x^\alpha)} \tag{3.19}$$

elde edilir. Bu durumda

$${}^C D^\alpha \mathrm{X}(x^\alpha) = \mathrm{X}(x^\alpha) R^T \tag{3.20}$$

eşitliği elde edilir. (3.20) eşitliğinin tekrar Caputo türevini alırsak ${}^C D^{2\alpha}$ türevi:

$${}^C D^\alpha \, {}^C D^\alpha \mathrm{X}(x^\alpha) = {}^C D^{2\alpha} \mathrm{X}(x^\alpha) = \underbrace{{}^C D^\alpha \mathrm{X}(x^\alpha)}_{\mathrm{X}(x^\alpha) R^T} R^T = \mathrm{X}(x^\alpha)(R^T)^2 \tag{3.21}$$

olur. Bu şekilde devam edilirse $X(x^\alpha)$'nın $i\alpha$. Caputo türevi

$${}^C D^{i\alpha} X(x^\alpha) = \mathrm{X}(x^\alpha)(R^T)^i \tag{3.22}$$

olarak bulunur.

(3.15) denklemi (3.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$y(x) = X(x^\alpha).\Delta^T A \tag{3.23}$$

elde edilir. (3.23)'un $i\alpha$. Caputo türevi alınır ve (3.22)'de elde edilen denklemle beraber kullanılırsa:

$${}^C D^{i\alpha} y(x) = \mathrm{X}(x^\alpha)(R^T)^i \, \Delta^T A \tag{3.24}$$

sonucu bulunur.

(3.5) kesirli diferansiyel denklemi $x = x_j \ , \ (j = 0,1, \dots N)$ sıralama noktaları için

$$\sum_{i=0}^{m} P_i(x_j) \ {}^{C}D^{i\alpha} y(x_j) = g(x_j) \tag{3.25}$$

eşitliğini sağlar. Bu eşitlik,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_i(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_i(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_i(x_N) \end{bmatrix}}_{P_i} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{C}D^{i\alpha}\, \mathrm{y}(x_0) \\ {}^{C}D^{i\alpha}\, \mathrm{y}(x_1) \\ \vdots \\ {}^{C}D^{i\alpha}\, \mathrm{y}(x_N) \end{bmatrix}}_{Y^{i\alpha}} = \underbrace{\begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}}_{G} \tag{3.26}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda (3.25) denklemi

$$\sum_{i=0}^{m} P_i \, Y^{i\alpha} = G \tag{3.27}$$

şeklinde matris yapısı şeklinde ifade edilmiş olur.

Benzer şekilde (3.24) eşitliğini $x = x_j \ , \ (j = 0,1, \dots N)$ sıralama noktaları için hesaplar ve matris oluşturacak şekilde yazarsak,

$${}^{C}D^{i\alpha} y(x_j) = \mathrm{X}(x_j{}^{\alpha})(R^T)^i \ \Delta^T A \tag{3.28}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} {}^{C}D^{i\alpha} y(x_0) \\ {}^{C}D^{i\alpha} y(x_1) \\ \vdots \\ {}^{C}D^{i\alpha} y(x_N) \end{bmatrix}}_{Y^{i\alpha}} = \underbrace{\begin{bmatrix} X(x_0{}^{\alpha}) \\ X(x_1{}^{\alpha}) \\ \vdots \\ X(x_N{}^{\alpha}) \end{bmatrix}}_{X^{\alpha}} \left[(R^T)^i \ \Delta^T A\right] \tag{3.29}$$

elde edilir. (3.29)'deki $X^{\alpha}$ matrisi

$$X^{\alpha} = \begin{bmatrix} X(x_0{}^{\alpha}) \\ X(x_1{}^{\alpha}) \\ \vdots \\ X(x_N{}^{\alpha}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (x_0 - c)^{\alpha} & \cdots & (x_0 - c)^{N\alpha} \\ 1 & (x_1 - c)^{\alpha} & \cdots & (x_1 - c)^{N\alpha} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (x_N - c)^{\alpha} & \cdots & (x_N - c)^{N\alpha} \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

şeklinde tanımlanır. (3.29) bulunan eşitlik (3.27) toplamında yerine yazılırsa

$$\sum_{i=0}^{m} P_i \, X^{\alpha}(R^T)^i \, \Delta^T A = G \tag{3.31}$$

elde edilir.

$$\mathrm{V} = [V_{kr}] = \sum_{i=0}^{m} P_i \, X^{\alpha}(R^T)^i \, \Delta^T \, , \quad k, r = 0, \dots, N \tag{3.32}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda (3.31) denklemi

$$\mathrm{VA} = \mathrm{G} \tag{3.33}$$

şeklinde olur. (3.33) eşitliği $(N+1)$ x $(N+1)$'lik bir cebirsel sistem olarak yazılabilir. Bu sistemin arttırılmış matrisi ise

$$[V;F] = \begin{bmatrix} V_{00} & \cdots & V_{0N} & ; & g(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ V_{N0} & \cdots & V_{NN} & ; & g(x_N) \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

olur. (3.6) denkleminde (3.24) eşitliği yerine yazılırsa

$$\mathrm{X}^{\alpha}(a)(R^T)^k \; \Delta^T A = \delta_k \quad , (k = 0,1, \dots, [\![m\alpha]\!] - 1) \tag{3.35}$$

elde edilir.

$$Z_k = \mathrm{X}^{\alpha}(a)(R^T)^k \, \Delta^T = \begin{bmatrix} Z_{k0} & Z_{k1} & \dots & Z_{k([\![m\alpha]\!]-1)} \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda (3.35) eşitliği

$$Z_k . A = \delta_k \quad , \quad (k = 0,1, \dots, [\![m\alpha]\!] - 1) \tag{3.37}$$

şeklinde bulunur. (3.37) sisteminin arttırılmış matrisi

$$[Z_k; \delta_k] = \begin{bmatrix} Z_{00} & \cdots & Z_{0N} & ; & \delta_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ Z_{([\![m\alpha]\!]-1)0} & \cdots & Z_{([\![m\alpha]\!]-1)N} & ; & \delta_{([\![m\alpha]\!]-1)} \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

olarak elde edilir. (3.34) matrisinin son $[\![m\alpha]\!]$ satırı silinir ve silinen satırların yerine (3.38) matrisi yazılırsa,

$$[\tilde{V},\tilde{F}]=\begin{bmatrix} V_{00} & \cdots & V_{0N} & ; & g(x_0) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ V_{(N-[\![m\alpha]\!]-1)0} & \cdots & V_{(N-[\![m\alpha]\!]-1)N} & ; & g\left(x_{N-[\![m\alpha]\!]-1}\right) \\ Z_{00} & \cdots & Z_{0N} & ; & \delta_0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Z_{([\![m\alpha]\!]-1)0} & & Z_{([\![m\alpha]\!]-1)N} & & \delta_{([\![m\alpha]\!]-1)} \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

elde edilir. (3.39) matrisi $\tilde{V}A=\tilde{G}$ şeklinde de yazılabilir.

Eğer $\det(\widetilde{V})\neq 0$ ise (3.39)'in çözümü

$$A=(\tilde{V})^{-1}\tilde{G} \tag{3.40}$$

olur. Buradan

$$A=[a_0 \dots a_n]^T \tag{3.41}$$

katsayı matrisi hesaplanmış olur.

Bu durumda (3.5) diferansiyel denkleminin Hermit polinomu çözümü $A$ kullanılarak,

$$y(x)=\sum_{n=0}^{N} a_n H_n(x^\alpha)=a_0H_0(x^\alpha)+a_1H_1(x^\alpha)+\cdots+a_NH_N(x^\alpha) \tag{3.42}$$

şeklinde elde edilir.

### 3.3 Örnekler

**Örnek 3.3.1**

$0\leq x\leq 1$ olmak üzere

$$2y(x)+D^{\,0,5}y(x)=\frac{3}{4.\Gamma(2,5)}\left(2\sqrt{x}-\frac{16}{5}\sqrt{x^5}\right)+2(x-x^3) \tag{3.43}$$

kesirli diferansiyel denklemini $y(0)=0$ başlangıç koşulu ile göz önüne alalım. Bu denklemin tam çözümü $y(x)=x-x^3$ fonksiyonudur.

(3.43) denklemine $N=5,\ \alpha=0{,}5$ ve $m=2$ için Hermit sıralama yöntemi uygulayarak sonlu Hermit serisi şeklindeki yaklaşık çözümünü bulalım.

(3.43) denklemine göre $g(x) = \frac{3}{4.\Gamma(2,5)}(2\sqrt{x} - \frac{16}{5}\sqrt{x^5}) + 2(x - x^3)$ , $P_0(x) = 2$, $P_1(x) = 1$ ve $P_2(x) = 0$ şeklindedir.

$0 \leq x \leq 1$ ve $N = 5$ için sıralama noktaları $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$ , $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0{,}6$ , $x_4 = 0.8$, $x_5 = 1$ olarak elde edilir.

Bu durumda Hermit sıralama yönteminde kullanılacak matrisler:

$$P_0(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, P_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$\Delta^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -12 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & -160 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$R^T = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}8862 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}1284 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}3293 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}5045 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6617 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$X^{0,5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0{,}4472 & 0{,}2 & 0{,}0894 & 0{,}04 & 0{,}0179 \\ 1 & 0{,}6325 & 0{,}4 & 0{,}2529 & 0{,}16 & 0{,}1012 \\ 1 & 0{,}7746 & 0{,}6 & 0{,}4648 & 0{,}36 & 0{,}2789 \\ 1 & 0{,}8944 & 0{,}8 & 0{,}7156 & 0{,}64 & 0{,}5724 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}8563 \\ 1{,}2029 \\ 1{,}1386 \\ 0{,}5518 \\ -0{,}677 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

olarak bulunur. Bu matrisler ve Mathematica programı kullanılarak arttırılmış matris

$$\left[\tilde{V},\tilde{G}\right]=\begin{bmatrix}2 & 1{,}776 & -3{,}995 & -10{,}659 & 23{,}946 & 106{,}587 ; & 0\\ 2 & 3{,}561 & -0{,}381 & -17{,}809 & -15{,}989 & 145{,}79 ; & 0{,}8563\\ 2 & 4{,}302 & 2{,}055 & -17{,}512 & -37{,}445 & 107{,}088 ; & 1{,}2029\\ 2 & 4{,}871 & 4{,}296 & -15{,}408 & -52{,}846 & 52{,}9 ; & 1{,}1386\\ 2 & 5{,}35 & 6{,}437 & -12{,}144 & -63{,}54 & -7{,}452 ; & 0{,}5518\\ 1 & 0 & -2 & 0 & 12 & 0 ; & -0{,}677\end{bmatrix} \quad (3.49)$$

şeklinde elde edilir. (3.49) matrisinin determinantı sıfırdan farklıdır.

Bu sistemin çözümü Mathematica programı yardımıyla yapılırsa

$$A=\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\\ a_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2{,}97\\ -6{,}55\\ 2{,}66\\ -1{,}99\\ 0{,}19\\ -0{,}09\end{bmatrix} \quad (3.50)$$

katsayılar matrisi elde edilir. $n=0{,}1,\ldots,5$ için $H_n\left(\sqrt{x}\right)$ Hermit polinomları:

$$H_0\left(\sqrt{x}\right)=1$$

$$H_1\left(\sqrt{x}\right)=2\sqrt{x}$$

$$H_2\left(\sqrt{x}\right)=4x-2$$

$$H_3\left(\sqrt{x}\right)=8\sqrt{x^3}-12\sqrt{x}$$

$$H_4\left(\sqrt{x}\right)=16x^2-48x+12$$

$$H_5\left(\sqrt{x}\right)=32\sqrt{x^5}-160\sqrt{x^3}+120\sqrt{x} \quad (3.51)$$

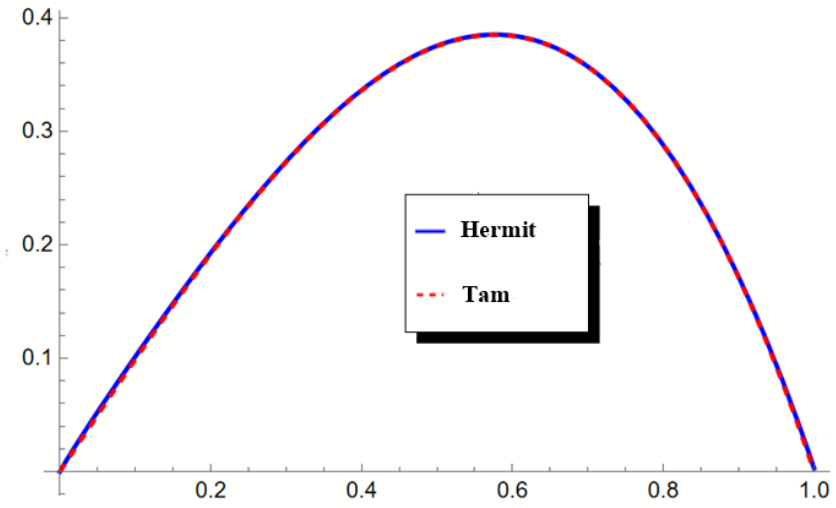
şeklindedir. Bu durumda (3.43) diferansiyel denkleminin HSY ile elde edilen Hermit serisi şeklindeki yaklaşık çözümü

$$y(x)=\sum_{n=0}^{5}a_nH_n\left(\sqrt{x}\right)=-1.77636.10^{-15}-0{,}00033\sqrt{x}+1{,}2629x-$$
$$-1{,}482\sqrt{x^3}+3{,}123x^2-2{,}901\sqrt{x^5} \quad (3.52)$$

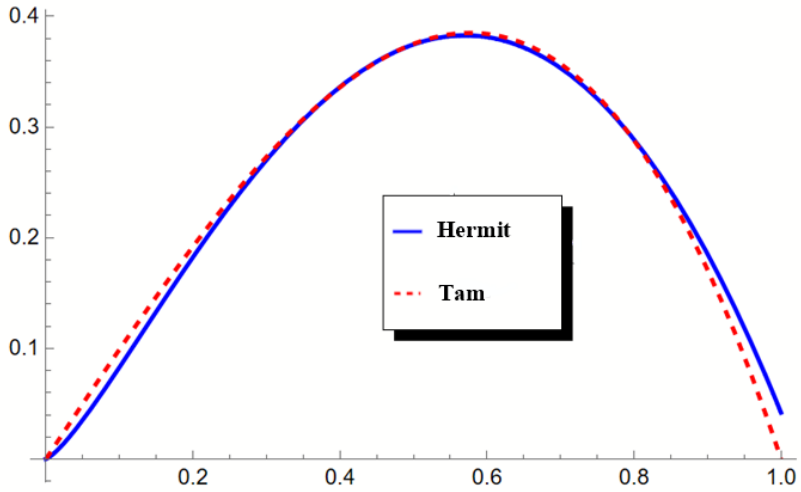
olarak elde edilir.

**Tablo 3.1** Örnek 3.3.1 için tam çözüm-yaklaşık çözüm karşılaştırılması

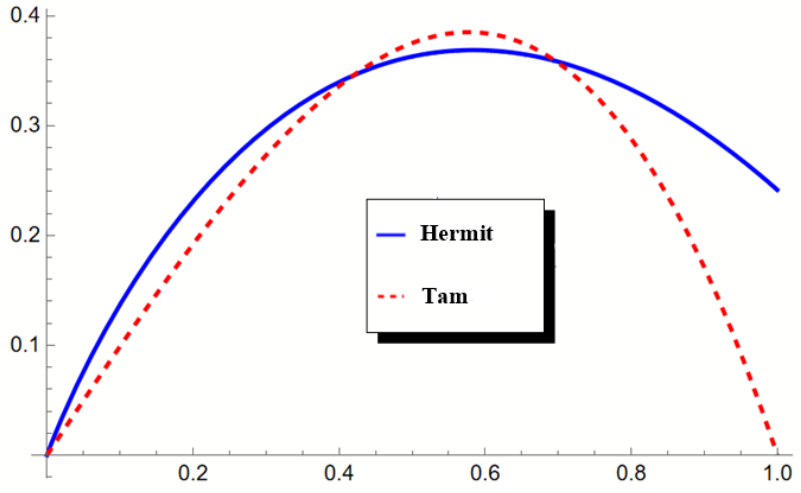
| $x_j$ | Tam çözüm | $N = 5$ için HSY ile yaklaşık çözüm | Mutlak hata |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $-1.77636.10^{-15}$ | $1.77636.10^{-15}$ |
| 0,1 | 0,099 | 0,101384 | $2,38416.10^{-3}$ |
| 0,2 | 0,192 | 0,192925 | $9,24684.10^{-4}$ |
| 0,3 | 0,273 | 0,273281 | $2,80813.10^{-4}$ |
| 0,4 | 0,336 | 0,336229 | $2,28603.10^{-4}$ |
| 0,5 | 0,375 | 0,375295 | $2,94602.10^{-4}$ |
| 0,6 | 0,384 | 0,384218 | $2,17565.10^{-4}$ |
| 0,7 | 0,357 | 0,357025 | $2,46307.10^{-5}$ |
| 0,8 | 0,288 | 0,288027 | $2,70123.10^{-5}$ |
| 0,9 | 0,171 | 0,171797 | $7,96779.10^{-4}$ |
| 1 | 0 | $3,14084.10^{-3}$ | $3,14084.10^{-3}$ |




**Şekil 3.1** Örnek 3.3.1'in tam çözümü ile N = 5 için HSY ile hesaplanan yaklaşık çözümünün grafik karşılaştırılması




**Şekil 3.2** Örnek 3.3.1'in tam çözümü ile N = 4 için HSY ile hesaplanan yaklaşık çözümünün grafik karşılaştırılması




**Şekil 3.3** Örnek 3.3.1'in tam çözümü ile N = 3 için HSY ile hesaplanan yaklaşık çözümünün grafik karşılaştırılması

**Örnek 3.3.2**

$$(x+3)\,y(x)+xD^{\,0,4}y(x)=6x+\frac{2}{\Gamma(1,6)}x^{1,6}+5x^{2}+\frac{2}{\Gamma(2,6)}x^{2,6}+x^{3} \quad (3.53)$$

kesirli diferansiyel denklemini $y(0)=0$ koşulu ile göz önüne alalım.

$0\le x\le 1$ , $N=8,\ \alpha=0{,}5$ için bu denkleme HSY uygulayarak diferansiyel denklemin

$$y(x)=\sum_{n=0}^{8}a_nH_n(x^{0.4}) \quad (3.54)$$

şeklinde yaklaşık çözümünü elde edelim. (3.53) denklemi için $Q_0(x)=x+3,$ $Q_1(x)=x,\ \ Q_2(x)=0,\quad g(x)=6x+\frac{2}{\Gamma(1,6)}x^{1,6}+5x^{2}+\frac{2}{\Gamma(2,6)}x^{2,6}+x^{3}$ elde edilir. Buradan, HSY uygulamak için gerekli matrisler

$$Q_0(x)=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&3{,}125&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&3{,}25&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&3{,}375&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&3{,}5&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&3{,}625&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&3{,}75&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&3{,}875&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&4\end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$Q_1(x)=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0{,}125&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0{,}25&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0{,}375&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0{,}5&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0{,}625&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0{,}75&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0{,}875&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix} \quad (3.56)$$

$$Q_2(x)=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}91671 \\ 2{,}10977 \\ 3{,}58108 \\ 5{,}34413 \\ 7{,}41466 \\ 9{,}80917 \\ 12{,}5444 \\ 15{,}6373 \end{bmatrix} \tag{3.58}$$

$$X^{0,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0{,}435 & 0{,}189 & 0{,}082 & 0{,}036 & 0{,}016 & 0{,}007 & 0{,}003 & 0{,}0001 \\ 1 & 0{,}57 & 0{,}329 & 0{,}189 & 0{,}109 & 0{,}625 & 0{,}035 & 0{,}021 & 0{,}012 \\ 1 & 0{,}675 & 0{,}456 & 0{,}308 & 0{,}208 & 0{,}141 & 0{,}095 & 0{,}064 & 0{,}043 \\ 1 & 0{,}758 & 0{,}574 & 0{,}435 & 0{,}329 & 0{,}25 & 0{,}189 & 0{,}143 & 0{,}109 \\ 1 & 0{,}828 & 0{,}687 & 0{,}567 & 0{,}471 & 0{,}391 & 0{,}324 & 0{,}268 & 0{,}222 \\ 1 & 0{,}891 & 0{,}794 & 0{,}708 & 0{,}631 & 0{,}563 & 0{,}501 & 0{,}447 & 0{,}398 \\ 1 & 0{,}948 & 0{,}897 & 0{,}852 & 0{,}808 & 0{,}766 & 0{,}725 & 0{,}689 & 0{,}652 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.59}$$

$$R^T = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}887 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}049 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}183 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}298 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}399 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}491 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}575 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}652 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.60}$$

$$\Delta^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 12 & 0 & -120 & 0 & 1680 \\ 0 & 2 & 0 & -12 & 0 & 120 & 0 & -1680 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -48 & 0 & 720 & 0 & -13440 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & -160 & 0 & 3360 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & -480 & 0 & 13440 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 & 0 & -1344 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 64 & 0 & -3584 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 128 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 256 \end{bmatrix} \tag{3.61}$$

şeklinde hesaplanır. Bu matrisler kullanılarak $A$ katsayılar matrisi Mathematica programı yardımıyla

$$A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9{,}836 \\ 20{,}437 \\ -14{,}347 \\ 7.827 \\ -2{,}438 \\ 0{,}583 \\ -0{,}99 \\ 0{,}01 \\ -0{,}0009 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

olarak elde edilir. $n = 0, 1, \dots, 8$ için $H_n(x^{0.4})$ Hermit polinomları :

$$H_0(x^{0.4}) = 1$$

$$H_1(x^{0.4}) = 2x^{0.4}$$

$$H_2(x^{0.4}) = 4x^{0.8} - 2$$

$$H_3(x^{0.4}) = 8x^{1.2} - 12x^{0.4}$$

$$H_4(x^{0.4}) = 16x^{1.6} - 48x^{0.8} + 12$$

$$H_5(x^{0.4}) = 32x^2 - 160x^{1.2} + 120x^{0.4}$$

$$H_6(x^{0.4}) = 64x^{2.4} - 480x^{1.6} + 720x^{0.8} - 120$$

$$H_7(x^{0.4}) = 128x^{2.8} - 1344x^2 + 3360x^{1.2} - 1680x^{0.4}$$

$$H_8(x^{0.4}) = 256x^{3.2} - 3584x^{2.4} + 13440x^{1.6} - 13440x^{0.8} + 1 - 1680 \quad (3.63)$$

şeklindedir.

Bu durumda (3.53) denkleminin Hermit sıralama yöntemi kullanılarak ile elde edilen yaklaşık çözümü

$$y(x) = -0{,}2393x^{3{,}2} + 1{,}2918x^{2{,}8} - 3{,}0334x^{2{,}4} + 5{,}1051x^2 - 3{,}6953x^{1{,}6} +$$

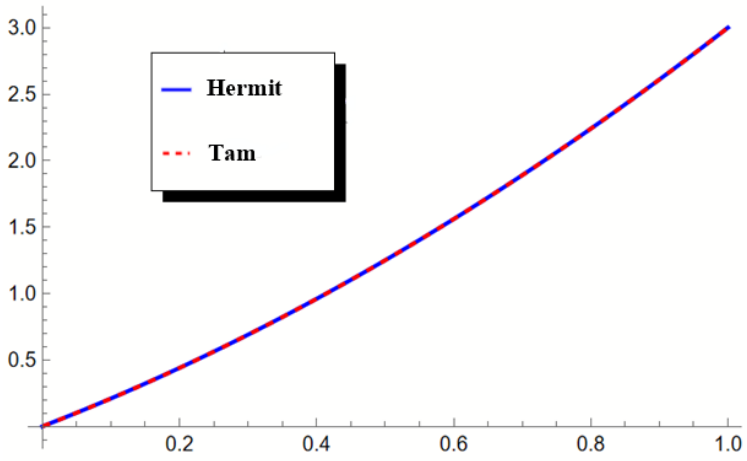
$$+3{,}1842x^{1{,}2} + 0{,}3879x^{0{,}8} - 0{,}0011x^{0{,}4} + 7{,}105.10^{-15}$$

olarak bulunur.

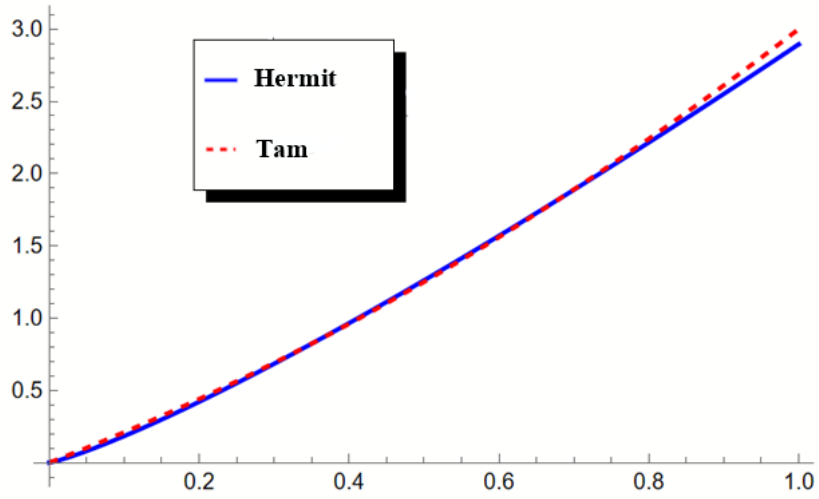
(3.53) denkleminin analitik çözümü ise $y(x) = x^2 + 2x$ fonksiyonudur.

**Tablo 3.2** Örnek 3.3.2 için tam çözüm-yaklaşık çözüm karşılaştırılması

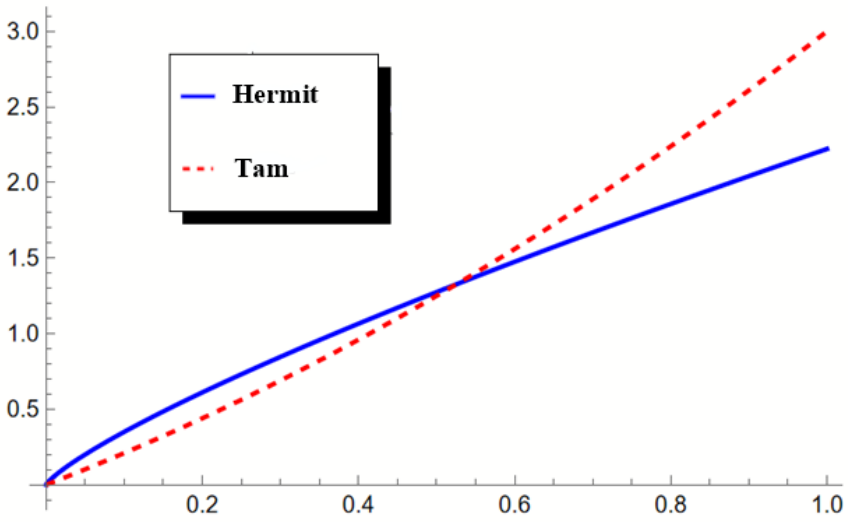
| $x_j$ | Tam çözüm | $N = 8$ için HSY ile yaklaşık çözüm | Mutlak hata |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $7,105.10^{-15}$ | $7,105.10^{-15}$ |
| 0,1 | 0,21 | $2,1001.10^{-1}$ | $9,6198.10^{-6}$ |
| 0,2 | 0,44 | $4,4001.10^{-1}$ | $1,15644.10^{-6}$ |
| 0,3 | 0,69 | $6,0002.10^{-1}$ | $1,60249.10^{-6}$ |
| 0,4 | 0,96 | $9,6001.10^{-1}$ | $1,20748.10^{-6}$ |
| 0,5 | 1,25 | 1,25 | $1,06332.10^{-6}$ |
| 0,6 | 1,56 | 1,56 | $9,73971.10^{-7}$ |
| 0,7 | 1,89 | 1,89 | $8,35822.10^{-7}$ |
| 0,8 | 2,24 | 2,24 | $8,51949.10^{-7}$ |
| 0,9 | 2,61 | 2,61 | $6,20487.10^{-7}$ |
| 1 | 3 | 3 | $2,24598.10^{-6}$ |




**Şekil 3.4** Örnek 3.3.2'nin tam çözümü ile N = 8 için HSY ile hesaplanan yaklaşık çözümünün grafik karşılaştırılması




**Şekil 3.5** Örnek 3.3.2'nin tam çözümü ile N = 4 için HSY ile hesaplanan yaklaşık çözümünün grafik karşılaştırılması




**Şekil 3.6** Örnek 3.3.2'nin tam çözümü ile N = 3 için HSY ile hesaplanan yaklaşık çözümünün grafik karşılaştırılması

# 4

# LUCAS POLİNOMLARI VE LUCAS SIRALAMA YÖNTEMİ

Lucas polinomları, ünlü Fransız matematikçi Édouard Lucas tarafından geliştirilen Lucas sayı dizisinin polinom halinde genellemesidir. Chebyshev polinomlarının özel bir durumu olan Lucas polinomları birçok matematiksel çalışmada kullanılmıştır. Lucas polinomları, iki değişkenli ve tek değişkenli olmak üzere iki farklı şekilde ele alınmaktadır.

## 4.1. İki Değişkenli Lucas Polinomları

n ≥ 2 için

$$L_n(x,y) = xL_{n-1}(x,y) + yL_{n-2}(x,y) \tag{4.1}$$

rekürans bağıntısı ve

$$L_0(x,y) = 2, \qquad L_1(x,y) = x \tag{4.2}$$

başlangıç şartları ile tanımlanmış polinoma iki değişkenli Lucas polinomu denir.

(4.1) bağıntısı ve (4.2) başlangıç şartları kullanılarak iki değişkenli ilk birkaç Lucas polinomu hesaplanırsa

$$L_0(x,y) = 2$$

$$L_1(x,y) = x$$

$$L_2(x,y) = x^2 + 2y$$

$$L_3(x,y) = x^3 + 3xy$$

$$L_4(x,y) = x^4 + 4x^2y + 2y^2$$

$$L_5(x,y) = x^5 + 5x^3y + 5y^2x$$

$$L_6(x,y) = x^6 + 6x^4y + 9x^2y^2 + 2y^3 \tag{4.3}$$

elde edilir.

### 4.2. Tek Değişkenli Lucas Polinomları

$L_n(x,y)$ iki değişkenli Lucas polinomlarında $y=1$ alınarak $L_n(x)$ tek değişkenli Lucas polinomları elde edilir.

Tek değişkenli Lucas polinomlarının ilk birkaç tanesi aşağıdaki şekildedir:

$$L_0(x) = 2$$

$$L_1(x) = x$$

$$L_2(x) = x^2 + 2$$

$$L_3(x) = x^3 + 3x$$

$$L_4(x) = x^4 + 4x^2 + 2$$

$$L_5(x) = x^5 + 5x^3 + 5x$$

$$L_6(x) = x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2$$

$$L_7(x) = x^7 + 7x^5 + 14x^3 + 7x. \tag{4.3}$$

$n \geq 1$ için tek değişkenli Lucas polinomları

$$L_n(x) = \sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n}{n-p} \binom{n-p}{p} x^{n-2p} \tag{4.4}$$

şeklinde formülize edilir. Burada

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & , \quad n\ çift\ ise \\ \dfrac{n-1}{2} & , \quad n\ tek\ ise \end{cases} \tag{4.5}$$

olarak tanımlanır.

### 4.3 Lucas Sıralama Yöntemi

Lucas sıralama yöntemi, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan sayısal bir tekniktir.

$a \le x \le b$ , $0 < \alpha \le 1$, $n-1 < m\alpha < n$ ve $m, n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{m} P_i(x)\ {}^{C}D^{i\alpha}\, y(x) = h(x) \tag{4.6}$$

kesirli mertebeden diferansiyel denklemi

$${}^{C}D^{i}\, y(a) = \delta_i \qquad , (i = 0,1, \dots, [\![m\alpha]\!] - 1) \tag{4.7}$$

koşulları altında göz önüne alınsın. $N$ keyfi bir pozitif tam sayı ve $[\![m\alpha]\!] \le N$ olmak üzere, (4.6) denkleminin sonlu Lucas serisi formundaki bir yaklaşık çözümü

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} b_n L_n(x^\alpha) = b_0 L_0(x^\alpha) + b_1 L_1(x^\alpha) + \cdots + b_N L_N(x^\alpha) \tag{4.8}$$

şeklinde olsun. Bu çözümü

$$[y(x)] = L(x^\alpha).B = [L_0(x^\alpha) \dots L_N(x^\alpha)].[b_0 \dots b_N]^T \tag{4.9}$$

şeklinde matrissel ifade edelim.

$a \le x \le b$ için, LSY uygulanırken kullanılacak sıralama noktaları

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i \ , \qquad (\ i = 0,1, \dots, N) \tag{4.10}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda sıralama noktaları için (4.9) eşitliği

$$[y(x_i)] = L(x_i^\alpha)\ B \ , \quad (\ i = 0,1, \dots N) \tag{4.11}$$

eşitliğine dönüşür. Bu eşitlik

$$\begin{bmatrix} y(x_0) \\ \vdots \\ y(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0(x_0^\alpha) & \cdots & L_N(x_0^\alpha) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_0(x_N^\alpha) & \cdots & L_N(x_N^\alpha) \end{bmatrix}_{(N+1)x(N+1)} \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}_{(N+1)x1} \tag{4.12}$$

olarak matris şeklinde yazılabilir. Lucas polinomlarının

$$L_n(x) = \sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n}{n-p}\binom{n-p}{p} x^{n-2p} \tag{4.13}$$

formülü kullanılarak Lucas polinomlarını aşağıdaki gibi matris formuna dönüştürülebiliriz:

*N* tek ise:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_0(x^\alpha) \\ L_1(x^\alpha) \\ \vdots \\ L_{N-1}(x^\alpha) \\ L_N(x^\alpha) \end{bmatrix}}_{L(x^\alpha)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{2N}{N+1}\binom{(N+1)/2}{(N-1)/2} & 0 & \frac{2N}{N+3}\binom{(N+3)/2}{(N-3)/2} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{\Delta} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ x^\alpha \\ \vdots \\ x^{(N-1)\alpha} \\ x^{N\alpha} \end{bmatrix}}_{X^T(x^\alpha)} \tag{4.14}$$

N çift ise:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L_0(x^\alpha) \\ L_1(x^\alpha) \\ \vdots \\ L_{N-1}(x^\alpha) \\ L_N(x^\alpha) \end{bmatrix}}_{L(x^\alpha)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 0 & \frac{2N}{N+2}\binom{(N+2)/2}{(N-2)/2} & 0 & \frac{2N}{N+4}\binom{(N+4)/2}{(N-4)/2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{\Delta} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ x^\alpha \\ \vdots \\ x^{(N-1)\alpha} \\ x^{N\alpha} \end{bmatrix}}_{X^T(x^\alpha)} \tag{4.15}$$

(4.14) ve (4.15) denklemleri kısaca

$$L^T(x^\alpha) = \Delta . X^T(x^\alpha) \tag{4.16}$$

şeklinde yazılabilir. Her iki tarafın transpozesi alınarak bu eşitlik

$$L = X . \Delta^T \tag{4.17}$$

halini alır. Burada $X(x^\alpha)$ matrisi (3.17) eşitliğindeki gibi tanımlanır ve $\mathrm{X}(x^\alpha)'$nın $\alpha$. Caputo türevi aşağıdaki şekildedir.

$$ {}^{C}D^{\alpha}\,\mathrm{X}(x^{\alpha}) = \left[ {}^{C}D^{\alpha}(x-c)^{0} \quad {}^{C}D^{\alpha}(x-c)^{1\alpha} \quad \dots \quad {}^{C}D^{\alpha}(x-c)^{N\alpha} \right] \qquad (4.18) $$

Böylece

$$ \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{C}D^{\alpha}(x-c)^{0} \\ {}^{C}D^{\alpha}(x-c)^{1\alpha} \\ \vdots \\ {}^{C}D^{\alpha}(x-c)^{N\alpha} \end{bmatrix}}_{{}^{C}D^{\alpha}\,X^{T}(x^{\alpha})} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \Gamma(\alpha+1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\Gamma(N\alpha+1)}{\Gamma((N-1)\alpha+1)} & 0 \end{bmatrix}}_{R} \underbrace{\begin{bmatrix} (x-c)^{0} \\ (x-c)^{1\alpha} \\ \vdots \\ (x-c)^{N\alpha} \end{bmatrix}}_{\mathrm{X}^{T}(x^{\alpha})} \qquad (4.19) $$

ve kısaca

$$ {}^{C}D^{\alpha}\,\mathrm{X}(x^{\alpha}) = \mathrm{X}(x^{\alpha})R^{T} \qquad (4.20) $$

elde edilir. Türev almaya devam edilirse $X(x^{\alpha})$'nın $i\alpha$. Caputo türevi

$$ {}^{C}D^{i\alpha}\,X(x^{\alpha}) = \mathrm{X}(x^{\alpha})(R^{T})^{i} \qquad (4.21) $$

olarak bulunur.

(4.16) denklemin (4.9) denkleminde yerine yazılır ve elde edilen $y(x) = X(x^{\alpha}).\Delta^{T}B$ eşitliğinin $i\alpha$. Caputo türevi alınırsa, (4.21) denklemi de kullanılarak

$$ {}^{C}D^{i\alpha}\,y(x) = \mathrm{X}(x^{\alpha})(R^{T})^{i}\,\Delta^{T}B \qquad (4.22) $$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik $x = x_j$ , $(j = 0,1,\dots N)$ sıralama noktaları için hesaplanır ve matris formda yazılırsa

$$ \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{C}D^{i\alpha}\,y(x_0) \\ {}^{C}D^{i\alpha}\,y(x_1) \\ \vdots \\ {}^{C}D^{i\alpha}\,y(x_N) \end{bmatrix}}_{Y^{i\alpha}} = \underbrace{\begin{bmatrix} X({x_0}^{\alpha}) \\ X({x_1}^{\alpha}) \\ \vdots \\ X({x_N}^{\alpha}) \end{bmatrix}}_{X^{\alpha}} \left[ (R^{T})^{i}\,\Delta^{T}B \right] \qquad (4.23) $$

elde edilir. Burada $X^{\alpha}$ matrisi (3.30) denklemindeki gibi tanımlıdır.

(4.6) kesirli diferansiyel denklemi $x = x_j$ , $(j = 0,1,\dots N)$ sıralama noktaları için

$$\sum_{i=0}^{m} P_i(x_j)\ {}^{C}D^{i\alpha}\, y(x_j) = h(x_j) \tag{4.24}$$

eşitliğini sağladığından bu eşitlik aşağıdaki şekilde

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_i(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_i(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_i(x_N) \end{bmatrix}}_{P_i} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{C}D^{i\alpha}\,\mathrm{y}(x_0) \\ {}^{C}D^{i\alpha}\,\mathrm{y}(x_1) \\ \vdots \\ {}^{C}D^{i\alpha}\,\mathrm{y}(x_N) \end{bmatrix}}_{Y^{i\alpha}} = \underbrace{\begin{bmatrix} h(x_0) \\ h(x_1) \\ \vdots \\ h(x_N) \end{bmatrix}}_{H} \tag{4.25}$$

yazılabilir. (4.27) denklemini

$$\sum_{i=0}^{m} P_i\, Y^{i\alpha} = H \tag{4.26}$$

şeklinde matris formda ifade edebiliriz.

Bu eşitlikte (4.23) denklemi yerine yazılırsa

$$\sum_{i=0}^{m} P_i\, X^{\alpha} (R^T)^i\, \Delta^T B = H \tag{4.27}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafındaki $\sum_{i=0}^{m} P_i\, X^{\alpha} (R^T)^i\, \Delta^T B$ ifadesi

$$\mathrm{V} = [V_{kr}] = \sum_{i=0}^{m} P_i\, X^{\alpha} (R^T)^i\, \Delta^T\,, \quad k, r = 0, \dots, N \tag{4.28}$$

olarak tanımlansın. Böylece (4.27) eşitliği kısaca

$$\mathrm{VB} = \mathrm{H} \tag{4.29}$$

halini alır. Bu eşitlik $(N+1)$ x $(N+1)$'lik bir cebirsel sistem olarak yazılır ve bu sistemin arttırılmış matrisi oluşturulur ise

$$[V; H] = \begin{bmatrix} V_{00} & \cdots & V_{0N} & ; & h(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ V_{N0} & \cdots & V_{NN} & ; & h(x_N) \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

elde edilir.

Öte yandan (4.7) denkleminde (4.22) denklemindeki türev değeri yerine yazılırsa

$$\mathrm{X}^{\alpha}(a)(R^T)^k\ \Delta^T B = \delta_k \qquad ,(k = 0,1,\dots,[\![m\alpha]\!] - 1) \tag{4.31}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$Z_k = \mathrm{X}^{\alpha}(a)(R^T)^k\ \Delta^T = \left[Z_{k0}\ \ Z_{k1}\ \ \dots\ \ Z_{k([\![m\alpha]\!]-1)}\right] \tag{4.32}$$

olarak tanımlanırsa

$$Z_k.B = \delta_k \qquad , \qquad (k = 0,1,\dots,[\![m\alpha]\!] - 1) \tag{4.33}$$

Denklemi elde edilir. Bu sistemin arttırılmış matrisi

$$[Z_k; \delta_k] = \begin{bmatrix} Z_{00} & \cdots & Z_{0N} & ; & \delta_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ Z_{([\![m\alpha]\!]-1)0} & \cdots & Z_{([\![m\alpha]\!]-1)N} & ; & \delta_{([\![m\alpha]\!]-1)} \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

şeklindedir. (4.30) matrisinin son $[\![m\alpha]\!]$ satırı silinerek silinen satırların yerine (4.34) matrisi yazılırsa,

$$\left[\tilde{V}, \tilde{H}\right] = \begin{bmatrix} V_{00} & & V_{0N} & & h(x_0) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ V_{(N-[\![m\alpha]\!]-1)0} & \cdots & V_{(N-[\![m\alpha]\!]-1)N} & ; & h\left(x_{N-[\![m\alpha]\!]-1}\right) \\ Z_{00} & \ddots & Z_{0N} & ; & \delta_0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & ; & \vdots \\ Z_{([\![m\alpha]\!]-1)0} & & Z_{([\![m\alpha]\!]-1)N} & & \delta_{([\![m\alpha]\!]-1)} \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

elde edilir. Bu matris kısaca $\tilde{V}B = \tilde{H}$ şeklinde yazılabilir. Burada $\det(\widetilde{V}) \neq 0$ ise (4.35)'in çözümü

$$B = (\tilde{V})^{-1}\tilde{H} \tag{4.36}$$

ile hesaplanır ve böylece

$$B = [b_0 \dots b_n]^T \tag{4.37}$$

matrisi bulunmuş olur.

Bu durumda (4.6) diferansiyel denkleminin sonlu Lucas serisi formundaki bir yaklaşık çözümü

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} b_n L_n(x^\alpha) = b_0 L_0(x^\alpha) + b_1 L_1(x^\alpha) + \cdots + b_N L_N(x^\alpha) \qquad (4.38)$$

şeklinde elde edilir.

## 4.4 Örnekler

### Örnek 4.4.1

$0 \le x \le 1$ ve $y(0) = 1$ olmak üzere

$$2y(x) - 2D^{\,0,5}y(x) = 2 - 3\sqrt{x^3} + 2x^2 - \frac{48}{5\Gamma(2,5)}\sqrt{x^5} + 4x^3 \qquad (4.39)$$

kesirli diferansiyel denkleminin analitik çözümü $y(x) = 1 + x^2 + 2x^3$ fonksiyonudur.

$N = 5,\ \alpha = 0{,}5$ ve $m = 2$ için bu denkleme Lucas sıralama yöntemi uygulayarak

$$y(x) = \sum_{n=0}^{5} b_n L_n\left(\sqrt{x}\right) \qquad (4.40)$$

sonlu Lucas serisi şeklindeki yaklaşık çözümünü bulalım.

(4.39) diferansiyel denkleminden $P_0(x) = 2,\ P_1(x) = -2,\ \ P_2(x) = 0$ ve $h(x) = 2 - 3\sqrt{x^3} + 2x^2 - \frac{48}{5\Gamma(2,5)}\sqrt{x^5} + 4x^3$ elde edilir.

$0 \le x \le 1$ ve $N = 5$ için sıralama noktaları $x_0 = 0,\ x_1 = 0.2\ ,\ x_2 = 0.4\ ,\ x_3 = 0{,}6\ ,\ x_4 = 0.8$ ve $x_5 = 1$ olarak hesaplanır.

Bu durumda LSY uygulamak için kullanılacak matrisler:

$$P_0(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (4.41)$$

$$P_1(x) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad (4.42)$$

$$P_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.43}$$

$$\Delta^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

$$R^T = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}8862 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}1284 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}3293 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}5045 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6617 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

$$X^{0,5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0{,}4472 & 0{,}2 & 0{,}0894 & 0{,}04 & 0{,}0179 \\ 1 & 0{,}6325 & 0{,}4 & 0{,}2529 & 0{,}16 & 0{,}1012 \\ 1 & 0{,}7746 & 0{,}6 & 0{,}4648 & 0{,}36 & 0{,}2789 \\ 1 & 0{,}8944 & 0{,}8 & 0{,}7156 & 0{,}64 & 0{,}5724 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 \\ 1{,}71368 \\ 1{,}08399 \\ 0{,}17175 \\ -0{,}95898 \\ -2{,}23064 \end{bmatrix} \tag{4.47}$$

olarak bulunur. Bu matrisler kullanılarak (4.35) arttırılmış matrisi Mathematica programı yardımıyla

$$\left[\tilde{V}, \tilde{H}\right] = \begin{bmatrix} 4 & -1{,}77 & 3{,}998 & -5{,}311 & 3{,}99 & -8{,}852 & ; & 2 \\ 4 & -0{,}878 & 3{,}39 & -2{,}986 & 1{,}374 & -6{,}252 & ; & 1{,}71368 \\ 4 & -0{,}508 & 3{,}372 & -2{,}08 & 1{,}049 & -5{,}655 & ; & 1{,}08399 \\ 4 & -0{,}223 & 3{,}452 & -1{,}335 & 1{,}129 & -5{,}083 & ; & 0{,}17175 \\ 4 & 0{,}016 & 3{,}581 & -0{,}647 & 1{,}453 & -4{,}379 & ; & -0{,}95898 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & ; & -2{,}23064 \end{bmatrix} \tag{4.48}$$

şeklinde elde edilir.

Bu matrisin determinantı sıfırdan farklı olduğundan Mathematica programı yardımıyla sistemin çözümü yapılırsa

$$B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16{,}787 \\ 50{,}169 \\ 23{,}295 \\ -26{,}894 \\ -6{,}008 \\ 6{,}103 \end{bmatrix} \tag{4.49}$$

katsayılar matrisi bulunur.

$0 \leq n \leq 5$ için $L_n(\sqrt{x})$ Lucas polinomları:

$$L_0(x) = 2$$

$$L_1(\sqrt{x}) = \sqrt{x}$$

$$L_2(\sqrt{x}) = x + 2$$

$$L_3(\sqrt{x}) = x^{1,5} + 3\sqrt{x}$$

$$L_4(\sqrt{x}) = x^2 + 4x + 2$$

$$L_5(\sqrt{x}) = x^{2,5} + 5x^{1,5} + 5\sqrt{x} \tag{4.50}$$

şeklindedir.

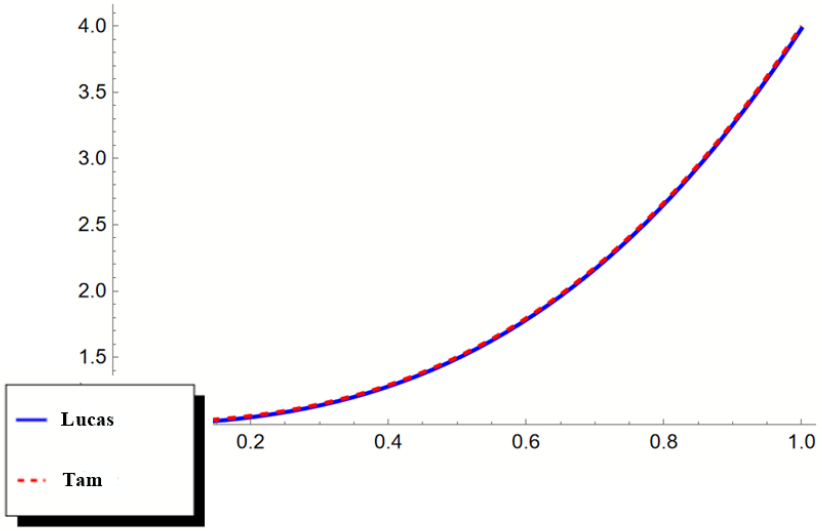
Bu durumda (4.39) kesirli diferansiyel denkleminin (4.40) ile ifade edilen sonlu Lucas serisi şeklindeki yaklaşık çözümü

$$y(x) = 1 + 0{,}000932\sqrt{x} - 0{,}7359x + 3{,}6197\sqrt{x^3} - 6{,}00767x^2 + 6{,}1027\sqrt{x^5}$$

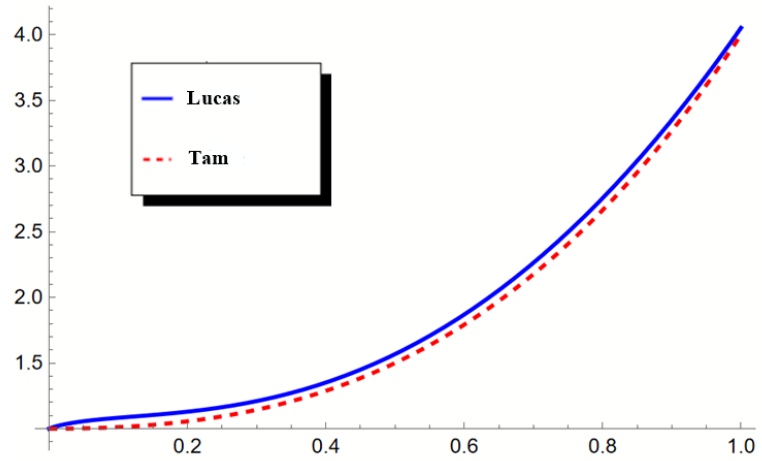
olarak elde edilir.

**Tablo 4.1** Örnek 4.4.1 için tam çözüm-yaklaşık çözüm karşılaştırılması

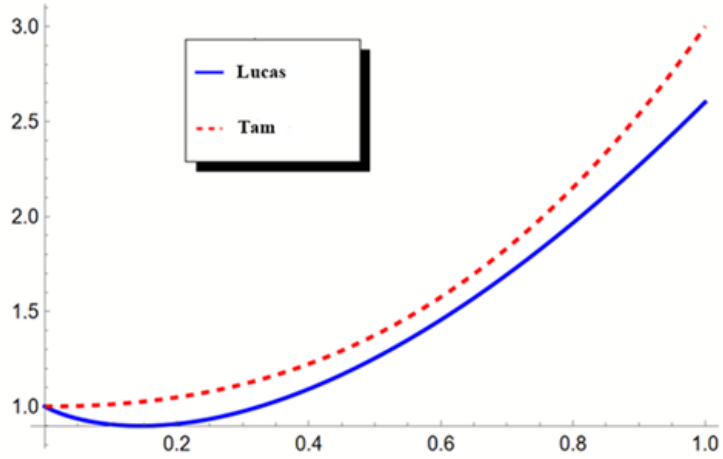
| $x_j$ | Tam çözüm | $N = 5$ için LSY ile yaklaşık çözüm | Mutlak Hata |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0,1 | 1,012 | 1,00039 | $1,16123.10^{-2}$ |
| 0,2 | 1,056 | 1,04585 | $1,01542.10^{-2}$ |
| 0,3 | 1,144 | 1,13465 | $9,35335.10^{-3}$ |
| 0,4 | 1,288 | 1,27825 | $9,74764.10^{-3}$ |
| 0,5 | 1,5 | 1,48934 | $1,06616.10^{-2}$ |
| 0,6 | 1,792 | 1,78044 | $1,15594.10^{-2}$ |
| 0,7 | 2,176 | 2,16366 | $1,23424.10^{-2}$ |
| 0,8 | 2,664 | 2,6506 | $1,34045.10^{-2}$ |
| 0,9 | 3,268 | 3,25238 | $1,56175.10^{-2}$ |
| 1 | 4 | 3,9797 | $2,02969.10^{-2}$ |




**Şekil 4.1** Örnek 4.4.1'in tam çözümü ile N = 5 için LSY ile hesaplanan yaklaşık çözümünün grafik karşılaştırılması




**Şekil 4.2** Örnek 4.4.1'in tam çözümü ile N = 4 için LSY ile hesaplanan yaklaşık çözümünün grafik karşılaştırılması




**Şekil 4.3** Örnek 4.4.1'in tam çözümü ile N = 3 için LSY ile hesaplanan yaklaşık çözümünün grafik karşılaştırılması

**Örnek 4.4.2**

$0 \le x \le 1$ ve $y(0) = 0$ için

$$(2x+1)y(x) + (x-1)D^{0,6}y(x) = \frac{(x-1)}{\Gamma(0,4)}\left(4\Gamma(1,6)x^{1,4} - \frac{5x^{0,4}}{2}\right) + (1+2x)(x^2 - x) \tag{4.51}$$

kesirli diferansiyel denkleminin sonlu Lucas serisi şeklindeki yaklaşık çözümünü $N = 8$ ve $\alpha = 0,6$ için LSY ile bulalım.

(4.51) denkleminden $h(x) = \frac{(x-1)}{\Gamma(0,4)}\left(4\Gamma(1,6)x^{1,4} - \frac{5x^{0,4}}{2}\right) + (1+2x)(x^2 - x)$, $Q_0(x) = 2x + 1,\ Q_1(x) = x - 1$ ve $Q_2(x) = 0$ elde edilir. Buradan, LSY uygulamak için gerekli matrisler

$$Q_0(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{4.52}$$

$$Q_1(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}875 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}375 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.53}$$

$$Q_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.54}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}21589 \\ 0{,}03085 \\ -0{,}18924 \\ -0{,}37798 \\ -0{,}48982 \\ -0{,}48669 \\ -0{,}33417 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.55}$$

$$X^{0,6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0{,}287 & 0{,}083 & 0{,}024 & 0{,}007 & 0{,}002 & 0{,}0006 & 0{,}0002 & 0{,}00005 \\ 1 & 0{,}435 & 0{,}189 & 0{,}082 & 0{,}036 & 0{,}016 & 0{,}007 & 0{,}003 & 0{,}001 \\ 1 & 0{,}555 & 0{,}308 & 0{,}171 & 0{,}095 & 0{,}053 & 0{,}029 & 0{,}016 & 0{,}009 \\ 1 & 0{,}659 & 0{,}435 & 0{,}287 & 0{,}189 & 0{,}125 & 0{,}083 & 0{,}054 & 0{,}036 \\ 1 & 0{,}754 & 0{,}569 & 0{,}429 & 0{,}324 & 0{,}244 & 0{,}184 & 0{,}139 & 0{,}105 \\ 1 & 0{,}841 & 0{,}708 & 0{,}596 & 0{,}501 & 0{,}422 & 0{,}355 & 0{,}299 & 0{,}251 \\ 1 & 0{,}923 & 0{,}852 & 0{,}786 & 0{,}725 & 0{,}669 & 0{,}618 & 0{,}570 & 0{,}527 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

$$R^T = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}893 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}233 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}522 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}778 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}013 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}435 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}628 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

$$\Delta^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

olarak hesaplanır. Bu matrisler ve Mathematica programı kullanılarak

$$B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 154{,}883 \\ -483{,}185 \\ -221{,}379 \\ 323{,}221 \\ 67{,}651 \\ -131{,}697 \\ 4{,}776 \\ 24{,}572 \\ -5{,}931 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

olarak elde edilir. $n = 0, 1, \dots, 8$ için $L_n(x^{0,6})$ Lucas polinomları:

$$L_0(x^{0,6}) = 2$$

$$L_1(x^{0,6}) = x^{0,6}$$

$$L_2(x^{0,6}) = x^{1,2} + 2$$

$$L_3(x^{0,6}) = x^{1,8} + 3x^{0,6}$$

$$L_4(x^{0,6}) = x^{2,4} + 4x^{1,2} + 2$$

$$L_5(x^{0,6}) = x^3 + 5x^{1,8} + 5x^{0,6}$$

$$L_6(x^{0,6}) = x^{3,6} + 6x^{2,4} + 9x^{1,2} + 2$$

$$L_7(x^{0,6}) = x^{4,2} + 7x^3 + 14x^{1,8} + 7x^{0,6}$$

$$L_8(x^{0,6}) = x^{4,8} + 8x^{3,6} + 20x^{2,4} + 16x^{1,2} + 2 \qquad (4.60)$$

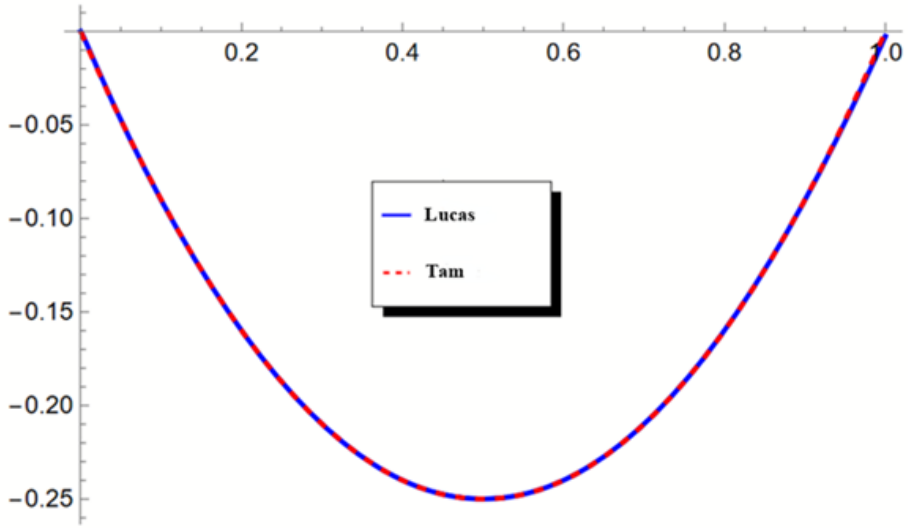
şeklindedir. Bu durumda (4.51) denkleminin LSY ile elde edilen yaklaşık çözümü

$$y(x) = \sum_{n=0}^{8} b_n L_n(x^{0,6}) = 0{,}00026 - 0{,}004x^{0,6} - 2{,}692x^{1,2} - 8{,}742x^{1,8} -$$
$$-22{,}321x^{2,4} + 40{,}307x^3 - 42{,}675x^{3,6} + 24{,}572x^{4,2} - 5{,}931x^{4,8}$$

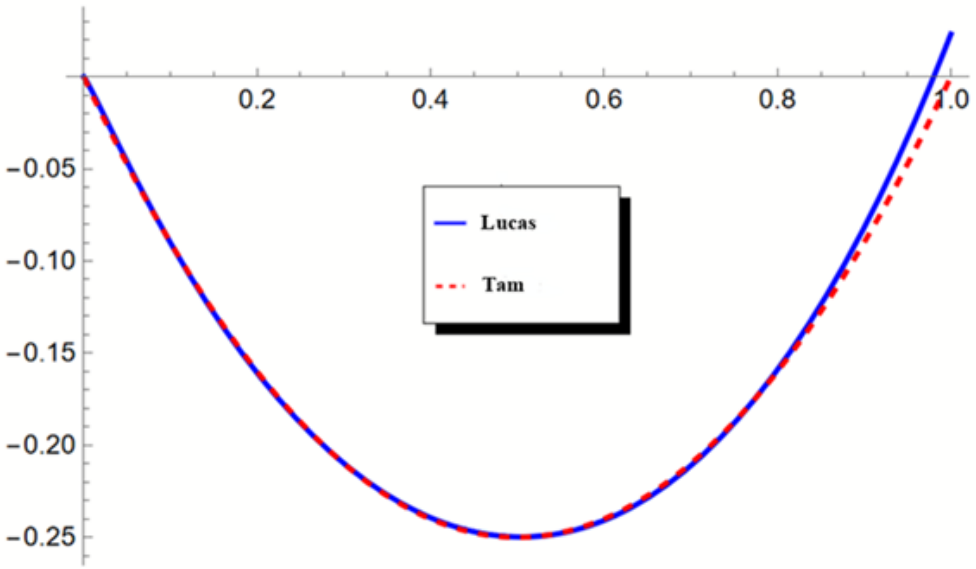
olarak bulunur. (4.51) denkleminin tam çözümü ise $y(x) = x^2 - x$ fonksiyonudur.

**Tablo 4.2** Örnek 4.4.2 için tam çözüm-yaklaşık çözüm karşılaştırılması

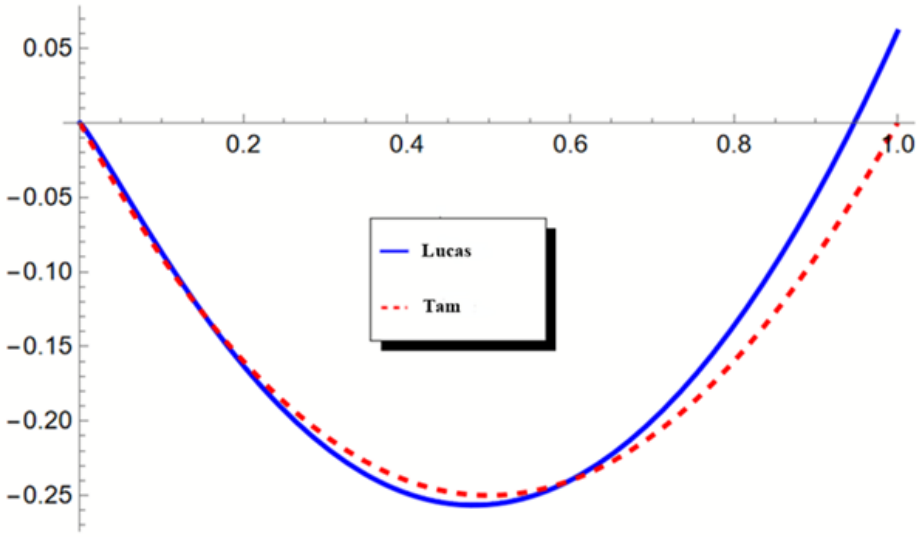
| $x_j$ | Tam çözüm | $N = 8$ için LSY ile yaklaşık çözüm | Mutlak hata |
|---|---|---|---|
| **0** | **0** | $\mathbf{0,00026}$ | $\mathbf{0,00026}$ |
| **0,1** | $\mathbf{-9.10^{-2}}$ | $\mathbf{-9,01585.10^{-2}}$ | $\mathbf{1,58493.10^{-4}}$ |
| **0,2** | $\mathbf{-1,6.10^{-1}}$ | $\mathbf{-1,59993.10^{-1}}$ | $\mathbf{6,5636.10^{-6}}$ |
| **0,3** | $\mathbf{-2,1.10^{-1}}$ | $\mathbf{-2,10002.10^{-1}}$ | $\mathbf{1,9445.10^{-6}}$ |
| **0,4** | $\mathbf{-2,4.10^{-1}}$ | $\mathbf{-2,40009.10^{-1}}$ | $\mathbf{9,16505.10^{-6}}$ |
| **0,5** | $\mathbf{-2,5.10^{-1}}$ | $\mathbf{-2,49991.10^{-1}}$ | $\mathbf{1,06332.10^{-6}}$ |
| **0,6** | $\mathbf{-2,4.10^{-1}}$ | $\mathbf{-2,40011.10^{-1}}$ | $\mathbf{1,08665.10^{-5}}$ |
| **0,7** | $\mathbf{-2,1.10^{-1}}$ | $\mathbf{-2,1001.10^{-1}}$ | $\mathbf{9,86232.10^{-6}}$ |
| **0,8** | $\mathbf{-1,6.10^{-1}}$ | $\mathbf{-1,59932.10^{-1}}$ | $\mathbf{6,80023.10^{-5}}$ |
| **0,9** | $\mathbf{-9.10^{-2}}$ | $\mathbf{-9,02149.10^{-2}}$ | $\mathbf{2,14889.10^{-4}}$ |
| **1** | $\mathbf{-2,60725.10^{-3}}$ | **0** | $\mathbf{2,60725.10^{-3}}$ |




**Şekil 4.4** Örnek 4.4.2'nin tam çözümü ile N = 8 için LSY ile hesaplanan yaklaşık çözümünün grafik karşılaştırılması




**Şekil 4.5** Örnek 4.4.2'nin tam çözümü ile N = 5 için LSY ile hesaplanan yaklaşık çözümünün grafik karşılaştırılması




**Şekil 4.6** Örnek 4.4.2'nin tam çözümü ile $N = 3$ için LSY ile hesaplanan yaklaşık çözümünün grafik karşılaştırılması

# 5
# SONUÇ

Klasik diferansiyel denklemler, bazı karmaşık fiziksel ve biyolojik süreçlerin modellenmesinde yetersiz kalabilmektedir. Bu tür sistemlerin daha gerçekçi biçimde modellenebilmesi için, kesirli analiz yaklaşımı geliştirilmiştir. Bu sebeple kesirli diferansiyel denklemler, klasik modellerin genelleştirilmiş halleri olarak ortaya çıkmış ve birçok alanda etkin biçimde kullanılmaya başlanmıştır.

Bu tez çalışmasında, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için kullanılan iki sıralama yöntemi: Hermit Sıralama Yöntemi (HSY) ve Lucas Sıralama Yöntemi (LSY) tanıtılmıştır. Bu yöntemlerde kullanılan Hermit ve Lucas polinomlarının yapısı tanımlanmış ve bu polinomlara dayalı sıralama yöntemleriyle, kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılabilecek matris temelli yaklaşımlar geliştirilmiştir.

Verilen sayısal örnekler yardımıyla yöntemlerin uygulanabilirliği test edilmiş ve elde edilen yaklaşık çözümler ile analitik çözümler hem tablo hem de grafik gösterimler yardımıyla doğruluk açısından karşılaştırılmıştır.

Yapılan tablo incelemelerinde hem Hermit sıralama yöntemi hem de Lucas sıralama yöntemi ile elde edilen çözümlerin denklemlerin tam çözümlerine yakın sonuçlar verdiği görülmüştür.

Ayrıca yapılan grafik incelemeleri ile her iki yöntem için de $N$ değeri büyüdükçe elde edilen yaklaşık çözümlerin iyileştiği ve tam çözüme yaklaştığı gözlenmiştir. Sonuçlar hem Hermit hem de Lucas sıralama yöntemlerinin kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için etkili ve güvenilir alternatifler sunduğunu ortaya koymuştur.

Yöntemlerin matrissel olarak ifade edilebilme kolaylığı çözülmek istenen denklemi Mathematica veya Matlab gibi bilgisayar programları kullanarak farklı ve çok büyük N değerleri için hızlı ve kolay bir şekilde çözebilme avantajı sağlamaktadır.

Bu çalışmayla, Hermit ve Lucas sıralama yöntemlerinin kesirli diferansiyel denklemlerin çözümündeki uygulanabilirliği ve başarı düzeyi ortaya konulmakta; gelecekte benzer yapıya sahip problemlerin çözümüne katkı sağlayacak yöntemsel bir yaklaşım sunulması hedeflenmektedir.

# KAYNAKÇA


[1] G. W. Leibniz, “A Letter from Hanover, Germany to GFA L'Hospital, September 30,” Math. Schriften, vol. 1849, pp. 301–302, 1695.

[2] A. Loverro, Fractional Calculus: History, Definition and Applications for the Engineer, USA, 2004.

[3] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, and A. Trujillo, Fractional Calculus: Models and Numerical Methods, Singapore: World Scientific, 2012.

[4] A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, New York: Elsevier, 2006.

[5] K. S. Miller and B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, New York: Wiley, 1993.

[6] A. E. M. El-Mesiry, A. M. A. El-Sayed, and H. A. A. El-Saka, “Numerical methods for multi-term fractional (arbitrary) orders differential equations,” Appl. Math. Comput., vol. 160, no. 3, pp. 683–699, 2005.

[7] S. B. Yuste, “Weighted average finite difference methods for fractional diffusion equations,” J. Comput. Phys., vol. 1, pp. 264–274, 2006.

[8] N. J. Ford and J. A. Connolly, “Systems-based decomposition schemes for the approximate solution of multi-term fractional differential equations,” J. Comput. Appl. Math., vol. 229, no. 2, pp. 382–391, 2009.

[9] S. Harikrishnan, R. B. Ibrahim, and K. Kanagarajan, “Fractional Ulam-stability of fractional impulsive differential equation involving Hilfer-Katugampola fractional differential operator,” Univ. J. Math. Appl., vol. 1, no. 2, pp. 106–112, 2018.

[10] A. Saadatmandi and M. Dehghan, “A new operational matrix for solving fractional-order differential equations,” Comput. Math. Appl., vol. 59, pp. 1326–1336, 2010.

[11] Z. Odibat and S. Momani, “Numerical methods for nonlinear partial differential equations of fractional order,” Appl. Math. Model., vol. 32, pp. 28–39, 2008.

[12] M. Weilbeer, Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equations and Their Analytical Background, Papierflieger, 2005.

[13] A. M. Wazwaz, “A reliable modification of Adomian decomposition method,” Appl. Math. Comput., vol. 102, no. 1, pp. 77–86, 1999.

[14] S. Yalçınbaş, A. Konuralp, D. D. Demir, and H. H. Sorkun, “The solution of the fractional differential equation with the generalized Taylor collocation method,” IJRRAS, 2010.

[15] S. Liao, “On the homotopy analysis method for nonlinear problems,” Appl. Math. Comput., vol. 147, no. 2, pp. 499–513, 2004.

[16] J.-H. He, “Variational iteration method – a kind of non-linear analytical technique: some examples,” Int. J. Non-Linear Mech., vol. 34, no. 4, pp. 699–708, 1999.

[17] M. N. Özişik, H. R. Orlande, M. J. Colaço, and R. M. Cotta, Finite Difference Methods in Heat Transfer, CRC Press, 2017.

[18] Y. Yang, Y. Ma, and L. Wang, “Legendre polynomials operational matrix method for solving fractional partial differantial equations with variable coefficients,” Math. Probl. Eng., vol. 2015, Art. no. 915195.

[19] M. M. Mokhtar and A. S. Mohamed, “Lucas polynomials semi-analytic solution for fractional multi-term initial value problems,” Adv. Differ. Equ., vol. 2019, no. 1, pp. 1–13, 2019.

[20] G. Dattoli, “Laguerre and generalized Hermite polynomials: the point of view of the operation method,” Integr. Transf. Spec. Funct., vol. 15, pp. 93–99, 2004.

[21] A. Nalli and P. Haukkanen, “On generalized Fibonacci and Lucas polynomials,” Chaos Solitons Fractals, vol. 42, no. 5, pp. 3179–3186, 2009.

[22] G. Szegő, Orthogonal Polynomials, vol. 23, Amer. Math. Soc., 1939.

[23] A. E. M. El-Mesiry et al., “Numerical methods for multi-term fractional (arbitrary) orders differantial equations,” Appl. Math. Comput., vol. 160, no. 3, pp. 683–699, 2005.

[24] I. A. Ganaie and V. K. Kukreja, “Numerical solution of Burgers’ equation by cubic Hermite collacation method,” Appl. Math. Comput., vol. 237, pp. 571–581, 2014

[25] Ş. Yüzbaşı, E. Gök, and M. Sezer, “Residual correction of the Hermite polynomial solutions of the generalized pantograph equations,” New Trends Math. Sci., vol. 3, no. 2, pp. 118–125, 2015.

[26] T. Koshy, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, vol. 2, Wiley, 2019.

[27] A. Nalli and P. Haukkanen, “On generalized Fibonacci and Lucas polynomials,” Chaos Solitons Fractals, vol. 42, no. 5, pp. 3179–3186, 2009.

[28] W. M. Abd-Elhameed et al., “Spectral tau technique via Lucas polynomials for the time-fractional diffusion equations,” AIMS Math., vol. 9, pp. 34567–34587, 2024.

[29] G. Yıldırım and Ş. Yüzbaşı, “A collocation technique via Pell-Lucas polynomials to solve fractional differantial equation model for HIV/AIDS with treatment compartment,” CMES–Comput. Model. Eng. Sci., vol. 141, no. 1, 2024.

[30] Y. Yazlık et al., “The generalized (s, t)-sequence and its matrix sequence,” in Proc. Int. Conf. Numer. Anal. Appl. Math. (ICNAAM), vol. 1389, no. 1, pp. 381–384, 2011.

[31] G. Bilgici, “New generalizations of Fibonacci and Lucas sequences,” Appl. Math. Sci., vol. 8, no. 29, pp. 1429–1437, 2014.

[32] N. Baykuş and M. Sezer, “Hybrid Taylor-Lucas collocation method for numerical solution of high-order pantograph type delay differential equations with variable delays,” Appl. Math. Inf. Sci., vol. 11, no. 6, pp. 1795–1801, 2017.

[33] Ş. Yüzbaşı and G. Yıldırım, “Pell-Lucas collocation method to solve high-order linear Fredholm-Volterra integro-differantial equations and residual correction,” Turk. J. Math., vol. 44, no. 4, pp. 1065–1091, 2020.

[34] I. Podlubny, Fractional Differential Equations: An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, vol. 198, Elsevier, 1998.

[35] S. Das, Functional Fractional Calculus, Springer, 2011.

# TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

**Konferans Bildirileri**

**1**. A.A. Düzen and P. Albayrak, “Numerical Solutions of Class of Fractional Differential Equations”, in Proc. 7th International HYBRID Conference on Mathematical Advances and Applications, Istanbul, Turkey, May 8-11, 2024, p.192.