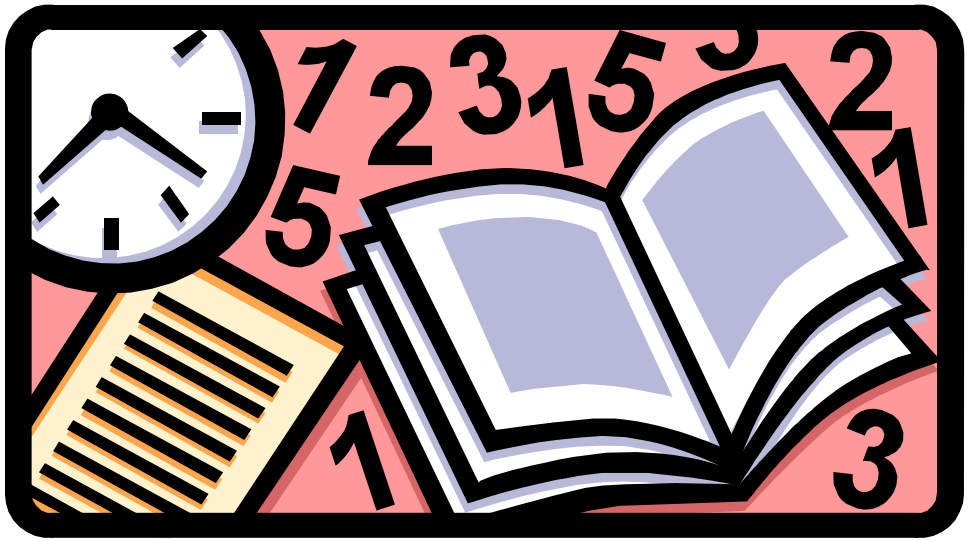
BÖLÜM 7

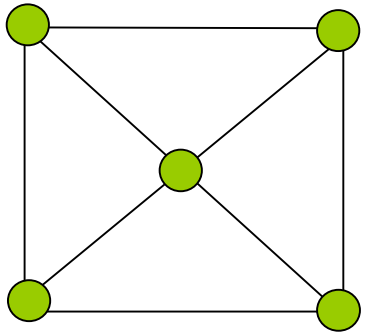
Graf Boyama ve Kromatic Polinomlar
(Graph Coloring and Choromatic Polinomial)



Tanım

- Bir **G** grafının herhangi iki komşu düğümüne aynı renk atanmayacak şekilde, grafın her bir düğümüne bir renk atanmasına bir grafın renklendirilmesi denir.

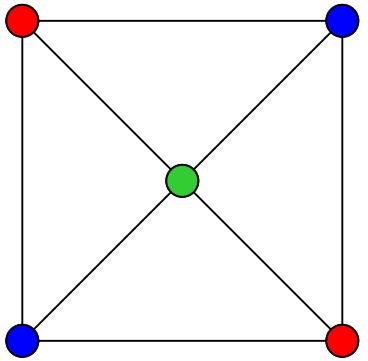
- Bir grafın renk (kromatik) sayısı, grafın renklendirilmesi için gerekli olan **en az renk** sayısıdır. Bir G grafının renk (kromatik) sayısı X(G) ile gösterilir.



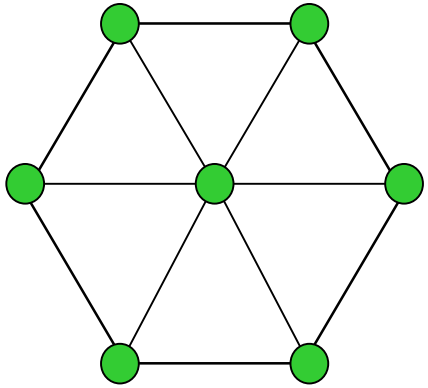
Grafın renk (kromatik) sayısı kaçtır?

X(G) = 3 renk mi?

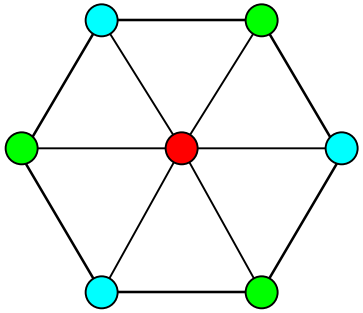
X(G) = 4 renk mi?



X(G) = 3



Grafın renk (kromatik) sayısı kaçtır?



X(G) = 3

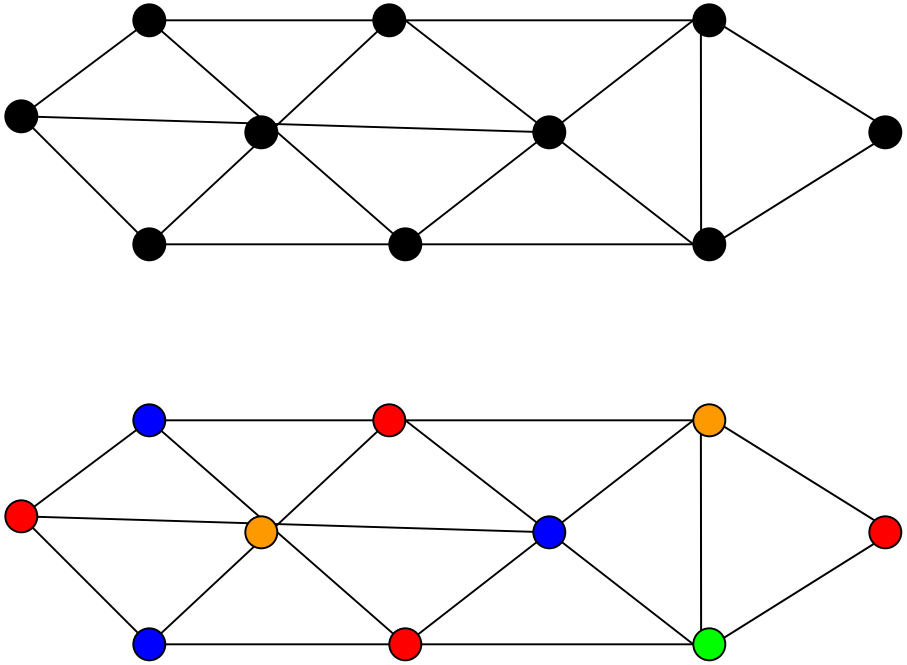
Örnek

- Bir üniversite içerisinde profesör ünvanlı akademisyenlerden oluşan 10 tane kurul olsun
- Bu kurullar haftada bir kez toplanmaktadır
- Bir akademisyen birden fazla kurulda görev alabilir
- Tüm toplantıların en kısa sürede tamamlanması ve akademisyenlerin katılacağı toplantılarda çakışma olmaması istenmektedir

Kaç farklı toplantı oluşturulmalıdır?

Düğümler = Kurullar
Kenarlar = Çakışan akademisyenler
Renkler = Farklı toplantı zamanları

Grafımız aşağıdaki şekildeki gibi olsun.



X(G)=4

Kromatik Polinomlar

Bir G grafının kromatik polinomu **P(G)**, G grafını minimum ***k*** renkle renklendirmenin kaç farklı şekilde yapılacağının sayısını verir.

Deletion Contraction Method

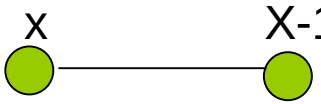
$$P_k(G) = P_k(G-e) - P_k(G \setminus e)$$

kenarı silme

Silinen kenara ait düğümleri birleştirme

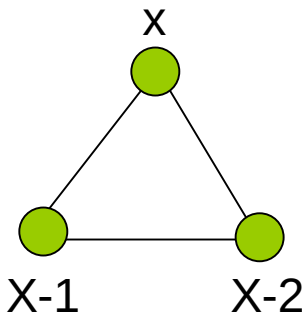
Kromatik Polinomu bilinen graflar

Noktasal Graf



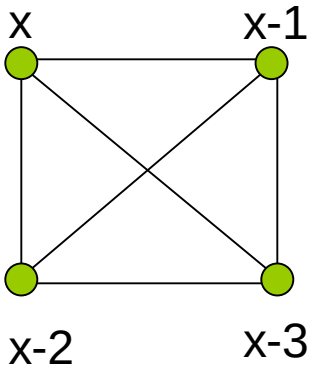
Çizgisel Graf

U grafı ⟶ $U_n = x(x-1)^{n-1}$



Z Grafı veya K Grafı $K_n = \prod_{k=0}^{n-1}(x-k)$

Örnek



K grafı olup, bütün düğümler birbiri ile bağlantılıdır.

$$K_n = \prod_{k=0}^{n-1} (x - k)$$

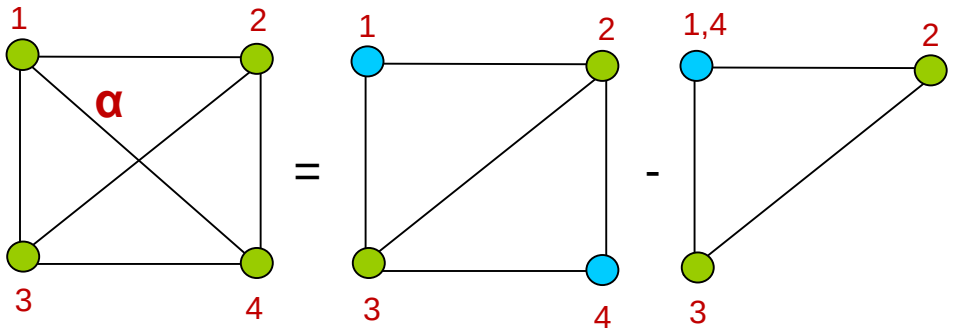
$K_4 = x\,(x - 1)\,(x - 2)\,(x - 3)$
$= (x^2 - x)\,(x^2 - 5x + 6)$
$= 1x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$

x=1 için değeri 0
x=2 için değeri 0
x=3 için değeri 0
x=4 için değeri 24

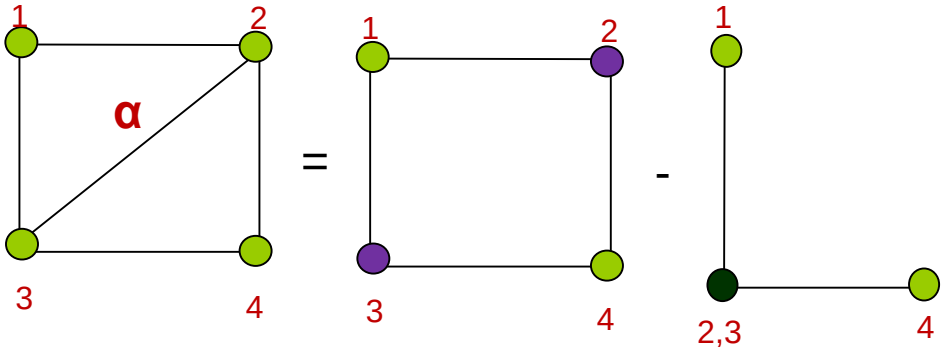
```
  1 5 6
    1 1
-------------
  1 5 6
1 5 6
+----------
1 6 11 6
```

4 farklı renk ile **24** farklı şekilde boyanır

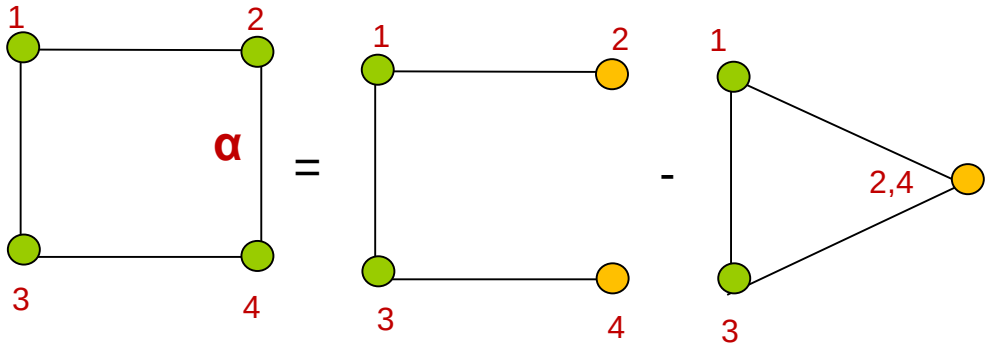
Örnek



$= x(x-1)(x^2-4x+4) - x(x-1)(x-2)$
$x(x-1)(x^2-4x+4-x+2)$
$x(x-1)(x^2-5x+6)$
$x^4-6x^3+11x^2-6x$

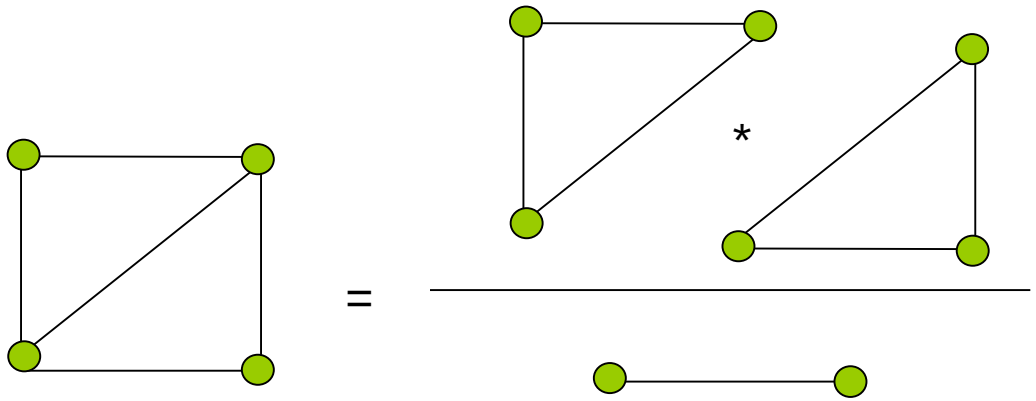


$= x(x-1)(x^2-3x+3) - x(x-1)^2$
$x(x-1)(x^2-3x+3-x+1)$
$x(x-1)(x^2-4x+4)$



$= x(x-1)^3 - x(x-1)(x-2)$
$x(x-1)[(x-1)^2-(x-2)]$
$x(x-1)(x^2-3x+3)$

Eğer, iki graf birbirinden Noktasal veya Çizgisel bir graf ile ayrılıyorsa…




```
  1 4 4
  1 1
  --------------
  1 4 4
     1 4 4
+ --------------
  1  5  8  4
```

$$= \frac{x^2\,(x-1)^2\,(x-2)^2}{x\,(x-1)} = (x^2 - x)(x^2 - 4x + 4)$$

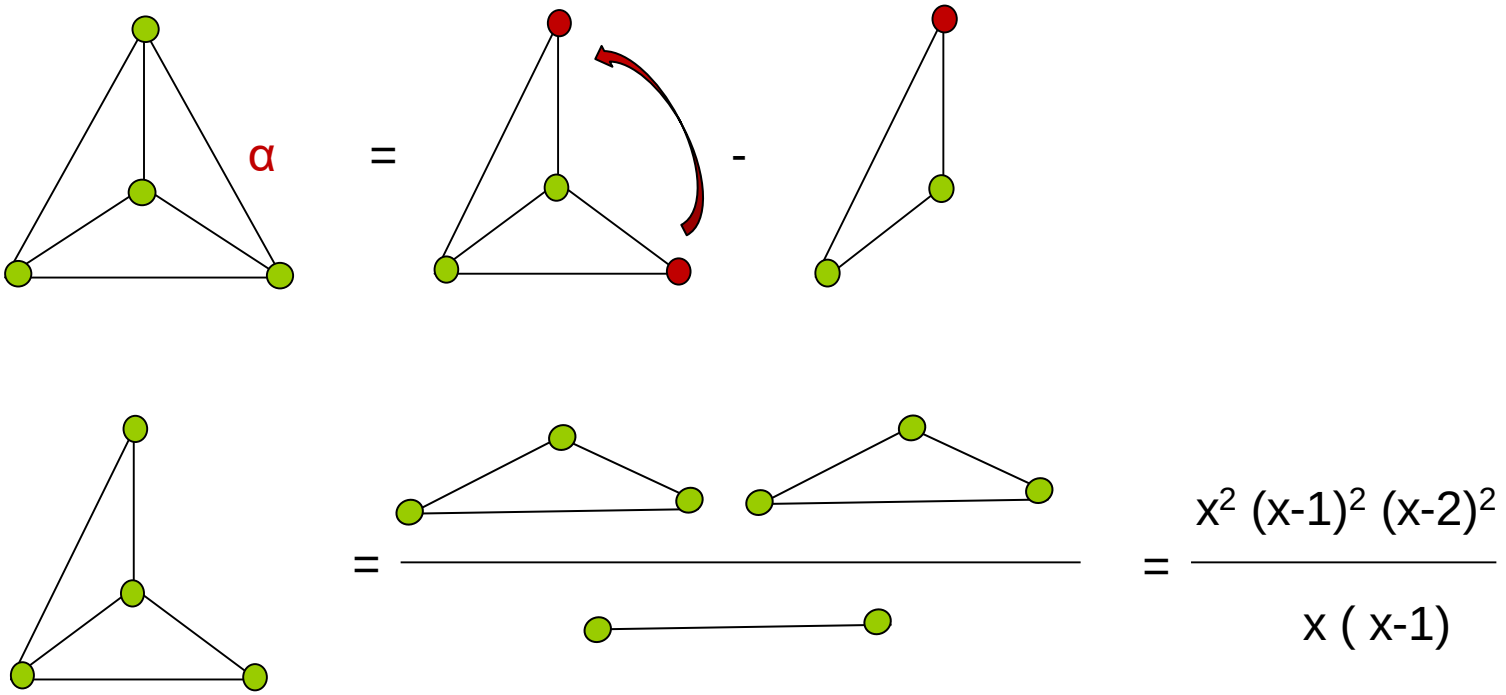
$$= x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x$$

3 renk ile boyanır
3 * 2 * 1 = 6 değişik şekilde

Kurallar

1) a_1 her zaman **1** olmalıdır
2) Polinomun derecesi grafın düğüm sayısını verir
3) İkinci terimin katsayısı grafın kenar sayısını verir
4) Terimlerin katsayılarının toplamı **0** olur
5) Polinomun katsayılarının işaretleri **+**, **-** diye gider
6) Polinomda sabit terim olmaz

Örnek



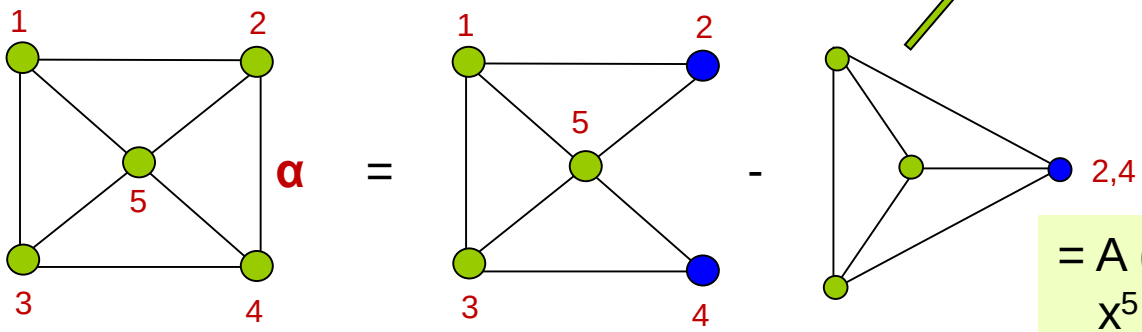
$$= \frac{x^2 (x-1)^2 (x-2)^2}{x\,(x-1)}$$

$$= x(x-1)(x-2)^2 - x(x-1)(x-2)$$
$$x(x-1)(x-2)[(x-2)-1]$$
$$x(x-1)(x-2)(x-3)$$
$$(x^2-x)(x^2-5x+6)$$
$$x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$

K_4 grafı 4 renk ile 24 farklı şekide boyanır

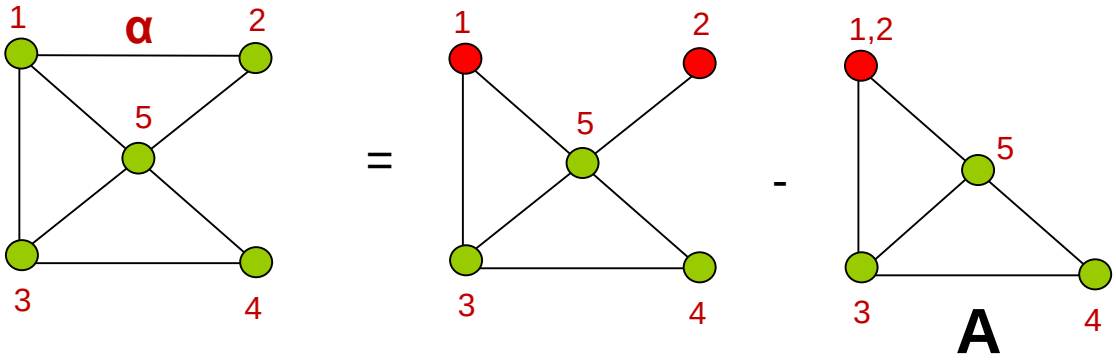
Örnek

$x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$



$= A(x-2) - (x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x)$

$x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 31x^2 + 14x$

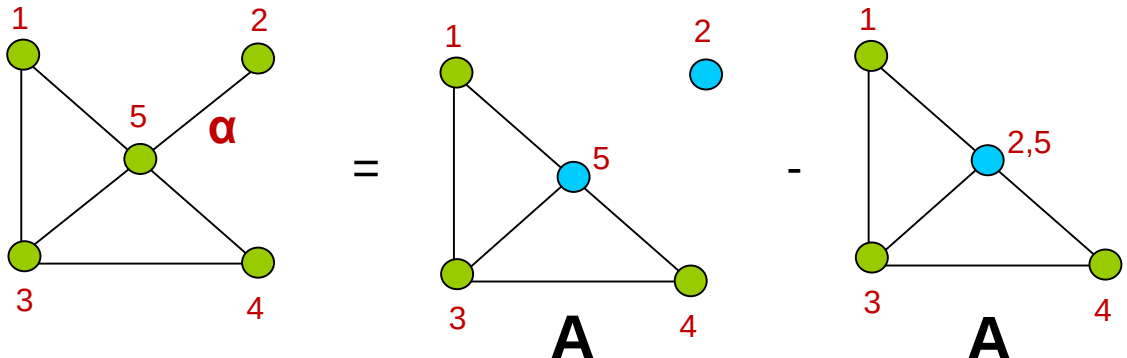


$= A(x-1) - A$

$Ax - A - A$

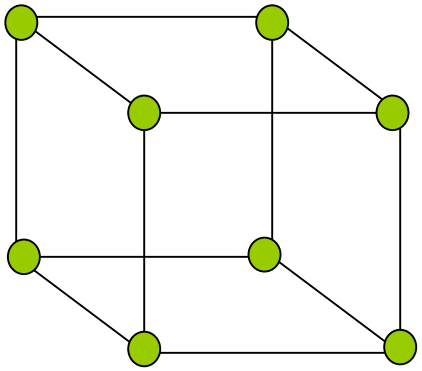
$Ax - 2A$

$A(x-2)$



$= A(x-1)$

Örnek



Minimum kaç renk ile boyanabilir ?

$$x^8 - 12x^7 + 66x^6 - 208\,x^5 + 325\,x^4 - 131x^3 + 90x^2 - 131\,x$$