T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİLİ DENGELİ TASARIM VE UYGULAMALARI

ZEHRA TEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. EMRE KOLOTOĞLU

İSTANBUL, 2016

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİLİ DENGELİ TASARIMLAR VE UYGULAMALARI

Zehra TEKİN tarafından hazırlanan tez çalışması 10/02/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Emre KOLOTOĞLU
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Yrd. Doç. Dr. Emre KOLOTOĞLU
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Yrd. Doç.Dr. Fatih DEMİRKALE
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Emine Şule YAZICI YURET
Koç Üniversitesi _____

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması sürecinde beni her konuda yönlendiren, bilgi ve yardımını esirgemeyen, çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Emre KOLOTOĞLU'na teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Hayatım boyunca yanımda olan ve her türlü desteği esirgemeyen canım aileme şükranlarımı ve saygılarımı sunarım.

Ocak, 2016

Zehra TEKİN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ vi

KISALTMA LİSTESİ vii

ÇİZELGE LİSTESİ viii

ÖZET ix

ABSTRACT x

BÖLÜM 1

GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 2
1.3 Hipotez 2

BÖLÜM 2

TASARIM ÇEŞİTLERİ 3

2.1 Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarım (BIBD) 3
2.2 Projektif Düzlem 8
2.3 Afin Düzlem 11
2.4 İkili Dengeli Tasarım (PBD) 13
2.5 Gruplara Bölünebilir Tasarım (GDD) 16
2.6 Çapraz Tasarım (TD) 19
2.7 Fark Kümesi 21
2.8 Fark Ailesi 22

BÖLÜM 3

PBD - KAPANIŞ 25

3.1 Tanımlar 25
3.2 {3,4,6} Kümesinin PBD - Kapanışı 26
3.3 {4,5,8,9,12} Kümesinin PBD - Kapanışı 28

BÖLÜM 4

PBD – KAPANIŞIN UYGULAMALARI 31

4.1 (v,3,1) – BIBD ler 31
4.2 (v,4,1) – BIBD ler 32

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER 34

KAYNAKLAR 35

ÖZGEÇMİŞ 36

SİMGE LİSTESİ

$(X, \mathcal{A})$	Tasarım
(v, k, λ) – BIBD	Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarım
$(v, K, \lambda) -$ PBD	İkili Dengeli Tasarım
$\mathbb{B}(K)$	PBD Kapanış

KISALTMA LİSTESİ

BIBD	Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarım (Balanced Incomplete Block Design)
GDD	Gruplara Bölünebilir Tasarım (Group Divisible Design)
PBD	İkili Dengeli Tasarım (Pairwise Balanced Design)
TD	Çapraz Tasarım (Transversal Design)

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2. 1 Fark ailesinin baz bloklarından elde edilen tüm farklar 23
Çizelge 3. 1 {3,4,6} kümesinin PBD – kapanışında elde edilecek tüm v_0'lar 28
Çizelge 3. 2 {4,5,8,9,12} kümesinin PBD – kapanışında elde edilecek tüm v_0'lar 29

ÖZET

İKİLİ DENGELİ TASARIMLAR VE UYGULAMALARI

Zehra TEKİN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Emre KOLOTOĞLU

Bu çalışma; ayrık matematiğin önemli bir dalı olan tasarım teorisinin temel tanımları, tasarım çeşitleri ve tasarım metodlarından; ikili dengeli tasarımlar kullanılarak dengeli tamamlanmamış blok tasarım oluşturulmasını içerir.

Birinci bölümde literatür özeti, ikinci bölümde tasarım çeşitleri, tanım ve teoremleri, üçüncü bölümde ikili dengeli tasarımlarda kapanış ve dördüncü bölümde ikili dengeli tasarımların uygulamalarına yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dengeli tamamlanmamış blok tasarım, ikili dengeli tasarım.

ABSTRACT

PAIRWISE BALANCED DESIGN AND ITS APPLICATIONS

Zehra TEKİN

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser: Assist. Prof. Dr. Emre KOLOTOĞLU

This work contains main definitions of design theory, which is a branch of discrete mathematics, design types and one of the design construction methods, construction of balanced incomplete block designs using pairwise balanced designs.

In the first chapter, literature review, in the second chapter, some definitions and theorems for design types, in the third chapter, pairwise balanced design closure, and in the fourth chapter applications of pairwise balanced designs are given.

Key Words: Balanced incomplete block design, pairwise balanced design.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Kombinatöriyel tasarım teorisinin 18. ve 19. yüzyıllardaki başarısı Kirkman, Cayley gibi bazı bilim insanlarının çalışmalarıyla ortaya çıkmıştır. Thomas Kirkman'ın "Kirkman's schoolgirl problem" yayınıyla[8] Steiner üçlü sistemleri için bir teoremin ortaya çıkması, Cayley'in bu problem için yayınladığı ilk çözüm[9] ve ardından Kirkman'ın kendi çözümü gibi bazı çalışmalar bu alandaki ilklerdendir.

Kombinatöriyel tasarım teorisi 20. yüzyıla gelmeden başlı başına bir akademik konu olmuştur. Bunun sebebi aslında bu alanda çalışmalar ortaya koyan bilim insanlarının kombinatöriyel tasarım teorisinin uygulamalarıyla derinlemesine bağlantılı olan deneysel tasarımın matematiğini geliştirmiş olmalarıdır.

1930 ların başlarında ise bu yeni gelişen alan, sonlu geometri, sayılar teorisi, sonlu cisimler ve grup teorisi gibi alanlarla derin bağlantılar kurulmuş, sağlam bir matematiksel disipline oturtulmuş ve böylelikle kombinatöriyel tasarımın temelleri atılmıştır.

Son 50 yılda ise özellikle Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarım(BIBD), İkili Dengeli Tasarım(PBD), Gruplara bölünebilir Tasarım(GDD) gibi belli başlı kombinatöriyel tasarımların oluşumu için kombinatörik ve hesapsal teknikleri ortaya çıkmıştır.

Son 20 yılda bu alan birçok zengin pratik ve güncel uygulamaları olan bir alan olarak gelişmektedir.

Günümüzdeki geniş uygulama alanlarından bazıları Kriptografi, Optik Haberleşme, Depolama Sistem Tasarımı, Haberleşme protokolleri, Algoritma Tasarımı ve Analizi, kablosuz haberleşme gibi alanlardır. Bu uygulama alanlarını örnekleyecek olursak; kriptografinin bazı uygulama alanları ATM kartları ve bilgisayar şifreleri, Optik haberleşme için fiber optik ağlarla görüntü aktarımı, Depolama sistem tasarımında ise kullanıcı arayüz tasarımı ve bilgi tasarımı gibi örnekler verebileceğimiz uygulamalar karşımıza çıkmaktadır.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmadaki ilk bölümde dengeli tamamlanmamış blok tasarım (BIBD), projektif düzlem, afin düzlem, ikili dengeli tasarım (PBD), gruplara bölünebilir tasarım (GDD), fark kümesi (DS), fark ailesi (DF) yapılarının tanımlarına, belli temel teoremlerine ve basit örneklerine yer verilmiştir. Sonraki bölümde ise ikili dengeli tasarımların kapanışına (PBD - closed) ait tanım ve teoremlerle birlikte bu kapanışın uygulamalarını barındıran bir içeriğe sahip son bölümle tamamlanmıştır.

1.3 Hipotez

İkili dengeli tasarımlar kullanılarak dengeli tamamlanmamış blok tasarımlar ve bazı tasarımların genel hallerinin elde edilişi gösterilmiştir. Bu tezin hazırlanmasında birkaç kaynaktan, özellikle D. Stinson'ın Combinatorial Designs : Construction and Analysis [3] kitabından faydalanılmıştır.

BÖLÜM 2

TASARIM ÇEŞİTLERİ

2.1 Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarım (BIBD)

Tanım 2.1.1 Noktalarının kümesi X ve X kümesinin blok olarak adlandırılan boş olmayan alt kümelerinin kolleksiyonu $\mathcal{A}$ olmak üzere $(X, \mathcal{A})$ çiftine bir tasarım denir.

Tanım 2.1.2 Bir $(X, \mathcal{A})$ tasarımı v, k, λ pozitif tamsayılar olmak üzere $v > k \geq 2$ şartı ile aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu tasarıma (v, k, λ) - BIBD (dengeli tamamlanmamış blok tasarım) denir.

1. $|X| = v$
2. Her blok tam olarak k noktayı kapsar
3. Herhangi iki nokta tam olarak λ blokta birarada bulunur.

Örnek 2.1.1 Bir (9,3,1)- BIBD ele alalım.

$$X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

noktaların kümesi ve a,b,c noktalarından oluşan bloğu abc olarak belirtecek olursak;

$$\mathcal{A} = \{123,456,789,147,258,369,159,267,348,168,249,357\}$$

olacak şekilde yukarıda verilen özellikleri sağlayan noktalar ve bloklar kümesine sahip olduğunu görürüz.

Teorem 2.1.1 Bir BIBD'deki her nokta tam olarak

$$r = \lambda(v-1)/(k-1) \tag{2.1}$$

blokta bulunur.

İspat Kabul edelim ki bir $(X, \mathcal{A})$ tasarımı (v, k, λ)- BIBD olsun ve $x \in X$ olacak şekilde X kümesinin x noktasını içeren bloklarının sayısını r_x olarak alalım. Bir

$$I = \{(y, A) : y \in X, y \neq x, A \in \mathcal{A}, \{x, y\} \subseteq A\} \quad (2.2)$$

kümesi tanımlayalım. Şimdi iki farklı metodla I kümesinin elemanlarını sayacağız.

1. $y \in X$ ve $y \neq x$ seçmek için $v - 1$ yol vardır.

Her bir y için $\{x, y\} \subseteq A$ olacak şekilde λ blok vardır. Dolayısıyla

$$|I| = \lambda(v - 1) \quad (2.3)$$

olacaktır.

2. $x \in A$ olacak şekilde bir A bloğu seçmek için r_x tane yol vardır.

Seçilen her A bloğu için $y \in A$ ve $y \neq x$ olacak şekilde $k - 1$ seçim vardır. Dolayısıyla

$$|I| = r_x(k - 1) \quad (2.4)$$

elde edilir. Bu iki eşitliği birleştirdiğimizde

$$\lambda(v - 1) = r_x(k - 1) \Rightarrow r_x = \lambda(v - 1)/(k - 1) \text{ (2.3)} \quad (2.5)$$

sonucu elde edilir. Burada görüldüğü üzere x noktasının bulunduğu blokların sayısı bu noktadan bağımsızdır. Yani; diğer bir deyişle her noktanın bulunduğu

$$r = \lambda(v - 1)/(k - 1) \quad (2.6)$$

blok sayısı eşittir.

Teorem 2.1.2 Bir (v, k, λ)- BIBD'nin

$$b = vr/k \quad (2.7)$$

bloğu vardır.

İspat Kabul edelim ki bir $(X, \mathcal{A})$ tasarımı , (v, k, λ)- BIBD olsun ve $b = |\mathcal{A}|$ olsun.

Bir

$$I = \{(x, A) : x \in X, A \in \mathcal{A}, x \in A\} \tag{2.8}$$

kümesi tanımlayalım. Şimdi iki farklı metodla I kümesinin elemanlarını sayacağız.

1. $x \in X$ seçmek için v yol vardır.

Seçilen her x noktası için $x \in A$ olacak şekilde r tane A bloğu vardır.

Dolayısıyla

$$|I| = vr \tag{2.9}$$

olacaktır.

2. $A \in \mathcal{A}$ seçmek için b tane yol vardır.

Seçilen her A bloğu için $x \in A$ olacak şekilde k tane x noktası vardır . Dolayısıyla

$$|I| = bk \tag{2.10}$$

elde edilir. Bu iki eşitliği birleştirdiğimizde

$$vr = bk \Rightarrow b = vr/k \tag{2.11}$$

sonucuna ulaşırız.

Teorem 2.1.3 Bir (v, k, λ) – BIBD'nin varolması için

$$1.\ \lambda(v-1) \equiv 0 \quad (mod\ k-1) \tag{2.12}$$

$$2.\ \lambda v(v-1) \equiv 0 \quad (mod\ k(k-1)) \tag{2.13}$$

şartlarının sağlanması gereklidir.

İspat Teorem 2.1.1 ve 2.1.2 ile ele alalım. BIBD'deki her nokta

$$r = \lambda(v-1)/(k-1) \tag{2.14}$$

blokta bulunuduğundan blok sayısı tam sayı olacaktır. Dolayısıyla

$$\lambda(v-1) \equiv 0 \quad (mod\ k-1) \tag{2.15}$$

şartı elde edilir.

Bir BIBD'de $b = \frac{vr}{k} = \lambda v(v-1)/k\,(k-1)$ blok vardır. Blok sayısı tam sayı olacağından

$$(\ \lambda v(v-1) \equiv 0 \quad (mod\ k(k-1)) \tag{2.16}$$

şartı elde edilir .

Böylelikle bir BIBD'nin varolamsı için gerekli iki şart elde edilmiş olur.

Örnek 2.1.2 (8,3,1) - BIBD için şartlara bakalım.

$$\lambda(v-1) = 7 \not\equiv 0 \quad (mod\ 2) \tag{2.17}$$

olduğundan böyle bir BIBD yoktur diyebiliriz.

Diğer yandan $(19,4,1) - BIBD$ için aynı şartlara bakacak olursak ikinci şartı sağlamadığını göreceğiz.

$\lambda(v-1) = 18 \equiv 0 \quad (mod\ 3)$ şartı sağlanıyor fakat

$\lambda v(v-1) = 19.18 \not\equiv 0 \quad (mod\ 12)$ olduğundan böyle bir BIBD yoktur.

Teoremde verilen gerek şartlar bir BIBD'nin varolması için yeterli değildir. Gerek şartları sağlayan v, k, λ parametreleri için böyle bir tasarımın oluşturulması gerekir.

Örnek 2.1.3 (7,3,1) - BIBD için varolma şartlarını inceleyelim.

$\lambda(v-1) = 6 \equiv 0 \quad (mod\ 2)$ şartı sağlanıyor

$\lambda v(v-1) = 7.6 \equiv 0 \quad (mod\ 6)$ şartı sağlanıyor. Bu şartların sağlanıyor olması yukarıda bahsedildiği gibi yeterli değildir. O yüzden BIBD'nin verilen parametrelerde inşa edilebiliyor olup olmadığı da kontrol edilmelidir.

Bu BIBD için blokları veriler ışığında yazmaya çalışalım. Her noktanın

$$r = \lambda(v-1)/(k-1) = \frac{1(7-1)}{3-1} = 3 \tag{2.17}$$

blokta bulunması gerekmektedir. Bunu gözönünde bulundurarak blokları oluşturmaya çalışalım. İlk olarak 1 noktasını ele alalım. Bu nokta 3 blokta bulunmalı ve geri kalan 6 noktanın her biriyle tam olarak bir blokta birlikte bulunmalıdır. O halde bloklar $123\ ,145\ ,167$ olsun. Sonra 2 noktasını ele alalım. 2 noktası 1 ve 3 noktalarıyla 123

bloğunda birer kez birlikte bulunmuş olacağından bu iki nokta ile başka blokta birlikte bulunamazlar. Diğer 4 noktanın herbiriyle tam olarak birer kez birlikte bulunmak zorunda olduğundan 2 noktasının bulunduğu diğer iki blok, ya 245 ve 267, ya 246 ve 257, ya da 247 ve 256 olabilir. Diğer iki blok 245 ve 267 olsun. Daha önceden 1 ile oluşturulan bloklara baktığımızda 45 ve 67 ikililerinin olduğunu görürüz. Bu sebeple 245 ve 267 bloklarını alamayız. Şimdi diğer iki bloğu alalım. 246 ve 257 yeni bloklarımız olsun. 1 ile oluşturulan bloklarımızla herhangi bir ikilinin çakışmadığını görüyoruz. O halde bu bloklar olabilir. Şimdi de 3 noktasını ele alalım. 3 noktası 1 ve 2 noktalarıyla 123 bloğunda birer kez birlikte bulunmuş olacağından bu iki nokta ile başka blokta birlikte bulunamazlar. Diğer 4 noktanın herbiriyle tam olarak birer kez birlikte bulunmak zorunda olduğundan 3 noktasının bulunduğu diğer iki blok, ya 345 ve 367, ya 346 ve 357, ya da 347 ve 356 olabilir. Aynı metodla 123 , 145 , 167 , 246 ve 257 bloklarımızla herhangi ikilinin çakışmayacağı bloklar 347 ve 356 olur. Diğer noktalar için de aynı düşünce ile yaklaştığımızda;

12 , 13 , 23 - 123 bloğunda
14 , 45 , 15 - 145 bloğunda
16 , 17 , 67 - 167 bloğunda
24 , 26 , 46 - 246 bloğunda
25 , 27 , 57 - 257 bloğunda
34 , 47 , 37 - 347 bloğunda
35 , 36 , 56 - 356 bloğunda

birlikte bulunduklarından, her nokta üç blokta ve herhangi iki nokta tam olarak bir blokta birlikte bulunmuş oldu. Sonuç olarak;

$$\mathcal{A} = \{123,145,167,246,257,347,356\}$$

elde edilmiş oldu.

Ayrıca BIBD'nin toplamda $b = \frac{vr}{k} = \lambda v(v-1)/k\,(k-1) = \frac{7.3}{3} = 7$ bloğu elde edilidiğinden $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ noktalar kümesine sahip bir $(7,3,1)$ – BIBD olduğunu göstermiş olduk.

2.2 Projektif Düzlem

Tanım 2.2.1 Bir $n \geq 2$ için $(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$ - BIBD var ise bu BIBD'ye n dereceli projektif düzlem denir.

Örnek 2.2.1 Örnek 2.1.3'de $(7,3,1)$ - BIBD'nin varolduğunu göstermiş ve inşa etmiştik. Bu BIBD aynı zamanda derecesi 2 olan bir projektif düzlemdir. Şöyle ki ; *n=2* iken $(7,3,1)$- BIBD var ve projektif düzlemdir.
Bir projektif düzlem geometrik olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.2.2 Bir projektif düzlem noktalarının kümesi Xolan, doğruların kümesi L olan (X, L) çiftidir. Bu çift aşağıdaki şartları sağlamaktadır.

1. Herhangi iki noktadan yalnızca bir doğru geçer
2. Herhangi iki doğru yalnızca tek bir noktada kesişir.
3. Herhangi üç tanesi aynı doğru üzerinde olmayan dört nokta vardır.

Projektif düzlem için yukarıda verdiğimiz iki tanım birbirine denktir. İspatını burada yapmayacağız.

Teorem 2.2.1 Her q asal kuvvet için q dereceli bir projektif düzlem vardır.

İspat F_q üzerinde 3- boyutlu vektör uzayı kümesi V olsun. V'nin 1- boyutlu alt uzaylarının kümesi V_1 , 2- boyutlu alt uzaylarının kümesi V_2 olsun. Her bir $B \in V_2$ için bir $A_B = \{C \in V_1 : \mathrm{C} \subseteq \mathrm{B}\}$ bloğu tanımlayalım. Ayrıca $\mathcal{A} = \{A_B : \mathrm{B} \in V_2\}$ olarak tanımlayalım. Şimdi $(V_1, \mathcal{A})$ ikilisinin q dereceli bir projektif düzlem olduğunu göstereceğiz.
1-boyutlu her alt uzay q vektöre sahiptir. Toplamda $q^3 - 1$ tane sıfırdan farklı vektör olduğundan , $\frac{q^3-1}{q-1} = q^2 + q + 1$ tane 1-boyutlu alt uzayı elde edilir.
2-boyutlu her alt uzay $q^2 - 1$ tane sıfırdan farklı vektöre sahiptir. Dolayısıyla herbir blok $\frac{q^2-1}{q-1} = q + 1$ tane 1-boyutlu alt uzaydan meydana gelir.

3-boyutlu uzayın 2-boyutlu alt uzay sayısı aşağıdaki şekilde hesaplanır.

3-boyutlu uzayın lineer bağımsız iki vektörünü seçmemiz gerekmektedir. Buradan;

$$\frac{(q^3-1).(q^3-q)}{(q^2-1).(q^2-q)} = q^2 + q + 1 \tag{2.18}$$

sonucuna ulaşılır.

Ayrıca herhangi iki doğru yalnızca bir düzlem belirteceğinden $\lambda = 1$ şartı da sağlanmış oldu. Böylelikle $(q^2 + q + 1, q + 1, 1)$ - BIBD elde edilmiş olur yani q asal kuvvet için q dereceli projektif düzlem elde edilir.

Örnek 2.2.2 Derecesi 3 olan projektif düzlem bir $(13,4,1) - BIBD$'dir.

$$V = (F_3)^3 = \{000,001,002,010,011,012, \dots ,222\}$$

$$V_1 = \{C_1, C_{2,\dots,} C_{13}\}$$

V_1'in elemanları olan 1-boyutlu vektör uzaylarını yazalım.

$$C_1 = \{000,001,002\}$$
$$C_2 = \{000,010,020\}$$
$$C_3 = \{000,011,022\}$$
$$C_4 = \{000,012,021\}$$
$$C_5 = \{000,100,200\}$$
$$C_6 = \{000,101,202\}$$
$$C_7 = \{000,102,201\}$$
$$C_8 = \{000,110,220\}$$
$$C_9 = \{000,111,222\}$$
$$C_{10} = \{000,112,221\}$$
$$C_{11} = \{000,120,210\}$$
$$C_{12} = \{000,122,211\}$$
$$C_{13} = \{000,121,212\}$$

2-boyutlu alt uzaylar kümesi V_2 için yukarıdaki işlemleri tekrarlayalım.

$V_2 = \{B_1, B_{2,\ldots,} B_{13}\}$

Şimdi ise V_2 kümesinin elemanları olan 2-boyutlu vektör uzaylarını yazalım.

$$B_1 = \{000,001,002,010,020,011,022,012,021\}$$
$$B_2 = \{000,001,002,100,200,101,102,201,202\}$$
$$B_3 = \{000,001,002,110,220,111,112,221,222\}$$
$$B_4 = \{000,001,002,120,210,121,122,211,212\}$$
$$B_5 = \{000,010,020,100,200,110,120,210,220\}$$
$$B_6 = \{000,010,020,101,202,111,121,212,222\}$$
$$B_7 = \{000,010,020,102,201,112,122,211,221\}$$
$$B_8 = \{000,011,022,100,200,111,122,211,222\}$$
$$B_9 = \{000,011,022,101,202,112,120,210,221\}$$
$$B_{10} = \{000,011,022,102,201,110,121,212,220\}$$
$$B_{11} = \{000,012,21,100,200,112,121,212,221\}$$
$$B_{12} = \{000,012,021,101,202,110,122,211,220\}$$
$$B_{13} = \{000,012,021,102,201,111,120,210,222\}$$

buradan aşağıdaki bloklar elde edilir,

$$A_{B_1} = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$$
$$A_{B_2} = \{C_1, C_5, C_6, C_7\}$$
$$A_{B_3} = \{C_1, C_8, C_9, C_{10}\}$$
$$A_{B_4} = \{C_1, C_{11}, C_{12}, C_{13}\}$$
$$A_{B_5} = \{C_2, C_5, C_8, C_{11}\}$$
$$A_{B_6} = \{C_2, C_6, C_9, C_{13}\}$$
$$A_{B_7} = \{C_2, C_7, C_{10}, C_{12}\}$$
$$A_{B_8} = \{C_3, C_5, C_9, C_{12}\}$$
$$A_{B_9} = \{C_3, C_6, C_{10}, C_{11}\}$$
$$A_{B_{10}} = \{C_3, C_7, C_8, C_{13}\}$$
$$A_{B_{11}} = \{C_4, C_5, C_{10}, C_{13}\}$$
$$A_{B_{12}} = \{C_4, C_6, C_8, C_{12}\}$$
$$A_{B_{13}} = \{C_4, C_7, C_9, C_{11}\}$$

Sonuç olarak noktalar kümesi doğrulardan meydana gelen, blokları ise 2-boyutlu alt uzaylardan oluşan bir BIBD elde edilmiş olur.

2.3 Afin Düzlem

Tanım 2.3.1 Bir $n \geq 2$ için $(n^2, n, 1)$ - BIBD var ise bu BIBD'ye n dereceli afin düzlem denir.

Örnek 2.3.1 Yukarıda Örnek 2.1.1'de belirttiğimiz (9,3,1)- BIBD aynı zamanda $q=3$ asal kuvvet için 3 dereceli bir afin düzleme de örnek olarak verilebilir.

Teorem 2.3.1 Her q asal kuvvet için q dereceli bir afin düzlem vardır.

İspat $P = \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q$ olarak tanımlansın. Her $a, b \in \mathbb{F}_q$ için

$$L_{a,b} = \{(x, y) \in P : y = ax + b\} \tag{2.19}$$

şeklinde ve her $c \in \mathbb{F}_q$ için

$$L_{\infty,c} = \{(c, y) : y \in \mathbb{F}_q\} \tag{2.20}$$

şeklinde tanımlansın.

Son olarak $\mathcal{L} = \{L_{a,b} : a, b \in \mathbb{F}_q\} \cup \{L_{\infty,c} : c \in \mathbb{F}_q\}$ şeklinde tanımlansın.

$(P, \mathcal{L})$ bir $(q^2, q, 1)$ - BIBD olduğunu gösterelim.

İlk olarak P kümesinin eleman sayısı q^2 dir. Yani q^2 nokta vardır. $k = q$ dur. $\lambda = 1$ şartı için ;

(x_1, y_1) ve (x_2, y_2) ikilileri P kümesinin iki farklı elemanı olsun.

1. Eğer $x_1 = x_2$ ise; $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ nokta çiftini kapsayan tek blok L_{∞,x_1} bloğu olacaktır.
2. Eğer $x_1 \neq x_2$ ise; $\mathbb{F}_q$ daki

$$y_1 = ax_1 + b \tag{2.21}$$

$$y_2 = ax_2 + b \tag{2.22}$$

eşitliklerini ele alalım. Bu eşitlik sisteminde a ve b için tek çözüm olduğunu göstereceğiz. Bu eşitlikleri taraf tarafa çıkardığımızda

$$y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2) \tag{2.23}$$

elde ederiz. Burada $x_1 \neq x_2$ olduğundan $(x_1 - x_2)^{-1} \in \mathbb{F}_q$ olacak şekilde tek bir çarpımsal tersi mevcuttur. Devam edecek olursak

$$a = (x_1 - x_2)^{-1}(y_1 - y_2) \tag{2.24}$$

elde edilir. Şimdi bulduğumuz a değerini herhangi bir eşitlikteki yerine yazıp b değerini elde edelim.

$$y_1 = ax_1 + b \tag{2.25}$$

Burada b'yi yalnız bırakacak olursak

$$b = y_1 - ax_1 = y_1 - (x_1 - x_2)^{-1}(y_1 - y_2)x_1 \tag{2.26}$$

elde edilir. Buradan $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ çiftinin yalnızca tek bir blokta birlikte bulunduğu ve bu bloğun $L_{a,b}$ bloğu olduğu sonucunu elde ederiz.
Dolayısıyla $(P, \mathcal{L})$ bir $(q^2, q, 1)$ – BIBD'dir.

Örnek 2.3.2 Bir (9,3,1)- BIBD'nin Örnek 2.1.1'de varolduğunu göstermiştik. Bu derecesi 3 olan afin düzlem bir $(9,3,1) - BIBD$'dir.

$$V = F_3 \, x \, F_3 = \{0,1,2\} \, x \, \{0,1,2\}$$
$$= \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}$$

noktaları,

$$C_1 = \{0,0\}$$
$$C_2 = \{0,1\}$$
$$C_3 = \{0,2\}$$
$$C_4 = \{1,0\}$$
$$C_5 = \{1,1\}$$
$$C_6 = \{1,2\}$$
$$C_7 = \{2,0\}$$
$$C_8 = \{2,1\}$$
$$C_9 = \{2,2\}$$

blokları da,

$$B_1 = \{C_1, C_2, C_3\} = \{(0,0), (0,1), (0,2)\} = \{x = 0\}$$
$$B_2 = \{C_1, C_4, C_7\} = \{(0,0), (1,0), (2,0)\} = \{y = 0\}$$
$$B_3 = \{C_1, C_5, C_9\} = \{(0,0), (1,1), (2,2)\} = \{y = x\}$$
$$B_4 = \{C_1, C_6, C_8\} = \{(0,0), (1,2), (2,1)\} = \{y = 2x\}$$
$$B_5 = \{C_4, C_5, C_6\} = \{(1,0), (1,1), (1,2)\} = \{x = 1\}$$
$$B_6 = \{C_2, C_5, C_8\} = \{(0,1), (1,1), (2,1)\} = \{y = 1\}$$
$$B_7 = \{C_2, C_6, C_7\} = \{(0,1), (1,2), (2,0)\} = \{y = x + 1\}$$
$$B_8 = \{C_2, C_4, C_9\} = \{(0,1), (1,0), (2,2)\} = \{y = 2x + 1\}$$
$$B_9 = \{C_7, C_8, C_9\} = \{(2,0), (2,1), (2,2)\} = \{x = 2\}$$
$$B_{10} = \{C_3, C_6, C_9\} = \{(0,2), (1,2), (2,2)\} = \{y = 2\}$$
$$B_{11} = \{C_3, C_4, C_8\} = \{(0,2), (1,0), (2,1)\} = \{y = x + 2\}$$
$$B_{12} = \{C_3, C_5, C_7\} = \{(0,2), (1,1), (2,0)\} = \{y = 2x + 2\}$$

olan $(9,3,1)$- BIBD var ve afin düzlemdir.

2.4 İkili Dengeli Tasarım (PBD)

Tanım 2.4.1 Kabul edelim ki $v \geq 2$, $\lambda \geq 1$ ve $K \subseteq \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 2\}$ olsun. Bir $(X, \mathcal{A})$ çifti

1. $|X| = v$
2. Tüm $A \in \mathcal{A}$ lar için $|A| \in K$ ve
3. Her farklı iki nokta çifti tam olarak λ blokta birarada bulunur

özelliklerini sağlıyorsa buna (v, K, λ) - PBD (ikili dengeli tasarım) denir. Ayrıca bir $(v, K, 1) - PBD$ genellikle (v, K) - PBD diye de gösterilir.

Bir (v, K) – PBD'nin varolabilmesi için gerekli bazı şartlar mevcuttur. Bu şartları inceleyelim.

Tanım 2.4.2 Varsayalım ki $K \subseteq \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 2\}$ olsun. *K* kümesinin *PBD - kapanışı*

$$\mathbb{B}(K) = \{v : bir\ (v, K) - PBD\ vardır\}$$

olarak tanımlanan bir kümedir.

Ayrıca ;

$$\alpha(K) = ebob\{k-1 : k \in K\} \tag{2.27}$$

$$\beta(K) = ebob\{k(k-1) : k \in K\} \tag{2.28}$$

şeklinde tanımlansın.

Aşağıdaki önerme ile $v \in \mathbb{B}(K)$ şartını verelim.

Önerme 2.4.1 Farzedelim ki $K \subseteq \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 2\}$ ve $v \geq 3$ bir tamsayı olsun. Aşağıdaki şartlar $v \in \mathbb{B}(K)$ olması için gerekli şartlardır.

$$v - 1 \equiv 0\big(mod\ \alpha(K)\big) \tag{2.29}$$

$$v(v-1) \equiv 0\big(mod\ \beta(K)\big) \tag{2.30}$$

İspat Kabul edelim ki $v \in \mathbb{B}(K)$ olsun. O halde $(v, K) - PBD$ vardır. Bu tasarımdaki noktaların kümesi X olsun. Farzedelim $x \in X$ ve bu x noktasını kapsayan blokların sayısı r_x , bloklar ise $A_1, \dots, A_{r_x}$ olarak tanımlansın. Her farklı iki nokta çifti tam olarak bir blokta bulunduğundan

$$\sum_{i=1}^{r_x}(|A_i| - 1) = v - 1 \tag{2.31}$$

olacaktır. Buradan $\alpha(K) = ebob\{k-1 : k \in K\}$ olduğunu ve tüm $A \in \mathcal{A}$ lar için $|A| \in K$ olduğunu gözönünde bulundurarak

$$|A_i| - 1 \equiv 0\big(mod\ \alpha(K)\big) \tag{2.32}$$

elde edilir.

$1 \leq i \leq r_x$ olan tüm i ler için uygulandığında ,

$$\sum_{i=1}^{r_x}(|A_i| - 1) = (|A_1| - 1) + \cdots + (\big|A_{r_x}\big| - 1) = v - 1 \tag{2.33}$$

$$v - 1 \equiv 0\big(mod\ \alpha(K)\big) \tag{2.34}$$

elde edilir. Böylelikle ispatın ilk şartı tamamlanmış olur.

Şimdi ikinci şartını ispatlayalım. PBD nin tüm blokları $A_1, \dots, A_b$ olsun ve her farklı iki nokta çifti tam olarak bir blokta bulunduğundan

$\sum_{i=1}^{b}|A_i|(|A_i|-1)=v(v-1)$ (2.35)

elde edilir. Sonuç olarak; $\beta(K)=ebob\{k(k-1):k\in K\}$ olduğunu ve tüm $A\in\mathcal{A}$ lar için $|A|\in K$ olduğunu gözönünde bulundurarak

$|A_i|(|A_i|-1)\equiv 0\big(mod\ \beta(K)\big)$ (2.36)

elde ederiz ve $1\leq i\leq b$ olan tüm i ler için uygulandığında,

$v(v-1)\equiv 0\big(mod\ \beta(K)\big)$ (2.37)

olduğunu görürüz.

Eğer $|K|=1$ ise $(K=\{k\}\ olsun)$ ve $v>k$ ise $(v,K)-PBD$ bir $(v,k,1)-BIBD$ dir ve Önerme 2.4.1'deki şartlar Teorem 2.4.1'deki şartlara denktir.

Eğer $|K|>1$ ise bir örnekle inceleyelim.

Örnek 2.4.1 Kabul edelim ki $K=\{3,4,6\}$ olsun.

$\alpha(K)=ebob\{2,3,5\}=1$ (2.38)

$\beta(K)=ebob\{6,12,30\}=6$ (2.39)

Önerme 2.4.1'deki gerekli şartlar

$v-1\equiv 0\big(mod\ \alpha(K)\big)$ (2.40)

$v(v-1)\equiv 0\big(mod\ \beta(K)\big)$ (2.41)

ile

$v-1\equiv 0(mod\ 1)$ (2.42)

$v(v-1)\equiv 0(mod\ 6)$ (2.43)

yani;

$v\equiv 0$ veya $1(mod\ 3)$ (2.44)

olduğundan

$\mathbb{B}(K)=\mathbb{B}(\{3,4,6\})\subseteq\{n\in\mathbb{Z}:n\equiv 0\ veya\ 1(mod\ 3),n\geq 3\}$ (2.45)

olduğu görülür.

2.5 Gruplara Bölünebilir Tasarım (GDD)

Tanım 2.5.1 Bir $(X, \mathcal{G}, \mathcal{A})$ üçlüsüne $v > 2$ pozitif bir tamsayı olacak şekilde aşağıdaki şartları sağlıyor ise, bir gruplara bölünebilir tasarım denir. Kısaca GDD olarak ifade edilir.

1. X; elemanları noktalar olan sonlu bir kümedir
2. $\mathcal{G}$; X kümesinin grup olarak adlandırılan , boş olmayan, herhangi ikisi ayrık olan ve birleşimleri X olan alt kümelerinin bir kümesidir.
3. $\mathcal{A}$; tüm $A \in \mathcal{A}$ lar için $|A| \geq 2$ olacak şekilde X in blok olarak adlandırılan altkümeleridir.
4. Bir grup ve bir blok en fazla bir noktada kesişir.
5. Farklı gruplardaki her nokta çifti tam olarak bir blokta bulunur.

Aşağıda ifade edeceğimiz önermeler bir GDD'den PBD elde etmek yada PBD' den GDD elde etmek ile ilgili olacaktır.

Önerme 2.5.1 Eğer $(X, \mathcal{G}, \mathcal{A})$ üçlüsü bir GDD ise o zaman $(X, \mathfrak{B})$, $\lambda = 1$ olan bir PBD dir. Burada

$$\mathfrak{B} = \mathcal{A} \cup \{G \in \mathcal{G} : |G| \geq 2\} \tag{2.46}$$

şeklinde tanımlanır.

İspat $(X, \mathfrak{B})$ yapısının PBD tanımına göre ilk şart olan noktalar kümesinden oluştuğu açıktır. O halde her nokta çiftinin tam olarak tek bir blokta olduğunu göstermemiz yetecektir. $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. x ve y noktaları GDD'nin aynı grubunda iseler, yani öyle bir $G \in \mathcal{G}$ var ki; $x, y \in G$ ise $\{x, y\}$ ikilisi $\{G \in \mathcal{G} : |G| \geq 2\}$ kümesinin içindeki G bloğunda birlikte bulunmuş olur ve GDD'nin tanımı gereği GDD'nin bir grubuyla bir bloğu en fazla bir noktada kesişeceğinden, $\{x, y\}$ ikilisi $\mathcal{A}$ kümesinin içindeki blokların hiçbirinde birarada bulunmaz.

Farklı gruplarda iseler, yani öyle $G_i, G_j \in \mathcal{G}$, $i \neq j$ var ki $x \in G_i$ ve $y \in G_j$ ise GDD'nin 5. şartından dolayı farklı gruplardaki her nokta çifti tam olarak bir blokta bulunur. $\{x, y\}$ çifti $\mathcal{A}$ kümesindeki bloklardan tam olarak birinde bulunur. Ayrıca $\{G \in \mathcal{G} : |G| \geq 2\}$ kümesindeki blokların hiçbirinde birlikte bulunmaz.

Burada kolay bir örnek yapalım.

Örnek 2.5.1 Noktaların kümesi $X = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ olsun.

$\mathcal{G} = \{23,47,59,68\}$

$\mathcal{A} = \{456,789,258,369,267,348,249,357\}$, $(X, \mathcal{G}, \mathcal{A})$ bir GDD dir.

$\mathfrak{B} = \mathcal{A} \cup \{G \in \mathcal{G} : |G| \geq 2\}$

olduğundan

$\mathfrak{B} = \{23,47,59,68,456,789,258,369,267,348,249,357\}$

şeklinde bloklara sahip bir PBD elde edilir.

Önerme 2.5.2 Farzedelim ki $(X, \mathcal{G}, \mathcal{A})$ bir GDD'dir ve $\infty \notin X$, $Y = X \cup \{\infty\}$ olarak tanımlansın. Burada

$$\mathfrak{B} = \mathcal{A} \cup \{G \cup \{\infty\} : G \in \mathcal{G}\} \tag{2.47}$$

şeklinde ifade edilsin. O halde $(Y, \mathfrak{B})$, $\lambda = 1$ olan bir PBD'dir.

İspat Kabul edelim ki, $(X, \mathcal{G}, \mathcal{A})$ bir GDD'dir. *X* kümesinden *x* ve *y* gibi iki farklı eleman seçelim. Tıpkı Önerme 2.5.1'in ispatında olduğu gibi alınan her nokta çifti tam olarak bir blokta birlikte bulunur. Yukarıda ispatını yaptığımız kümeye ∞ elemanını dahil edersek, fazladan bir durum daha incelememiz gerekir. Yukarıdaki ispata ilave durum olarak;

X kümesinden bir *x* elemanı ile ∞ elemanının tam olarak bir blokta bulunduğunu göstermemiz gerekmektedir. GDD tanımı 2.şart gereği *x* elemanı $\mathcal{G}$ kümesindeki gruplardan tam olarak bir tanesinde bulunur ve bu G olsun. O halde, $\{x, \infty\}$ ikilisi $G \cup \{\infty\}$ bloğunda birlikte bulunur. Böylece her nokta çifti yalnızca bir blokta bulunur. Sonuç olarak $\lambda = 1$ şartıda sağlanmış olacağından PBD elde edilir.

Örnek 2.5.2 Bir önceki örnekle bu önermeyi uygulayalım.

$X = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$\mathcal{G} = \{23,47,59,68\}$

$\mathcal{A} = \{456,789,258,369,267,348,249,357\}$, $(X, \mathcal{G}, \mathcal{A})$ bir GDD'dir.

$Y = X \cup \{\infty\} = \{\infty, 2,3,4,5,6,7,8,9\}$ olsun ve

$\mathfrak{B} = \mathcal{A} \cup \{G \cup \{\infty\} : G \in \mathcal{G}\}$

$\mathfrak{B} = \{23\infty, 47\infty, 59\infty, 68\infty, 456,789,258,369,267,348,249,357\}$

alırsak, (Y, $\mathfrak{B}$) – PDB'si elde edilir. Aynı zamanda Önerme 2.4.1'in ispatından sonra kısaca değindiğimiz gibi $|K| = 1$ $(K = \{3\})$ ve $v = 9 > 3$ olduğundan yukarıda oluşturduğumuz PBD bir $(9,3,1)$ – BIBD'dir.

Önerme 2.5.3 Eğer $(X,\mathcal{A})$, $\lambda = 1$ olan bir PBD ise $(X,\mathcal{G},\mathcal{A})$ bir GDD'dir.
Burada $\mathcal{G}$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\mathcal{G} = \{\{x\}: x \in X\} \tag{2.48}$$

İspat Kabul edelim ki; $(X,\mathcal{A})$ bir PBD'dir. Dolayısıyla her farklı iki nokta çifti tam olarak bir blokta bulunur. Noktalar kümesinin her elemanını bir grup olarak ele alırsak ve bu grupların kümesine $\mathcal{G}$ diyecek olursak farklı gruplardaki her nokta çifti tam olarak bir blokta bulunur. O halde; $(X,\mathcal{G},\mathcal{A})$ bir GDD'dir.

Önerme 2.5.4 Varsayalım ki; v>k>1 olsun. Bir $(v,k,1)$ - BIBD 'nin varolabilmesi için gerek ve yeter şart $v-1$ noktaya, $k-1$ uzunluğunda r gruba ve k uzunluğunda bloklara sahip bir GDD'nin varolmasıdır.

İspat Kabul edelim ki, v>k>1 olmak üzere $(v,k,1)$ - BIBD olsun. Bu BIBD'nin bloklarından herhangi bir x noktasını sildiğimizde bu BIBD'nin bazı bloklarının uzunlugu $k-1$ olacaktır. Bu blokları oluşturduğumuz GDD'nin grupları kabul edelim. Geriye kalan bloklar k uzunluğunda olacaktır. Bu blokları da GDD'nin blokları Kabul edelim. Bir BIBD'de her farklı nokta çifti bir blokta bulunduğundan, oluşturduğumuz GDD'deki bir grup ve bir blok birden fazla noktada kesişemez. Ayrıca bu BIBD'nin yine aynı şartı sağlamasından dolayı farklı gruplardaki her nokta çifti yalnızca bir blokta bulunur. Sonuç olarak $v-1$ nokta, $k-1$ uzunluğunda r grup ve k uzunluğunda bloklara sahip bir GDD elde edilmiş olacaktır.
Tersi olarak ele alalım. Kabul edelim ki $v-1$ nokta, $k-1$ uzunluğunda r grup ve k uzunluğunda bloklara sahip bir GDD olsun. Bu GDD'ye bir nokta eklediğimizde Önerme 2.5.2 deki gibi bir PBD elde edilir. Elde edilen bu PBD'de tüm bloklar k uzunluğunda olacağından bu PBD bir $(v,k,1)$ - BIBD olduğu görülür.

Örnek 2.5.2 Bir (7,3,1) - BIBD alalım.

$X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$\mathcal{A} = \{123,145,167,246,257,347,356\}$

Herhangi bir *x* seçelim. Örneğin 3 noktasını alalım. Yeni elde edeceğimiz GDD

Y = { 1,2,4,5,6,7}

$\mathcal{G} = \{12,47,56\}$

$\mathfrak{B} = \{145,167,246,257\}$

olacaktır. Görüldüğü üzere bu GDD iki uzunluğunda üç gruba, üç uzunluğunda dört bloğa sahiptir.

Örnek 2.5.3 Noktalar kümesi $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ olan, 3 uzunluğunda 9 grubu ve bloklarının uzunluğu 4 olan bir GDD'yi şu şekilde oluşturabiliriz. Grupları $\{(x, y, z): z \in \mathbb{Z}_3\}$, $x, y \in \mathbb{Z}_3$ alırsak, blokları $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ toplamsal grubunun

$\{(0,0,0), (0,2,0), (1,1,1), (2,1,1)\}$ ve $\{(0,0,0), (1,0,2), (0,1,2), (1,1,0)\}$

baz bloklarından elde edebiliriz.

2.6 Çapraz Tasarım (TD)

Tanım 2.6.1 Bir $(X, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ üçlüsü $k \geq 2$, $n \geq 1$ olacak şekilde

1. X kümesi kn elemanlı noktalar kümesi
2. $\mathcal{G}$; X kümesinin *n* uzunluğuna sahip *k* tane alt kümesinden oluşan gruplar kümesi,
3. $\mathcal{B}$; X kümesinin *k* elemanlı alt kümelerinden oluşan bloklar kümesi olacak şekilde,
4. Herhangi bir blok ve grup yalnızca tek bir noktada kesişir ve
5. Farklı gruplardaki her nokta çifti tam olarak bir blokta bulunur

özelliklerini sağlıyorsa $(X, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ üçlüsüne çapraz tasarım denir ve kısaca TD(k, n) olarak gösterilir.

Örnek 2.6.1 Tanımdan yola çıkarak

$X = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, k\}$

$\mathcal{G}_i = \{1, \dots, n\} \times \{i\} = \{(1, i), (2, i), \dots, (n, i)\}$, $\mathcal{G} = \{G_i : 1 \leq i \leq k\}$

$B_r = \{(A(r, i), i) : 1 \leq i \leq k\}$, $\mathcal{B} = \{B_r : 1 \leq r \leq n^2\}$

şeklinde özetleyebiliriz. Şimdi TD (4,3)'ü inceleyelim;

X={1,2,3}×{1,2,3,4}

$$G_1 = \{1,2,3\} \times \{1\} = \{(1,1),(2,1),(3,1)\}$$
$$G_2 = \{1,2,3\} \times \{2\} = \{(1,2),(2,2),(3,2)\}$$
$$G_3 = \{1,2,3\} \times \{3\} = \{(1,3),(2,3),(3,3)\}$$
$$G_4 = \{1,2,3\} \times \{4\} = \{(1,4),(2,4),(3,4)\}$$

$$\mathcal{G}=\{G_1, G_2, G_3, G_4\}$$

$$B_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3)(1,4)\}$$
$$B_2 = \{(1,1),(2,2),(2,3)(2,4)\}$$
$$B_3 = \{(1,1),(3,2),(3,3)(3,4)\}$$
$$B_4 = \{(2,1),(1,2),(2,3)(3,4)\}$$
$$B_5 = \{(2,1),(2,2),(3,3)(1,4)\}$$
$$B_6 = \{(2,1),(3,2),(1,3)(2,4)\}$$
$$B_7 = \{(3,1),(1,2),(3,3)(2,4)\}$$
$$B_8 = \{(3,1),(2,2),(1,3)(3,4)\}$$
$$B_9 = \{(3,1),(3,2),(2,3)(1,4)\}$$

$$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9\}$$

şeklinde bloklara sahip bir TD(4,3) elde edilir.

Önerme 2.6.1 Kabul edelim ki $k \geq 2$ olsun ve TD $(k+1, t)$ vardır. O halde aşağıdaki PBD'ler elde edilir.

1. Bir $(kt, \{k, t\})$ - PBD vardır
2. Bir $(kt+1, \{k, k+1, t\})$ - PBD vardır
3. Bir $(kt+u, \{k, k+1, t, u\})$ - PBD vardır , tüm $2 \leq u \leq t-1$ şartını sağlayan u lar için
4. Bir $((k+1)t, \{k+1, t\})$ - PBD vardır.

İspat Bir $(X, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ alalım ve bu TD$(k+1, t)$ olsun.Yukarıdaki 4 durum içinde PBD Tanım 2.4.1'in ilk iki şartı olan noktalar kümesine ve bloklar kümesine sahip olduğu görülmektedir. Önermenin maddelerini tek tek inceleyecek olursak;

1. TD$(k+1, t)$ alalım ve bir grubunu tamamen silelim. Geriye kalan gruplar ve bloklar PBD nin şartlarını sağlayacağından PBD'nin bloklarını oluşturacaktır.
2. TD$(k+1, t)$ alalım ve bir grubundan $t-1$ nokta silelim. Boyutu 1 olan grup hariç kalan bütün gruplar ve bloklar, PBD'nin bloklarını oluşturacaktır.
3. TD $(k+1, t)$ alalım ve bir grubundan $t-u$ nokta silelim. Kalanlar PBD'nin bloklarını oluşturacaktır.
4. Basitçe bir TD$(k+1, t)$ nin tüm gruplarını ve bloklarını aldığımızda PBD'nin blokları oluşur.

Önerme 2.6.2 Kabul edelim ki; $t \equiv 0$ veya 1 $(mod\ 3)$, $t \geq 3$ ve $t \neq 6$ olsun. Tüm bloklarının boyutu 3 e bölündüğünde 0 ve 1 kalanlarını veren aşağıdaki PBD'ler vardır.

1. Eğer $u \equiv 0$ veya 1 $(mod\ 3)$ ve $3 \leq u \leq t$ ise $(3t+u, \{3,4,t,u\})$ – PBD vardır
2. Eğer $u \in \{0,1\}$ ise $(3t+u, \{3,4,t\})$ – PBD vardır.

İspat Önerme 2.6.1'de genel hali verilen TD'nin özel bir durumudur. Burada TD $(4, t)$ 'nin varolması için gerek ve yeter şart $t \neq 2,6$ olmasını ispat etmeden kullanacağız. Şöyle ki; Önerme 2.6.1'nın ispatı verilen ve 3. Durumu olan $(kt+u, \{k, k+1, t, u\})$ - PBD vardır (tüm $2 \leq u \leq t-1$ şartını sağlayan u lar için) k yerine 3 alındığında $(3t+u, \{3,4,t,u\})$ – PBD elde edilir ve $u \equiv 0$ veya 1 $(mod\ 3)$ için $3 \leq u \leq t$ olur. Diğer duruma bakacak olursak; Önerme 2.6.1'ın 1. ve 2.durumları olan$(kt+1, \{k, k+1, t\})$ - PBD ve $(kt, \{k, t\})$ - PBD lerin varlığı ispat edilmiştir. Bu durumların varlığından bahsedilmesi için $u \in \{0,1\}$ olması bu önermenin 2. durumda verilen PBD'nin varlığını sağlayacaktır.

2.7 Fark Kümesi

Tanım 2.7.1 Kabul edelim ki $(G, +)$; derecesi v olan sonlu bir grup olsun. k , λ pozitif birer tamsayı ve $2 \leq k < v$ olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $D \subset G$ alt kümelerine $(G, +)$ da bir (v, k, λ) - fark kümesi denir.

1. $|D| = k$,
2. $[x - y : x, y \in D, x \neq y]$ kolleksiyonu, $G\backslash\{0\}$ 'daki tüm elemanları λ defa bulundurur.

Örnek 2.7.1 $(\mathbb{Z}_{21}, +)$ da (21,5,1) - fark kümesi alalım. $D = \{0,1,6,8,18\}$ için tüm farklar,

$$1 - 0 = 1$$
$$6 - 0 = 6$$
$$8 - 0 = 8$$
$$18 - 0 = 18$$
$$6 - 1 = 5$$
$$8 - 1 = 7$$
$$18 - 1 = 17$$
$$8 - 6 = 2$$
$$18 - 6 = 12$$
$$18 - 8 = 10$$
$$0 - 1 = 20$$
$$0 - 6 = 15$$
$$0 - 8 = 13$$
$$0 - 18 = 3$$
$$1 - 6 = 16$$
$$1 - 8 = 14$$
$$1 - 18 = 4$$
$$6 - 8 = 19$$
$$8 - 18 = 11$$

olacak ve D kümesi tüm farkları içinde barındıracaktır. D kümesinin farklı iki elemanının farkı $\mathbb{Z}_{21}\backslash\{0\}$ kümesinin tüm elemanlarını yalnızca bir kez bulundurur.

2.8 Fark Ailesi

Tanım 2.8.1 Kabul edelim ki $(G, +)$; derecesi v olan sonlu bir grup olsun. k , λ pozitif birer tamsayı ve $2 \leq k < v$ olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan G 'nin alt kümelerinin $[D_1, \dots, D_l]$ kolleksiyonuna $(G, +)$'da bir (v, k, λ) - fark ailesi denir.

1. Her $1 \leq i < l$ için $|D_i| = k$,
2. $\bigcup_{i=1}^{l}[x - y : x, y \in D_i, x \neq y]$ birleşim kolleksiyonu, $G\backslash\{0\}$'daki tüm elemanları λ defa bulundurur.

Örnek 2.8.1 Bir $(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5, +)$ sonlu grubunu ele alalım. Burada baz blokları $\{(0,0),(1,0),(0,1),(2,2)\}$ ve $\{(0,0),(0,2),(2,0),(4,4)\}$ olan bir $(25,4,1)$ fark ailesi elde edilir. Tüm farklar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Çizelge 2.1 Fark ailesinin baz bloklarından elde edilen tüm farklar

$\{(0,0),(1,0),(0,1),(2,2)\}$	$\{(0,0),(0,2),(2,0),(4,4)\}$
$(0,0)-(1,0)=(4,0)$	$(0,0)-(0,2)=(0,3)$
$(0,0)-(0,1)=(0,4)$	$(0,0)-(2,0)=(3,0)$
$(0,0)-(2,2)=(3,3)$	$(0,0)-(4,4)=(1,1)$
$(1,0)-(0,0)=(1,0)$	$(0,2)-(0,0)=(0,2)$
$(0,1)-(0,0)=(0,1)$	$(2,0)-(0,0)=(2,0)$
$(2,2)-(0,0)=(2,2)$	$(4,4)-(0,0)=(4,4)$
$(1,0)-(0,1)=(1,4)$	$(0,2)-(2,0)=(3,2)$
$(1,0)-(2,2)=(4,3)$	$(0,2)-(4,4)=(4,3)$
$(0,1)-(1,0)=(4,1)$	$(2,0)-(0,2)=(2,3)$
$(2,2)-(1,0)=(1,2)$	$(4,4)-(0,2)=(4,2)$
$(0,1)-(2,2)=(3,4)$	$(2,0)-(4,4)=(3,1)$
$(2,2)-(0,1)=(2,1)$	$(4,4)-(2,0)=(2,4)$

Örnek 2.8.2 Bir $(\mathbb{Z}_{13}, +)$ sonlu grubunu ele alalım. Burada baz blokları $\{\{0,1,4\},\{0,2,8\}\}$ olan bir $(13,4,1)$ fark ailesi elde edilir. Bu fark ailesinin ilk baz bloğundan $1,3,4,9,10,12$ farklarını, ikincisinden ise $2,5,6,7,8,11$ farklarını elde ederiz. Böylelikle tüm farklar birer kez elde edilmiş olacaktır.

Örnek 2.8.3 Bir $(\mathbb{Z}_{37}, +)$ sonlu grubunu ele alalım. Burada baz blokları $\{0,1,3,24\},\{0,10,18,30\}$ ve $\{0,4,26,32\}$ olan bir $(37,4,1)$ fark ailesi elde edilir. Bu

fark ailesinin ilk baz bloğundan 1,2,3,13,14,16,21,23,24,34,35,36 farklarını, ikincisinden 7,8,10,12,17,18,19,20,25,27,29,30 farklarını ve üçüncüsünden 4,5,6,9,11,15,22,26,28,31,32,33 farklarını elde ederiz. Böylelikle tüm farklar birer kez elde edilmiş olacaktır.

BÖLÜM 3

PBD - KAPANIŞ

3.1 Tanımlar

Tanım 3.1.1 Farzedelim ki K⊆ $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq 2\}$ olsun. Eğer $\mathbb{B}(K) = K$ ise K kümesi PBD-kapalıdır denir.

Önerme 3.1.1 Her K⊆ $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq 2\}$ için K⊆ $\mathbb{B}(K)$'dır.

İspat Her $k \geq 2$ tamsayısı için $(k, \{k\})$ - PBD vardır. Dolayısıyla K⊆ $\mathbb{B}(K)$'dır.

Önerme 3.1.2 Farzedelim ki K ⊆ $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq 2\}$ olsun. $\mathbb{B}(K)$ kümesi PBD-kapalıdır. Yani $\mathbb{B}\big(\mathbb{B}(K)\big) = \mathbb{B}(K)$'dır.

İspat Varsayalım K⊆ $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq 2\}$ ve $v \in \mathbb{B}(\mathbb{B}(K))$ olsun. Bir $(X, \mathcal{A})$ alalım ve bu herhangi bir $(v, \mathbb{B}(K))$ - PBD olsun. Bütün $A \in \mathcal{A}$ için $|A| \in \mathbb{B}(K)$ olduğundan $(|A|, K)$ - PBD vardır, buna $(A, \mathfrak{B}_A)$ diyelim ve $\mathfrak{B} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathfrak{B}_A$ olarak ifade edelim. Şimdi (X , $\mathfrak{B}$) bir (v, K) - PBD dir. O halde $v \in \mathbb{B}(K)$ olur, yani $\mathbb{B}(\mathbb{B}(K)) \subseteq \mathbb{B}(K)$ elde edilir. Burada Önerme 3.1.1'den $\mathbb{B}(K) \subseteq \mathbb{B}(\mathbb{B}(K))$ dır. O halde istenen eşitlik elde edilir.

Tanım 3.1.2 Her $k \geq 2$ olan tamsayı için

$$R_k = \{r : Bir\ (r(k-1)+1, k, 1) - BIBD\ vardır\}$$

şeklinde tanımlanmış bir kümedir.

Teorem 3.1.1 Her $k \geq 2$ tamsayısı için R_k kümesi PBD-kapalıdır.

İspat Önerme 3.1.1'den $R_k \subseteq \mathbb{B}(R_k)$ olduğu biliniyor. Şimdi $\mathbb{B}(R_k) \subseteq R_k$ olduğunu göstereceğiz. Bir $v \in \mathbb{B}(R_k)$ ve $(X, \mathcal{A})$ herhangi (v, R_k) - PBD olsun. Her $A \in \mathcal{A}$ bloğu için bir $(|A|(k-1)+1, k, 1)$ - BIBD vardır ve Önerme (2.5.4) den bu BIBD den $|A|(k-1)$ noktaya sahip, $k-1$ boyutlu $|A|$ grubu olan ve k uzunluğunda bloklara sahip bir GDD yi aşağıdaki yolla inşa edebiliriz.

Boyutu $(k-1)$ olan bir I kümesi ve $A \times I$ kümesini GDD için noktalar kümesi olarak alalım. Bu GDD de $x \in A$ için $\{x\} \times I$ ların kümesi gruplar ve blokları $\mathfrak{B}_A$ olsun.

$$Y = X \times I, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{H} = \{\{x\} \times I : x \in X\}, \tag{3.2}$$

$$\mathfrak{B} = \cup_{A \in \mathcal{A}} \mathfrak{B}_A \tag{3.3}$$

şeklinde ifade edelim. $(Y, \mathcal{H}, \mathfrak{B})$ nin $v(k-1)$ nokta, $(k-1)$ uzunluğunda v gruba ve k uzunluğunda bloklara sahip olan bir GDD olduğunu ispat edeceğiz.

$(Y, \mathcal{H}, \mathfrak{B})$ nin kesinlikle $v(k-1)$ noktaya, $(k-1)$ uzunluğunda v gruba ve k uzunluğunda bloklara sahip olduğu görülür. Şimdi iki farklı gruptan (x, i) , (y, j) noktalarını ele alalım. Burada , $y \in X$, $x \neq y$ ve $i, j \in I$ olsun. $x, y \in A$ olacak şekilde $A \in \mathcal{A}$ olan yalnızca bir blok vardır. (x, i) , $(y, j) \in B_0$ olan yalnızca tek bir $B_0 \in \mathfrak{B}$ vardır. Dolayısıyla $(Y, \mathcal{H}, \mathfrak{B})$ bir GDD'dir ve Önerme 2.5.4'ten $(v(k-1)+1, k, 1)$ - BIBD vardır. Bu yüzden $v \in R_k$ dır. Dolayısıyla R_k PBD- kapalıdır.

3.2 {3,4,6} Kümesinin PBD – Kapanışı

Teorem 3.2.1 $\mathbb{B}(\{3,4,6\}) = \{n \geq 3 : n \equiv 0,1 \ (mod\ 3)\}$.

İspat Tanım 2.4.2'den $\mathbb{B}(K) = \{v \ : \ Bir\ (v, K) - PBD\ vardır\}$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca Önerme 2.4.1'den v nin $\mathbb{B}(K)$ nın elemanı olabilmesi için gerekli şartların

$$(v-1) \equiv 0 \ \big(mod\ \alpha(K)\big) \tag{3.4}$$

$$v(v-1) \equiv 0 \ (mod\ \beta(K)) \tag{3.5}$$

olduğunu da göz önünde bulunduralım.

$\alpha(\{3,4,6\}) = 1$, $\beta(\{3,4,6\}) = 6$ ve Örnek 2.4.1'den

$$\mathbb{B}(\{3,4,6\}) \subseteq \{n \geq 3 : n \equiv 0,1\ (mod\ 3)\} \tag{3.6}$$

olduğunu görmüştük. Buradan devam edecek olursak;

$$v_0 = 0,1\ (mod\ 3)\ ,\ v_0 \geq 3 \tag{3.7}$$

$$v \in \mathbb{B}(\{3,4,6\})\ ,\ \ v = 0,1\ (mod\ 3) \tag{3.8}$$

ayrıca;

$$3 \leq v \leq v_0 \tag{3.9}$$

olacak şekilde ele aldığımız v_0 değerlerine bakalım.

v_0 ; 3,4 ve 6 değerleri için $v_0 \in \mathbb{B}(\{3,4,6\})$ olduğu aşikardır. O halde $v_0 \geq 7$ değerleri için kontrol edelim. Eğer $v_0 \geq 7$ için $v_0 \in \{7,18,19\}$ olacak ise;

$(7,3,1)$ - BIBD olduğundan $(7,\{3\})$-PBD vardır. Dolayısıyla $7 \in \mathbb{B}(\{3\})$ elde edilir.

Önerme 2.6.1' den TD$(k+1,t)$ varlığı bilindiğinden $((k+1)t,\{k+1,t\})$-PBD var olduğunu söyleyebiliriz. Buradan TD(3,6) var ve dolayısıyla $(18,\{3,6\})$-PBD elde edilir. O halde $18 \in \mathbb{B}(\{3,6\})$ olduğunu söyleyebiliriz.

Önerme 2.5.2' den bir $(19,\{3,7\})$ - PBD elde edilebilir. Ayrıca $7 \in \mathbb{B}(\{3\})$ olduğundan $19 \in \mathbb{B}(\{3\})$ olduğunu söyleyebiliriz.

Böylelikle $\{7,18,19\} \subseteq \mathbb{B}(\{3,4,6\})$ olduğunu göstermiş bulunuyoruz. Dolayısıyla elde edemediğimiz v_0 değerlerine ulaşmak için bu değerleri göz önünde bulundurarak tümevarım yapalım.

Önerme 2.6.2' den TD$(4,t)$ var ise $v_0 = 3t + u$ ve $u \in \{0,1,3,4\}$, $t \in \mathbb{B}(\{3,4,6\})$ alalım. $t = 3s\ , 3s+1$ olduğundan $v_0 = 9s + j$ şeklinde ifade edilir ve $j \in \{0,1,3,4,6,7\}$ olduğunu söyleyebiliriz. Buna göre aşağıda elde edilen durumlara bakalım.

Çizelge 3.1 $\{3,4,6\}$ kümesinin PBD- kapanışında elde edilecek tüm v_0'lar

$v_0 =$	$3t+u$	
$9s =$	$3(3s)$	$s \geq 1, s \neq 2$
$9s+1 =$	$3(3s)+1$	$s \geq 1, s \neq 2$
$9s+3 =$	$3(3s+1)$	$s \geq 1$
$9s+4 =$	$3(3s+1)+1$	$s \geq 1$
$9s+6 =$	$3(3s+1)+3$	$s \geq 1$
$9s+7 =$	$3(3s+1)+4$	$s \geq 1$

Burada $(v_0, \{3,4,t\})$ -PBD inşa edilmiş oldu. Tümevarımdan $t \in \mathbb{B}(\{3,4,6\})$ ve Tanım 2.4.2' den $v_0 \in \mathbb{B}(\{3,4,6\})$ olacak ve

$$\mathbb{B}(\{3,4,6\}) = \{n \geq 3 : n \equiv 0,1 \ (mod\ 3)\} \tag{3.10}$$

Sonucunu elde etmiş olacağız.

3.3 {4,5,8,9,12} Kümesinin PBD – Kapanışı

Teorem 3.3.1 $\mathbb{B}(\{4,5,8,9,12\}) = \{n \geq 4 : n \equiv 0,1 \ (mod\ 4)\}$.

İspat Önerme 2.4.1'den v'nin $\mathbb{B}(K)$'nın elemanı olabilmesi için gerekli şartların

$$(v-1) \equiv 0 \ \big(mod\ \alpha(K)\big) \tag{3.11}$$

$$v(v-1) \equiv 0 \ (mod\ \beta(K)) \tag{3.12}$$

olduğunu da göz önünde bulundurarak

$\alpha(\{4,5,8,9,12\}) = 1$, $\beta(\{4,5,8,9,12\}) = 4$ ve $v_0 = 0,1 \ (mod\ 4)$, $v_0 \geq 4$

$v \in \mathbb{B}(\{4,5,8,9,12\})$, $v = 0,1 \ (mod\ 4)$ ve $4 \leq v \leq v_0$

olacak şekilde tümevarımla v_0 değerlerine bakalım.

v_0 ; 4,5,8,9,12 değerleri için $v_0 \in \mathbb{B}(\{4,5,8,9,12\})$ olduğunu biliyoruz. O halde $v_0 \geq 13$ değerleri için $v_0 \in (\{4,5,8,9,12\})$ - PBD olacak en küçük değerleri bulalım.

$v_0 = 13$ için $(13,4,1)$- BIBD var ve $n = 3$ dereceli $(n^2+n+1, n+1, 1)$ projektif düzlemdir. Dolayısıyla $(13, \{4\})$-PBD dir.

$v_0 = 28$ için Örnek 2.5.3'te gösterilen GDD'yi kullanarak Önerme 2.5.2'den $(28, \{4\})$-PBD elde edilir..

$v_0 = 29$ için Önerme 2.6.1'den TD $(k+1, t)$ varlığı biliniyorsa $((k+1)t, \{k+1, t\})$-PBD var olduğunu bildiğimizden, TD(4,7) var ve dolayısıyla Önerme 2.5.2'den $(29, \{4,8\})$-PBD elde edilir.

$v_0 = 41$ için Önerme 2.6.1'in 3. maddesini kullanarak, TD $(5,9)$ var olduğunu bildiğimizden, kesilmiş çapraz tasarım ile $u = 5$ alırsak $(41, \{4,5,9\})$-PBD; aynı şekilde $v_0 = 44$ için $u = 8$ alırsak $(44, \{4,5,8,9\})$-PBD; ve yine aynı önermenin 4. maddesini kullanarak da $v_0 = 45$ için $(45, \{5,9\})$-PBD elde edilir.

$v_0 = 48$ için bir TD$(4,12)$ var ve Önerme 2.5.1'den $(48, \{4,12\})$-PBD elde edilir.

$v_0 = 49$ için bir önceki gibi düşünürsek Önerme 2.5.2'den $(49, \{4,13\})$-PBD elde edilir. Burada $(13, \{4\})$-PBD vardır. Dolayısıyla $(49, \{4\})$-PBD vardır.

Yukarıdaki incelediğimiz v_0 değerleri direk inşa edilebilen değerlerdi. İkincil olarak v_0 ın elde ettiklerimiz dışındaki değerleri için tümevarım uygulayacak olursak Önerme 2.6.1' den TD$(5, t)$ var ise $t = 1,4,5,7,8,11\ (mod\ 12)$, ayrıca $v_0 = 4t + u$ ve $t \in \mathbb{B}(\{4,5,8,9,12\})$ olduğunda, $v_0 \in \mathbb{B}(\{4,5,8,9,12\})$ olacağından $t = 0,1\ (mod\ 4)$ elde edilir. Dolayısıyla $t = 1,4,5,8\ (mod\ 12)$ ve $= 12s + u$, $0 \le u \le t$ ve $u \equiv 0,1\ (mod\ 4)$ olacaktır. Sonuç olarak $v_0 = 48s + j$ şeklinde ifade edilir ve $j \equiv 0,1\ (mod\ 4)$, $0 \le j \le 45$ olduğunu söyleyebiliriz. Bu değerler ile aşağıdaki tabloyu oluşturacağız.

Çizelge 3.2 $\{4,5,8,9,12\}$ kümesinin PBD-kapanışından elde edilecek tüm v_0'lar

$v_0 =$	$4t + u$	
$48s =$	$4(12s - 4) + 16$	$s \ge 2$
$48s + 1 =$	$4(12s - 4) + 17$	$s \ge 2$
$48s + 4 =$	$4(12s + 1)$	$s \ge 1$
$48s + 5 =$	$4(12s + 1) + 1$	$s \ge 1$
$48s + 8 =$	$4(12s + 1) + 4$	$s \ge 1$
$48s + 9 =$	$4(12s + 1) + 5$	$s \ge 1$
$48s + 12 =$	$4(12s + 1) + 8$	$s \ge 1$
$48s + 13 =$	$4(12s + 1) + 9$	$s \ge 1$
$48s + 16 =$	$4(12s + 4)$	
$48s + 17 =$	$4(12s + 4) + 1$	
$48s + 20 =$	$4(12s + 5)$	

Çizelge 3.2 $\{4,5,8,9,12\}$ kümesinin PBD-kapanışından elde edilecek tüm v_0 'lar (devamı)

$48s+21=$	$4(12s+5)+1$	
$48s+24=$	$4(12s+5)+4$	
$48s+25=$	$4(12s+5)+5$	
$48s+28=$	$4(12s+5)+8$	$s\geq 1$
$48s+29=$	$4(12s+5)+9$	$s\geq 1$
$48s+32=$	$4(12s+8)$	
$48s+33=$	$4(12s+8)+1$	
$48s+36=$	$4(12s+8)+4$	
$48s+37=$	$4(12s+8)+5$	
$48s+40=$	$4(12s+8)+8$	
$48s+41=$	$4(12s+8)+9$	$s\geq 1$
$48s+44=$	$4(12s+8)+12$	$s\geq 1$
$48s+45=$	$4(12s+8)+13$	$s\geq 1$

Burada $4\leq u\leq 17$ ve $t\equiv 0,1\ (mod\ 4)$ olacak şekilde $(v_0,\{4,5,8,9,12,t,u\})$-PBD inşa edilmiştir. Ayrıca $u=0,1$ ise $(v_0,\{4,5,8,9,12,t\})$ -PBD' de vardır. Tümevarımdan $t\in\mathbb{B}(\{4,5,8,9,12\})$ ve Tanım 2.4.2' den $v_0\in\mathbb{B}(\{4,5,8,9,12\})$ olacak ve $\mathbb{B}(\{4,5,8,9,12\})=\{n\geq 4:n\equiv 0,1\ (mod\ 4)\}$ sonucuna ulaşılacaktır.

BÖLÜM 4

PBD - KAPANIŞIN UYGULAMALARI

4.1 $(v, 3, 1)$- BIBD ler

$(v, 3,1) - BIBD$'lerin varolması için gerek şartlarla başlayalım.

$$R_k = \{r \ : \ (r(k-1)+1, k, 1) - BIBD \ vardır \ \} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanmış bir R_k kümesi Tanım 3.1.2'de belirtilmiştir. Ayrıca $(v, 3,1) - BIBD$' nin varolması için gerekli koşul $v \equiv 1,3 \ (mod \ 6)$, $v \geq 7$ olduğunu aşağıda gösterelim. Burada $(v, 3,1) - BIBD$ için,

$k = 3$ için $r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1} = \frac{1(v-1)}{3-1} = \frac{v-1}{2}$, yani $2r + 1 = v, \ v \geq 7$ ve

$b = \frac{\lambda v(v-1)}{k(k-1)} = \frac{v(v-1)}{3.2} = \frac{v(v-1)}{6}$ olur.

$v(v-1) \equiv 0 \ (mod \ 6)$ olduğundan $v \equiv 1,3 \ (mod \ 6)$, $v \geq 7$ olur.

$2r + 1 = v$ yazarsak, $2r + 1 \equiv 1,3 \ (mod \ 6)$ ve $2r + 1 \ \geq 7$ olduğundan $r \equiv 0,1 \ (mod \ 3)$, $r \geq 3$ sonucunu elde edebiliriz.

$$R_3 = \{r \ : \ (r(3-1)+1,3,1) - BIBD \ vardır \ \} \tag{4.2}$$

$$R_3 = \{r \ : \ (2r+1,3,1) - BIBD \ vardır \ \} \tag{4.3}$$

olduğunu görmüş olduk. Ayrıca R_3 kümesinin en küçük elemanları $r = 3$ için $2r + 1 = v$ ile $v = 7$ bulunur.

(7,3,1)- BIBD var ve $n = 2$ dereceli $(n^2 + n + 1, n + 1,1)$ projektif düzlemdir.

$r = 4$ için $2r + 1 = v$ ile $v = 9$ bulunur.

(9,3,1)- BIBD var ve $n = 3$ dereceli $(n^2, n^2 + n, n + 1, n, 1)$ afin düzlemdir.

$r = 6$ için $2r + 1 = v$ ile $v = 13$ bulunur.

(13,3,1)- BIBD var ve Örnek 2.8.2'de gösterildiği gibi $(\mathbb{Z}_{13}, +)$'da bir fark ailesidir.

Böylelikle $\{3,4,6\} \subseteq R_3$ elde edilir.

Buraya kadar yapılan işlemlerle $\{3,4,6\} \subseteq R_3$ ve Teorem 3.2.1' den

$$\mathbb{B}(\{3,4,6\}) = \{n \geq 3 : n \equiv 0,1 \ (mod\ 3)\} \tag{4.4}$$

olduğunu göstermiş olduk. Ayrıca $R_3 \subseteq \{n \geq 3 : n \equiv 0,1 \ (mod\ 3)\}$ olduğunu biliyoruz. Şimdi ise elde ettiklerimiz ve bildiklerimizden aşağıdaki sonucu çıkarabiliriz.

$$\{3,4,6\} \subseteq R_3 \Rightarrow \mathbb{B}(\{3,4,6\}) \subseteq \mathbb{B}(R_3) \xrightarrow{R_3\ PBD\ kapalıdır\ ,\mathbb{B}(R_3)=R_3} \mathbb{B}(\{3,4,6\}) \subseteq R_3$$

$$\{n \geq 3 : n \equiv 0,1 \ (mod\ 3)\} = \mathbb{B}(\{3,4,6\})$$
$$\subseteq \mathbb{B}(R_3)$$
$$= R_3$$
$$\subseteq \{n \geq 3 : n \equiv 0,1 \ (mod\ 3)\}$$

Son olarak $R_3 = \{n \geq 3 : n \equiv 0,1 \ (mod\ 3)\}$ sonucunu elde ederek ispatımızı tamamlamış oluruz.

Şimdi aynı metodu izleyerek R_4 'ü elde edelim.

4.2 $(v, 4, 1)$- BIBD'ler

Bir önceki ispata benzer şekilde ilk adım olarak $(v, 4,1) - BIBD$ için $v \equiv 1,4 \ (mod\ 12)$, $v \geq 13$ olduğunu gösterelim. Burada $(v, 4,1) - BIBD$ için,

$k = 4$ için $r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1} = \frac{1(v-1)}{4-1} = \frac{v-1}{3}$, yani $3r + 1 = v$, $v \geq 13$ ve

$b = \frac{\lambda v(v-1)}{k(k-1)} = \frac{v(v-1)}{4.3} = \frac{v(v-1)}{12}$ olur.

$v(v-1) \equiv 0 \ (mod\ 12)$ olduğundan $v \equiv 1,4 \ (mod\ 12)$, $v \geq 13$ olur.

$3r + 1 = v$ yazarsak, $3r + 1 \equiv 1,4 \ (mod\ 12)$ ve $3r + 1 \geq 13$ olduğundan

$r \equiv 0,1 \ (mod\ 4)$, $r \geq 4$ elde ederiz.

$$R_4 = \{r \ : \ (r(4-1) + 1,4,1) - BIBD\ vardır\ \} \tag{4.5}$$

$$R_4 = \{r \ : \ (3r+1,4,1) - BIBD\ vardır\ \} \tag{4.6}$$

olduğunu görürüz. Ayrıca R_4 kümesinin en küçük elemanları

$r = 4$ için $3r + 1 = v$ ile $v = 13$ bulunur.

(13,4,1)- BIBD var ve $n = 3$ dereceli $(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$ projektif düzlemdir.

$r = 5$ için $3r + 1 = v$ ile $v = 16$ bulunur.

(16,4,1)- BIBD var ve $n = 4$ dereceli $(n^2, n, 1)$ afin düzlemdir.

$r = 8$ için $3r + 1 = v$ ile $v = 25$ bulunur.

(25,4,1)- BIBD var ve Örnek 2.8.1'de gösterildiği gibi $(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5, +)$'da bir fark ailesidir.

$r = 9$ için $3r + 1 = v$ ile $v = 28$ bulunur.

(28,4,1)- BIBD var ve Teorem 3.3.1'in ispatında göstermiştik.

$r = 12$ için $3r + 1 = v$ ile $v = 37$ bulunur.

(37,4,1)- BIBD var ve Örnek 2.8.3'te gösterildiği gibi $(\mathbb{Z}_{37}, +)$'da bir fark ailesi olduğundan $\{4,5,8,9,12\} \subseteq R_4$ olduğunu söyleyebiliriz. Teorem 3.3.1'de

$$\mathbb{B}(\{4,5,8,9,12\}) = \{n \geq 4 : n \equiv 0,1\ (mod\ 4)\} \tag{4.7}$$

olduğunu göstermiştik. Ayrıca $R_4 \subseteq \{n \geq 4 : n \equiv 0,1\ (mod\ 4)\}$ olduğunu biliyoruz. Şimdi ise elde ettiklerimiz ve bildiklerimizden aşağıdaki sonucu çıkarabiliriz.

$$\{4,5,8,9,12\} \subseteq R_4 \Rightarrow \mathbb{B}(\{4,5,8,9,12\}) \subseteq \mathbb{B}(R_4) \xrightarrow[\mathbb{B}(R_4)=R_4]{R_4\ PBD\ kapalı} \mathbb{B}(\{4,5,8,9,12\}) \subseteq R_4$$

$$\begin{aligned} \{n \geq 4 : n \equiv 0,1\ (mod\ 4)\} &= \mathbb{B}(\{4,5,8,9,12\}) \\ &\subseteq \mathbb{B}(R_4) \\ &= R_4 \\ &\subseteq \{n \geq 4 : n \equiv 0,1\ (mod\ 4)\} \end{aligned}$$

Son olarak $R_4 = \{n \geq 4 : n \equiv 0,1\ (mod\ 4)\}$ sonucunu elde ederek ispatımızı tamamlamış oluruz.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada $\{3,4,6\}$ kümesinin PBD - kapanışının $\{n \geq 3 : n \equiv 0,1 \ (mod\ 3)\}$ kümesine eşit olduğunun, yine aynı metotla $\{4,5,8,9,12\}$ kümesinin PBD - kapanışının da $\{n \geq 4 : n \equiv 0,1 \ (mod\ 4)\}$ kümesine eşit olduğunun, BIBD'ler, GDD'ler, fark kümeleri, fark aileleri ve çapraz tasarımlar kullanılarak elde edilişi gösterilmiştir. PBD – kapanışın uygulamaları olarak $(v, 3,1)$ – BIBD'lerin varolması için gerek ve yeter şartın, $v \equiv 1,3 \ (mod\ 6)$, $v \geq 7$ olması, aynı şekilde $(v, 4,1)$ – BIBD'lerin varolması için gerek ve yeter şartın, $v \equiv 1,4 \ (mod\ 12)$, $v \geq 13$ olmasının elde edilişi gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Lindner, C. C. ve Rodger, C. A., (1997). Design Theory, Boca Raton: CRC Press.

[2] Beth, T. ve Jungnickel, D. ve Lenz, H., (1986). Design Theory, Cambridge, Cambridge University Press 2nd ed. (1999).

[3] Stinson, D. R., (2003). Combinatorial Designs: Constructions and Analysis, New York: Springer.

[4] Hall, Jr. M., (1986). Combinatorial Theory (2nd ed.), New York: Wiley-Interscience.

[5] Hughes, D.R. ve Piper, E.C., (1985). Design theory, Cambridge: Cambridge University Press.

[6] Colbourn, C. J. ve Dinitz, J. H., (2007). Handbook of Combinatorial Designs (2nd ed.), Boca Raton: Chapman ve Hall/ CRC.

[7] Van Lint, J.H. ve Wilson, R.M., (1992). A Course in Combinatorics. Cambridge, Eng. Cambridge University Press.

[8] Kirkman, T., (1850). Lady's and Gentelman's Diary pg.48, Query VI, London.

[9] Cayley, A., (1850). "On the triadric arrangements of the seven and fifteen things", Phil.Mag. 37:50-53, Cambridge: Cambridge University Press.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Zehra TEKİN

Doğum Tarihi ve Yeri : 11/05/1987, İzmir

Yabancı Dil : İngilizce

E-mail : zehratekin_@hotmail.com.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**MezuniyetYılı**
Lisans	Matematik	Afyon Kocatepe Üniversitesi	2011
Lise	Fen Bilimleri	Kenan Evren Lisesi (İzmir)	2005