T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFFÜZ OPTİK TOMOGRAFİ SİSTEMLERİNDE TERS PROBLEM ÇÖZÜMÜ İÇİN YENİ YÖNTEMLER

Sinem UYSAL

DOKTORA TEZİ
Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı
Elektronik Programı

Danışman
Doç. Dr. Umut Engin AYTEN

Mart, 2023

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFFÜZ OPTİK TOMOGRAFİ SİSTEMLERİNDE TERS PROBLEM ÇÖZÜMÜ İÇİN YENİ YÖNTEMLER

Sinem UYSAL tarafından hazırlanan tez çalışması 06.03.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı Elektronik Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Umut Engin AYTEN
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Umut Engin AYTEN, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Serdar ÖZOGUZ, Üye
İstanbul Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Nihan KAHRAMAN, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Bülent BOLAT, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Behçet Uğur TÖREYİN, Üye
İstanbul Teknik Üniversitesi _____

Danışmanım Doç. Dr. Umut Engin AYTEN sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Diffüz Optik Tomografi Sistemlerinde Ters Problem Çözümü İçin Yeni Yöntemler başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Sinem UYSAL

İmza

Eşime ve oğluma

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitim hayatım boyunca beni seven, destekleyen, cesaretlendiren herkese minnettarlığımı anlatmak zor. Bu noktada bana yardımcı olan herkese teşekkürlerimi sunuyorum.

Her şeyden önce, Yildız Teknik Üniversitesindeki ilk yılımdan beri beni destekleyen, tavsiyelerde bulunan danışmanım Doç. Dr. Umut Engin AYTEN'e tez sürecinde ilgi, anlayışı ve yardımları için çok teşekkür ederim.

Ayrıca tez izleme sürecinde pozitif yorumları ile tezimin son halini almasında büyük emeği olan jüri üyelerim, Prof. Dr. Serdar Özoğuz ve Doç. Dr. Nihan Kahraman'a teşekkürlerimi sunarım.

İstanbul Medeniyet Üniversitesi Dr. Öğr. Üyesi Nurullah ÇALIK'a tezin başlarında bilgi birikimini bizimle hiç tereddüt etmeden paylaşması, destek ve katkılarından dolayı dolayı teşekkür ederim.

Anneme, babama ve kayınvalideme beni eğitim hayatım boyunca destekledikleri ve her ihtiyaç duyduğumda yanımda oldukları için çok teşekkür ederim.

Ve son olarak, sevgili aileme ve en çokta eşim Hüsamettin UYSAL'a tezimin her aşamasındaki katkı ve desteklerinden, ilgi ve anlayışından dolayı teşekkür etmeyi bir borç bilirim. Doktora sürecindeki çalışmalarımdan dolayı bazen eksik bıraktığım ilgiden dolayı biricik oğlum Emir Uysal'dan çok özür dilerim ve bu süreçte elinden geldiğince bana yardımcı olduğu için kendisine çok teşekkür ederim.

Sinem UYSAL

İÇİNDEKİLER

KISALTMA LİSTESİ viii

ŞEKİL LİSTESİ x

TABLO LİSTESİ xiii

ÖZET xiv

ABSTRACT xvi

1 GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti . . . 2
1.2 Tezin Amacı . . . 9
1.3 Hipotez . . . 10

2 MODEL 11

2.1 Görüntüleme Teknikleri . . . 11
2.1.1 X-Işını Görüntüleme . . . 11
2.1.2 Manyetik Rezonans Görüntüleme (Magnetic Resonance Imaging-MRI) . . . 12
2.1.3 Elektriksel Empedans Tomografisi (Electrical Impedance Tomography -EIT) . . . 13
2.1.4 Difüz Optik Tomografi (DOT) . . . 14
2.2 Difüz Optik Tomografi İleri Yol Problemi . . . 15
2.2.1 Ayrıklaştırma ve Ağırlık Matrsi Elde edilmesi . . . 17
2.2.2 Uygulama Parametrinin Tanımlanması ve Değerleri . . . 18
2.3 Difüz Optik Tomografi Ters Problem . . . 20
2.3.1 Kötü Konumlanmış (Ill-Posedness) . . . 21
2.3.2 Uygulama Parametrinin Tanımlanması ve Değerleri . . . 22

3 TERS PROBLEM VE REGÜLARİZASYON YÖNTEMLERİ 25

3.1 Lineer Durum . . . 27
3.1.1 Tekil Değer Ayrışımı . . . 29
3.1.2 Doğrusal En Küçük Kareler . . . 30

3.2 Aşırı Belirlenmiş (Over-determined) ve Az Belirlenmiş (Underdetermined) Sistemler 37
3.3 Regresyon ile Regularizasyon İlişkisi 37
3.4 Regularizasyon Metotları ve Cezalandırıcı Katsayıları 38
3.4.1 LASSO 39
3.4.2 Ridge Regresyon 39
3.4.3 Elastik-Net 41

4 EN KÜÇÜK KARELER TABANLI YENİ BİR REGÜLARİZASYON YÖNTEMİ 42

5 UYGULAMA VE TEST SONUÇLARI 46
5.1 İnklüzyonlardan birinin yüzeyde diğerinin derinde bulunduğu şartlarda 48
5.2 İnklüzyonlardan ikisinin de derinde bulunduğu şartlarda 50
5.3 İnklüzyonlardan ikisinin de yüzeyde bulunduğu şartlarda 50
5.4 Bir büyük inklüzyon olduğu durumda 50
5.5 Literatürde Yapılan Çalışmalar 57

6 DERİN ÖĞRENME İLE DOT TERS PROBLEM ÇÖZÜMÜ 62
6.1 DERİN ÖĞRENME 64
6.1.1 Evrişimli Sinir Ağları (Convolutional Neural Networks CNN) . . 66
6.1.2 Evrişimsel katmanlar: 66
6.1.3 Havuzlama katmanları: 67
6.1.4 Tam bağlantılı katmanlar: 68
6.1.5 Normalleştirme katmanları: 69
6.1.6 Aktivasyon katmanları: 69
6.2 Uygulama 70
6.2.1 Veri Kümesinin Oluşturulması 71
6.2.2 CNN Ağının Tasarımı 72
6.3 Uygulama Sonuçları ve Değerlendirme 73
6.3.1 CNN Tabanlı Ters Problem Çözümün Performansı 73
6.3.2 CNN Tabanlı Ters Problem Çözümünde Bütün Voksellerin Ortalama Değerleri 75
6.3.3 Farklı gürültü seviyeleri için CNN tabanlı inverse problem çözümü ile geliştirillen regülarizsyon Yöntemi ve LASSO regresyon 'un karşılaştırılması 80

7 YORUMLAR 85

KAYNAKÇA 87

A EK 98

A.1 Derinlik Kompanzasyonu Algoritması 98

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR **100**

KISALTMA LİSTESİ

2D	2 Boyutlu
3D	3 Boyutlu
BPNN	Back-Propagation Neural Network
CNR	Contrast to Noise Ratio
CSF	Cerebro Spinal Fluid
CNN	Convolutional Neural Networks
CT	Bilgisayarlı Tomografi (Computerized Tomography)
CW	Sürekli Dalga (Continuous Wave)
DCA	Depth Compensation Algorithm
DBN	Deep Belief Networks
DOT	Diffüz Optik Tomografi
DOT	Deep Learning
EIT	Electrical Impedance Tomography
EM	Expectation Maximization
FOCUSS	Focal Underdetermined System Solver
GAN	Generative Adversarial Networks
GVC	Generalized Cross-Validation
HbO2	Oksi-Hemoglobin
HHb	Deoksi-Hemoglobin
KL Divergence	Kullback–Leibler divergence
LASSO	Least Absolute Shrinkage and Selection Operator
LM	Levenberg-Marquard
LS	Least Square

LSTM	Long Short-Term Memory
MC	Monte Carlo
MRI	Magnetik Rezonans Görüntüleme (Magnetic Resonance Imaging)
MPP	Moore-Penrose pseudoinverse
MLP	Multilayer perceptron
NIR	Near-Infrared
NIRs	Near-Infrared Spectroscopy
NCG	Nonlinear Conjugate Gradient
OCT	Optik Koherens Tomografi (Optical Coherence Tomography)
OLS	Ordinary Least Squares
pMRI	Paralel Manyetik Rezonans Görüntüleme
PET	Pozitron Emisyon Tomografi
PT	Photoacoustic Tomography
RNN	Recurrent Neural Networks
RTE	Radyatif Transfer Eşitliği
SALSA	Split Augmented Lagrangian Shrinkage Algorithm
SAR	Synthetic-Aperture Radar
SVD	Singular Value Decomposition
SVR	Spatially Variant Regularization
TSVD	Truncated Singular Value Decomposition
TDA	Tekil Değer Ayrıştırması
X-Ray	X ışını

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 HbO2 ve HbR'nin molar sönme katsayılarının spektrumları [73] . . . 15
Şekil 2.2 İleri yol ve ters problem[80] 17
Şekil 2.3 Kullanılan kaynak detektör geometrisi 20
Şekil 3.1 İleri yol problemi ve ters problem arasındaki farkın blok gösterimi . 25
Şekil 3.2 Tam sütun rankı $r = N \leq M$ olan doğrusal bir ileri operatörün ve verilerin ileri operatörün aralığı içinde olmaması $b \notin R(A)$ eylemi [95]. 32
Şekil 3.3 Tam sütun rankı $r < N$ olan doğrusal bir ileri operatörün ve verilerin ileri operatörün aralığı içinde olmaması $b \notin R(A)$ eylemi [95]. 32
Şekil 3.4 LASSO ve Ridge regresyonunun iki boyutlu kontur grafiği. Düz mavi alanlar kısıtlama bölgesidir. β kısıtsız en küçük kareler tahmin edicisini gösterir 40
Şekil 4.1 Önerilen yöntemin blok diyagramı [118] 43
Şekil 5.1 Önerilen yöntemin sentetik veriler kullanılarak yeniden yapılandırma sonuçları. Satırlar, sırasıyla OLS, Ridge Regresyon, LASSO Regresyon, Elastic-Net ve önerilen yöntemin farklı derinlikte bulunan iki inklüzyon için regülarizasyon yöntemlerini temsil eder. Sütunlar gürültü seviyesini temsil eder. İnklüzyonların derinliği $z = 0.75$ cm $z = 1.95$ cm. Görüntüler, z = 0 düzlemindeki enine kesit görünümü gösterir. 51
Şekil 5.2 Önerilen yöntemin sentetik veriler kullanılarak yeniden yapılandırma sonuçları. Satırlar, sırasıyla OLS, Ridge Regresyon, LASSO Regresyon, Elastic-Net ve önerilen yöntemin farklı derinlikte bulunan iki inklüzyon için regülarizasyon yöntemlerini temsil eder. Sütunlar gürültü seviyesini temsil eder. İnklüzyonların derinliği $z = 0.75$ cm $z = 1.95$ cm. Görüntüler, yeniden yapılandırma sonuçlarının 3 boyutlu görünümlerini göstermektedir. 52

Şekil 5.3 Önerilen yöntemin sentetik veriler kullanılarak yeniden yapılandırma sonuçları. Satırlar, sırasıyla OLS, Ridge Regresyon, LASSO Regresyon, Elastic-Net ve önerilen yöntemin farklı derinlikte bulunan iki inklüzyon için regülarizasyon yöntemlerini temsil eder. Sütunlar gürültü seviyesini temsil eder. İnklüzyonların derinliği $z = 1.95$ cm $z = 2.25$ cm. Görüntüler, z = 0 düzlemindeki enine kesit görünümü gösterir. 53

Şekil 5.4 Önerilen yöntemin sentetik veriler kullanılarak yeniden yapılandırma sonuçları. Satırlar, sırasıyla OLS, Ridge Regresyon, LASSO Regresyon, Elastic-Net ve önerilen yöntemin farklı derinlikte bulunan iki inklüzyon için regülarizasyon yöntemlerini temsil eder. Sütunlar gürültü seviyesini temsil eder. İnklüzyonların derinliği $z = 1.95$ cm $z = 2.25$ cm. Görüntüler, yeniden yapılandırma sonuçlarının 3 boyutlu görünümlerini göstermektedir. 54

Şekil 5.5 Önerilen yöntemin sentetik veriler kullanılarak yeniden yapılandırma sonuçları. Satırlar, sırasıyla OLS, Ridge Regresyon, LASSO Regresyon, Elastic-Net ve önerilen yöntemin farklı derinlikte bulunan iki inklüzyon için regülarizasyon yöntemlerini temsil eder. Sütunlar gürültü seviyesini temsil eder. İnklüzyonların derinliği $z = 0.75$ cm $z = 1.05$ cm. Görüntüler, z = 0 düzlemindeki enine kesit görünümü gösterir. Görüntülerindeki yeşil daireler inklüzyonun gerçek konumunu temsil eder. Kırmızı küre, yöntemin bulduğu inklüzyonu gösterir. 55

Şekil 5.6 Önerilen yöntemin sentetik veriler kullanılarak yeniden yapılandırma sonuçları. Satırlar, sırasıyla OLS, Ridge Regresyon, LASSO Regresyon, Elastic-Net ve önerilen yöntemin farklı derinlikte bulunan iki inklüzyon için regülarizasyon yöntemlerini temsil eder. Sütunlar gürültü seviyesini temsil eder. İnklüzyonların derinliği $z = 0.75$ cm $z = 1.05$ cm. Görüntüler, yeniden yapılandırma sonuçlarının 3 boyutlu görünümlerini göstermektedir. Görüntülerindeki yeşil daireler inklüzyonun gerçek konumunu temsil eder. Kırmızı küre, yöntemin bulduğu inklüzyonu gösterir. . . 56

Şekil 5.7 Önerilen yöntemin sentetik veriler kullanılarak yeniden yapılandırma sonuçları. Satırlar, sırasıyla OLS, Ridge Regresyon, LASSO Regresyon, Elastic-Net ve önerilen yöntemin bir büyük inklüzyon için regülarizasyon yöntemlerini temsil eder. Sütunlar gürültü seviyesini temsil eder. İnklüzyonların derinliği $z = 1.8$ cm. Görüntüler, z $= 0$ düzlemindeki enine kesit görünümü gösterir. Görüntülerindeki yeşil daireler inklüzyonun gerçek konumunu temsil eder. Kırmızı küre, yöntemin bulduğu inklüzyonu gösterir. . . 58
Şekil 5.8 Önerilen yöntemin sentetik veriler kullanılarak yeniden yapılandırma sonuçları. Satırlar, sırasıyla OLS, Ridge Regresyon, LASSO Regresyon, Elastic-Net ve önerilen yöntemin bir büyük inklüzyon için regülarizasyon yöntemlerini temsil eder. Sütunlar gürültü seviyesini temsil eder. İnklüzyonların derinliği $z = 1.8$ cm. Görüntüler, yeniden yapılandırma sonuçlarının 3 boyutlu görünümlerini göstermektedir. 59
Şekil 6.1 Evrişmli Sinir Ağı Blok diyaramı[141] 67
Şekil 6.2 2 boyutlu CNN işleyişi[143] 68
Şekil 6.3 20 dB gürültüde CNN sonuçları 75
Şekil 6.4 10 dB gürültüde CNN sonuçları 76
Şekil 6.5 0 dB gürültüde CNN sonuçları 77
Şekil 6.6 -5 dB gürültüde CNN sonuçları 78
Şekil 6.7 -10 dB gürültüde CNN sonuçları 79
Şekil 6.8 DL tabanlı ters problem çözümü ile diğer regülarizasyon yöntemlerinin $x = -0.6$ cm, $y = 0$ cm, $z = 1.95$ cm konumuna yerleştirilmiş inklüzyon için karşılaştırılması 81
Şekil 6.9 DL tabanlı ters problem çözümü ile diğer regülarizasyon yöntemlerinin $x = 0$ cm, $y = 0.3$ cm, $z = 2.25$ cm konumuna yerleştirilmiş inklüzyon için karşılaştırılması 82

TABLO LİSTESİ

Tablo 2.1 İnsan kafasının optik özellikleri 19
Tablo 5.1 Gürültülü ve gürültüsüz sentetik veriler için önerilen yöntemin doğruluğu 49
Tablo 5.2 Gürültülü ve ölçüm gürültüsü eklenmemiş sentetik veriler için önerilen yöntemin doğruluğu (Gürültüsüz = Ek ölçüm gürültüsü eklenmez) 57
Tablo 5.3 Gürültülü ve ölçüm gürültüsü eklenmemiş sentetik veriler için önerilen yöntemin doğruluğu (Gürültüsüz = Ek ölçüm gürültüsü eklenmez) 60
Tablo 5.4 Literatürde yapılan çalışmalar 61
Tablo 6.1 CNN Eğitim ve Test İşlemi 72
Tablo 6.2 Farklı gürültü seviyelerinde bütün derinlikler için CNN Tabanlı Ters Problem Çözümü 74
Tablo 6.3 Farklı gürültü seviyelerinde CNN Tabanlı Ters Problem Çözümü Ortalama Değerleri 80
Tablo 6.4 Gürültülü şartlarda $x = -0.6$ cm $y = 0$ cm $z = 1.95cm$ için DL tabanlı ters problem çözümü ile geliştirilen regülarizasyon metodu ve LASSO metodun karşılaştırılması 83
Tablo 6.5 Gürültülü şartlarda $x = 0$ cm $y = 0.3$ cm $z = 2.25$ cm için DL tabanlı ters problem çözümü ile geliştirilen regülarizasyon metodu ve LASSO metodun karşılaştırılması 84

ÖZET

Diffüz Optik Tomografi Sistemlerinde Ters Problem Çözümü İçin Yeni Yöntemler

Sinem UYSAL

Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Danışman: Doç. Dr. Umut Engin AYTEN

Yakın kızılötesi spektroskopi (NIRS), Diffüz Optik Tomografi (DOT) olarak bilinen optik görüntüleme yönteminde kullanılır. Derinlik arttıkça, NIR ışığının güçlü saçılması nedeniyle biyolojik dokuda foton yoğunluğu hızla azalır, bu da yüzeysel dokuya kıyasla daha derin dokuda DOT'un daha düşük ölçüm doğruluğuna neden olur. Farklı ceza terimleriyle (l1-norm, l2-norm, LASSO, Ridge Regresyon ve Elastik Ağ vb.) klasik düzenlileştirilmiş en küçük kareler (Regularized least squares-RLS) tabanlı düzenlileştirme yöntemleri, inklüzyon sayısı artırıldığında veya bu inklüzyonlardan biri dokunun üst yüzeyde diğeri daha derinde bulunduğunda inklüzyonları bulmakta yetersiz kalmaktadır. Bu durum DOT'ta karşılaşılan derinlik problemi olarak bilinir. Bu sorunu ele almak için, bu makalede en küçük karelere dayalı yeni bir düzenleme yöntemi önerilmiştir. Önerilen yaklaşım, bu sorunu çözmek için hem ağırlık matrisini hem de ceza terimlerini değiştirmektedir. Bu prosedür, Derinlik Telafi Algoritmasına (DCA) dayalı AA^T köşegen değerini kullanarak A matrisini değiştirerek başlar. Ardından, değiştirilmiş A matrisi kullanılarak LASSO regresyonuna yeni bir ceza terimi eklenir. Önerilen yöntemin gürültü seviyesi arttığında sentetik veriler üzerinde diğer RLS yöntemine göre daha yüksek doğruluk ve daha sağlamlık verdiği gözlemlenmiştir. Sentetik veri kullanılarak elde edilen deneysel bulgulara göre yeni yaklaşım, ters çevirme kararsızlığını en aza indiren, hataları azaltan ve ters çevirme doğruluğunu artıran en gelişmiş yaklaşımlardan daha iyi performans göstermektedir.

Tezin ikinci bölümünde klasik düzenlileştirme metotlarının artan derinlik ve yüksek gürültü seviyeleri için azalan doğruluk değerlerine alternatif olarak derin öğrenme tabanlı ters problem çözümü geliştirilmiştir. Bu amaçla gürültülü ve gürültüsüz olarak

elde edilen ölçüm görüntüleri evrişimli sinir ağının eğitiminde kullanılmıştır. Her bir x, y, z konumu için elde edilen sonuçlar kullanılarak giriş görüntüleri x elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar hata metrikleri üzerinden değerlendirildiğinde tek inklüzyon için yüksek gürültüde ve inklüzyonun sınır değerlerine yakın derinlik seviyesinde dahi yüksek doğruluk ile inklüzyonun tespit edildiği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ters problem, diffüz optik tomografi, regülarizasyon yöntemi, derinlik kompanzasyon algoritması, ağırlık matrisi modifikasyonu, derin öğrenme

ABSTRACT

Novel methods for Inverse Problem Solution in Diffuse Optical Tomography Systems

Sinem UYSAL

Department of Electronics and Communication Engineering
Doctor of Philosophy Thesis

Supervisor: Assoc. Prof. Umut Engin AYTEN

Near-infrared spectroscopy (NIRS) is used in the optical imaging method known as Diffuse Optical Tomography (DOT). As the depth increases, the photon density rapidly decreases in biological tissue due to strong scattering of NIR light, resulting in lower measurement accuracy of DOT in deeper tissue compared to superficial tissue. Classical Regularized Least Square (RLS) based regularization methods with different penalty term (l1-norm, l2-norm, LASSO, Ridge Regression and Elastic Net etc.) come up short in finding the inclusions when the inclusion number is increased or one of the inclusion located on the upper surface and the other one located on the deeper surface of the tissue. This is known as the depth problem in DOT. To address this issue, a new regularization method based on least squares is proposed in this study. The suggested approach modifies both the weight matrix and the penalty terms to address this issue. This procedure starts by changing the A matrix using the AA^T diagonal value based on the Depth Compensation Algorithm (DCA). Then, a new penalty term is added to LASSO regression using the modified A matrix. It's been noticed that the suggested technique performs better on synthetic data than previous RLS methods in terms of accuracy and robustness as the noise level rises. According to experimental findings using synthetic data the novel approach outperforms state-of-the-art approaches minimizes inversion instability, lowers mistakes, and improves inversion accuracy.

In the second part of the thesis, a deep learning based inverse problem solution is developed as an alternative to the decreasing accuracy of classical regularization methods for increasing depth and high noise levels. For this purpose, noisy and noiseless measurement images are used to train the convolutional neural network.

Using the results obtained for each x, y, z location, x input images were obtained. When the obtained results are evaluated in terms of error metrics, it is shown that the inclusion is detected with high accuracy for single inclusions even at high noise and at depth levels close to the boundary values of the inclusion.

Keywords: Inverse problem, diffuse optical tomography, regularization method, depth compensation algorithm, weight matrix modification, deep learning

1
GİRİŞ

Ters problem, bilinmeyen nicelikleri ve özellikleri dolaylı veya eksik gözlemlerden yeniden yapılandırmaya çalıştığımız bir problem türüdür. Sayısal analiz ve uygulamalı matematikte, ters problemler oldukça önemli bir çalışma alanıdır. Görüntü ve sinyal işleme, bilgisayarla görme, gürültü giderme, süper çözünürlük, sıkıştırmalı algılama, uzaktan algılama ve tıbbi görüntülemede yaygın olarak kullanılmaktadır [1–4].

Diffüz optik tomografi (DOT), adı verilen invazif olmayan bir görüntüleme tekniği, görünür ve yakın kızılötesi spektrumdaki maksimum ışık iletiminin ölçümlerinden kan ve dokunun optik özelliklerini yeniden yapılandırmaya çalışır. Sınır ölçümlerinden dokudaki optik özelliklerdeki değişiklikler kullanılarak kan hacmi ve dokunun oksijenlenmesi hakkında önemli fizyolojik bilgiler elde edilir [5].

Işığın dokuda yayılımını temsil eden üç önemli optik özellik vardır: absorpsiyon, saçılma ve anizotropi faktörü. Bu optik özellikler biyolojik dokulardaki foton yayılımını tanımlar. Doku parametrelerinin uzamsal dağılımına sahip olan yeniden oluşturulmuş görüntüler, kan ve dokunun oksijen durumu gibi önemli özelliklerle doğrudan ilişkilidir [6, 7].

İleri yol problemi ve ters problem, Diffüz optik tomografinin iki önemli bileşenini oluşturur. Doku sınırındaki foton yayılımı ve optik akı, ileri yol problemi tarafından tanımlanır. RTE (Radyatif Transfer Denklemi), ışığın bir doku boyunca nasıl dağıldığını açıklamak için kullanılan bir ifadedir. Yüzey ışık ölçümlerini ve dokuların absorpsiyon ve saçılma katsayılarını kullanarak dokunun görüntüsün yeniden oluşturulması süreci ters problem olarak adlandırılmaktadır [8].

DOT uygulamasında görüntü elde etme işleminin (ters problem) doğrusal olmayan, kötü konumlandırılmış (ill-posed) ve kötü belirlenmiş (ill-determined) olduğu bilinmektedir [9]. Hadamard'a göre bir problem aşağıdaki üç özelliği yerine getirirse iyi konumlandırılmış (well-posed) olarak adlandırılır. Problemin tek bir kararlı çözüme sahiptir. Çözüm sürekli olarak giriş verilerine bağlıdır ve problemin bir

çözümü vardır. Bu tanıma göre, bu üç koşuldan birinin ihlal edilmesi durumunda problem kötü konumlandırılmış (ill-posed) olarak adlandırılmaktadır.

Yetersiz ölçümler, dokularda fotonların aşırı saçılması ve derin dokularda ışık yayılımının belirsizliği nedeniyle ortaya çıkan kötü konumlandırılmış (ill-posed) ve kötü koşullandırılmış (ill-conditioned) ters problem, DOT için temel problemlerden biridir [10–12]. Yeniden yapılandırılacak bilinmeyen değişkenlerden çok daha az sayıda mevcut ölçüm olması nedeniyle, DOT belirsizdir. Ayrıca, ışığın insan dokularında yayılması sırasında saçılmanın baskın olması nedeniyle koşulsuzdur [13]. DOT sistemleri yüzey ölçüm verilerine kıyasla çok daha fazla sayıda bilinmeyene sahip olduğundan, DOT görüntülerinin yeniden elde edilmesi işlemi için belirsiz bir ters problem çözülmelidir.

Ters problemleri çözmeye yönelik yaygın yaklaşımlardan biri, çözümü düzenli hale getirmektir (regülarizasyon); bu, çözümün iyi huylu olmasını ve istenen belirli özellikleri karşılamasını sağlamak için optimizasyon problemine ek kısıtlamalar veya cezalar eklemeyi içerir. Düzenli hale getirme, çözümü stabilize etmeye, gürültüye karşı hassasiyeti azaltmaya ve seyreklik gibi ek kısıtlamaları uygulamaya yardımcı olabilir.

Habermehl'e [14] göre, ters problemi çözmek için kullanılan iki temel yaklaşım vardır: bunlardan ilki regülarizasyon ve diğeri yakınsama kriterinin seçimidir. Doğrudan regülarizasyon yöntemleri ve iteratif regülarizasyon yöntemleri, regülarizasyon algoritmalarının kategorize edilebileceği iki ana kategoridir. Doğrudan regülarizasyon Tikhonov regülarizasyonu ve Kırpılmış Tekil Değer Ayrışımını (Truncated Singular Value Decomposition-TSVD) [15, 16] yöntemleridir. Landweber yöntemi [17] ve Eşlenik Gradyan yöntemi (Conjugate Gradient Method) [18] iki iteratif düzenli hale getirme tekniğidir. Verilen bir kontrol stratejisini kullanarak, regülarizasyon yönteminin temel amacı gerçek çözüme en iyi yaklaşımı belirlemektir.

Ayrıca ters problem çözümümde Derin öğrenme yöntemleri de kullanılmaktadır. Bu yöntemler, çözümde arzu edilen özellikleri destekleyen örtük bir düzenleme işlevini öğrenmek için yapay sinir ağlarını kullanır.

1.1 Literatür Özeti

Ters problemler, bir miktarın doğrudan ölçülemediği, ancak yalnızca gözlemlerin matematiksel modellerin çıktılarıyla karşılaştırılması yoluyla elde edildiği durumlarda ortaya çıkar. Bu tür sorunların örnekleri, biyomedikal görüntüleme, tahribatsız testler (non-invasive) ve finansal modellerin kalibrasyonu gibi bir çok alanda bulunur [19]. Tomografi ve ilgili tekniklerin geliştirilmesinden başlayarak, son elli yılda matematik,

tıbbi görüntüleme, jeofizik ve petrol endüstrisi gibi birçok uygulama alanlarda ters problem kullanılmakta ve bu alanda yapılan çalışmalar ivme kazanmaktadır [20–22]. Ters problemlere olan ilginin artmasıyla bağlantılı olarak, çoğu ters problemde hatalı konumlandırılmış (ill-posedness) olmalarından dolayı regularizasyon yöntemlerine ihtiyaç duyar.

Ters problemler, 1950'li ve 1960'lı yıllara kadar uzanan ilk çalışmalarla uzun yıllardır ilgi çeken bir konu olmuştur. Regülarizasyon yöntemlerinin kökenine tarih vermek oldukça zordur ancak onu 1960'larda Tikhonov'un öncü çalışmasıyla başlayan gelişmelerle özdeşleştirebiliriz [23, 24] Tikhonov düzenlemesi, amaç fonksiyonuna ikinci dereceden bir ceza eklemeyi içerir ve bu da düzgün ve iyi huylu bir çözümü teşvik eder.

Başlangıç motivasyonu, açık bir şekilde, iyi oluşturulmış bir problemin (well-posed) tanımını reddeden, kötü konumlandırılmış kavramından gelir. Varlık, teklik ve giriş verilerine verilerine istikrarlı bağımlılık genellikle kısmi diferansiyel denklemler konusunda Hadamard'ın çalışmasına atfedilir [25], ancak üçüncü koşul bu problemlerde açıkça formüle edilmemiştir ve daha sonra John'un çalışmasında [26] eşit derecede önemli bir koşul olarak gösterilmiştir.

Regülarizasyon teorisi ve özellikle bunların yakınsaması için bir istikrarın olmaması motivasyon olarak önemli bir konu olarak görünmektedir. Daha erken çalışmalarda, anlamlı çözümler hesaplamak için, problemin iyi oluşturulmuş olanlarla, genellikle regülarizasyon parametresi tarafından parametrelenen bir aile ile yaklaşması gerektiği anlaşılmıştı.

Bu probleme Tikhonov'un ilk yanıtı, etki alanını kompakt bir kümeyle sınırlamak ve koşullu iyi konumlanma (well-posedness) kavramına yol açmaktı. Sıfır merkezli norm topları Hilbert uzayında çözümü temsil eder. Bu norm toplarının yarıçapı doğal olarak bir regülarizasyon parametresi olarak kullanılabilir. Prosedür aynı zamanda seçim tekniği olarak da biliniyordu ve ilgili çözümler yarı-çözümler olarak ifade ediliyordu. Hilbert uzaylarında minimizasyon problemi $\| Ku - f \|^2$, Tikhonov veya Tikhonov-Phillips regülarizasyonu olarak adlandırılan şeyin varyasyonel formülasyonunun kısa bir yoludur. Aslında bu, Lagrange değeri α uygun olduğunda varyasyon sorununa eşittir.

İlk çalışmaların bazılarında, en küçük kareler terimi bir miktar tutarsızlıkla ve regülarizasyon için bazı uygun işlevseller ile değiştirilerek modern teorinin bir öncüsü olarak formüle edilmiştir.

O dönemde ters problemlere diğer fonksiyonları dahil etmek için zorlayıcı nedenler

veya nicel tahmin için alternatif teknikler yoktu; bunun yerine, çalışma yakınsama kanıtlarına odaklanan soyut bir yaklaşımla sınırlıydı. Sovyet literatürü, gürültü yoğunluğuna dayalı düzenli hale getirme parametresi seçimi gibi fikir ve teknikleri araştırmıştır [27].

Alternatif bir yaklaşım olarak, birçok çalışma aynı zamanda Tikhonov'un düzenlileştirme yöntemi dediği, yani K'nin düzenli operatörler tarafından yaklaşıklığı ve bunun sınırlı operatörler tarafından genelleştirilmiş tersi olarak değerlendirildi. Aynı zamanlarda batı medeniyetinde de benzer bir değişim meydana gelmiştir.

Tikhonov'un koşullu iyi pozisyonluluğuna benzer bir yaklaşım Phillips tarafından [28] da birinci tür integral denklemler için geliştirildi ve literatürde Tikhonov-Phillips regülarizasyon terimi olarak ayrıca kullanılmaktadır. Ayrık bir istatistiksel regresyon ortamında, kötü konumlandırılmış problemlerle başa çıkmak için benzer bir fikir, Ridge Regresyon terimi altında geliştirilmiştir [29].

Backus ve Gilbert [30] uygulamalı bir bakış açısıyla regülarizasyon yöntemleri geliştirmek için alternatif bir yaklaşım önermiştir. Gürültülü verileri yumuşatmak için doğrusal filtreler kullandılar, böylece ileri operatör K aralığında olacak ve doğrudan ters çevirmeye izin verecekti. Bu teknikleri Tikhonov düzenlemesi gibi diğer düzenlemelerle bağlantılı olarak anlamak uzun zaman gerektirmiştir. En önemli adım, filtrelerin yumuşatma etkisi ile K operatörü ve onun eşleniği arasındaki ilişkiyi kurmak olmuştur.

Bu daha sonra Anderssen [31] tarafından lineer fonksiyonel stratejide ve ayrıca tomografi problemlerinde oldukça faydalı olan Louis [32] tarafından yaklaşık ters yöntemin geliştirilmesinde de yeniden yapılandırma formüllerinin hesaplanması için hızlı yöntemlerin mevcut olduğu yerlerde açıklığa kavuşturulmuştur.

Geçen yüzyılın yetmişli ve seksenli yıllarında, doğrusal regülarizasyon yöntemleri kararlı iterasyon yöntemlerinin erken durdurulmasıyla iteratif regülarizasyon, kesik tekil değer ayrışımı gibi birçok farklı regülarizasyon tekniği üzerinde yapılan çalışmalar ile daha da ilerlemiştir. [33–36].

Çalışmanın büyük bir kısmı, spektral yöntemler kullanılarak düzenlileştirme yaklaşımlarının oluşturulması ve derinlemesine incelenmesi üzerine odaklanmıştır. Hilbert uzaylarında doğrusal düzenlileştirme tekniklerinin temel analizinin yanı sıra, başlangıç hata tahminlerinin gürültü seviyesine bağımlılığı ve gürültü seviyesinin bir fonksiyonu olarak yakınsama ve düzenlileştirme parametresinin sıfır olma eğilimi ele alınmıştır. Ayrıca, tutarsızlık ilkesi gibi teori ve gürültü seviyesini kullanan diğer a-posteriori kurallar veya yarı-optimallik ve L-eğrisi yöntemi gibi sezgisel çeşitli

asimptotik parametre seçim kuralları önerilmiş ve araştırılmıştır [37, 38].

Uygulama açısından, birinci tür integral denklemlere sahip modellere odaklanıldı ve tomografide görüntü rekonstrüksiyonu, itici bir uygulama alanı haline geldi [21, 39]. Eş zamanlı olarak, parametre tanımlama ve ters saçılma da dahil olmak üzere kısmi diferansiyel denklemlerdeki ters problemlerin farklı kullanımlarını ele almak için düzenli hale getirme teknikleri kullanılmıştır.

Seksenlerin sonu, özellikle Seidman ve Vogel'in [40] Tikhonov'un iyi konumlanmışlık ve yakınsama analizini veren makaleleri ile, doğrusal olmayan ters problemler için düzenlileştirme yöntemlerinin sistematik analizinin başlangıcını işaret eder ve bu tür problemler için Engl, Kunisch ve Neubauer [41] tarafından yakınsama oranlarına bağlı ilk hata tahminlerini sağlar. Bu yöntemlerin birçoğunun doğrusal olmayan operatörler için mevcut olmayan spektral teori düşüncelerini atlatmak için tasarlandığından, doğrusal olmayan düzenleme için iyi çalışması beklenmedik bir durum değildir.

Doksanlarda doğrusal olmayan ters problemler için yapılan çalışmalarda bir artış olmuştur, özellikle doğrusal olmayan problemlerin yinelemeli yöntemlerle çözülmesi gerektiğinden yinelemeli düzenleme yöntemleri teorisi geliştirildi. Öne çıkan örnekler Landweber [42] ve en dik iniş yöntemleri (steepest-descent methods), düzenli Newton yöntemleri [43] ve yinelemeli Tikhonov [44] yöntemleridir.

Rudin, Osher, Fatemi [45] ve Mumford-Shah'ın [46] tarafından gürültü azaltma için doğrusal olmayan değişken modellerin temel yayınlarında tanıtılması nedeniyle, görüntü işleme alanında yeni bir yaklaşım ortaya çıkmıştır. Bu yaklaşım, doğrusal olmayan bir düzenleme tekniği kullanarak doğrusal bir ters problemi çözmektedir. Teknik açıdan bakıldığında, önceki teori esas olarak Hilbert uzaylarında formüle edilmişken, sınırlı varyasyon fonksiyonlarının uzayı gibi anizotropik Banach uzaylarındaki şemaları analiz etmenin ek zorluklarını ortaya koymuştur.

Banach uzaylarında regülarizasyon yöntemlerini araştırmak için bir başka itici güç, dalgacık küçülmesini ve düzenlileştirme l1 normların varyasyonel karşılığını (Besov uzaylarında) içeren aralıklı olma (sparsity) fikri olmuştur [47, 48]. Sonuç olarak, bir ters problem çözümü için yeniden yapılandırmalar oluşturmak yerine verimli sıkıştırma için uygun ölçüm ayarlarının oluşturulmasına odaklanan sıkıştırılmış algılama disiplini ortaya çıkmıştır [49, 50]. Sıkıştırılmış algılamadaki olağan ayarın oldukça sonlu boyutlu bir ayar olmasına rağmen, dışbükey analize dayanan birçok argüman ile yakından ilişkilidir.

1980'lerde ve 1990'larda, l1 düzenlemesi ve l2 düzenlemesi dahil olmak üzere ters problemler ve düzenlemeye ilişkin önemli miktarda araştırma yapılmıştır.

2000'li ve 2010'lu yıllarda, bu problemleri çözmek için daha gelişmiş yöntemler ve algoritmalar geliştirmeye odaklanarak, ters problemlere ve düzenlemeye olan ilgi devam etmiştir. Bu dönemdeki önemli gelişmelerden bazıları, parçalı sabit bir çözümü teşvik eden toplam varyasyon (TV) düzenlemesi ve belirli bir temelde seyrek bir çözüm arayan yöntemlerin geliştirilmesidir [51].

Geliştirilen teknikler özellikle görüntü işleme alanında birçok alanda uygulanmaya başlanmıştır. Yirminci yüzyılın ilk on yılındaki değişimi göstermek için, 2000 yılı öncesinde veya civarında tıbbi görüntülemede ters problemler için kullanılan ve on yıl sonra kullanılan tekniğin durumunu gösteren çalışmalardan bazıları aşağıda verilmiştir [51].

2000 yılı sonrasında ters problem veya regülerizasyon parametresi için en uygun parametreyi belirlemek için literatürde bazı çalışmalar bulunmaktadır. Jiang ve diğerleri ters EKG problemini çözerken SVR modeli için en iyi hiperparametreleri bulmak amacıyla araştırma yapmışlardır. Bu amaca ulaşmak için genetik algoritma (GA), diferansiyel evrim (DE) algoritması ve parçacık sürüsü optimizasyonu (PSO) kullanmışlardır. Bulgularına göre, PSO-SVR'nin daha etkili bir yöntem olduğu kanıtlanmıştır [52].

Okawave diğerleri uzamsal çözünürlüğü iyileştirmek için lp ($0 < p \leq 1$) seyreklik düzenlemesini uyguladılar. Gradyan tabanlı doğrusal olmayan optimizasyon şeması ile zaman alanlı yaygın optik tomografi için Focal Underdetermined System Solver (FOCUSS) algorithm kullandılar. Düzenlileştirme parametresini seçmek için L-eğrisi yöntemini kullandılar. Tikhonov regülülarizasyon yönteminin inklüzyonlardan birini bulduğu durumda önerdikleri yöntem ile iki inklüzyon başarıyla bulunmuştur.

Fenu ve diğerleri Genelleştirilmiş Çapraz Doğrulama (Generalized Cross-Validation GVC) kullanarak regülarizasyon parametresinin seçimini amaçlamışlardır. İşlem maliyetini azaltmak için Tekil Değer Ayrıştırma yöntemi kullanılmıştır. Çalışmalarında üst ve alt sınırları hesaplayarak GVC fonksiyonunu ve üst sınırı en aza indirerek belirlenen regülarizasyon parametresini tanımladılar [53].

Çalışmaların bir kısmı regülarizasyon yönteminin oluşturulması, geliştirilmesi ve bu çözüm metotlarına odaklanmıştır. Cao çalışmasında, DOT için regülarizasyon yöntemlerinden birini tanıttı. Seyreklik düzenlemesini (sparsity regularization) tanıtan difüz optik tomografi için bir görüntü rekonstrüksiyon yöntemi önerdiler. L1 norm regülarizasyon yöntemini kullanmış ve optimizasyon problemini beklenti maksimizasyonu (Expectation Maximization - EM) yöntemini kullanarak çözmüşlerdir. Yeniden yapılandırma performansını, seviye kümesi algoritması (level-set algorithm), Tikhonov düzenlemesi ve eşzamanlı yinelemeli yeniden

yapılandırma tekniği ile karşılaştırdılar [54].

Kadu ve Leewen, DOT için düzenleme yöntemlerinden birini tanıttı. Çalışmalarında ikili tomografi için kısıtlı en küçük kareler probleminin Lagrange ikilisine dayanan yeni konveks formülasyon sundular. Sayısal fantomlar ve gerçek veriler üzerine bir yöntem önerdiler ve yöntemin en gelişmiş yeniden yapılandırma tekniklerinden bazılarıyla olumlu bir şekilde karşılaştırıldığını gösterdiler. Önerilen yöntem aynı zamanda orta düzeyde gürültüye karşı da oldukça kararlıdır [55].

Prakash ve diğerleri ters problemi çözmek için SVD-Based Basis Pursuit Deconvolution yöntemini amaçladı. Önerilen yöntemin, geleneksel yönteme kıyasla hedef şekillerin daha iyi geri kazanılmasını sağladığını göstermiştir. Tikhonov minimizasyon şemasındaki optimal düzenleme parametresini tahmin etmek için genelleştirilmiş GCV tabanlı yöntemi kullandılar [56].

Bi ve diğerleri seyreklik düzenlemesi olan yeniden yapılandırmaların, standart l2 norm düzenlemesi olanlardan daha güvenilir olduğuna dikkat çekti. Çalışmalarında seyreklik düzenleme sorunlarını çözmek için Split Bregman yöntemini benimsediler ve minimizasyonu l1 ve l2 norm düzenlemesi olarak bölerek hesaplama yükünü azalttılar [8].

Leng ve diğerleri seyrek düzenlileştirme ile doğrusallaştırılmış Bregman yinelemeli algoritmaya dayalı etkili bir yeniden yapılandırma yöntemi önermektedir [10].

Machkour ve diğerleri model seçimi için hücreleri dikkate alan uyarlanabilir bir LASSO (Least Absolute Shrinkage and Selection Operator) regülarizasyon yöntemi önerdi ve analiz etti. Önerilen Ağırlıklı Uyarlanabilir LASSO cezasının diğer tahmin edicilerin amaç fonksiyonuna kolayca entegre edilebileceğini gösterdiler [57].

DOT ters probleminde karşılaşılan ve regülarizasyon yöntemleri ile çözüm bulunmaya çalışılan diğer bir konu DOT derinlik problemidir. Derin nesneyi doğru bir şekilde görüntülemek için çeşitli çabalar gösterilmiş olsa da, derinlik lokalizasyonunda önemli bir gelişme hala bir zorluk olmaya devam ediyor ve derinlik problemini çözmek için çok az sayıda çalışma yapılmıştır. Bu probleme çözüm bulmak amacıyla Niu ve diğerleri [58] artan derinlikle birlikte ciddi hassasiyet düşüşlerini telafi etmek için bir sözde üstel ayar matrisi tanıtılarak bir derinlik kompanzasyounu algoritması (Depth Compensation Algorithm-DCA) üzerinde geliştirilmiştir. Tian ve diğerleri çalışmlarında DCA'nın etkisini incelemiş ve bu yaklaşımın yararlılığını göstermek için simülasyon deneyleri yapılmıştır [59]. Ancak, yalnızca ağırlık matrisi modifikasyonu, iki kapanım olduğunda Tikhonov yöntemiyle derinlik kapsamını tespit edememektedir.

Derin öğrenmenin ters problemlerin çözümünde uygulanması son yıllarda artan ilgi görmüştür. Karmaşık örüntüleri ve korelasyonları keşfetmek için derin sinir ağları, bir tür makine öğrenimi olan derin öğrenme (DL) kullanılarak büyük veri kümeleri üzerinde eğitilmektedir. Görüntü yeniden yapılandırma, kaynak lokalizasyonu ve ters saçılma, derin öğrenmenin kullanıldığı çok sayıda ters problemden bazılarıdır.

Genel olarak, ters problemler ve düzenli hale getirme alanı yıllar içinde önemli bir gelişme göstermiş, birçok farklı yaklaşım ve algoritma önerilmiş ve üzerinde çalışılmıştır. Ters problemleri çözmek için birçok farklı yöntem olsa da, çözümün kararlı ve doğru olmasını sağlamak için uygun yöntemi ve algoritmayı dikkatlice seçmek önemlidir. Literatürde DOT ve DL üzerinde yapılan çalışmalardan bazıları aşağıda kısaca verilmiştir.

Bir geri yayılım sinir ağının (Back-propagation neural network-BPNN) DOT'taki optik özellikleri kurtarma yeteneği Feng ve diğerleri [60] tarafından incelenmiştir. Absorpsiyon katsayısını elde etmek için ilk olarak, bir dizi eğitim verisine dayalı olarak DOT görüntü yeniden yapılandırmasından önce BPNN'nin parametrelerini eğittiler ve aynı derinlikte bulunan iki inklüzyon için BPNN'yi Tikhonov regülarizasyonu ile karşılaştırdılar [60].

Sabir ve diğerleri toplu optik özellikleri tahmin etmek için CNN tabanlı yaklaşım önerdiler. Absorpsiyon ve saçılma katsayısının geri kazanılması için iki ağ mimarisi kullanarak, göğüs verileri üzerinde, deneysel verileri ve gerçekçi sayısal verileri kullanarak önerilen şemayı doğruladılar [61].

Li ve diğerleri, yalnızca hedef ölçümlerini kullanarak veri farkı görüntüleri üreten DOT için bir derin öğrenme yöntemi oluşturdu. Daha sonra doğruladıkları Çok Katmanlı Algılayıcı (Multilayer perceptron-MLP) tabanlı bir yapay sinir ağını (YSA) eğitmek için boyutları, şekilleri, derinlikleri değişen simülasyon verilerini kullandılar. Ters problemi çözmek için eşlenik gradyan algoritması ve bir ikili ağ şeması kullanıldı. YSA'nın daha küçük benign ve malign lezyonları ayırt etmede daha iyi performans gösterdiğini, klinik verilerde daha büyük lezyonlar için daha kötü performans gösterdiğini gösterdiler. Çalışmalarının, eğitim setinin sınırlı olması, gürültüsüz pertürbasyonun olmaması nedeniyle sistem gürültüsüz fantom deneyleri için doğru konumlara (ground truths) sahip olunmaması nedeniyle sınırlandırılmıştır [62].

Yedder ve diğerleri konumlandırma hatasını iyileştirmek için bir mesafe dönüşümü tabanlı kayıp fonksiyonu ile birlikte DOT yeniden yapılandırması için önerilen çoklu görev öğrenmesini kullanmışlardır. Modelin yeniden oluşturma performansı, En Küçük Kareler tabanlı yaklaşım (Least Square-LS), Levenberg-Marquardt (LM), doğrusal olmayan eşlenik gradyan (Nonlinear Conjugate Gradient-NCG) ve derin

öğrenme yöntemleri ile karşılaştırıldı [63].

Yao ve diğerleri Lippman-Schwinger denklemine dayalı doğrusal olmayan foton saçılımı fiziğini öğrenmek için bir DL yaklaşımı önerdi [64].

Fan ve diğerleri iki boyutlu optik tomografi problemlerine DL yaklaşımını kullanarak ileri harita $\mu \rightarrow \lambda$ elde etmek için RTE'yi integral bir formda formüle etti. Daha sonra ters harita $\lambda \rightarrow \mu$ yapay sinir ağları ile ileri haritayı tersine çevirerek elde edilebilmektedir [65].

1.2 Tezin Amacı

DOT, görüntülemek için yakın kızılötesi spektroskopi (Near-Infrared Spectroscopy-NIRS) kullanmaktadır. Biyolojik dokulardaki foton yoğunluğu, NIR ışığının yüksek saçılımı nedeniyle derinlikle birlikte hızla azalır. Sonuç olarak DOT, yüzeysel dokuya kıyasla derin dokudaki ölçümlere daha az duyarlıdır. Yeniden yapılandırma sırasında, dokunun derinliklerinde bulunan nesneler genellikle yüzey katmanlarda bulunur ve derinde bulunan nesnelerin konumlandırmalarında önemli bir hataya neden olur. Farklı ceza terimleri (l1-norm, l2-norm, LASSO regresyon, Ridge regresyon ve Elastik Ağ vb.) ile Klasik Düzenlileştirilmiş En Küçük Kareler tabanlı düzenlileştirme yöntemleri, inklüzyon sayısı artırıldığında ve inklüzyonlardan biri yüzeyde diğeri derin bölgede olduğunda inklüzyonu bulmakta yetersiz kalmaktadır. Bu DOT'ta karşılaşılan derinlik problemi olarak bilinmektedir.

Derinde bulunan nesnelerin hassas bir şekilde görüntülenmesine yönelik çok sayıda girişim olmasına rağmen, derinliği doğru bir şekilde konumlandırmak hala zor bir iştir ve bu sorunu ele almak için sınırlı araştırma yapılmıştır. Niu ve diğerleri [58] artan derinlikle birlikte ciddi hassasiyet düşüşlerini telafi etmek için bir üstel bir ayar matrisi tanıtılarak bir DCA algoritmasını geliştirilmiştir. Ancak, yalnızca ağırlık matrisi modifikasyonu iki inklüzyon olduğunda Tikhonov tipi yöntemlerle derindeki inklüzyonu tespit edemez.

Bu tez çalışmasında, az sayıda kaynak dedektör sayısı ile biri dokunun üst yüzeyinde, diğeri dokunun daha derin seviyesinde yer alan iki inklüzyon olduğunda derinlik probleminin çözülmesi amaçlanmaktadır. DOT görüntü rekonstrüksiyonu için yeni bir en küçük kare tabanlı düzenlileştirme yöntemi geliştirilmiştir. Öncelikle ağırlık matrisini DCA yöntemine göre modifiye ettidilmiş ve daha sonra kare matris elde etmek için AA^T çarpılmış ve köşeğen değerleri elde edilmiştir. Elde edilen köşegen değerler yeni ağırlık matrisinin köşegen değerlerini oluşturmak için kullanılmış ve matrisin diğer değerleri sıfır ile doldurulmuştur. Böylece yeni ağırlık matrisi elde

edilmiştir. Önerilen yöntemin ikinci kısmı, modifiye edilmiş ağırlık matrisi kullanılarak LASSO Regresyonuna yeni ceza terimi eklenerek yeni bir regülarizasyon yönteminin geliştirilmesi amaçlanmıştır.

Ayrıca klasik regülarizasyon yöntemlerinde DOT'ta derinlik arttıkça azalan doğruluk değerleri için derin öğrenme tabanlı ters problem çözümü amaçlanmıştır. Bu amaçla ölçüm görüntüleri kullanılarak Evrişimli Sinir Ağı eğitilmiştir. Çeşitli derinliklere ve konuma yerleştirilmiş inklüzyonlar için test edilmiştir.

1.3 Hipotez

DOT'ta derinlik sorunu, biyolojik dokularda NIR ışığının yüksek saçılımının neden olduğu artan derinlikle foton yoğunluğundaki hızlı düşüş nedeniyle ortaya çıkar ve bu da yüzeysel dokuya kıyasla derin dokuda DOT'un çok daha düşük bir ölçüm hassasiyetine yol açar.

Bu tez çalışmasında, DOT'ta karşılaşılan derinlik problemine yeni bir en küçük kareler tabanı regülarizasyon yöntemi geliştirilerek çözüm önerilmektedir. Biri yüzeyde diğeri derinde iki inklüzyon bulunduğu durumda önerilen yöntem derindeki inklülüzyonu başarı ile bulabilmektedir. Bu çalışmada ağırlık matrisi modifiye edilerek yeni bir en küçük kare tabanlı düzenlileştirme formülasyonunu yeniden oluşturulmuştur. Görüntüleme cihazının gürültülü doğası nedeniyle yöntem, gürültülü ve gürültüsüz sentetik veriler kullanılarak ve hata metrikleri ile karşılaştırılarak test edilmiştir. Önerilen yöntemin gürültü seviyesi arttığında sentetik veriler üzerinde diğer RLS Yöntemine göre daha yüksek doğruluk ve daha sağlamlık verdiği gözlemlenmiştir.

Ayrıca artan derinlikle birlikte düşen doğruluk ve CNR değerleri için klasik regülarizasyon yöntemlerine altarenatif derin öğrenme tabanlı ters problem çözüm yöntemi önerilmiştir. Önerilen Evrişimli Sinir Ağı tabanlı ters problem çözümün inklüzyonun derinde bulunduğunda ve yüksek gürültülü şartlarda yüksek doğruluk verdiği gözlemlenmiştir.

2
MODEL

2.1 Görüntüleme Teknikleri

Görüntüleme teknikleri, insan organlarının, biyolojik sistemlerin veya mekanik ve optik malzemelerin analizi için güçlü araçlardır. Görüntüleme yöntemleri, teşhis ve tedavi amacıyla vücudun iç kısmının görüntülerini oluşturmak için kullanılan tekniklerdir.

Bunlar, X-ışını, Bilgisayarlı Tomografi (Computerized Tomography-CT), Elektrikli Empedans Tomografi (Electrical Impedance Tomography-EIT), Difüz Optik Tomografi (Diffuse Optical Tomography-DOT), Fotoakustik Tomografi (Photoacoustic tomography-PT), Optik Koherens Tomografi (Optical Coherence Tomography-OCT), Ultrason Görüntüleme, Elastografi gibi farklı tomografi türleri ve farklı mikroskopi türlerinden (floresan mikroskobu, tek moleküllü floresan, ışık levha floresan Mikroskobu, vb.) oluşur.

Görüntülemede ters problem, bir görüntüleme yöntemi tarafından elde edilen ölçüm verilerinden vücudun iç kısmının görüntüsünü yeniden oluşturma sürecini ifade eder. Bilinmeyen nesneyle ilişkilendiren denklemlerin çözümü için elde edilen verilerin matematiksel modellemesini gerektiren ters problemlerin çözümüne ve sayısal yöntemlere dayanırlar.

2.1.1 X-Işını Görüntüleme

Röntgen görüntüleme bugün yaygın olarak kullanılmaktadır. Wilhelm Conrad Röntgen tarafından 1895'te X-ışının bulunması ile X-ışını görüntüleme başlamıştır [66]. X-ışını görüntüleme, vücudun iç kısmının görüntülerini oluşturmak için X-ışınlarını kullanan bir teşhis aracıdır. X-ışınları, görünür ışığa benzer, ancak çok daha yüksek enerjili bir elektromanyetik radyasyon türüdür. X-ışını görüntüleme, yüksek frekanslı bir elektromanyetik dalga kullanarak sahneyi hareketlendirir ve ortaya çıkan "gölgeyi" ölçerek çalışır [67]. X-ışınları vücuttan geçerken kemik gibi

daha yoğun malzemeler tarafından emilir ve kaslar ve organlar gibi daha yumuşak dokular tarafından daha az emilir. Bu, röntgen görüntülerinin kemikleri ve vücudun diğer iç yapılarını net bir şekilde göstermesini sağlayarak doktorların çok çeşitli tıbbi durumları teşhis ve tedavi etmesine yardımcı olabilir.

X-ışını görüntüleme, ters saçılma problemini çözmekten kaçınmak için uyarımın bu yüksek zayıflama özelliğinden yararlanır. Düz bir X-ışını görüntüsünün sonucu bu nedenle iki boyutludur. Ancak, görüntü işleme teknikleri, yüksek çözünürlüklü 3D görüntüler üretmek için bir sahnenin etrafında 180° yarıçapında birden fazla görüntü almakla bağlantılı olarak kullanılabilir. Bu 3D görüntüler BT olarak bilinir [68].

X-ışını görüntüleme, yüksek çözünürlüklü görüntüler elde etmede oldukça etkili olsa da, dezavantajları da vardır. Örneğin, X-ışını görüntüleme, görüntüleri elde etmek için iyonlaştırıcı frekanslarda elektromanyetik dalgalar kullanır. Ne yazık ki iyonlaştırıcı radyasyon, bir nesneden geçerken yüklü parçacıklar üreten enerjidir ve biyolojik dokuda radyasyon hasarına neden olabilir.

2.1.2 Manyetik Rezonans Görüntüleme (Magnetic Resonance Imaging-MRI)

Manyetik rezonans görüntüleme, hem klinik tıpta hem de biyomedikal araştırmalarda kanıtlanmış sonuçlarla 1980'lerin başında tanıtılmasından bu yana gelişen karmaşık bir görüntüleme tekniğidir. Vücudun içinin ayrıntılı görüntülerini üretmek için manyetik alan, radyo dalgaları ve bir bilgisayar kullanan tıbbi bir görüntüleme tekniğidir. X-ışını görüntülemenin aksine, MRI iyonlaştırıcı radyasyon kullanmaz, bu da genellikle daha güvenli bir görüntüleme yöntemi olduğu anlamına gelir. MRI, görüntüleme için X-ray'den farklı bir yaklaşım kullanır. İlk önce bir sahneyi, görüntülenen sahne içindeki protonların dönüşünü hizalayan güçlü bir manyetik alana maruz bırakarak çalışır. Daha sonra sahneyi hareketlendirmek için bir elektromanyetik darbe kullanılır. Elektromanyetik darbe, ölçülebilen ve bir görüntüyle yorumlanabilen bir tepkiye neden olur. Bu yöntem ile, iyonlaştırıcı radyasyon kullanmadan yüksek çözünürlüklü 3D görüntüler üretebilir.

MRI taraması sırasında hasta, silindir şeklindeki büyük bir makinenin içine taşınan bir masada yatar. Makine, vücudun su moleküllerindeki protonları (pozitif yüklü parçacıklar) hizalamak için güçlü bir manyetik alan kullanır. Daha sonra protonları hizadan çıkarmak için radyo dalgaları kullanılır ve orijinal konumlarına geri döndüklerinde, MRI makinesi tarafından alınan ve vücudun içinin ayrıntılı görüntülerini oluşturmak için kullanılan bir sinyal yayarlar.

Manyetik alanı genellikle $0,5$ ile 7 Tesla arasında olan MRI sistemlerinde manyetik

alan süper iletken mıknatıslar tarafından üretilirken, helyum ile soğutulmaktadır. MRI görüntüleme, farklı dokulardaki hidrojen (H) çekirdeklerinin mekânsal haritasının çıkartılması prensibine dayanmaktadır. Yani görüntülemede kullanılan veri kaynağı hücrelerde bulunan H atomudur. Görüntü yoğunluğu herhangi bir uzamsal konumdaki H çekirdeklerinin MR görüntülemenin ilk aşamasında, normalde RF enerjisine duyarsız olan insan vücudu güçlü bir manyetik alana maruz bırakılarak RF dalgasına duyarlı hale getirilir. Bu güçlü manyetik alan vücutta bulunan H atomlarının hizalanmasına neden olur. Kesit görüntüsü alınacak bölgeye RF dalgası gönderilir ve bu enerjiyi alan H atomları, aldıkları enerji miktarına göre hizalandıkları konumlarından saparlar. RF enerjisi kesildiğinde H atomlarının eski konumlarına geri dönme sürecinde yaydıkları RF dalgaları, alıcı tarafından toplanarak bilgisayarda görüntü oluştulur. Farklı protonlar, protonun bulunduğu dokuya bağlı olarak farklı sinyaller gönderdiğinden MR görüntülerinde gri tonların oluşmasına neden olmaktadır. Bu gri tonların anlamı incelemenin türüne göre değişmekle beraber, genel olarak beyaz-açık tonlar alınan sinyalin fazla olduğunu, koyu-siyah alanlar ise alınan sinyalin az olduğunu göstermektedir. MR görüntüleme yumuşak doku kontrast çözümleme gücü en yüksek radyolojik görüntüleme yöntemi olarak kabul edilmektedir [66].

MRI özellikle beyin, omurilik, kaslar, tendonlar, bağlar ve organlar gibi yumuşak dokuları görüntülemek için kullanışlıdır. Ayrıca MRG, tümörleri, kan damarı sorunlarını ve röntgen veya ultrason ile görülemeyen diğer anormallikleri tespit etmek için de kullanılabilir [69].

2.1.3 Elektriksel Empedans Tomografisi (Electrical Impedance Tomography - EIT)

Elektriksel empedans tomografisinin bildirilen ilk kullanımı, 1930'larda jeolojik bir çalışma olduğu belirtilmiştir. EIT vücudun iç kısmının görüntülerini oluşturmak için küçük elektrik akımları kullanan tıbbi bir görüntüleme tekniğidir. Akciğerleri, kalbi, beyni ve diğer organları görüntülemek için kullanılabilen non-invaziv ve radyasyon içermeyen bir yöntemdir. Tıpta yeni kullanılmaya başlanan EIT, BT ve PET gibi tekniklerle karşılaştırıldığında yaklaşık bin kat daha ucuz, oldukça küçük ebatlara sahip ve iyonlaştırıcı radyasyon gerektirmeyen bir görüntüleme tekniğidir.

İnsan vücudunun anatomisi ve dokuların sağlığı hakkında bilgi, dokunun elektriksel iletkenliğinin görüntülenmesiyle elde edilmektedir. Biyolojik doku empedans ölçümleri düşük (20 Hz) ile yüksek (1 MHz) frekanslar aralığında yapılmaktadır. Bir EIT taraması sırasında elektrotlar cilt yüzeyine yerleştirilir. Daha sonra küçük elektrik akımları vücuttan geçirilir ve her elektrotta akıma karşı direnç ölçülür. Bu

direnç elektriksel empedans olarak bilinir. Elektriksel empedans değerleri daha sonra vücudun iç kısmının görüntülerini oluşturmak için kullanılır; daha yüksek empedanslı alanlar (kemik gibi) görüntü üzerinde daha parlak alanlar olarak görünür ve daha düşük empedanslı alanlar (akciğer dokusu gibi) daha koyu alanlar olarak görünür [66].

2.1.4 Difüz Optik Tomografi (DOT)

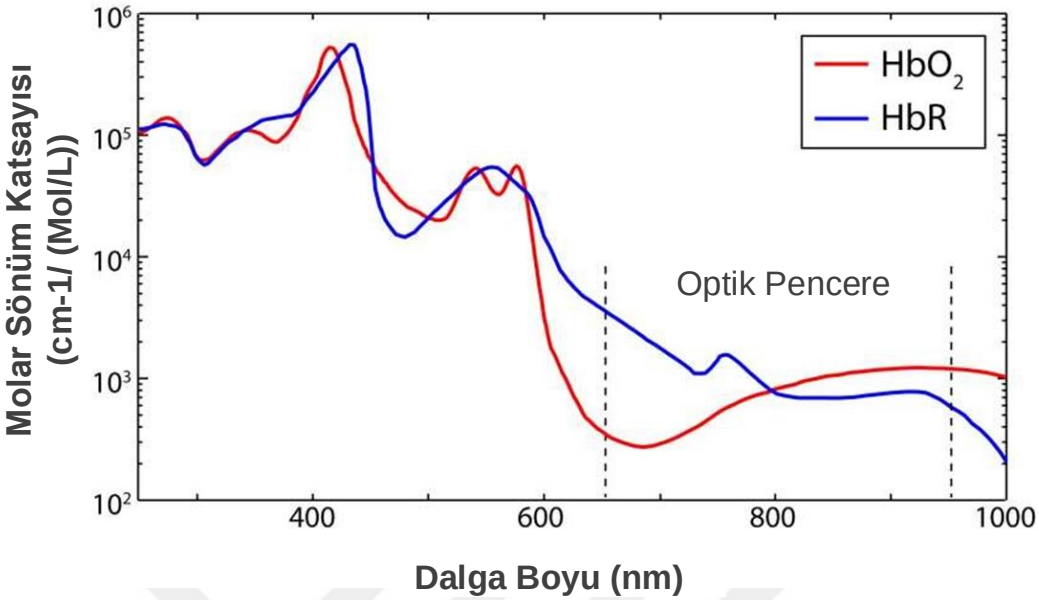
Bir optik görüntüleme türü olan difüz optik tomografi, bir optik dalga, yani bir ışık kaynağından gelen bir dalga kullanılarak bir nesnenin görüntülenmesi işlemidir. Tipik olarak bu kaynak, görünür (yaklaşık 400 ila 700 nm) veya yakın kızılötesi (yaklaşık 700 ila 1600 nm) aralığındaki lazer ışığıdır. Doku yüksek oranda saçılma ortamıdır ve bu nedenle, hizalanmış lazer ışını dokudan geçerken ışığın bir kısmı kromoforlar (hemoglobin, lipid ve su gibi) tarafından emilir, ancak çoğu dağılır. Aslında, yakın kızılötesi aralığında (özellikle yaklaşık 650 ila 950 nm), biyolojik doku tarafından ışığın absorpsiyonunun en aza indirildiği ve bu nedenle meme dokusunda yaklaşık 6 cm'ye ve beyin ve dokusunda yaklaşık 2 ila 3 cm'ye kadar nüfuz edebildiği gösterilmiştir [70].

Işık, doku gibi yayılan bir madde ile etkileşime girdiğinde saçılır ve zayıflar. Işığın doku boyunca yayılması temel olarak emilim katsayısı μ_a ve saçılma katsayısı μ_s olarak iki parametre tarafından belirlenir [71].

Emilim katsayısı μ_a, optik absorpsiyonun etkinliğini tanımlayan bir parametredir ve bir fotonun absorbe edilmeden önce kat ettiği ortalama mesafenin tersidir. Işık, dokuya girdüğünde doku içerisindeki kromofor adı verilen elemanlarla temas ederek soğrulur.

Işığın saçılması μ_s, ışığın düz bir yörüngeden sapmaya zorlandığı bir süreçtir ve ışığın doku içinde seyahat ettiği yoldaki belirsizlikten kaynaklanır. Dokudaki saçılma, bitişik yapılar arasındaki (hücre zarının varlığı, çekirdek boyutu, hücre şekli, su gibi maddeler) kırılma indeksi uyumsuzluğundan kaynaklanır [72]. Işık dokuda yol alırken saçılmaya uğrar.

Hemoglobinin iki formu, oksijenlenmiş hemoglobin (HbO) ve deoksijenlenmiş hemoglobin (HbR), NIR aralığındaki başlıca doku kromoforlarıdır. Beynin çeşitli bölgelerindeki oksijenlenmiş hemoglobin (HbO) ve deoksijenlenmiş hemoglobin (HbR) konsantrasyonuna bağlı metabolik değişikliklerle ilgili bilgileri çıkarmak için ışık yayılımı ileri modeli kullanılmıştır. NIR aralığında (yaklaşık 650 ila 950 nm arasında) ışığın en yoğun olduğu bir "optik pencere" vardır. Bu şekil 2.1'de gösterilmiştir.



Şekil 2.1 HbO2 ve HbR'nin molar sönme katsayılarının spektrumları [73]

Doku sınırına yerleştirilen dedektörler saçılan ışınları toplar ve bu verilerden dokunun 2 boyutlu bir görüntüsü (dilim), dokunun emilim ve saçılma katsayılarının uzamsal haritası şeklinde yeniden oluşturulur[70]. Bu, Şekil 2.1'de gösterilmiştir. Azaltılmış saçılma katsayısı, bir fotonun yönü başka bir nesneyle etkileşimle rastgele hale getirilmeden önce kat ettiği ortalama mesafe olan foton taşıma ortalama-serbest yolunun tersidir. Emilim katsayısı, bir fotonun soğurulmadan önce kat ettiği ortalama mesafenin tersidir. Bu katsayıların her ikisi de ışık kaynağının dalga boyuna, λ'ya bağlıdır [74].

Tümörlerdeki hücreler, artan su veya iyonik konsantrasyon nedeniyle normal hücrelerden daha yüksek emilim katsayılarına sahip olduklarından ve ayrıca fotonları farklı şekilde dağıttıklarından, görüntülenen hücrelerin emilim ve saçılma katsayıları, çoğu tıbbi uygulamada belirlenmesi gereken en önemli parametrelerdir [70, 75, 76].

2.2 Difüz Optik Tomografi İleri Yol Problemi

DOT'taki ileri problem, bir ışık kaynağı verilen ortamın Ω sınırındaki $\delta\Omega$ ölçümlerini g, sınırdaki f, ve tüm konumlar için $x \in \Omega$ için sırasıyla absorpsiyon ve saçılma katsayıları μ_a ve μ_s'yi belirlemektir. Bu değişkenler arasındaki Radyatif Taşıma Eşitliği (Radiative Transport Equation-RTE) kullanılarak tanımlanır:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I}{\partial t} + \hat{s}\ \nabla I + (\mu_a + \mu_s)I = \mu_s \int p(\hat{s}^{'}, \hat{s}) I(x, \hat{s}^{'})\ d\hat{s}^{'} \tag{2.1}$$

Burada ilgilenilen değişken olan $I(x, \hat{s}, t)$, x konumunda, t zamanında $\hat{s}$ yönünde spektral ışıma (birim hacim başına foton sayısı) olarak da bilinen özgül yoğunluktur.

RTE hesaplama yükü açısından pahalı olduğundan, genellikle bir yaklaşıklık kullanılır. En yaygın yaklaşım difüzyon yaklaşımıdır. Lazer kaynağının yüksek güçlü darbeli bir lazer olduğu DOT'un zaman alanı modunda, ileri problem foton difüzyon modeli kullanılarak ifade edilir.

$$-D\nabla^2\Phi(x,t) + \mu_a\Phi(r,t) - \frac{n}{c}\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t} = -S(x,t) \tag{2.2}$$

burada n ortamın kırılma indisi, c ışığın boşluktaki hızıdır. Φ foton yoğunluğu, S kaynağın gücü ve D difüzyon katsayısıdır, $D = 1/3(\mu_a + \mu_s^{'})$ olarak ifade edilir; burada μ_a absorpsiyon katsayısı ve $\mu_s^{'}$ azaltılmış saçılma katsayısıdır. Difüzyon modeli, $\mu_s^{'} >> \mu_a$ ve dedektör ile kaynağın birbirine çok yakın olmadığı varsayılarak, RTE'nin birinci dereceden bir yaklaşımdır [70, 77].

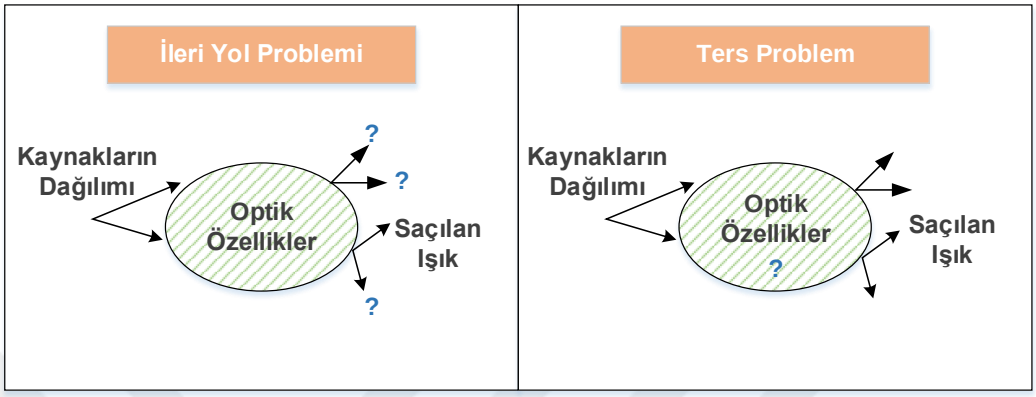
Şiddetin açısal bağımlılığının küresel harmoniklerde genişletildiği ve sadece birinci mertebeden terimlerin tutulduğu P_N yaklaşımı ile RTE'den elde edilir [77]. Difüzyon yaklaşımını çözmek için Rytov yaklaşımı ve Born yaklaşımı kullanılır.

Denklem (2.2)'deki yaklaşım, zamana bağlı durumda bir parabolik diferansiyel denklem ve frekans alanında bir eliptik diferansiyel denklemdir [9, 77].

Ancak Difüzyon yaklaşımı, hizalanmış ışık kaynakları ve sınırları yakınında başarısız olur ve düşük saçılımlı ve saçılımsız bölgelerde geçerli değildir.

RTE'nin stokastik bir çözücüsü olan Monte Carlo (MC) simülasyon yöntemi, ışık yayılımını modellemek için altın standart olarak bilinir ve taşıma teorisinde uzun bir soyağacına sahiptir. Monte Carlo (MC) simülasyonu, biyolojik dokuda ışık yayılımı da dahil olmak üzere çeşitli fiziksel problemleri çözmek için yaygın olarak kullanılan stokastik bir yöntemdir. Stokastik model, belirlenecek fiziksel niceliklere eşdeğer olan belirli rastgele değişkenlerin beklenen değerlerinden oluşturulur. Beklenen değerler, sunulan rastgele değişkenlerden çoklu bağımsız örneklerin ortalaması alınarak tahmin edilir [78]. MC simülasyonları fotonların doku boyunca yayılımını doğru bir şekilde tanımlamaktadır ve bu yaklaşım, difüzyon denklemine ve Işınım Transferi Denklemine dayalı ışık yayılım modelleri gibi diğer yaklaşımların doğrulanması için bir referans olarak da kullanılmaktadır. MC simülasyon yöntemi, isteğe bağlı olarak karmaşık geometrileri ve optik özelliklerin dağılımlarını modellemede esnektir [79]. Işık

yayılımını modellemenin MC yönteminde, radyasyon dağılımını elde etmek için bireysel foton paketlerinin yolları izlenir. Foton akışının saçılması ve absorpsiyonu, doku modelindeki lokal optik özelliklere dayalı olarak hesaplanır. Bu tez çalışmasında beyin dokuları 2D Monte Carlo (MC) simülasyonu ile modellendi



Şekil 2.2 İleri yol ve ters problem[80]

2.2.1 Ayrıklaştırma ve Ağırlık Matrsi Elde edilmesi

Bu çalışmada Rytov yaklaşımına göre A ağırlık matrisi oluşturulmaktadır.

Rytov yaklaşımına dayanarak, saçılan dalga $\phi_{pert}(r_{s_i}, r_{d_i}) = ln\left(\frac{\phi(r_{s_i}, r_{d_i})}{\phi_0(r_{s_i}, r_{d_i})}\right)$ olarak ifade edilebilir ve $b = Ax$ aşağıdaki gibi yazılabilir.

Burada, NV toplam voksel sayısını, i indeksi ise belirli bir SD çiftine ve j indeksi belirli bir voksele karşılık gelir.

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{NM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,NV} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{NM,1} & \cdots & A_{NM,NV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{NV} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Burada $y_i = ln\left(\frac{\phi(r_{s_i}, r_{d_i})}{\phi_0(r_{s_i}, r_{d_i})}\right)$, i th SD çiftinde ölçülen ışık yoğunluğundaki değişiklikleri ifade eder. $A_{i,j}$, i ölçümünün r_i voksel konumundaki duyarlılığıdır. $x_j = \mu_{a_{pert}}(r_j)$ voksel konumunda emilimdeki değişiklikleri ifade eder ve NM toplam ölçüm sayısıdır.

$$A_{i,j} = -\frac{vV_{vox}}{D} \frac{\bar{G}_{s_i}(r_j)\,\bar{G}_{d_i}(r_j)}{\bar{G}_{s_i d_i}} \tag{2.4}$$

Böylece A matrisini tanımlamış oluruz. Eşitlik (2.4)'te v_{vox} bir vokselin hacmini gösterir.

$$b = Ax \tag{2.5}$$

Burada x, emilim değişiklikleri vektörüdür. Bu, "ileri model" kafada bir dizi emilim değişikliği, x ve ışık yayılımı modelimizin toplamıdır: A, verildiğinde, ölçümlerimizde beklenen değişiklikleri b tahmin edebiliriz.

Normalde ağırlık matrisi olarak adlandırılan A, kaynakların ve dedektörlerin özel düzenlemesinin bir fonksiyonu olan ölçümler için uzamsal duyarlılık profilini tanımlar. Bir dizi b ölçümü verildiğinde, görüntüleme problemi ağırlık matrisinin tersinin hesaplanmasına indirgenir. Genel olarak, bu ters problem belirsizdir çünkü görüntüdeki voksel sayısı temel hacim ölçüm sayısından daha büyüktür, bu da x için benzersiz bir çözüm olmadığı anlamına gelir. Buna ek olarak, dağınık yayılımın doğası gereği, x emilimindeki küçük değişiklikler b ölçümlerinde büyük değişikliklere neden olacaktır, bu da A'in tersinin b'nin büyüklüğünü ve gürültüsünün (yani ölçüm gürültüsünün) büyüklüğünü artırma eğiliminde olacağı anlamına gelir. Sonuç olarak, ters çözüm kararsızlığa ve büyük sayısal hatalara eğilimli olacaktır.

2.2.2 Uygulama Parametrinin Tanımlanması ve Değerleri

Foton taşınımı, Difüz optik tomografi (DOT) cihaz enstrümantasyon konseptine dayalı olarak sürekli dalga (CW), zaman alanı (TR) ve frekans alanı (FD) olmak üzere üç farklı gruba ayrılır. Bu çalışmada sürekli dalga difüz optik tomografi (CWDOT) sistemi kullanılmıştır.

Difüz optik tomografi (DOT) esas olarak Şekil 2.2'de gösterilen iki problemin çözülmesini içerir. μ_a ve μ_s, dokunun absorpsiyonunu ve indirgenmiş saçılma katsayılarını temsil eder, ileri problem, doku içinde ışık taşınması için belirli model kullanarak, dokudaki optik özellikler (μ_a ve μ_s) için sınır değerlerinin (y) üretilmesini içerir. Ters problemin çözümü, sınır değerleri (y) verilen optik özelliklerin (μ_a ve μ_s) yeniden oluşturulmasını içerir.

DOT, deneysel düzenlemenin ölçümlerini tahmin etmek için foton yayılımını ve doku sınırındaki optik akıyı tanımlamak için teorik bir model kullanır ve buna ileri yol problemi denir. Dokuda foton taşınması, stokastik yaklaşımlara ya da Radyatif Transfer Eşitliğinden (RTE) türetilen yaklaşımlara dayalı olarak modellenebilir.

Radyatif Transfer Denkleminin (RTE), dokularda ışık yayılımını doğru bir şekilde modellemek için yaygın olarak kullanıldığı iyi bilinmektedir. RTE'nin ağır hesaplama maliyeti nedeniyle, RTE'nin birinci dereceden küresel harmonik yaklaşımının özel bir durumu olan difüzyon denklemi kullanılır. Bununla birlikte, difüzyon denklemi, düşük

saçılımlı ve saçılımsız bölgelerde geçerli değildir ve paralelleştirilmiş ışık kaynakları ve sınırların yakınında başarısız olur [81].

3D MC yüksek doğruluğa sahip olmasına rağmen, yüksek hesaplama süresine sahiptir. Bu nedenle bu çalışmada 2D MC ve öteleme algoritması kullanılarak doğruluğun yüksek, hesaplama süresinin düşük tutulması hedeflenmiştir.

2D MC simülasyonu sonrasında, Ref.[82] tarafından geliştirilen öteleme yöntemi kullanılarak ileri model ağırlık fonksiyonları oluşturulmuştur. Yöntem (2D–3D çeviri) enterpolasyona dayanmaktadır. Öteleme yönteminin kullanılmasının nedeni, ileri model ağırlık fonksiyonlarının, 3D MC simülasyon kodlarından daha hızlı üretilmesidir.

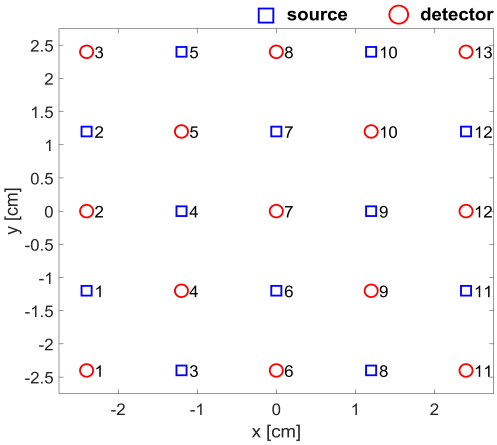
Her bir kaynak dedektörü arasında MC simülasyonunu çalıştırmak çok zaman alır, bu nedenle MC simülasyonu bir kez çalıştırılmış ve tüm kaynak dedektörleri arasındaki ışık yayılımı öteleme yöntemiyle hesaplanmıştır ve bu da zaman maliyetini azaltmıştır.

Tablo 2.1 İnsan kafasının optik özellikleri

Ortam	μa (cm-1)	μs' (cm-1)	g	Kırılma İndisi	Kalınlık (cm)
Saç	20.619	104.87	0.9	1.37	0.01
Epidermis	4.136	247.52	0.9	1.37	0.01
Dermis	0.022	138.25	0.9	1.37	0.1
Kafatası	0.009	185.64	0.9	1.43	0.5
CSF[83]	0.004	24.00	0.9	1.33	0.2
Gri madde	0.059	104.87	0.9	1.37	0.5
Beyaz madde	0.059	104.87	0.9	1.37	2.0

Anatomik insan kafa modeli, saç, dermis, epidermis, kafatası, BOS (Beyin Omurilik Sıvısı) [83], gri madde ve beyaz madde [84] olmak üzere yedi katmana ayrılmıştır. 800 nm dalga boyuna sahip ışık kaynağı için dokuların optik özellikleri hesaplanmış ve Tablo 2.1'de verilmiştir. Dokunun HGb oksijen doygunluğu, ortalama kan hacmi fraksiyonu, su içeriği, melanozom hacim fraksiyonundan oluştuğu kabul edilmektedir. Bir dokunun optik özellikleri, dokudaki emici kromoforlar ve dokudaki Rayleigh ve Mie saçılması dengesi ile belirlendi. Doku parametreleri, Ref [85]'de verilen değerler kullanılarak hesaplanmıştır.

Kullanılan geometri Şekil (2.3)'de verilmiştir. Her bir kaynak dedektörün arasındaki mesafe $0,6$ mm olarak belirlenmiştir.



Şekil 2.3 Kullanılan kaynak detektör geometrisi

2.3 Difüz Optik Tomografi Ters Problem

Görüntü yeniden oluşturma teknikleri, geometriyi ve optik özellikleri tanımlamak için kullanılan bir ileri model gerektirir. Önerilen bir yeniden yapılandırma yaklaşımıyla, ileri modeldeki optik özellikler Monte Carlo Simülasyonu gibi dokudaki ışık dağılım modelleri kullanılarak elde edilir. DOT'da, görüntü yeniden oluşturma işlemi ters problemin çözülmesi olarak bilinir, belirli bir ışık kaynağı seti için optik parametrelerin tahminini ve ölçümün sınırında tespit edilen ölçülen verileri içerir.

DOT görüntü kurtarma probleminin doğası gereği matematiksel/hesaplamalı bir bakış açısıyla çözülmesinin zor olduğunu baştan anlamak çok önemlidir. Bu zorluk, öncelikle, taşıma modelinin lineer olmaması, kötü konumlanmış (ill-posed) bir ters probleme yol açmasından ve tespit stratejilerinin yeterince belirlenemeyen bir probleme yol açmasından kaynaklanmaktadır.

Kötü konumlanmış bir problem, benzersiz bir çözümü olmayan veya giriş verilerinin küçük pertürbasyonları altında kararlı bir çözümü olmayan matematiksel bir problemdir. Ters problemler, görüntü restorasyonu ve makine öğrenimi de dahil olmak üzere çeşitli alanlarda sıkça karşılaşılan problemlerdir [27].

- **Doğrusal olmayan:** Optik özelliklerdeki doğrusal değişiklikler, algılanan sinyalde doğrusal değişiklikler vermez.
- **Kötü konumlanmış (ill-posed):** Sinyaldeki daha küçük değişiklikler, tahmin edilen optik özelliklerde büyük değişikliklere yol açar ve bu sorunu verilerdeki gürültüden dolayı büyük tahmin hatasına eğilimli hale getirir.
- **Yetersiz-belirlenmiş (ill-determined):** Kötü-belirlenmiş olarak da bilinir. Bağımsız denklemlerin sayısı, bilinmeyenlerin sayısından (optik özellikler) çok

daha azdır.

Bu özellikler, belirli bir algılanan sinyal için benzersiz bir çözümün (optik özellikler kümesi) olmadığı anlamına gelir [9]. Bu benzersiz olmama problemi, regülarizasyon olarak bilinen matematiksel yöntemleri kullanarak çözüm uzayını kısıtlama ihtiyacı ile sonuçlanır.

Problemi düzenli hale getirmek, ters cevirmenin iteratif model tabanlı bir lineer cebir problemi olarak formüle edilmesini gerektirir. Ayrıca, belirli bir optik özellik kümesi için doğrusal olmayan bir problemin çözülmesi, gerçek zamanlı olarak hesaplama yöntemleri üzerinde de kısıtlamalar getirir.

2.3.1 Kötü Konumlanmış (Ill-Posedness)

Tanım 2.1. Bir soruna iyi konumlanmış (well-posed) denir.

1. Çözümün varlığı: Her $y \epsilon \mathbb{Y}$ için $F(x) = y$ olan bir x çözümü vardır. (varlık);
2. Çözümün benzersizliği: Problemin en fazla bir çözümü vardır;
3. Süreklilik: Çözüm, verilerdeki değişikliklerle sürekli olarak değişir. Girişteki değişikler çıkışta da değişime neden olur;

Yukarıdaki tüm koşullar karşılandığında, problem iyi konumlanmış olarak sınıflandırılır. Diğer durumlarda problem kötü konumlanmıştır [86]. İyi kurgulanmayan bir probleme kötü konumlanmış (ill-posed) problem denir.

Kişi genellikle çözümün varlığı ile çok fazla ilgilenmez. Veri uzayı çözümler kümesi olarak tanımlanırsa, çözümün varlığı açıktır. Aksi takdirde, çözüm kavramı biraz değişebilir. Ancak sistemin benzersiz tek çözününün olması doğrulanamazsa, bu durum daha ciddidir. Birkaç çözüm varsa, hangisinin ilgi çekici olduğuna ya da daha fazla ek bilgi sağladığına karar vermek gerekir.

Bununla birlikte, tek bir çözüme sahip olma sorunu genellikle ters problemlerle ilgilidir. Varlık ve teklik problemlerini çözmenin standart bir yolu, genelleştirilmiş ters problemlere başvurmaktır.

Bununla birlikte, diğer önemli bir konu genellikle kararlılıktır. Gerçekten de, A^{-1} 'in var olduğunu ancak sınırlı olmadığını varsayalım. g'nin gürültülü bir versiyonu g_ϵ olarak verildiğinde, $f_\epsilon = A^{-1} g_\epsilon$ yeniden yapılandırması gerçek f'den uzak olabilir. Bu nedenle, A operatörünü daha kararlı bir şekilde tersine çevirmek gerekir. Bu nedenle,

ill-posed problemlerde, iyi yeniden yapılandırmalar elde etmek için, regülarizasyon yöntemleri geliştirilmelidir.

Yaklaşık yüz yıl önce, genel olarak, doğal problemlerin çözümünün her zaman sürekli olarak verilere bağlı olacağına inanılıyordu. Aksi takdirde matematiksel modelin yetersiz olduğuna inanılıyordu. Bu nedenle bu sorunlara kötü konumlanmış denildi.

Buradaki fikir, sorunun gerçekten iyi ortaya konmadığı ve böyle bir sorunu çözme şansının olmadığıydı. Kötü tasarlanmış problemler genellikle az ya da çok çözülemez problemler olarak kabul edildi.

Sadece altmış yıl önce bilim adamları, bilimde ortaya çıkan çok sayıda sorunun herhangi bir makul çerçevede ill-posed olduğunu fark ettiler. Bu da, doğru regülarizasyon yöntemlerini elde etmek için birçok araştırma başlattı [87].

2.3.2 Uygulama Parametrinin Tanımlanması ve Değerleri

Ters bir problem, bir model kullanarakilgili çıktıdan bir girdiyi yeniden oluşturma işelmidir. Matematiksel modeller, aşağıdaki gibi doğrusal bir denklem sistemi olarak ifade edilebilir.

$$Ax = b + \epsilon \tag{2.6}$$

Bu sistemde, $A \in R^{mn\ x\ N_{xyz}}$ matrisi $mn \geq N_{xyz}$ ile modeli tanımlar. Giriş $x = (x_1, x_1, \ldots x_{N_{xyz}})^T \in R^{mn}$ tahmin edilecek değişkendir ve çıktı $b \in R^{mn}$ vektöründe gösterilir. $\epsilon \in R^{mn}$ bilinmeyen bir gürültü vektörüdür. Görüntüleme cihazı farklı gürültü türleri tarafından bozulur. Paralel Manyetik Rezonans Görüntülemede (pMRI) görüntü yeniden yapılandırma, sıfır ortalamalı Gauss katkılı gürültü ile, Pozitron Emisyon Tomografisi (PET) veya konfokal mikroskopide Poisson gürültüsü ve Sentez Açıklıklı Radar (Synthetic-Aperture Radar-SAR) uygulamalarında Gamma dağılımlı gürültü gibi gürültü modelleri ile bozulur [88].

Eğer $mn \ll N_{xyz}$ ise yukarıdaki doğrusal sistem ciddi şekilde kötü koşulludur ve sonsuz sayıda çözüme sahip olabilir. Optimizasyon problemi, x seyrek bir yapıya sahip olacak şekilde b bilgisinden x bilgisini elde etmektir. Bu modelle ilişkili ters problem, bazı b çıktıları ve bilinen model göz önüne alındığında x girdisini hesaplar. A, her ölçümdeki her vokselin değerlerini içeren ağırlık matrisini temsil eder. m ve n sırasıyla kaynak dedektör sayısını gösterir.

Beynin çeşitli bölgelerindeki oksijenlenmiş hemoglobin (HbO) ve deoksijenlenmiş hemoglobin (Hb) konsantrasyonuna bağlı metabolik değişikliklerle ilgili bilgileri

çıkarmak için ışık yayılımı ileri modeli kullanılmıştır. Bu çalışmada insan beyninin herhangi bir bölgesinde kanama olup olmadığı incelenmiştir. Bu amaçla 800 nm dalga boyunda sağlıklı kabul edilen referans değer ve kanamanın olduğu bölge pertürbasyon vektörünü hesaplamak için kullanılmıştır.

Ölçüm vektörü (pertürbasyon vektörü), her farklı kaynak-dedektör çiftinden ölçülen bağıl ışık yoğunluğu değişikliklerinin vektörüdür ve Denklem (2.7) kullanılarak bulunabilir.

$$b = -ln(\phi/\phi_0) \tag{2.7}$$

ϕ_0 anomalisi olmayan kafadan alınan ölçümü gösterirken, ϕ anomali içeren kafadan alınan ölçümü göstermektedir [82, 89].

$$x(\Delta_{\mu a}) = \mu_a^{perturbation} - \mu_a^{background} \tag{2.8}$$

"x"$(\Delta_{\mu a})$, uzamsal alanda emilim özelliklerinin değişimiyle ilgili olan ve piksellere ayrıştırılan vektördür. Ters problem Eşitlik (2.6)'ün çözülmesi olarak formüle edilir ve denklemde "x"$(\Delta_{\mu a})$ bilinmemektedir ve düzenlileştirme işlemi sırasında "x"$(\Delta_{\mu a})$ bulunması amaçlanmaktadır. Elde edilen "x"$(\Delta_{\mu a})$ değerleri kullanılarak beyin dokusu görüntüsü yeniden yapılandırılır. Yeniden yapılandırma işleminde örgü ızgara görüntü yeniden yapılandırması kullanılmıştır. Görüntü rekonstrüksiyonu mesh grid koordinatları (x,y,z) = (5 cm, 5 cm, 3 cm), $N_{xyz} = 9 \times 9 \times 10 = 810$ dur.

Ters problemin ileri yol probleminden elde edilen ağılık matrisi boyutu ile Eşitlik (2.9)'da verilmiştir. Matris boyutu geliştirilen regülarizasyon yönteminde açıklanacak ve değiştirilecektir.

$$\begin{bmatrix} A_{(1,1),1} & \cdots & A_{(1,1),N_{xyz}} \\ A_{(m,1),1} & \ddots & A_{(m,1),N_{xyz}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{(m,n),1} & \cdots & A_{(m,n),N_{xyz}} \end{bmatrix}_{mn \times N_{xyz}} * \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N_{xyz}} \end{bmatrix}_{N_{xyz} \times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{mn} \end{bmatrix}_{mn \times 1} \tag{2.9}$$

b'nin boyutu genellikle x'in boyutundan çok daha küçük olduğundan ve bu da A ağırlık

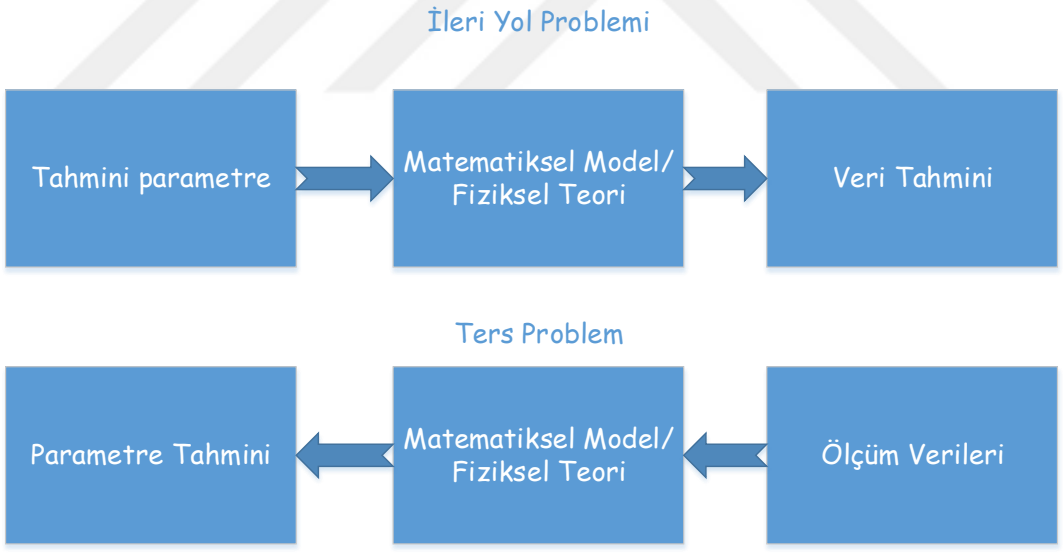
matrisini kare olmayan bir matris haline getirdiğinden, ters problem doğrudan ağırlık matrisinin tersi alınarak çözülemez.

Ters problemi çözme yöntemleri kabaca dört sınıfa ayrılabilir: cebirsel yöntemler, stokastik örnekleme yöntemleri, konveks ve sezgisel yaklaşımlar. Cebirsel yöntemler problemin cebirsel yapısından yararlanırken, stokastik örnekleme yöntemleri tipik olarak bir olasılık yoğunluk fonksiyonu oluşturur ve bir çözüm bulmak için Markov Zinciri, Monte Carlo tipi yöntemler kullanır [90]. Konveks yöntemleri, kısıtlamanın dışbükey veya dışbükey olmayan bir şekilde yaklaşına dayanır. Bu, mevcut varyasyonel formülasyonların ve iteratif algoritmaların doğal bir uzantısına izin verir. Bu yaklaşımlar genellikle verimli bir şekilde uygulanabilir ve büyük ölçekli problemlere uygulanabilirken, doğru ayrık çözüme yakınsamalarını sağlamak zor olabilir. Son olarak sezgisel algoritmalar optimizasyon ve iteratif yöntemlerden gelen fikirleri birleştirir. Bu tür yöntemler genellikle verimlidir ve pratikte iyi performans gösterdikleri bilinmektedir [55].

Bu çalışmada, DOT için yeni çoklu cezalandırılmış en küçük kareler modelini çözmek için konveks optimizasyon yöntemi kullanılmıştır.

3
TERS PROBLEM VE REGÜLARİZASYON YÖNTEMLERİ

Ters problem, kaynağı türetme veya bir dizi gözlem kullanarak kaynağı yeniden oluşturma yöntemi olarak tanımlanır. Diğer bir deyişle, yeniden oluşturmak istediğimiz bir nesnenin dolaylı gözlemlerine sahip olduğumuz ve bu gözlemlerden nesneyi oluşturmak istediğimiz problemlerdir. Çok farklı alanlardan gelen tüm bu sorunların ortak yapısı, yalnızca dolaylı gözlemlere erişimimiz olmasıdır. Dolaylı doğası nedeniyle, ters bir problemi çözmek genellikle oldukça zordur [87]. Şekil 3.1'de ileri problemin ters problemden nasıl ayrıldığı gösterilmektedir.



Şekil 3.1 İleri yol problemi ve ters problem arasındaki farkın blok gösterimi

Ters problem, sistem tanımlama, optik, radar, akustik, iletişim teorisi, sinyal işleme, tıbbi görüntüleme, bilgisayarla görme [91], jeofizik, astronomi (Hubble uydusunun bulanık görüntüleri), uzaktan algılama, doğal dil işleme, makine öğrenimi[92], stabilite analizi gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmektedir.

- **İnsan görüşü:** Işık bir elektromanyetik dalgadır. Beynimiz, gözümüzün retina tabakasından aldığı nesnelerin yansımasının 3 boyutlu görüntüsünü oluşturur. Dolayısıyla gördüğümüz her şey sadece beynimiz tarafından oluşturulmuş bir görüntüdür. Bu nedenle, beynimizin çoğu, nesnenin görüntüsünü veya ters haritasını işlemeye adanmıştır.
- **Sismik görüntüleme:** Bu teknik öncelikle okyanusun altındaki petrol aramalarında kullanılır. Yine ters modelleme yoluyla yapılan yansıyan sinyalleri kullanarak sinyal göndererek ve deniz yatağındaki farklı malzeme türlerini tanımlayarak çalışır.
- **Küresel sismoloji:** Ters modelleme kullanılarak sismik dalgaların seyahat süresinin ölçülerek Yer'in iç yapısının belirlenmesi işlemidir.
- **Tıbbi görüntüleme:** X ışınlarının zayıflamasını kullanarak dokunun yoğunluğunu belirlemek için kullanılır, dolayısıyla ters modelleme kullanılır. Örneğin, yoğunluğuna göre bir tümörü tanımlamak için kullanılır.

Ters problem çözümü yukarıda kısaca anlatılan birçok araştırma alanında kullanılmaktadır. Bilgisayar bilimi ve mühendisliğinde çözülen temel problemlerden biridir, çünkü ters problemin çözümleri, doğrudan ölçülemeyen parametreleri belirlememize yardımcı olur. İleri yol problemin çözülmesi, verilerin tamamlanmadığı bilimdeki çoğu deneyde tipik olan ters probleme kıyasla nispeten daha kolaydır. Verileri doğru bir şekilde ölçülememesi sonucu veriler kaybolur ve bu sorunun çözümü ise yaklaşımlar ve regülarizasyon yöntemleridir.

Daha genel bir olarak, incelenmekte olan fiziksel bir sistem varsayalım. Tarantola [93] bu sistemleri üç bölüme ayırmıştır.

- *Sistemin parametrizasyonu*, sistemi tamamen karakterize edebilen ve x olarak gösterilen minimal bir model parametreleri kümesinin keşfedilmesiyle ilgilidir.
- *İleri modelleme*, $x \epsilon X$ model parametrelerinin verilen değerleri için, bazı ikincil gözlemlenebilir niceliklerin $B \epsilon B$ değerleri hakkında tahminler yapılmasını sağlayan fiziksel yasaların keşfedilmesiyle ilgilidir. x ve b arasındaki fiziksel ilişki, A sağlayan bir operatör biçiminde tek yönlü eşleşme gerçekleştirilir.

$$A : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{B} \tag{3.1}$$

- *Ters problem*, bir ters problem, gözlem verileri mevcut olduğunda model parametrelerinin değerlerinin belirlenmesini ifade eder. Esasen amaç, Y ile X arasında bir ilişki kurmaktır.

$$A^{-1} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{X} \tag{3.2}$$

Ters problemlerin ortaya çıkmasının nedeni x'i dolaylı olarak b'den çıkarma ihtiyacı, ya da x'in doğrudan ölçüme tabi tutulamamasından kaynaklanmaktadır. Sistemdeki fiziksel kısıtlamalar bunun başlıca sebebidir. Gözlemlerden x'in sayısal olarak tahminini elde etmek zordur. Bunun çok sayıda nedeni vardır: i) Bunlardan ilki yetersiz miktarda yararlı veriye sahip olunması, yüksek gürültü seviyeleri ya da sınırlı sayıda veri toplama nedeniyle ii) fiziksel sürecin kendisinin karmaşıklığı, iii) veri toplama süreçlerinin doğal hassasiyeti kendilerine uygulanan sayısal manipülasyona duyarlıdır. Sürekli bir probleme yaklaştırılmaya çalışılırken kullanılan ayrıklaştırma işleminin bir sonucu bu hasssiyet oluşabilir [86, 94, 95].

Kötü kunumlanmanın etkilerini hafifletmek, özel işlem ve gelişmiş sayısal yöntemlerin kullanılmasını gerektirir. Kötü konumlanmışlığı düzeltmek için özel olarak tasarlanmış yöntemler genellikle regülarizsyon yöntemleri olarak adlandırılır.

3.1 Lineer Durum

Bir önceki bölümdeki fiziksel sistem tanımını göz önünde bulundurarak, $x = x_1, x_2, ..., x_N{}^T$ $x \in \mathbb{X}$ olsun. Ters probleme odaklanıldığında, $\mathbb{X}$ daha sonra parametre uzayı veya çözüm uzayı olarak adlandırılır. Benzer şekilde $b = b_1, b_2, ..., b_M{}^T$ $b \in \mathbb{B}$ gözlemlenebilir büyüklükleri göstermek üzere veri uzayı olarak bilinir.

A matrisi, $A \in R^{MxN}$, M $\times$ N şeklinde oluşturulmuş doğrusal bir operatör olsun.

$$Ax = b \tag{3.3}$$

A gibi operatörlere ilişkin önemli tanımlar arasında aralık(range) ve boş uzay (null spaces) yer alır. A'nin aralığı R(A),

$$R(A) = b \in \mathbb{B} | b = Ax, \forall x \epsilon \mathbb{X}, R(A) \subseteq \mathbb{B} \tag{3.4}$$

boş uzayı,

$$Null(A) = x \in \mathbb{X} | Ax = 0, Null(A) \subseteq \mathbb{X} \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanır.

A'nın r rankı diğer bir önemli koşuldur. Bir A matrisin satırlarını birer vektör olarak ele aldığımızda, bu vektörler bir vektör uzayı oluştururlar (gererler). Bu vektör uzayına

A matrisinin satır uzayı denir. Benzer bir şekilde A matrisinin sütunlarının germiş olduğu uzaya da A'nın sütun uzayı deriz. Bir matrisin rankı, sütunları (veya satırları) tarafından yayılan uzayın boyutunun bir ölçüsüdür, bir matristeki lineer bağımsız satır ve lineer bağımsız sütun sayısına eşittir.

$m > n$ olmak üzere $m \times n$ tipindeki bir A matrisinin rankı en fazla n olabilir ve bu durumda A matrisine full rank (tam rank) matris denir. Aksi halde A matrisi eksik ranklı bir matristir.

Kare bir matris full rank ise, matris tersinir bir matristir ve determinantı sıfırdan farklıdır. Rank hesaplamanın yollarından biri $m > n$ olmak üzere $n \times n$ tipindeki alt matrislerden başlayarak determinantı sıfırdan farklı alt matrisler aramaktır. Diyelim ki $n \times n$ tipindeki tüm alt matrislerin determinantı sıfır, sonraki adımda $(n-1) \times (n-1)$ tipindeki alt matrislerin determinantları incelenir. Determinantı sıfırdan farklı en büyük boyutlu kare matris bize rankın ne olduğunu söyler. Bir diğer yöntem ise elementer satır işlemlerine dayanır, bu yöntemde matris satır işlemleriyle satırca eşelon forma getirilir, satırca eşelon formda sıfırdan farklı satır sayısı matrisin rankını verir[96].

Düşük ranklı bir matrisin tersi olmayabilir. Genel olarak, bir kare matrisin ancak ve ancak rankı satır veya sütun sayısına eşitse (yani, tam ranklı bir matris ise) bir tersi vardır. Rank eksikliği olan bir matris, benzersiz bir çözümü olmayan bir matristir ve bir tersi yoktur. Bunun arkasındaki sezgi, düşük ranklı bir matrisin daha az sayıda doğrusal olarak bağımsız sütunların / satırların doğrusal bir kombinasyonu olarak yazılabilmesidir.

Rank bir A matrisindeki doğrusal olarak bağımsız satırların ya da sutunların sayısını gösterir [97].

A' daki doğrusal olarak bağımlı satırların sayısı boş uzayın boyutunu vermektedir. Nullity teoremine $dim(Null(F)) = M - r$ ifeadesi ile bulunur [97].

Ayrıca sol-boş uzayını $Null(A^T)$ ve $R(A^T)$ satır uzayını tanımlar. Bu uzaylar için şu geçerlidir.

$$R(A) = Null(A^T)^{\perp} \tag{3.6}$$

$$R(F)^T = Null(A)^{\perp} \tag{3.7}$$

Burada $\perp$ sembolü ortagonal bileşeni temsil eder [95]

3.1.1 Tekil Değer Ayrışımı

Tekil değer ayrışımı (SVD), $Ax = b$'yi x'e göre çözme girişimi sırasında potansiyel sorunlara ilişkin bilgi sağlayan güçlü bir çarpanlara ayırma yöntemidir. Buna ek olarak A^{-1} varsa veya başka herhangi bir durumda en iyi hesaplama çözümünü sağlayabilir. Tekil değer ayrışımında, A matrisi üç matrisin çarpımı olarak ifade edilebilir:

$$U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^{N} u_i \lambda_i v_i^T \tag{3.8}$$

Yukarıdaki eşitlikte $\Sigma \in \mathbb{R}^{MxN}$ diyagonal matrisi göstermektedir.

Burada Σ 'nin diyagonal girişleri λ_i'ler tekil değerler olarak adlandırılmaktadır ve Σ'nin köşegen değerlerindeki sıfır olmayan girişlerin sayısı rank r değerini vermektedir.

En büyük ve en küçük tekil değer arasındaki oran A matrisinin durum sayısını belirlemektedir ve A'nin sayısal manipülasyona duyarlılığının bir göstergesidir.

$$cond(A) = \frac{\lambda_i}{\lambda_r} \tag{3.9}$$

Hem çözümün olmasını hem de tekliğini sağlayabilmesi için kare bir matris olması A^{-1}'in var olması için gerekli bir koşuldur. Çoğu ters problemde A, $M \neq N$ ile dikdörtgen şeklindedir, dolayısıyla iyi pozlanmışlığın ilk iki önermesi hemen ihlal edilir. Daha spesifik olarak açıklarsak, az belirlenmiş *(under-determined)* durumda $(N > M)$ sonsuz çözüm vardır $(Null(A) \neq \phi)$ ve ϕ boş kümeyi ifade eder.

Değişkenlerden daha fazla denklem olduğunda $(N < M)$, probleme bir çözüm bulmak zordur. Aslında, değişkenler için küçük bir olası değerler kümesi dışında hiçbir çözüm olmayabilir. Bu küme, özellikle değişkenler belirli bir matrisin sütunlarının kombinasyonları olarak ifade ediliyorsa, genellikle çok sınırlıdır [97].

Değişken ve denklem sayısı eşitse $M = N$, rank değeri değişken ve denklem sayısının minimumundan küçükse olduğunda $r < min(M,N)$, problemin yine de sonsuz sayıda çözümü olabilir. $M \neq N$ olmasını A matrisinin boyutlarına bakarak belirleyebiliriz. Rank değeri satır veya sutun sayısının minimum değerinden küçük ise $r < min(M,N)$ olduğunda çözüm için tekil değer ayrışımı kullanabiliriz. Her durumda da, ilk iki önerme ile ters problem arasındaki ilişkiyi göz önünde bulundurmamız gerekir. Bu durumda tekil değer ayrışımı en uygun bir çözümü verebilir. Ayrıca SVD, Hadamard'ın üçüncü koşulunun ihlal edildiği durumları belirlememize de yardımcı olabilir. Bu durumları üç başlık altunda incelersek:

1. Problemin rankı satır veya sutun sayısından küçük ise $r < min(N,M)$ bu problem rank eksiktir (rank-deficient).

2. Mümkün olan maksimum $rank = min(M,N)$ durumunu varsayalım. Σ_r'nın diyagonal değerleri iki veri kümesi için sırasıyla $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ ve $(\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots, \lambda_r)$ olduğu ve ikinci kümenin tekil değerlerinin sıfıra eğilimli olduğunu varsayılım. O zaman problemin $r-k$ satır ve sutunları neredeyse bağımlı olduğunda, k sayısal rank ile sayısal rank eksik olduğu bilinmektedir. sütunları neredeyse doğrusal olarak bağımlıdır. $r-k$ denklemleri A'nın sayısal boş uzayını oluşturur.

3. Σ_r'deki tekil değerler, aşağıdaki gibi belirgin bir boşluk olmaksızın ikinci durumda gösterildiği gibi kademeli olarak neredeyse sıfıra düşer. Sıfıra yakın neredeyse sıfır olan tekil değerler problemin kötü pozlanmış olmasına neden olur.

Aşağıdaki bölümler, ana hatlarıyla belirtilen sorunlu vakalara yaklaşmak için en popüler yöntemleri özetlemektedir ve ayrıca sezgisel bir yorumlama sağlar.

3.1.2 Doğrusal En Küçük Kareler

b vektörü A'nın kodomeninde bulunamadığında veya x için birden fazla olası çözüm olduğunda, En Küçük Kareler (Least Square-LS) yöntemi kullanılır. Bu yöntem, $x^\star$ gerçek çözümüne en yakın olası $\hat{x}_{LS}$ çözümünü bulmayı amaçlar.

3.1.2.1 Çoğunlukla tek bir çözüm varsa

$r = N \leq M$ (tam sutun raklı) doğrusal olarak bağımlı sütunlar olmadığından $Null(A) = (\phi)$ olduğunda $Ax = b$ sisteminin en fazla bir çözümü vardır.

Gerçek dünya senaryosunda, ölçülen b'nin bir miktar rastgele gürültü içermesi muhtemeldir. Bu gürültü A'nın b değerine ulaşmasını imkansız hale getirebilir ya da başka bir deyişle b A'nın aralığında $y \notin R(A)$ ait olmayabilir.

Bu durumda Eşitlik (3.3)'ün kesin bir çözümü yoktur. Dolayısıyla çözümün varlığına ilişkin Hadamard'ın iyi pozlanmışlık varsayımının ihlali anlamına gelmektedir. Ancak, verilen probleme "pratik" $\hat{x}$ bir çözüm tahmini ihtiyacı için hala mevcuttur.

Bunun gibi durumlarda temel amaç, A aralığında yer alan ve gerçek ölçümlere b mümkün olduğunca yaklaşan uygun bir $\hat{x}_{LS} \in R(A)$ tahmini bulmaktır. Bu yakınlık, veri tutarsızlık fonksiyonu veya veri uyum terimi olarak adlandırılan ve $D(\hat{x})$ ile

gösterilen bir benzerlik metriği ile ölçülür. En Küçük Kareler (LS) yönteminde, veri uyum terimini ifade etmek için Hilbert normu kullanılır.

$$D(x) = \| L_W(b - Ax) \|^2 \tag{3.10}$$

Bireysel $b \in B$ gözlemlerinin ilişkisiz olduğu varsayımı altında L_W, ölçümlere eşit derecede güvenilmediğinde, bireysel ölçümlere farklı ağırlıklar atamak için kullanılabilecek köşegen bir matristir. $L_W = I$ olduğunda, Eşitlik (3.10) standart en küçük kareler yöntemine olarak adlandırılmaktadır.

Eğer L_W'deki köşegen elemanları değişiyorsa, L_W'nin ağırlıklı ortalama uzaklığı $A\hat{x}_{LS}$, bazı bireysel ölçümlere $b \in B$ diğerlerinden daha yakın olabilir. $L_W \neq I$ için Eşitlik(3.10) ağırlıklı en küçük kareler fonksiyonu olarak bilinir.

Eşitlik (3.10)'ü sağlayan $\hat{x}_{LS}$ çözüm tahmininin elde edilmesi bir hata minimizasyonu problemi olarak formüle edilebilir.

$$\hat{x}_{LS} = \text{argmin}[\varepsilon(x) = \| L_W(b - Ax) \|^2] \tag{3.11}$$

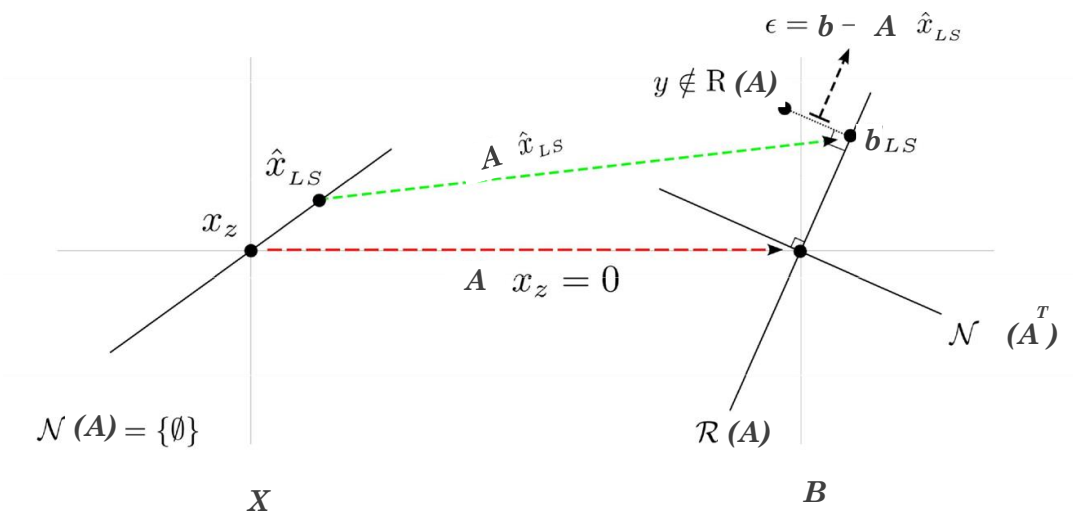
Bu durumda $\hat{x}_{LS}$ çözüm uzayında çok boyutlu bir havuzun dibinde yer almalıdır, dolayısıyla $\partial\varepsilon(\hat{x}_{LS})/\partial x = 0$ koşulunu sağlar. Bu nedenle, Eşitlik 3.11 genişletilir ve ilgili türevler sıfıra ayarlanır

$$\partial\varepsilon(\hat{x}_{LS})/\partial x = 0 \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[(b - A\hat{x}_{LS})^T W(b - A\hat{x}_{LS})] = 0 \tag{3.13}$$

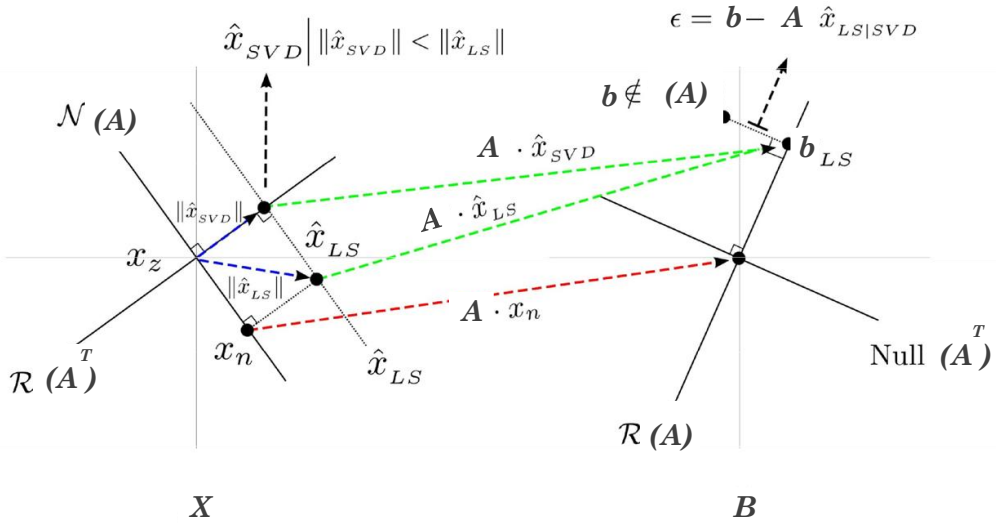
$$A^T W(b - A\hat{x}_{LS}) = 0 \tag{3.14}$$

Eşitlik (3.14)'e göre $W = L_W^T L_W$ olmaktadır. $\varepsilon = (b - A\hat{x}_{LS})$ en küçük karelerden elde edilen değer ile gerçek b arsındaki farkı göstermketedir. ε Eşitlik (3.14)'de 0'a ayarladığından, $\varepsilon \in Null(A^T)$ olur. $\varepsilon \perp R(A)$ gürültülü b $b \notin R(A)$ ile erişilebilir veri R(A) aralığı arasındaki en kısa mesafedir. Şekil 3.2'de, tartışılan senaryoda A'nın ve ilgili alanların davranışının şematik bir gösterimi verilmektedir. Burada W = I olduğunu varsayılmaktadır. En küçük kareler, A tarafından R(A) b'nin ortogonal izdüşümüne eşlenen bir $\hat{x}_{LS}$ hesaplar. A'daki tüm sütunlar doğrusal olarak bağımsız ($r = N$), $Null(A) = \phi$ olduğu için $\varepsilon \perp R(A)$ uzaklığı en azdır. Ayrıca $r < M$ ise $Null(A^T) \notin \phi$ olur.



Şekil 3.2 Tam sütun rankı $r = N \leq M$ olan doğrusal bir ileri operatörün ve verilerin ileri operatörün aralığı içinde olmaması $b \notin R(A)$ eylemi [95].

Şekil 3.2'de rankı $r = N \leq M$ olan bir ileri operatörün çözüm uzayında b'nin yer almadığı durum gösterilmektedir. Bu koşulda, hiçbir $x \notin X$ eşleşmesi olmadığından bir çözüm bulunmamaktadır. En küçük kareler, çözümün varlığını (ilk Hadamard postulatı) aşağıdaki sonuçları elde ederek ortaya koyar en iyi uzlaşma çözümü $\hat{x}_{LS}$ 'dir. Elde edilen $\hat{x}$, ölçülen $b_{LS} \notin R(A)$ 'dan en az uzak olan $b_{LS} \in R(A)$ ile eşleşir.



Şekil 3.3 Tam sütun rankı $r < N$ olan doğrusal bir ileri operatörün ve verilerin ileri operatörün aralığı içinde olmaması $b \notin R(A)$ eylemi [95].

Şekil 3.3'de rankı $r < N$ olan bir ileri operatörün çözüm uzayında b'nin yer almadığı

durum gösterilmektedir. Bu koşulda, hiçbir $x \notin X$ eşleşmesi olmadığından bir çözüm bulunmamaktadır. En küçük kareler, çözümün varlığını (ilk Hadamard postulatı) aşağıdaki sonuçları elde ederek ortaya koyar en iyi uzlaşma çözümü $\hat{x}_{LS}$ 'dir. Elde edilen $\hat{x}$, ölçülen $b_{LS} \notin R(A)$ dan en az uzak olan $b_{LS} \in R(A)$ ile eşleşir.

$r = N \neq M$ olduğunda, $A^T WA$ kare, simetrik ve ters çevrilebilirdir. Bazı yeniden düzenlemelerden sonra Eşitlik (3.14) LS çözüm tahminini verir.

$$\hat{x}_{LS} = (A^T WA)^{-1} A^T W b \tag{3.15}$$

Burada $A^{\dagger} = (A^T WA)^{-1} A^T W$, orijinal olarak aşağıdakiler için tanımlanan ağırlıklı Moore-Penrose sözde tersidir $W = I$ [98].

Ortogonalite, çözümün tekliğini ve kararlılığını etkileyebileceğinden, ters problemleri çözmek için en küçük kareler yönteminde önemli bir kavramdır [95].

Katsayı matrisinin (A) sütunları ortogonal olduğunda, bir ters problemin en küçük kareler çözümü benzersiz ve iyi koşulludur. Bu, gözlemlerdeki küçük değişikliklerin çözümde küçük değişikliklere yol açacağı anlamına gelir. Bu "ortogonalite koşulu" olarak bilinir ve çözümün kararlılığını sağlar. Tek bir çözüm olması durumunda, A matrisi tam ranklıdır ve ortogonallik koşulu doğrusal olarak bağımsız sütunlara sahip olmakla aynıdır.

Öte yandan, katsayı matrisinin sütunları ortogonal olmadığında, bir ters problemin en küçük kareler çözümü benzersiz değildir ve gözlemlerdeki küçük değişikliklere duyarlıdır. Bu "kötü koşullu" bir problem olarak bilinir. Bu gibi durumlarda, A matrisi tam ranklı değildir ve doğrusal olarak bağımlı sütunlara sahiptir.

Ortogonallik, örneğin A katsayı matrisinin önemsiz olmayan bir boş uzayı (null space) olduğunda olduğu gibi, sonsuz çözümler durumunda da kullanılır. Bu durumda, y = Ax denklemini sağlayan sonsuz bir çözüm kümesi bulunabilir; burada x bilinmeyen çözüm, y ise gözlenen veridir. Çözüm uzayını A'nın boş uzayının ortogonal tamamlayıcısına yansıtarak, en küçük kareler anlamında gözlemlere en yakın olan benzersiz bir çözüm bulunabilir. Bu yöntem "Ortogonal Ayrıştırma Yöntemi" olarak bilinir [99, 100].

En küçük kareler yöntemi, gözlenen değerler ile tahmin edilen değerler arasındaki mesafeyi en aza indiren çözümü bulmayı amaçlar. Bu mesafe, uzaydaki iki nokta arasındaki "uzaklığın" bir ölçüsü olan Öklid normu kullanılarak ölçülür. Bu mesafeyi en aza indiren çözüm, tahmin edilen değerlerin tanımladığı doğru ile kesişme noktasında rezidü vektörüne dik olan doğru üzerinde yer alan çözümdür.

Katsayı matrisinin (A) doğrusal olarak bağımsız sütunlara ve tam ranka sahip olduğu durumda, rezidü vektörü A matrisinin sütun uzayına ortogonaldir. Bu, artık vektörün tahmin edilen değerler tarafından tanımlanan doğruya dik olduğu anlamına gelir. En küçük kareler çözümü, rezidü vektörün tahmin edilen değerler tarafından tanımlanan doğru ile kesiştiği noktadır.

A tam ranklı olmadığında ve doğrusal bağımlı sütunlara sahip olduğunda, rezidü vektör A matrisinin sütun uzayına ortogonal değildir. Bu durumda, rezidü vektör tahmin edilen değerler tarafından tanımlanan doğruya dik değildir ve en küçük kareler çözümü benzersiz değildir. Çözüm uzayını A'nın boş uzayının ortogonal tümleyenine yansıtarak, en küçük kareler anlamında gözlemlere en yakın olan benzersiz bir çözüm bulunabilir.

3.1.2.2 Sonsuz çözüm varsa

Yine Ax = b olsun, ancak $r < N$ olsun ve $Null(FA) \notin \phi$ olsun. Problem, yukarıda özetlenen doğrusal bağımlı sütunlar nedeniyle rank eksikliği olan durumdur. LS çözümü $\hat{x}_{LS}$ hala mevcut olsa da, artık benzersiz değildir. Bu durum, çözümün tekliğine ilişkin Hadamard iyi pozlanmışlık varsayımının ihlalini teşkil etmektedir. Aslında, y_{LS} ile eşleşen sonsuz $\hat{x}_{LS}$ vardır. Hadamard'ın ikinic koşulunu sağlamakiçin, SVD kullanılabilir. Tüm çözümlerden, $\hat{x}_{LS}$, $\| Ax - b \|^2$ minimize eder, SVD, en kısa $\| \hat{x} \|$ uzunluğuna sahip olan $\hat{x}_{SVD}$'yi benzersiz bir çözüm olarak seçer.

$$\hat{x}_{SVD} = \text{argmin}[\varepsilon(x) = \| L_W(b - Ax) \|^2] \tag{3.16}$$

Şekil 3.3'de bu durum için A'nın hareketini grafiksel olarak göstermektedir. $r < N$ olduğundan $Null(A) \neq \phi$ olur. Herhangi bir $x \in \mathbb{X}$ şimdi $x_r \in R(A)^T$ ve $x_n \in Null(A)$ olmak üzere birbirine ortogonal iki bileşene ayrılabilir. Etkili olarak $\| x \|^2 = \| x_r \|^2 + \| x_n \|^2$. Her $b \in \mathbb{B}$ tek bir x_r'den gelir [97]. Sonsuz çözümler $\hat{x}_{LS}$, bu x_r ve sonsuz x_n'den oluşur. Şematikte, x_r bileşeni b_{LS} ile eşleşen çözümler $\hat{x}_{SVD}$ olarak gösterilir ve aslında SVD çözümüdür. Sonsuz çözümler kümesi, $Null(A)$ 'ya paralel uzanan ve $\hat{x}SVD$ 'den geçen, $\hat{x}LS$ olarak bilinen bir doğru oluşturur.

Projelendirilen tüm çözümlerden $\hat{x}_{LS}$, $\hat{x}_{SVD}$ ise $\| \hat{x}_{SVD} \| < \| \hat{x}_{LS} \| \; \forall \hat{x}_{LS}$ olarak en kısa olanıdır. Gerçekte, $\hat{x}_{SVD}$ boş bileşeni sıfırlayarak seçilmiştir $\| x_n \| = 0$. LS pseudo-inverse'i $A^{\dagger}$ bu nedenle tanımlı değildir ve $\hat{x}_{SVD}$ Eşitlik (3.15) ile elde edilemez. Neyse ki en kısa uzunlukta bir LS çözüm vektörü tarafından verilen SVD, pseudo-inverse'i $A^{\dagger}$ kullanılarak hesaplanabilir.

$$A^{\dagger} = V\Sigma^{+}U^{T} \tag{3.17}$$

Burada Σ^{+} N $\times$ M matrisi, Σ'nin köşegenindeki sıfır olmayan tüm girdilerin onların resiprokları ile değiştirilmesiyle oluşturulur.

Eşitlik (3.8) dikkate alındığında, SVD sözde tersi (pseudo-inverse) kullanılarak çözüm tahmini şu şekilde verilir [97].

$$\hat{x}_{SVD} = A^{\dagger}b \tag{3.18}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{{u_i}^T y}{\lambda_i} v_i \tag{3.19}$$

Yukarıdakiler sadece r doğrusal bağımsız denklem için $\| (b - Ax) \|^2$'yi minimize eder.

$$U_{(M-r)\times N}\Sigma_{(M-r)\times N}(V_{(M-r)\times N})^T \cdot \hat{x}_{SVD} = y_{(M-r)\times N} \tag{3.20}$$

$$0_{(M-r)\times N} \cdot \hat{x}_{SVD} = y_{(M-r)\times N} \tag{3.21}$$

$\Sigma_{(M-r)\times N}$ Σ alt matrisindeki 0 popülasyonu nedeniyle geri kalanlar için hiçbir şey yapılmaz. Sonsuz sayıdaki LS çözümlerinden $\hat{x}_{LS}$ herhangi biri $M - r$ denklemlerini sağlar. Kısaca SVD çözümü $\hat{x}_{SVD}$ bu çözümler arasından tek ve en kısa uzunluklu LS çözümüdür [95].

Ortogonallik, en küçük kareler anlamında gözlemlere en yakın olan benzersiz çözümü bulmak için kullanılabilir. Bu, çözüm uzayını A'nın boş uzayının ortogonal tamamlayıcısına yansıtarak yapılır. A'nın boş uzayının ortogonal tamamlayıcısı, A'nın boş uzayındaki tüm vektörlere ortogonal olan tüm vektörlerin kümesidir. Çözüm uzayını bu ortogonal tamamlayıcıya yansıtarak, çözüm uzayını yalnızca A'nın boş uzayına ortogonal olan çözümleri içerecek şekilde sınırlandırılır.

En küçük kareler çözümü daha sonra bu kısıtlı çözüm uzayında gözlenen değerler ile tahmin edilen değerler arasındaki mesafeyi en aza indirerek bulunur. Bu mesafeyi en aza indiren çözüm, en küçük kareler anlamında gözlemlere en yakın olan çözümdür ve aynı zamanda tek çözümdür [101–103]

Rank eksik ters problemi Moore-Penrose pseudoinverse (MPP) veya tekil değer ayrıştırması (SVD) kullanılarak çözülebilir, ancak ek adımlar gerektirir. MPP ve

SVD, rank-eksik ters problemlere yaklaşık çözümler bulmak için kullanılabilen matris ayrıştırma yöntemleridir, ancak ek adımlar atılmadıkça benzersiz bir çözümü garanti etmezler.

Moore-Penrose pseudoinverse (MPP), matris tersinin bir genellemesidir ve rank eksikliği olan bir ters problemine benzersiz bir çözüm bulmak için kullanılabilir. MPP, tersi alınan matrisin tekil değer ayrışımı (SVD) kullanılarak hesaplanabilir. Ancak, bu yöntem gürültüye karşı hassastır ve kararlı bir çözüm üretmek için en küçük kareler çözümüne bir düzenleme terimi eklenmesi gerekir.

Tekil Değer Ayrıştırması (SVD), bir matrisi üç matrisin çarpımına ayırmak için kullanılan bir yöntemdir: üniter matris, diyagonal matris ve üniter matrisin eşlenik transpozesi. SVD, en küçük tekil değerleri sıfıra ayarlayarak rank eksikliği olan bir ters problemin en küçük kareler çözümünü bulmak için kullanılabilir. Bununla birlikte, MPP yöntemi gibi SVD de gürültüye karşı hassastır ve kararlı bir çözüm üretmek için en küçük kareler çözümüne bir düzenleme terimi eklenmesi gerekir.

Hem MPP hem de SVD, rank eksikliği olan ters problemlere yaklaşık çözümler bulmak için kullanılabilir, ancak düzenleme gibi ek adımlar atılmadıkça benzersiz bir çözümü garanti etmezler [98, 104].

Tam ranklı problemler Moore-Penrose pseudoinverse gibi standart matris tersi alma teknikleri kullanılarak çözülebilir. Ancak rank eksikliği olan bir ters çevirme probleminde, ters çevrilen matris tam rank değildir, yani benzersiz bir çözümü yoktur. Bu tür problemler, benzersiz bir çözüm üretmek için düzenlileştirme tekniklerinin kullanılmasını gerektirir.

Eşitlik (3.8)'da, A matrisinin ters çevrilebilir olduğu tam ranklı ve aşırı tanımlanmış (over-determined) ters problemler için iyi çalışır. Bununla birlikte, rank eksik ters problemler için, A matrisi ters çevrilemez ve en küçük kareler yönteminin benzersiz bir çözümü yoktur ve ek ceza terimlerine ihtiyaç duyulur.

En küçük kareler yöntemi (Ordinary Least Square-OLS) ayrıca bir optimizasyon problemi olarak formüle edilebilir; burada amaç, gözlemlenen veriler ile modellenen veriler arasındaki artıkların karelerinin toplamını en aza indirmektir. Minimize edilecek amaç fonksiyonu, rezidülerin l2-normu ile verilir ve genellikle veri doğruluğuna kısıtlamalar veya ceza fonksiyonları eklenerek yapılır. Bu ek bilgi, "x" resmi ile ilgili ön bilgilere dayanmaktadır.

$$\tilde{x} = \underset{x \in R^m}{\operatorname{argmin}} \| Ax - b \|_2^2 \tag{3.22}$$

Burada $\|\cdot\|_2$ Öklid vektör normunu veya spektral matris normunu gösterir. OLS'nin genellikle hem tahminde hem de yorumlamada başarısız olduğu iyi bilinmektedir. OLS'yi iyileştirmek için ceza terimleri teknikleri önerilmiştir.

3.2 Aşırı Belirlenmiş (Over-determined) ve Az Belirlenmiş (Under-determined) Sistemler

Az belirlenmiş bir sistemde, bilinmeyenlerin sayısı ölçümlerin sayısından daha fazladır. Yani ileri modelden elde edilen ağırlık matrsindeki satır sayısı (bilinmeyenler), sutun sayısından (ölçümlerden) fazladır. Bu, ölçümlere uyan sonsuz sayıda çözüm olduğu anlamına gelir. İleri matrisin rankı bilinmeyen sayısından daha azdır. Bu durumda, benzersiz bir çözüm seçmek için çözümün yapısı veya fiziksel kısıtlamalar hakkında ön bilgi gibi ek bilgilere ihtiyaç duyulur.

Örneğin, Dağınık Optik Tomografide (DOT), ileri matris dokunun soğurma ve saçılma katsayılarını yüzeydeki ölçümlerle ilişkilendirir ve burada A matrisi eksik ranklı, özvektörleri sıfıra oldukça yakın yapıda olduğundan ters problem kötü konumlanmış yapıdadır.

Aşırı belirlenmiş bir ters problem durumunda, ölçüm sayısı bilinmeyen sayısından fazladır. Bu, bilinmeyenlerden daha fazla denklem olduğu ve sistemin aşırı belirlenmiş olduğu anlamına gelir.

Bununla birlikte, çözüm gürültüye veya ölçümlerdeki hatalara karşı hassas olabilir, bu nedenle çözümü stabilize etmek için düzenlileştirme yöntemleri kullanılır. En küçük kareler hatasına, çözümün pürüzsüzlük veya seyreklik gibi belirli özelliklerini destekleyen bir ceza terimi eklemek gibi ters problemi düzenlemenin farklı yolları vardır [9, 105]

3.3 Regresyon ile Regularizasyon İlişkisi

Regresyon, bir dizi veriye bir model uydurma yöntemidir. Regresyonun amacı, girdi ve çıktı değişkenleri arasındaki ilişkiyi tanımlayan en uygun modeli bulmaktır, öyle ki model gelecekteki gözlemler hakkında tahminler yapmak için kullanılabilir. Regresyon modelleri doğrusal veya doğrusal olmayan olabilir ve hem tam sıralı hem de sırası eksik problemler için kullanılabilir. En Küçük Kareler yöntemi doğrusal regresyon yöntemine bir örnektir.

Düzenli hale getirme (regülarizasyon), benzersiz ve istikrarlı bir çözüm üretmek için bir ters problemin çözümünü kısıtlama yöntemidir. Düzenli hale getirme,

ters problem kötü pozlanmış veya rank düşük olduğunda kullanılır ve çözüm hakkında ek bilgi (veya öncelik) sağlamak için kullanılır. Düzenlemenin amacı hem benzersiz hem de kararlı bir çözüm üretmektir. Düzenli hale getirme, bir ters probleme çözüm bulmak için regresyon ile birlikte kullanılabilir. Bazı popüler düzenlileştirme yöntemleri arasında Tikhonov düzenlileştirmesi, Toplam Varyasyon (TV) düzenlileştirmesi, L1-norm düzenlileştirmesi vb. yer alır.

Özetle, regresyon, tahminler yapmak için bir modeli bir dizi veriye uydurma yöntemiyken, düzenlileştirme, benzersiz ve istikrarlı bir çözüm üretmek için bir ters problemin çözümünü kısıtlama yöntemidir. Her iki yöntem de ters problemleri çözmek için birlikte kullanılabilir, ancak farklı hedefleri vardır ve farklı şekillerde kullanılırlar [86, 106, 107]

3.4 Regularizasyon Metotları ve Cezalandırıcı Katsayıları

Düzenli hale getirmedeki ceza terimi, belirli kriterleri karşılamayan çözümleri cezalandıran maliyet fonksiyonuna bir terim ekleyerek çözümün arandığı alanı kısıtlamak için kullanılır. Ceza teriminin amacı, düzgün veya küçük değerlere sahip çözümler gibi iyi davranışlı çözümleri teşvik ederken, büyük değerlere sahip veya düzgün olmayan çözümler gibi iyi davranışlı olmayan çözümleri ortadan kaldırmaktır.

Her biri kendine özgü ceza terimine sahip çeşitli düzenli hale getirme yöntemleri vardır. Bazı yaygın regülarizasyon türleri şunlardır:

Ridge Regresyonu olarak da bilinen l2 düzenlemesi, çözümün büyüklüğünün karesiyle orantılı bir ceza terimi ekler. Bu düzenleme türü, büyüklüğü küçük olan çözümleri teşvik etmek için kullanılır ve genellikle doğrusal regresyon problemlerinde aşırı uyumu önlemek için kullanılır.

l1 düzenlemesi, LASSO Regresyonu olarak da bilinir ve çözümün mutlak değeriyle orantılı bir ceza terimi ekler. Bu tür bir düzenlileştirme, seyrek ve sıfıra yakın birçok değere sahip çözümleri teşvik etmek için kullanılır.

l1 ve l2 normlarının doğrusal bir kombinasyonu olan bir ceza terimi ekleyerek hem l1 hem de l2 düzenlemesini birleştiren Elastik Ağ düzenlemesi. Bu tür bir düzenleme, çözümün seyrekliği ve küçük büyüklüğü arasındaki dengeyi sağlayabilir.

Toplam Varyasyon (TV) düzenlemesi, çözümün gradyanı ile orantılı bir ceza terimi ekler. Bu tür bir düzenleme, pürüzsüz çözümleri teşvik etmek için kullanılır ve genellikle görüntü işleme problemlerinde kullanılır.

Bu ceza terimlerinin eklenmesiyle, maliyet fonksiyonu sadece tahmin edilen ve gözlemlenen değerler arasındaki farka göre değil, aynı zamanda çözümün özelliklerine göre de minimize edilecek şekilde değiştirilir. Sonuç olarak, optimizasyon algoritması hem gözlemlerle tutarlı hem de istenen özelliklere (örneğin, pürüzsüzlük, seyreklik) sahip çözümleri aramaya yönlendirilecektir. Aşağıda bu yöntemler ayrıntılı olarak anlatılmakatdır.

3.4.1 LASSO

LASSO, Robert Tibshirani [108] tarafından geliştirilen ve hem düzenlileştirme hem de değişken seçimini içeren bir regresyon analizi yöntemidir. Amacı, ürettiği istatistiksel modelin tahmin doğruluğunu ve yorumlanabilirliğini artırmaktır.

Doğrusal regresyon ayarında, N tane örnekten oluşan (x_i, b_i), burada $(x_i = x_{i1}, x_{i2}...x_{im})^T$ m boyutlu bir tahmin vektörünü ve $(b_i \epsilon R)$ yanıt vektörünü gösterir. LASSO problemi $\lambda > 0$ Lagrange formunda Denklem (3.3)'teki gibi yazılabilir.

$$\tilde{x} = \underset{x \epsilon R^m}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2N} \parallel Ax - b \parallel_2^2 + \lambda \parallel x_1 \parallel \tag{3.23}$$

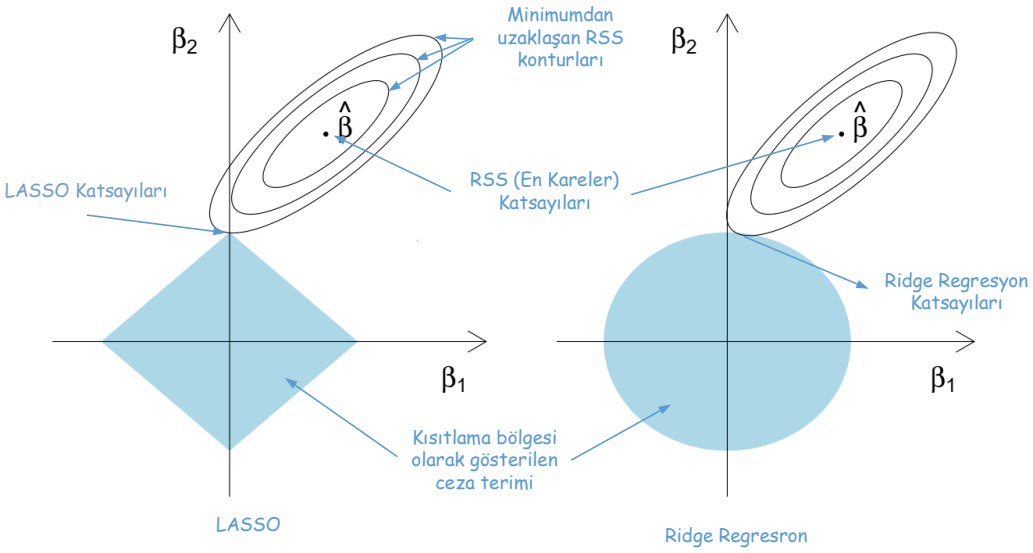
LASSO, katsayılarının Laplace ön dağılımlarına sahip olduğu doğrusal regresyon olarak yorumlanabilir. Laplace dağılımı, sıfırda keskin bir tepe noktası ve süreksiz olan birinci türev ile karakterize edilir. Ayrıca, normal dağılıma kıyasla, olasılık kütlesini de sıfıra yaklaştırır. Bu eğilim, LASSO'nun neden belirli katsayılara sıklıkla sıfır değeri atadığını açıklayabilir. Şekil 3.4, l1 norm ceza teriminin seyrekliği nasıl tetiklediğini gösterir.

LASSO problemi, konveks kısıtlamalı ikinci dereceden bir programdır. LASSO'yu çözmek için birçok ikinci dereceden program yöntemi vardır. Bununla birlikte, basit ve etkili bir hesaplama algoritması, her yineleme için yumuşak eşik uygularken koordinat inişidir [109].

Ayar parametresi λ, modelin karmaşıklığını kontrol eder. λ'nin küçük değerleri, daha fazla parametreyi uyarlamaya neden olur ve modelin eğitim verilerine daha iyi uymasını sağlar. Aksine, daha büyük λ parametreleri daha fazla kısıtlayarak, verilere daha az uyan daha seyrek, daha yorumlanabilir modellere yol açar.

3.4.2 Ridge Regresyon

Ridge Regresyon ilk defa 1962 yılında A. E. Hoerl tarafından tanımlanmıştır. Hoerl ve Kennard bu konudaki ilk makalelerinde "Ridge Regresyon: Ortogonal Olmayan



Şekil 3.4 LASSO ve Ridge regresyonunun iki boyutlu kontur grafiği. Düz mavi alanlar kısıtlama bölgesidir. β kısıtsız en küçük kareler tahmin edicisini gösterir

Problemler İçin Sapmalı Tahmin" başlığı altında, tam ranklı genel doğrusal hipotez modeline uyan çoklu regresyonda sapmasız tahminleme probleminin detaylı bir tartışmasını ortaya koymuşlardır [110].

Ridge regresyonun çözüm tekniği, basit en küçük kareler yöntemine benzer bir yöntemdir. Ridge regresyon yönteminde, regresyon katsayı tahminlerini hesaplamadan önce standart formdaki değişkenlerin oluşturdukları $(A^{'}A)$ matrisinin köşegen elemanlarına küçük ve pozitif bir sabitin eklenmesiyle gerçekleştirilir. Buna göre ridge regresyon çözümü,

$$\tilde{x} = (A^{'}A + \lambda I)^{-1}A^{'}b \tag{3.24}$$

şeklindedir. Açıklayıcı değişkenler korelasyon matrisinin köşegen elemanlarına pozitif sabitlerin eklenmesindeki amaç, matris şartlı sayısının önemli ölçüde küçültülmesidir. k=0 için ridge çözümü en küçük kareler çözümüne eşdeğer olduğundan ridge tahmini, en küçük kareler tahmininin bir doğrusal dönüşümü olarak da ifade edilebilir [111].

Ridge Regresyonu,"x" yakınsamasını elde etmek için en küçük kareler yontemine, bir ceza fonksiyonu olarak l2-norm kullanılarak düzenli hale getirilmesidir. Ridge Regresyonu Denk.(3.24)'da verilmektedir.

$$\tilde{x} = \underset{x \epsilon R^n}{\operatorname{argmin}} = \| Ax - b \|_2^2 + \lambda \| x \|_2^2 \tag{3.25}$$

Burada $\lambda \geq 0$ değeri, veri uyumu ve cezalandırma arasındaki dengeyi kontrol eden regülarizasyon parametresidir [112]. Ridge regresyonu, biri uyumluluk terimi ve diğeri düzenlilik terimi olmak üzere iki terime sahiptir. Sadakat terimi, "x_λ" çözümünün gözlenen veriye yaklaşık olarak uymasını sağlar. Uyumluluk terimi ise "x_λ"nın Öklid normunu cezalandırır [113].

3.4.3 Elastik-Net

Elastik-Net [114], doğrusal regresyon bağlamında olduğu gibi ters çözümlerde sıklıkla kullanılan LASSO'nun bazı eksikliklerini gidermek için tanıtıldı bir tür düzenlileştirme yöntemidir. Bir regresyon modeli oluşturmak için LASSO ve Ridge regresyon yöntemlerinin hem l1 hem de l2 düzenleme tekniklerini birleştirir.

l1 düzenlemesi (LASSO katsayıların mutlak değerlerinin toplamına bir ceza uygular. Bu, modelde seyrekliği teşvik eder, yani bazı katsayılar sıfıra ayarlanarak etkili bir şekilde özellik seçimi gerçekleştirilebilir. Ancak, yüksek korelasyonlu tahmin edicilerden oluşan bir gruptan yalnızca bir tahmin ediciyi seçme eğilimi vardır. l2 düzenlemesi katsayıların karesel değerlerinin toplamına bir ceza uygular. Bu, küçük ancak sıfır olmayan katsayıları teşvik eder, onları etkili bir şekilde sıfıra doğru daraltır, bu da tahmin ediciler yüksek oranda ilişkili olduğunda çoklu doğrusallık sorununa yardımcı olabilir. Ancak, özellik seçimi yapmaz. Elastik-Net, Lagrange formunda Denklem (3.26)'de gösterildiği gibi yazılabilir.

$$\tilde{x} = \underset{x \epsilon R^m}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2N} \parallel Ax - b \parallel_2^2 + \lambda_1 \parallel x_1 \parallel + \lambda_2 \parallel x_2 \parallel \tag{3.26}$$

Negatif olmayan λ_1 ve λ_2 parametreleri, ceza terimindeki l1 ve l2 norm terimleri arasındaki kombinasyonunu kontrol ederek hangisinin daha büyük etkiye sahip olduğuna karar vermede kullanılır.

Elastik-Net aynı zamanda konveks kısıtlamalı ikinci dereceden bir programdır, bu nedenle LASSO regresyon ile benzer bir algoritma ile çözülebilir. Elastik-Net'in Destek Vektör Makinası ile azaltılabileceği de kanıtlanmıştır [115].

4
EN KÜÇÜK KARELER TABANLI YENİ BİR REGÜLARİZASYON YÖNTEMİ

Çoklu ceza terimli en küçük kareler modeli için genel bir doğrusal regresyon, P(x) ile temsil edilen bir ceza terimi ile Denk.4.1'deki biçiminde yazılabilir:

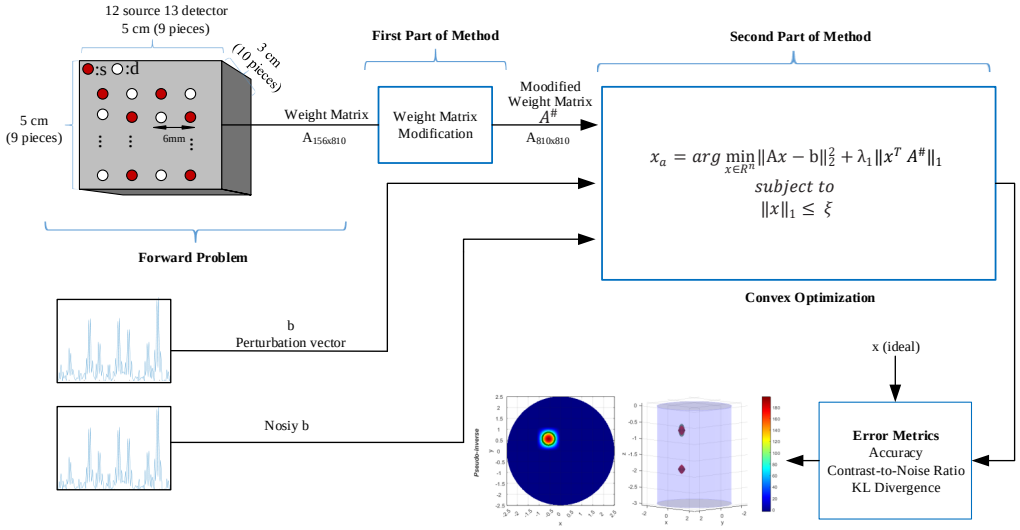
$$x_a = \underset{x \in R^{mn}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \| b - Ax \|_2^2 + \lambda P(x) \right\} \tag{4.1}$$

Eşitlik 4.1'de logaritmik olasılık ilk kısımda ikinci dereceden bir terim olarak ifade edilirken, ikinci kısım Bayesian terimlerinde ön bilgi olarak kabul edilen bir kısıtlama veya cezayı temsil eder. Kısıtlamanın etkisi λ adı verilen bir ağırlık parametresi ile belirlenir [116, 117].

Diğer literatürde yaygın olarak kullanılan yöntemlerde, bir iklüzyonun olduğu durumlarda bu yöntemler inklüzyonu bulabilir. Ancak incelenen dokuda iki inklüzyon olduğunda ve bu inklüzyonlardan biri dokunun üst yüzeyinde, diğeri ise dokunun daha derin yüzeyinde yer aldığında, en küçük kare tipi minimizasyon problemleri (l1-norm, l2-norm, Elastik ağ vb.) iki inlüzyonu da bulmakta yetersiz kalır.

Difüz Optik Tomografide, inklüzyonunun değerleri yüzeye yakın veya yüzeyde konumlandırıldığında önemli ölçüde artar. Buna karşılık, dokunun daha derin bölgelerinde yer alıyorsa, değerler küçüktür. Bu eşitsizlik nedeniyle, bir çözüm ararken, algoritma tipik olarak yüzey kapanımını tespit eder ve daha derin inklüzyon ihmal eder. Bu sorun DOT'ta derinlik sorunu olarak bilinir.

Bu derinlik problemini çözmek için, ağırlık matrisi değiştirilerek ve yeni bir ceza terimi ekenerek diğer yöntemlere alternatif convex optimizasyon tabanlı yeni bir metot önerdik. Önerilen yöntemin blok diyagramı Şekil4.1'de verilemektedir. Önerlen metodun ilk kısımı ağırlık matrisi modifikasyonudır. İkinci kısım yeni bir ceza terimi eklenerek LASSO Regresyonuna dayalı yeni bir regularizasyon yöntemini anlatmaktadır.



Şekil 4.1 Önerilen yöntemin blok diyagramı [118]

İlk beş adım, ağırlık matrisi modifikasyonunu anlatmaktadır ve diğer adımlar, LASSO Regresyonuna dayalı yeni regülarizasyon yöntemini tanımlar [118].

Önerilen Yöntemin Birinci Bölümü: *Ağırlık Matrisi Modifikasyonu*

Ağırlık matrisi modifikasyonunda, [58] tarafından geliştirilen ve Tikhonov Metodu için kullanılan Derinlik Kompanzasyonu Algoritmasından (Depth Compensation Algorithm-DCA) ilham aldık. A matrisinin modifikasyondan önceki boyutu ve yapısı Denk.(2.9)'da verilmiştir.

Adım 1: DCA'ya göre, A matrisi $(A_1, A_2, \ldots A_l)$ alt matrislerine ayrıştırılır. Daha sonra her katman için maksimum tekil değerler (maximum singular values) hesaplanır.

$$M = \begin{bmatrix} S_{max.\ N_{layer}} I & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & S_{max.\ 1} I \end{bmatrix}^{\gamma} \tag{4.2}$$

burada γ, M'nin ayarlanabilir gücüdür ve verilen DCA algoritmasına göre 0 ile 3 arasında değer alır. Bu çalışmada ampirik olarak 1.5 ile belirlenmiştir.

Adım 2: A ağırlık matrisi, DCA'ya göre ayarlanmış M matrisi ile çarpılır ve AM'nin köşegen değerleri birim matris ile çarpılarak elde edilir.

$$\hat{A} = diag\,(AM) = AMI \tag{4.3}$$

Adım 3: Denk.(4.3)'deki $\hat{A}$ ağırlık matrisi, kare matris elde etmek için Tikhonov yönteminde olduğu gibi $\hat{A}$ matrisinin transpozu ile çarpılır.

$$\tilde{A} = (\hat{A})^T \hat{A} \tag{4.4}$$

Adım 4: Uygulama ve sonuçlar bölümünde anlatılan ve ileri problemden elde edilen A matrisi $mn \times N_{xyz}$ (156x810 Denk.(2.4) aynı kalır ve $A^{\#}$'ın ilk $mn \times N_{xyz}$ ($156x810$) değeri için kullanılır. Ağırlık matrisinin boyutu, matrisin diagonal değerleri dışında kalan boş değerlerine sıfırlar eklenerek genişletilir ve ağırlık matrisinin boyutuna $N_{xyz} \times N_{xyz}$ $810x810$ (A^*) getirilir.

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{(1,1),1} & \cdots & A_{(1,1),N_{xyz}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{(m,n),1} & \ddots & A_{(m,n),N_{xyz}} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{N_{xyz} \times N_{xyz}} \tag{4.5}$$

Adım 5: Daha sonra ilk A^* matrisinin elemanları dışında kalan değerler, $\tilde{A}$ (Denk.(4.4)) matrisinin diagonal değerleri ile doldurulur ve yeni $A^{\#}$ matrisi elde edilir. Böylece her sensör-dedektör eşleşmesindeki voksel değerlerinin toplamı elde edilir.

$$A^{\#} = \begin{bmatrix} A_{(1,1),1} & \cdots & A_{(1,1),N_{xyz}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{(m,n),1} & \ddots & A_{(m,n),N_{xyz}} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & diag\left(\hat{A}\right)_{N_{xyz},N_{xyz}} \end{bmatrix}_{N_{xyz} \times N_{xyz}} \tag{4.6}$$

Önerilen Yöntemin İkinci Bölümü: *LASSO Regresyonuna Dayalı Yeni Regülarizasyon Yöntemi*

Adım 6: DOT için çoklu ceza terimli en küçük kareler modeli oluşturulur ve Denklem(4.7)'de gösterilir.

$$\begin{gathered} x_a = \underset{x \in R^{mn}}{\operatorname{argmin}} \parallel \mathrm{A}x - \mathrm{b} \parallel_2^2 + \lambda_1 \parallel x^T A^{\#} \parallel_1 \\ subject\ to \parallel x \parallel_1 \leq \xi \end{gathered} \tag{4.7}$$

λ_1, düzenleme parametresidir. λ_1, 0.1 and 10 arasında seçilir. $A^{\#}$, $N_{xyz} \times N_{xyz}$ boyutlu modifiye edilmiş ağırlık matrisini temsil eder.

İnklüzyon doku yüzeyine yakın yerleştirildiğinde, b ölçüm vektörünün değerleri büyük değerler alırken derin dokuda yer aldığında bu değerler küçülmeltedir. $\lambda_1 \parallel x^T A^{\#} \parallel$ ifadesi, her vokseldeki tüm kaynak-dedektör çiftlerinin değerini verir.

Adım 7: Denklem (4.7)'de x matrisini en aza indirmek için MATLAB CVX paketini kullanılarak convex optimizasyon kullanılır [119].

Geliştirdiğimiz yöntem, DOT'un derinlik sorununa alternatif bir çözüm sunuyor. Diğer en küçük kare tabanlı algoritmaların gürültülü ve ölçüm gürültüsü eklenmemiş koşullar altında bulmakta yetersiz olduğu biri yüzeyde diğeri derinde olmak üzere iki farklı inklüzyonu başarıyla bulabilir. Önerilen yöntem ile diğer en küçük kare tabamlı algoritmalara göre daha yüksek doğruluk elde edilir. Optimizasyonun l1-normunun dışbükeyliği nedeniyle nispeten düşük hesaplama süresinde gerçekleştirilen konveks optimizasyon yöntemi kullanılmıştır.

5
UYGULAMA VE TEST SONUÇLARI

Bu tez çalışmasında DOT için 3 boyutlu sentetik verilere çoklu ceza terimli en küçük kareler tabanlı yeni bir regülarizasyon yöntemi uygulanmaktadır. İleri model ağırlık matrisi fonksiyonları, fotonların Monte Carlo parçacık simülasyon modeline dayalı olarak hesaplanmış ve ağırlık matrisi her bir kaynak-dedektör çifti altında foton akışlarının çarpılmasıyla öteleme algoritması [82] kullanılarak oluşturulmuştur. Silindirik bir koordinat sisteminde radyal r ve derinlik z için foton akıcılıkları üretildikten sonra, kartezyen koordinat sistemine dönüştürülmüştür. Görüntü rekonstrüksiyon ağ ızgarası (mesh grid) koordinatları $(x, y, z) = (5$ cm, 5cm, 3 cm) $N_{xyz} = N_x \times N_y \times N_z = 9 \times 9 \times 10 = 810$. İleri yol problemi, DOT için bir model ve ağırlık matrisi oluşturmak için kullanılır.

Simülasyonlarımızda, çapı 5 cm derinliği 3 cm olan bir silindir incelenmektedir. Ölçüm sırasında 12 kaynak (m) ve 13 dedektör (n) bulunur. Bu, tersine çevirmede kullanılacak toplam mn (156) kaynak-dedektör çifti verir.

Geometri, yeniden oluşturulacak bilinmeyen değişkenlerden çok daha az sayıda mevcut ölçüm içerdiğinden, az belirlenmiş (under-determined) bir yapıya sahiptir. Daha az kaynak-dedektör kullanarak anomaliye sahip bölgeyi bulmak oldukça zordur.

Ters problemi çözmek için convex optimizasyon kullanıldı. İterasyon sayısı 40 ile 50 arasında değişir ve bu 12 ile 15 saniye sürer. İterasyonsayısı derinliğe bağlı değildir.

Pratikte, ölçüm gürültüsü her zaman kaçınılmazdır. Literatürde olduğu gibi görüntüleme alanında da, görüntüleme cihazına göre değişen farklı gürültü türleri bulunmaktadır. Floresan moleküler tomografide Poisson gürültüsü, MRI'da Gaussian, Rician, Rayleigh gürültüsü, CT'de Gaussian, kuantum gürültüsü, X-Ray'de Gaussian, Poisson gürültüsü görülebilmektedir. Gaussian gürültüsünün en yaygın olduğu ve çeşitli görüntü türlerine hakim olan genel gürültü türü olduğu görülebilir [120].

Ölçüm vektöründeki gürültü genellikle Difüz Optik Tomografide beyaz Gauss gürültüsü olarak ele alınır [54, 56, 121]. Gauss veya beyaz gürültü, gücünün spektral

uzaylar üzerinde eşit olarak dağıldığı ve ortalamasının genellikle sıfır olduğu yaygın gürültü türlerinden biridir [122].

Önerilen yeniden yapılandırma yönteminin gürültü duyarlılığını incelemek için, sinyalin gücüne göre farklı SNR seviyeleri ile beyaz Gauss gürültüsü eklenmiştir.

SNR, Eşitlik (5.1) ile verilir. S sinyali ifade ederken, N gürültüyü göstermektedir.

$$SNR = 10 * \log_{10} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i^2}{\sum_{i=1}^{n} N_i^2} \right\} \tag{5.1}$$

Gürültüye karşı sağlamlığı test etmek için ileri problem tarafından hiçbir ölçüm gürültüsü eklenmiş sentetik veri ve gürültülü sentetik veri üretilmiştir. Birçok yöntemin gürültülü koşullarda inklüzyonu bulmada başarısız olduğu, önerilen yöntemin yüksek gürültü şartlarda bile inklüzyonu sentetik veriler üzerinde bulabildiği gözlemlenmiştir.

Regülarizasyon yöntemlerinin performansı aşağıdaki hata metrikleri kullanılarak gözlemlenmiştir.

Dice Katsayısı: Yeniden oluşturulan görüntü ile gerçek görüntü arasındaki benzerlikleri doğrulamak için kullanılan bir hata metriğidir. S_r ve S_0 sırasıyla yeniden oluşturulmuş görüntü ve gerçek görüntüyü göstermektedir. Dice Katsayısı, yöntemin doğruluğunu belirlemek için kullanıldı [123].

$$Dice = 1 - \frac{\| S_r \cap S_0 \|}{\| S_r \| + \| S_0 \|} \tag{5.2}$$

Her bir regülarizasyon yönteminin sonucu elde edilmiş ve yeniden oluşturulmuş görüntü ile referans görüntü arasındaki Dice katsayısı incelenmiştir. Eğer sonuç sıfır ise 100% örtüşme olduğu yani doğru bulunduğu kabul edildi, sonuç sıfırdan farklı olduğunda ise bulunamadı (yani yanlış) olarak kabul edildi. Bu işlem rastgele 200 kez tekrarlanmış ve doğru sayıların toplamı 200'e bölünerek elde edilmiştir.

Kontrast Gürültü Oranı (Contrast to Noise Ratio-CNR): CNR, ilgilenilen bölgedeki (ROI) doğru nesne sınırlarındaki yeniden yapılandırmanın ortalama değerinin, nesnenin dışındaki arka planın ortalamasına oranı olarak tanımlanır [124].

$$CNR = \frac{mean\,(X_{ROI})}{mean\,(X_{BG})} \tag{5.3}$$

Kullback–Leibler diverjansı (KL divergence): İki dağılım arasındaki eşitsizliği yakalayan Kullback-Leibler diverjansı (KL), belirteçlerin tanı performansını belirlemek için bir indeks olarak kullanılnır.

İki olasılık dağılımı arasındaki ilişkiyi (mesafeyi) formüle eden yöntemin adıdır ve olasılık teorisi ve bilgi teorisinde bir dağılımın diğer dağılımdan nasıl farklı olduğunu gösterir. Başka bir deyişle, P ve Q olasılıkları arasındaki logaritmik farkın beklentisidir [125, 126].

$$D_{KL}(P||Q) = \sum_{i} P(i)\ log\frac{P(i)}{Q(i)} \tag{5.4}$$

5.1 İnklüzyonlardan birinin yüzeyde diğerinin derinde bulunduğu şartlarda

İlk simülasyonda incelenen örnek, biri yüzeyde diğeri derinde yer alan 6 mm çapında iki inklüzyon içeren bir 5 cm çapında bir silindirdir. İnklüzyonlardan biri, $x = 0$ cm $y = -1.8$ cm ve 0.75 cm derinliğinde bulunmaktadır. İkinci inklüzyon aynı xy konumunda $x = -0.6$ cm $y = -1.2$ cm ve 1.95 cm derinliğinde bulunmaktadır. Homojen inklüzyon arka planının absorpsiyon katsayısı $\mu_a = 4.425\ cm^{-1}$ olarak seçilmiştir. Yöntemler gürültülü ve ölçüm gürültüsü eklenmemiş sentetik veriler üzerinde değerlendirilmiştir. OLS (Ordinary Laest Square), LASSO Regresyon, Ridge Regresyon, Elastic-Net yöntemlerinin doğruluğu önerilen yöntem ile karşılaştırılmıştır. Görüntülerindeki yeşil daireler inklüzyonun gerçek konumunu temsil eder. Kırmızı küre ise, yöntemin bulduğu inklüzyonu göstermektedir.

Yöntemlerin performansının nicel analizi Tablo (5.1)'de verilmiştir. Ortalama performans değerlerini elde etmek için tüm yöntemler 200 kez çalıştırılmış ve ortalama değerleri verilmiştir. Farklı gürültü yoğunlukları ile bozulmuş gürültülü (Beyaz Gauss Gürültüsü ile) ve ölçüm gürültüsü eklenmemiş (Beyaz Gauss Gürültüsü olmadan) sentetik veriler için yöntemlerin yeniden yapılandırma sonuçlarının ortalama değeri ve Şekil (5.1-5.2)'de gösterilmektedir. Görüntülerdeki yeşil daireler, inlüzyonun gerçek konumunu temsil eder. Kırmızı küreler ise, yöntemin bulduğu inklüsyon sonucunu göstermektedir. Şekilerdeki ilk görüntü, $z = 0$ düzlemindeki kesit görünümü gösterir ve ikinci görüntü, yeniden yapılandırma sonuçlarının 3 boyutlu görünümlerini gösterir.

Her iki ölçüm gürültüsü eklenmemiş sentetik verinin inklüzyonu, tüm regülarizasyon yöntemlerinde bulunabilmesine rağmen, CNR değerleri Tablo(5.1)'de gösterildiği gibi önerilen yönteminkinden daha küçüktür. Bu nedenle önerilen yöntem, inklüzyonların

Tablo 5.1 Gürültülü ve gürültüsüz sentetik veriler için önerilen yöntemin doğruluğu

Doğruluk (%)

Metot	Gürültüsüz	20dB	10dB	5dB
OLS	100	43	15,5	7
LASSO Regresyon	100	55	20	12,5
Ridge Regresyon	100	59	21	11,5
Elastic-Net	100	44,5	17	8
Önerilen Metot	**100**	**100**	**100**	**98,5**

Ortalama CNR Değeri

Method	Gürültüsüz	20dB	10dB	5dB
OLS	$1{,}53\text{x}10^{7}$	19,701	9,867	8,70
LASSO Regresyon	$1{,}63\text{x}10^{7}$	22,55	11,86	11,832
Ridge Regresyon	$1{,}88\text{x}10^{7}$	22,78	12,44	10,89
Elastic-Net	$2{,}00\text{x}10^{7}$	20,11	10,9614575	9,78
Önerilen Metot	**20,02**$\text{x}10^{7}$	**211,35**	**173,58**	**128,35**

Ortalama Kullback–Leibler Diverjans Değeri

Method	Gürültüsüz	20dB	10dB	5dB
OLS	$3{,}35\text{x}10^{-6}$	3,22	6,44	7,67
LASSO Regresyon	$3{,}13\text{x}10^{-6}$	2,23	5,83	6,96
Ridge Regresyon	$2{,}73\text{x}10^{-6}$	2,04	5,54	7,00
Elastic-Net	$2{,}57\text{x}10^{-6}$	3,24	6,36	7,42
Önerilen Metot	**6,93**$\text{x}10^{-7}$	**0,12**	**0,13**	**0,18**

farklı derinliklerde bulunması durumunda diğer yöntemlere göre daha iyi sonuçlar vermektedir.Önerilen yöntem, 3 cm derinliğe kadar yerleştirilen inklüzyonları başarıyla bulur. 3 cm'nin üzerindeki derinlikler için başarı oranı derinliğe bağlı olarak düşmektedir.

Olasılık teorisine göre bir dağılımın başka bir dağılımdan nasıl farklı olduğunu formüle eden Kullback-Leibler diverjansı (KL Divergence) 0'a yakın olmalıdır. İki dağılım mükemmel bir şekilde eşleşirse, $D_{KL} = 0$ olur, aksi takdirde 0 ile ∞ arasında değerler alabilir. Bu metrik, bir yaklaşım seçtiğimizde ne kadar bilgi kaybettiğimizi ölçmemize yardımcı olur. Tablo(5.1)'de görüldüğü gibi önerilen yöntem için elde edilen KL Diverjans değeri tüm yöntemler içinde en küçüğüne sahiptir. Diğer yöntemlerin yüzeydeki inklüzyonu bulabilmesine rağmen gürültülü koşullarda derinde bulunan inklüzyonu bulamadıkları gözlemlenmiştir. Ayrıca, gürültü değeri arttıkça KL değerlerinin arttığı de görülmektedir.

Dice katsayısı "Lee Raymond Dice" tarafından farklı bir alan için önerildi, ancak benzerlikte kullanılan bir kriterdir [123]. Tüm kriterler için [0,1] arasında bir değer

üretilir. Değerin 0'a yakın olması benzerliğin yüksek, değerin 1'e yaklaşması ise benzerliğin daha az olduğu anlamına gelir. Yöntemlerin doğruluğunu değerlendirmek için Dice Katsayısı kullanılmıştır. Aynı anda iki inklüzyon bulunduğunda sonucun doğru olduğunu varsaydık. Sadece önerilen yöntemle, derinde bulunan inklüzyonlar bulundu ve gürültülü koşullar altında Dice değeri 0 elde edilmiştir.

5.2 İnklüzyonlardan ikisinin de derinde bulunduğu şartlarda

İkinci simülasyonda, incelenen örnek, her ikisi de derinde yer alan, 6 mm çapında iki inklüzyon içeren 5 cm çapında bir silindirdir. İnklüzyonlardan biri $x = -1.2$ cm $y = 0$ cm merkezli ve 1.95 cm derinliğinde bulunmaktadır. İkinci inklüzyon $x = -0.6$ cm $y = 0.6$ cm xy konumunda ve 2.25 cm derinliğinde bulunmaktadır. Sonuçlar Tablo 5.2 ve Şekil 5.3-5.4'da verilmiştir. Tablo 5.2'ten görülebileceği gibi, diğer yöntemler Beyaz Gauss gürültüsü olmadan ve düşük gürültüde inklüzyonları bulabilse de, önerilen yöntem gürültü seviyesi artırıldığında bile yüksek doğrulukta bulabilmektedir. Diğer yöntemlere göre daha yüksek CNR ve daha düşük KL değerine sahip olduğu da açıkça görülmektedir.

5.3 İnklüzyonlardan ikisinin de yüzeyde bulunduğu şartlarda

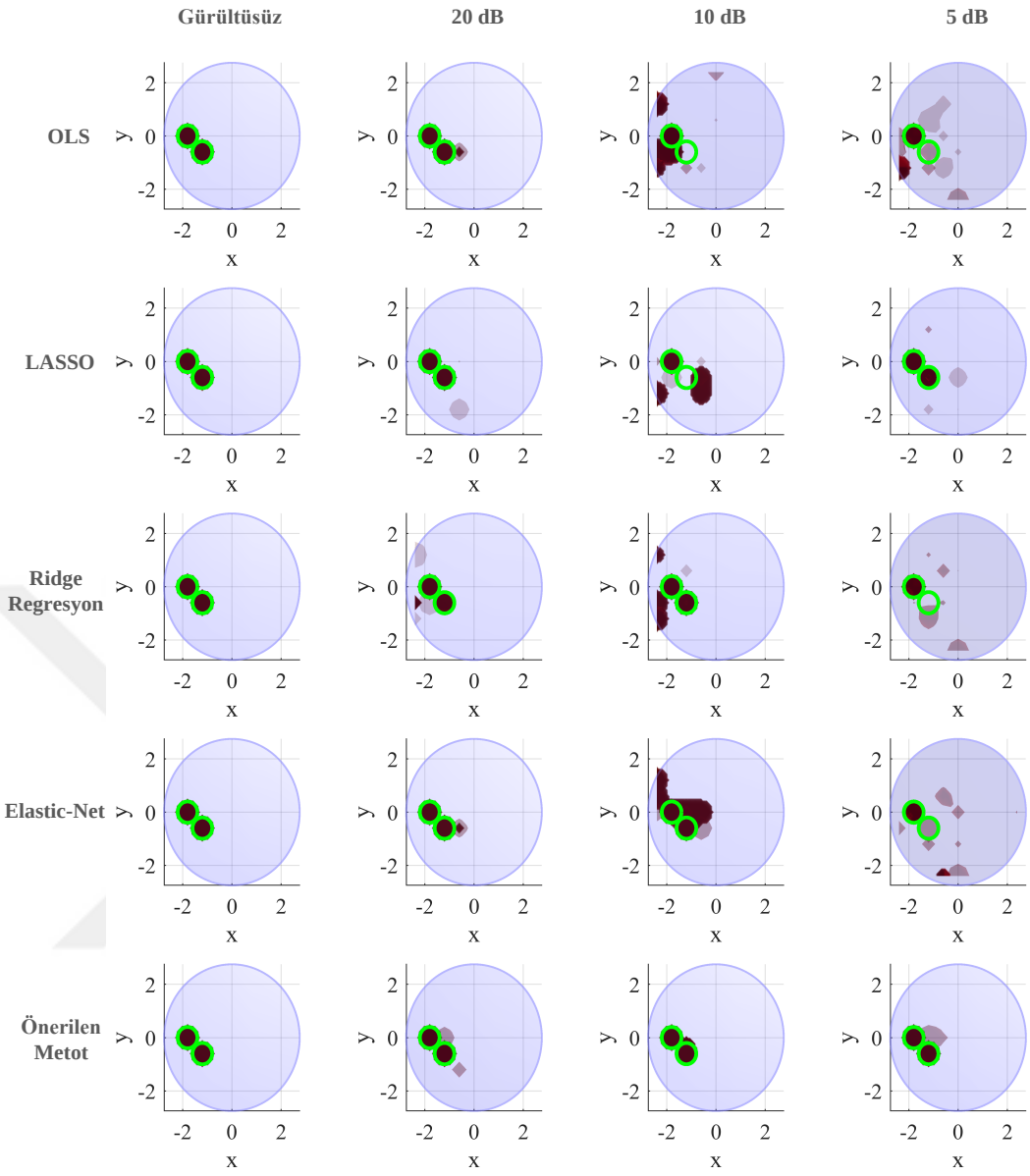
Üçüncü simülasyonda, incelenen örnek, çapı 6 mm olan yüzeye yakın yerleştirilmiş iki inklüzyon içeren 5 cm çapında bir silindirdir. İnklüzyonlardan biri $x = 0.6$ cm $y = -1.2$ cm, derinlik 0.75 cm olacak şekilde ortalanmıştır. İkinci inklüzyon $x = 0$ cm $y = 1.8$ cm konumunda ve 1.05 cm derinliğinde bulunmaktadır.

Üçüncü simülasyonun sonuçları Tablo 5.3 ve Şekil 5.5-5.6'da verilmiştir.

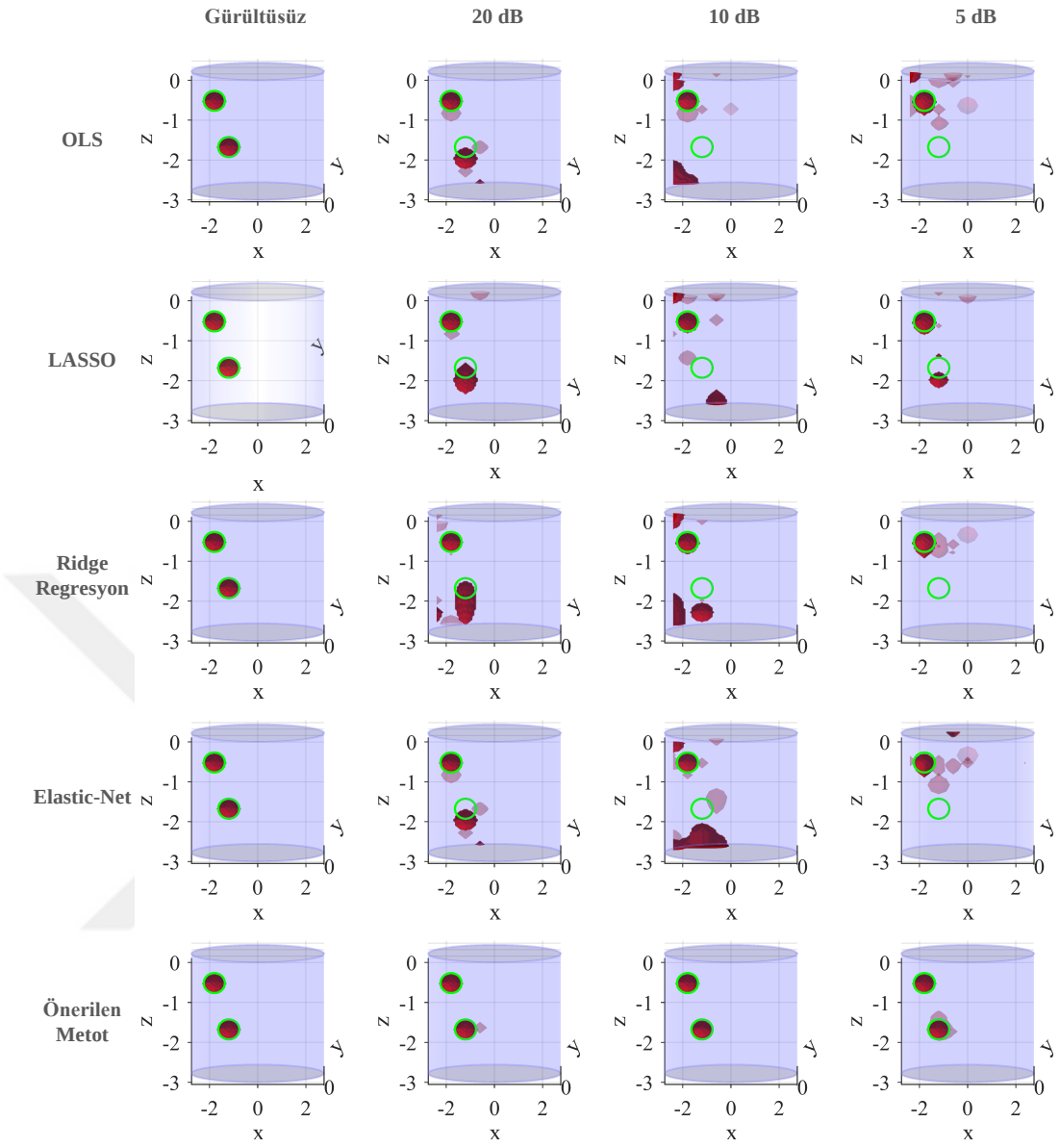
Daha doğru bir değerlendirme yapabilmek için tüm simülasyonlar 200 kez çalıştırılmış ve sonuçların ortalama değerleri tablolarda verilmiştir.

5.4 Bir büyük inklüzyon olduğu durumda

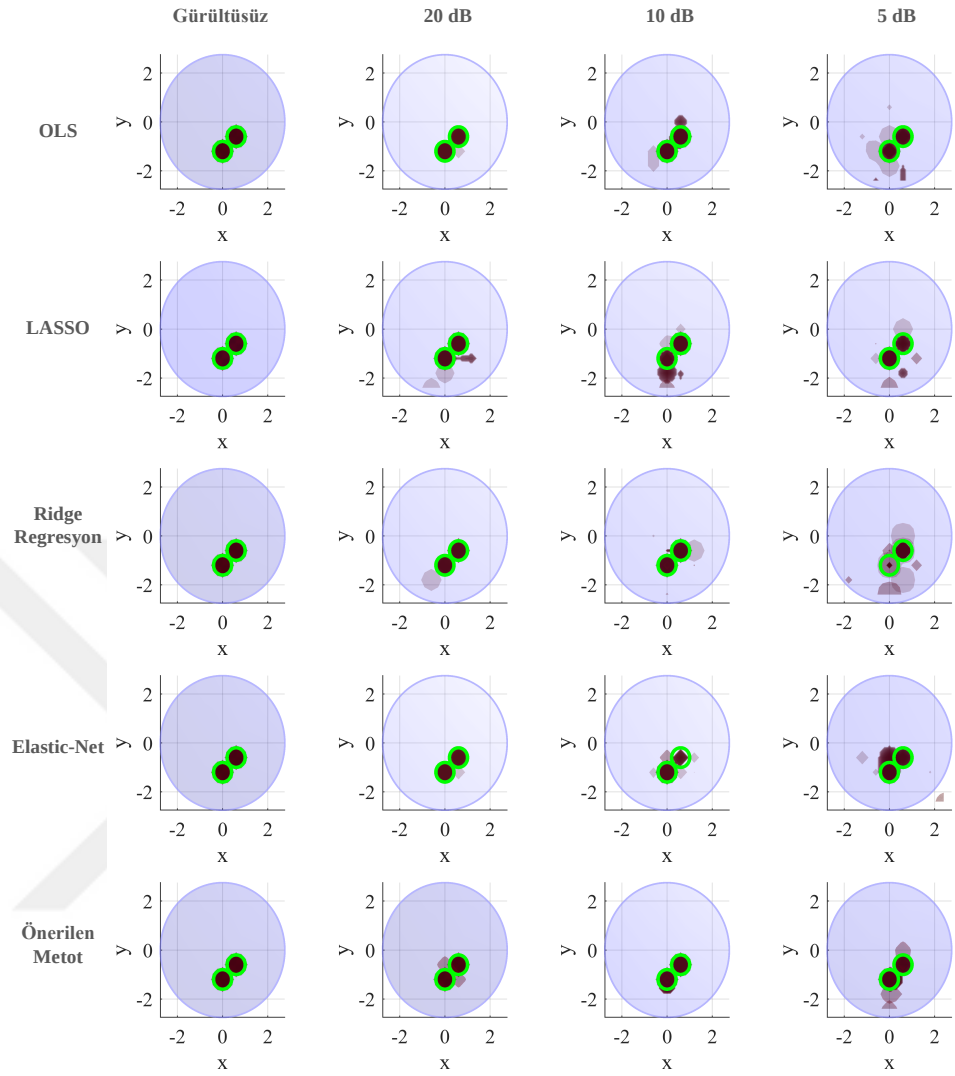
Son simülasyonda, dokuya büyük bir inklüzyon yerleştirildi. İncelenen örnek, 1.2 mm çapında büyük bir silindirik inklüzyon içeren, 5 cm çapında bir silindirdir. İnklüzyon $x = -0.6$ cm $y = 0$ cm konumunda ve 1.80 cm derinliğinde yerleştirilmiştir. Şekil 5.7-5.8'den görülebileceği gibi, önerilen yöntem dahil etmeyi başarılı bir şekilde bulabilmektedir.



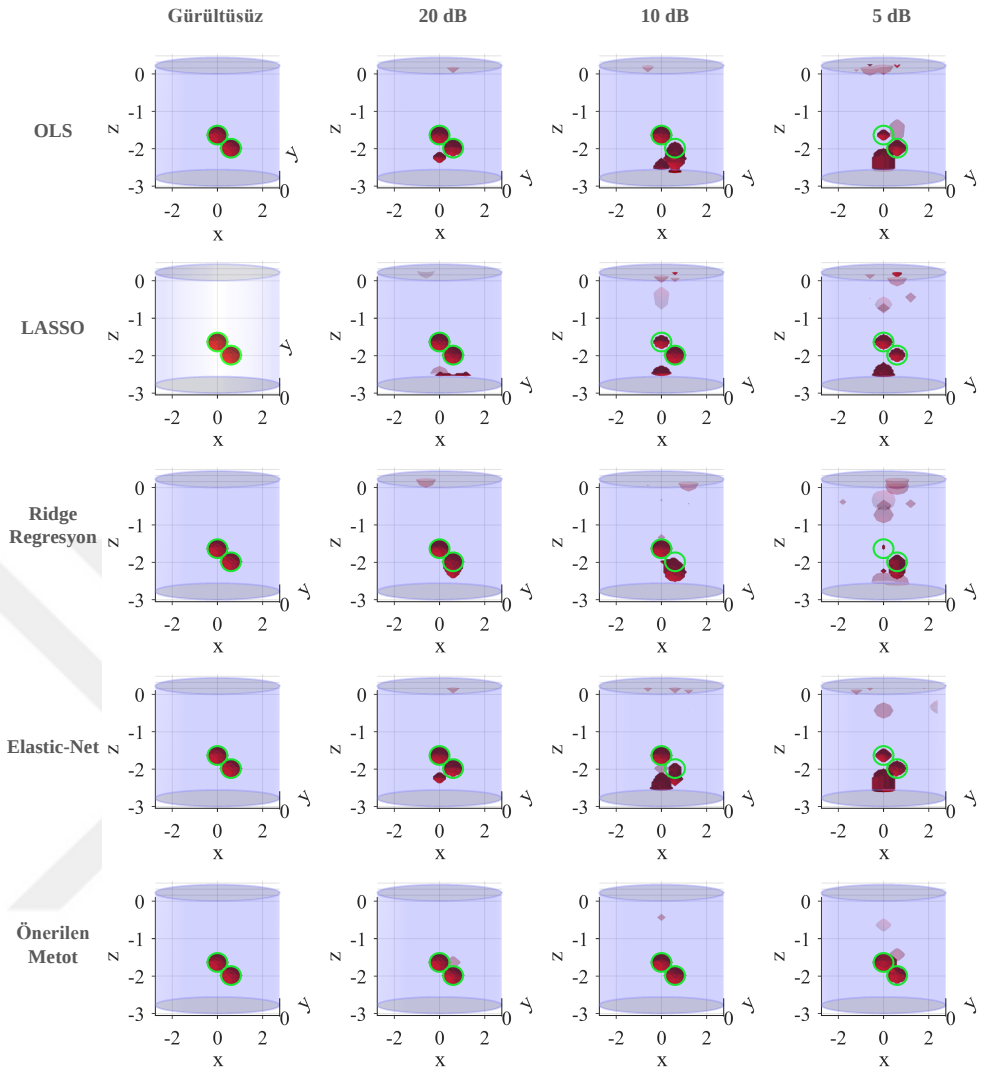
Şekil 5.1 Önerilen yöntemin sentetik veriler kullanılarak yeniden yapılandırma sonuçları. Satırlar, sırasıyla OLS, Ridge Regresyon, LASSO Regresyon, Elastic-Net ve önerilen yöntemin farklı derinlikte bulunan iki inklüzyon için regülarizasyon yöntemlerini temsil eder. Sütunlar gürültü seviyesini temsil eder. İnklüzyonların derinliği $z = 0.75$ cm $z = 1.95$ cm. Görüntüler, z = 0 düzlemindeki enine kesit görünümü gösterir.



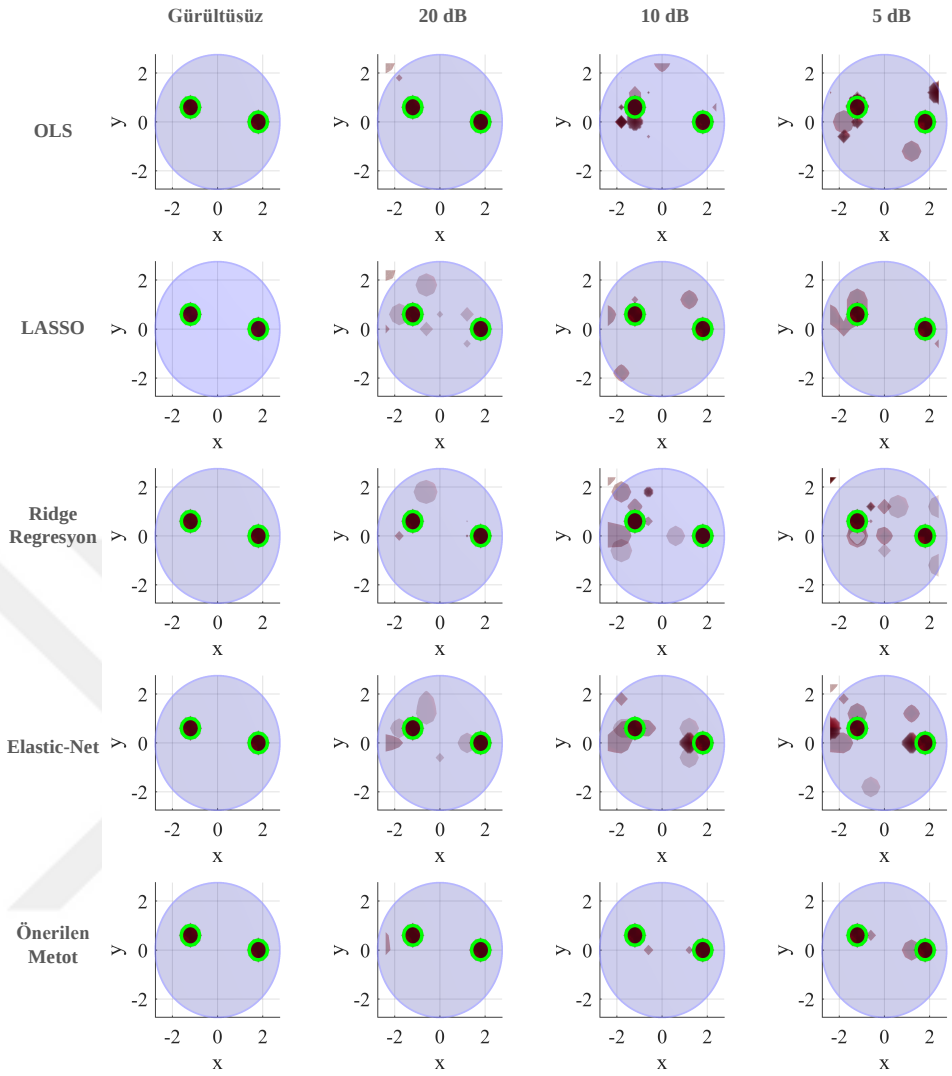
Şekil 5.2 Önerilen yöntemin sentetik veriler kullanılarak yeniden yapılandırma sonuçları. Satırlar, sırasıyla OLS, Ridge Regresyon, LASSO Regresyon, Elastic-Net ve önerilen yöntemin farklı derinlikte bulunan iki inklüzyon için regülarizasyon yöntemlerini temsil eder. Sütunlar gürültü seviyesini temsil eder. İnklüzyonların derinliği $z = 0.75$ cm $z = 1.95$ cm. Görüntüler, yeniden yapılandırma sonuçlarının 3 boyutlu görünümlerini göstermektedir.



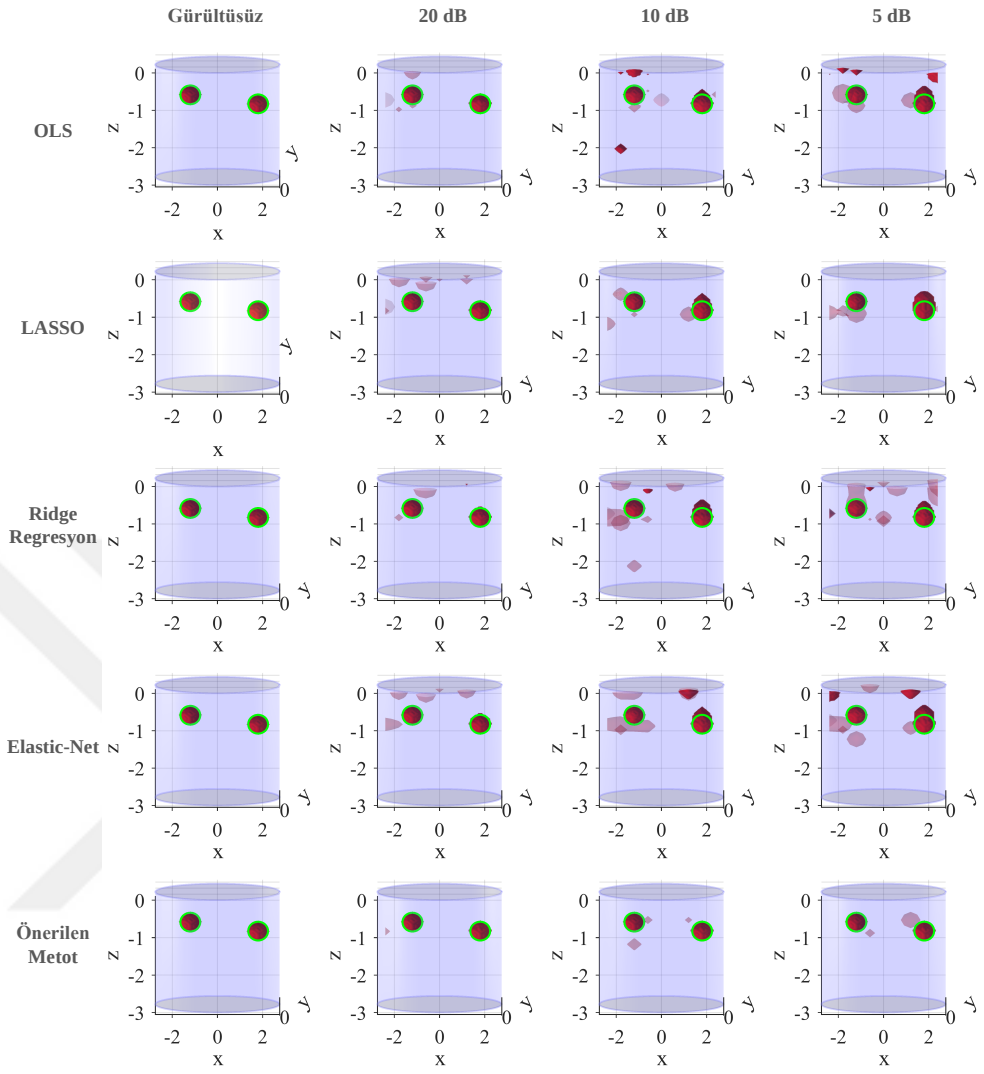
Şekil 5.3 Önerilen yöntemin sentetik veriler kullanılarak yeniden yapılandırma sonuçları. Satırlar, sırasıyla OLS, Ridge Regresyon, LASSO Regresyon, Elastic-Net ve önerilen yöntemin farklı derinlikte bulunan iki inklüzyon için regülarizasyon yöntemlerini temsil eder. Sütunlar gürültü seviyesini temsil eder. İnklüzyonların derinliği $z = 1.95$ cm $z = 2.25$ cm. Görüntüler, z = 0 düzlemindeki enine kesit görünümü gösterir.



Şekil 5.4 Önerilen yöntemin sentetik veriler kullanılarak yeniden yapılandırma sonuçları. Satırlar, sırasıyla OLS, Ridge Regresyon, LASSO Regresyon, Elastic-Net ve önerilen yöntemin farklı derinlikte bulunan iki inklüzyon için regülarizasyon yöntemlerini temsil eder. Sütunlar gürültü seviyesini temsil eder. İnklüzyonların derinliği $z = 1.95$ cm $z = 2.25$ cm. Görüntüler, yeniden yapılandırma sonuçlarının 3 boyutlu görünümlerini göstermektedir.



Şekil 5.5 Önerilen yöntemin sentetik veriler kullanılarak yeniden yapılandırma sonuçları. Satırlar, sırasıyla OLS, Ridge Regresyon, LASSO Regresyon, Elastic-Net ve önerilen yöntemin farklı derinlikte bulunan iki inklüzyon için regülarizasyon yöntemlerini temsil eder. Sütunlar gürültü seviyesini temsil eder. İnklüzyonların derinliği $z = 0.75$ cm $z = 1.05$ cm. Görüntüler, z = 0 düzlemindeki enine kesit görünümü gösterir. Görüntülerindeki yeşil daireler inklüzyonun gerçek konumunu temsil eder. Kırmızı küre, yöntemin bulduğu inklüzyonu gösterir.



Şekil 5.6 Önerilen yöntemin sentetik veriler kullanılarak yeniden yapılandırma sonuçları. Satırlar, sırasıyla OLS, Ridge Regresyon, LASSO Regresyon, Elastic-Net ve önerilen yöntemin farklı derinlikte bulunan iki inklüzyon için regülarizasyon yöntemlerini temsil eder. Sütunlar gürültü seviyesini temsil eder. İnklüzyonların derinliği $z = 0.75$ cm $z = 1.05$ cm. Görüntüler, yeniden yapılandırma sonuçlarının 3 boyutlu görünümlerini göstermektedir. Görüntülerindeki yeşil daireler inklüzyonun gerçek konumunu temsil eder. Kırmızı küre, yöntemin bulduğu inklüzyonu gösterir.

Tablo 5.2 Gürültülü ve ölçüm gürültüsü eklenmemiş sentetik veriler için önerilen yöntemin doğruluğu (Gürültüsüz = Ek ölçüm gürültüsü eklenmez)

Doğruluk (%)

Metot	Gürültüsüz	20dB	10dB	5dB
OLS	100	99,5	69	45,5
LASSO Regresyon	100	99,5	76	54
Ridge Regresyon	100	99,5	76	52
Elastic-Net	100	99,5	69	45,5
Önerilen Metot	**100**	**100**	**96,5**	**90,5**

Ortalama CNR Değeri

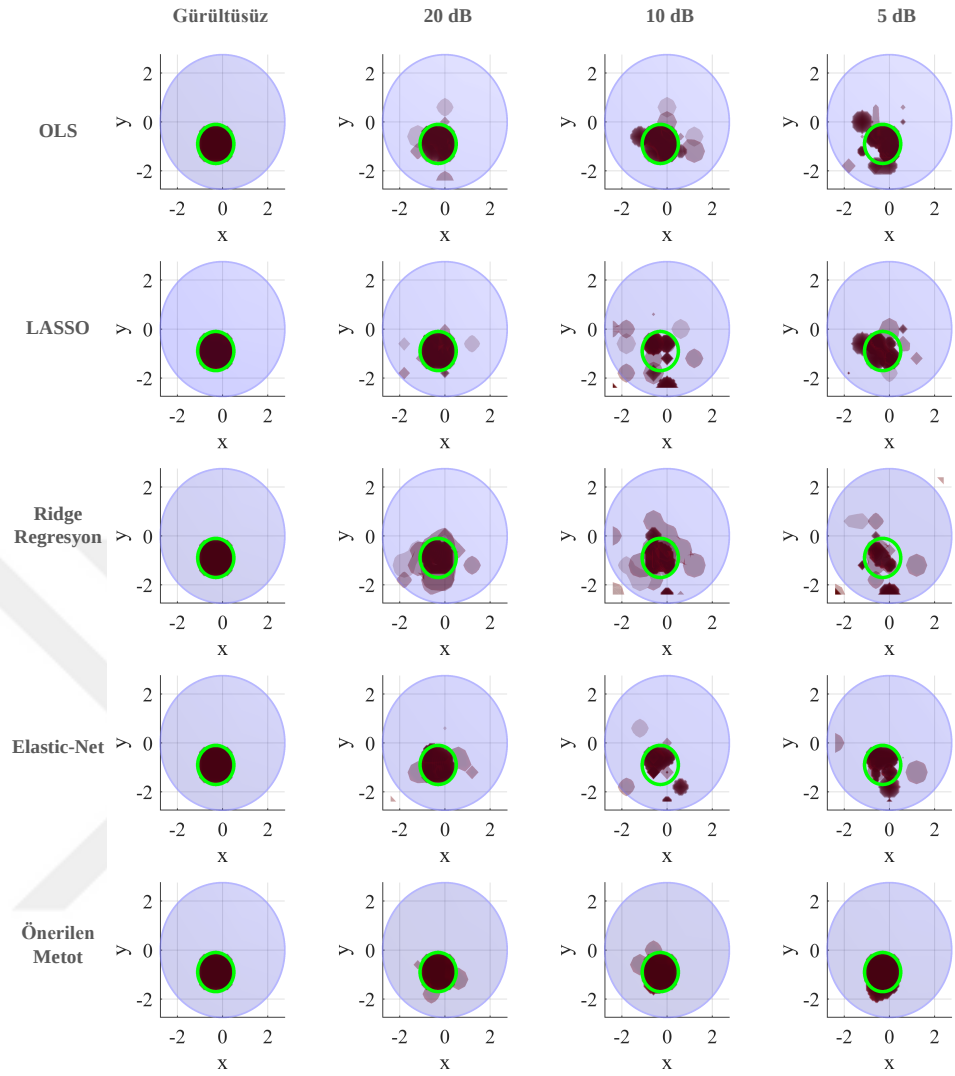
Metot	Gürültüsüz	20dB	10dB	5dB
OLS	$1{,}75\text{x}10^{7}$	75,41	18,47	14,76
LASSO Regresyon	$3{,}27\text{x}10^{7}$	77,55	23,25	18,14
Ridge Regresyon	$2{,}65\text{x}10^{7}$	77,57	21,15	17,09
Elastic-Net	$3{,}912\text{x}10^{7}$	75,44	18,72	15,05
Önerilen Metot	**11,82** 10^{7}	**328,45**	**130,36**	**86,01**

Ortalama Kullback–Leibler Diverjans Değeri

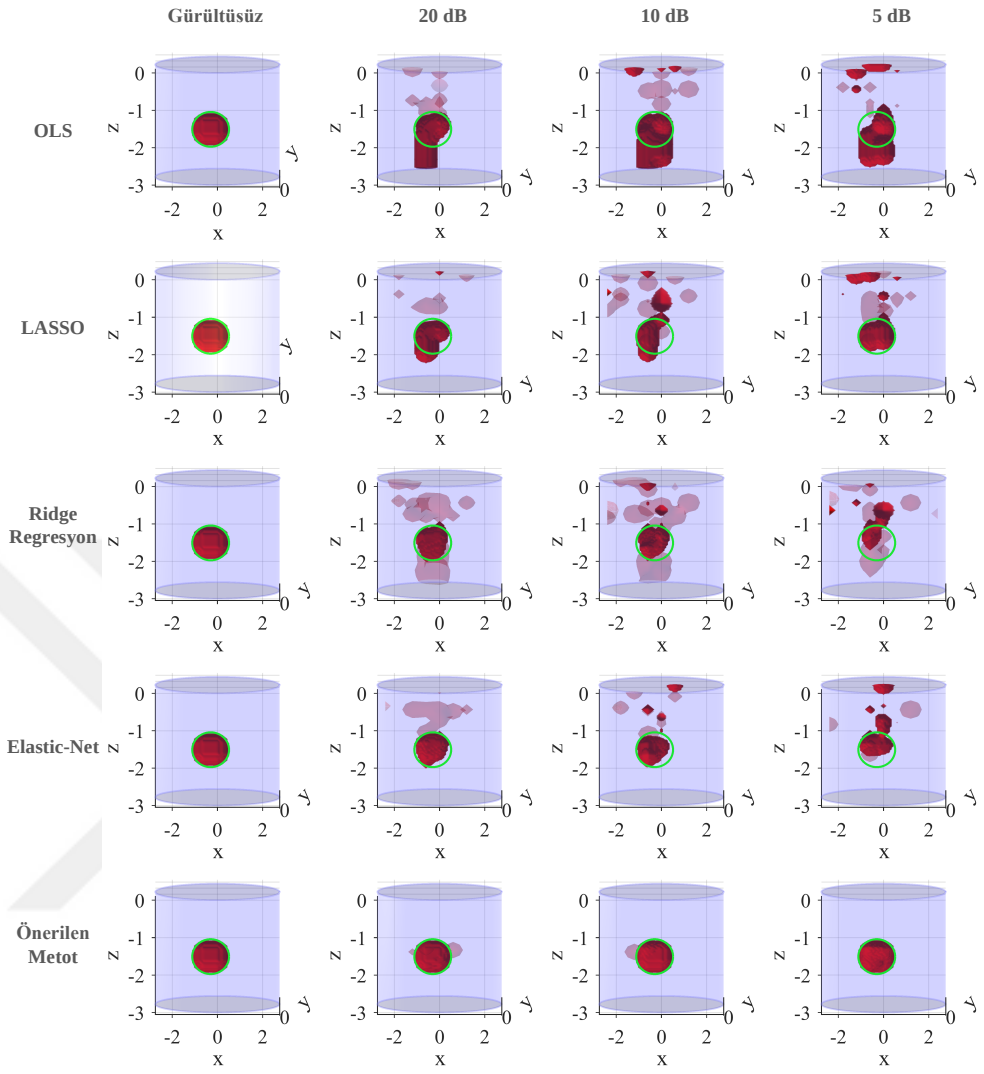
Metot	Gürültüsüz	20dB	10dB	5dB
OLS	$6{,}26\text{x}10^{-6}$	0,54	2,18	3,59
LASSO Regresyon	$3{,}35\text{x}10^{-6}$	0,51	1,73	2,93
Ridge Regresyon	$4{,}13\text{x}10^{-6}$	0,51	1,77	2,91
Elastic-Net	$2{,}79\text{x}10^{-6}$	0,54	2,26	3,64
Önerilen Metot	**1,15**$\text{x}10^{-6}$	**0,09**	**0,36**	**0,65**

5.5 Literatürde Yapılan Çalışmalar

Literatürde yapılan çalışmalardan bazıları Tablo 5.4'te verilmiştir. Burada yayınların yapıldığı koşullar ile performans değerlendirme ölçütleri ve yöntemlerin sonuçlarını görebilirsiniz. Literatürdeki çalışmalarla karşılaştırıldığında önerilen yöntem derinlik problemine yüksek doğrulukla çözüm sunmaktadır. Sonuçlar önerilen yöntemin başarısını ve diğer yöntemlere göre üstünlüğünü göstermektedir.



Şekil 5.7 Önerilen yöntemin sentetik veriler kullanılarak yeniden yapılandırma sonuçları. Satırlar, sırasıyla OLS, Ridge Regresyon, LASSO Regresyon, Elastic-Net ve önerilen yöntemin bir büyük inklüzyon için regülarizasyon yöntemlerini temsil eder. Sütunlar gürültü seviyesini temsil eder. İnklüzyonların derinliği $z = 1.8$ cm. Görüntüler, z = 0 düzlemindeki enine kesit görünümü gösterir. Görüntülerindeki yeşil daireler inklüzyonun gerçek konumunu temsil eder. Kırmızı küre, yöntemin bulduğu inklüzyonu gösterir.



Şekil 5.8 Önerilen yöntemin sentetik veriler kullanılarak yeniden yapılandırma sonuçları. Satırlar, sırasıyla OLS, Ridge Regresyon, LASSO Regresyon, Elastic-Net ve önerilen yöntemin bir büyük inklüzyon için regülarizasyon yöntemlerini temsil eder. Sütunlar gürültü seviyesini temsil eder. İnklüzyonların derinliği $z = 1.8$ cm. Görüntüler, yeniden yapılandırma sonuçlarının 3 boyutlu görünümlerini göstermektedir.

Tablo 5.3 Gürültülü ve ölçüm gürültüsü eklenmemiş sentetik veriler için önerilen yöntemin doğruluğu (Gürültüsüz = Ek ölçüm gürültüsü eklenmez)

Doğruluk (%)

Metot	Gürültüsüz	20dB	10dB	5dB
OLS	100	100	88,5	72
LASSO Regresyon	100	100	91,5	77,5
Ridge Regresyon	100	100	89,5	74,5
Elastic-Net	100	100	88,5	71,5
Önerilen Metot	**100**	**100**	**96,5**	**85**

Ortalama CNR Değeri

Metot	Gürültüsüz	20dB	10dB	5dB
OLS	$2{,}72\text{x}10^{7}$	27,46	14,13	11,21
LASSO Regresyon	$2{,}61\text{x}10^{7}$	41,84	31,86	28,74
Ridge Regresyon	$4{,}03\text{x}10^{7}$	35,35	23,59	20,13
Elastic-Net	$3{,}05\text{x}10^{7}$	30,44	15,87	13,55
Önerilen Metot	$\mathbf{33{,}22}\text{x}10^{8}$	**160,49**	**67,11**	**39,82**

Ortalama Kullback–Leibler Diverjans Değeri

Metot	Gürültüsüz	20dB	10dB	5dB
OLS	$2{,}73\text{x}10^{-6}$	0,79	1,95	3,09
LASSO Regresyon	$2{,}84\text{x}10^{-6}$	0,57	1,10	1,76
Ridge Regresyon	$1{,}84\text{x}10^{-6}$	0,65	1,45	2,24
Elastic-Net	$2{,}43\text{x}10^{-6}$	0,77	1,84	2,72
Önerilen Metot	$\mathbf{5{,}90}\text{x}10^{-7}$	**0,15**	**0,40**	**0,75**

Tablo 5.4 Literatürde yapılan çalışmalar

Çalışma	Gör. Yön.	Reg. Met..	Çözücü	Ink.	Gürültü sev.	Sonuçlar
Bi and at al. [8]	DOT	Standard reg. Sparsity reg.	Split Bregman, YALL1, GPSR, GPSR	Bir and iki ink. Derinlik: Belirtilmemiş	0%, 0,1%, 1%, 10% Gauss Gürültüsü	For Split Bregmen + Sparsity Reg. Time: 79,426 Data Misfit:0,0044 RE:0,1464 SNR:4,98
Cao and at al. [54]	DOT	Sparsity reg.	Expectation-maximization algorithm	Bir ve iki ink.	Gauss gürültüsü ile standart sapma $\sigma = 0.01$	Belirtilmemiş
Tang and at. al. [127]	DOT	TV-L1 regularization	Jacobian- based Levenberg-Marquardt type method	iki küçük ink., üç küçük ink, bir büyük ve iki küçük ink.	Gürültüsüz yapay data	The relative residual error: $7,3\times10^{-5}$ The relative solution error: 13.29
Jiang and at al.[128]	FMT	l2,1-norm	The Nesterov's method	Bir ve İki İnk. Derinlik: Belirtilmemiş	5%, 10%, 15%, 20% Gauss gürültüsü	PE: S1:0,14 S2:0,16 CNR:89,69 Time:4,37
Yao and at. al. [5]	DOT	Tikhonov, GLS, RS, QNNVSR	Split Augmented Lagrangian Shrinkage Algorithm (SALSA)	"L" şekli	Beyaz Gauss Noise	QNNVSR için SSIM: 0,92, CNR:11,97
Leng and at al.[10]	DOT	The linearized Bregman alg. (LBSR)	The İteratif Split Bregman metot	İki fantom sayısal simülasyonlar	gürültüsüz and in vivo deneyler	LE: 0, CNR:20,8, Maximum reconstructed energy value: S1:0,0091 S2:0,0082, Time:6,68
Bhowmik and at al. [112]	DOT	DRO-DOT	SALSA	Bir ink.	Gürültüsüz yapay data and fantom deneyleri transrektal geometri kullanarak	AR: 0,98, VR:0,97, CR:87,25 RT:2,65
Niu and at al. [58]	DOT	DCA and Spatially variant regularization (SVR)	Mevcut değil	Simülasyon ve fantom deneyleri Bir ve iki ink.-İki ink. derinlikleri z= -2 cm and z=-3 cm	Belirtilmemiş	CNR and PE sayısal olarak belirtilmemiş
Tian and at al. [59]	FDOT	DCA temelli Tikhonov regularizasyonu	Mevcut değil	Bir ve iki ink. -İki ink derinlikleri z $= -2,1$ cm ve z=$-1,7$ cm	%1 Rastgele gürültü	Tikhonov+DCA $\Delta_{\mu a} = 0,2$ $\Delta\mu_{max} = 0,052$ $\Delta\mu a_{ROI} = 0.091$
Geliştirilen Metot	DOT	Novel Regularization Method	Konveks optimizasyon	Bir ve İki ink. - İki ink. derinlikleri: z $= 0,75$ cm ve z=$1,95$ cm	20 dB,5 dB,10 dB Beyaz Gauss gürültüsü	5 dB gürültü için Doğruluk: 98, 5% Ortalama CNR: 128, 35 Ortalama KL Diverjans: 0, 18

6
DERİN ÖĞRENME İLE DOT TERS PROBLEM ÇÖZÜMÜ

Tez çalışmasının bu bölümünde geliştirilen yeni regülarizasyon metodunun yanında DOT'ta artan derinlik ile düşen doğruluk değerleri için yapay zeka temelli ters problem çözümü amaçlanmaktadır.

DOT'taki hem ileri hem de ters problemler, sistemdeki doğrusal olmayan özellikler, heterojenlikler ve gürültü nedeniyle zordur. Doğrusal regresyon ve regülarizasyon gibi bu problemleri çözmeye yönelik geleneksel yöntemler, ölçülen veriler ile optik özellikler arasındaki ilişkilerin karmaşıklığını yakalama yetenekleri açısından sınırlı olabilir.

Derin öğrenme, DOT'taki ileri ve ters problemleri çözmek için umut verici bir yaklaşım olarak ortaya çıkmıştır. Konvolüsyonel sinir ağları (Convolutional Neural Networks-CNN) ve tekrarlayan sinir ağları (Recurrent Neural Network RNN) gibi derin öğrenme algoritmaları, ölçülen veriler ile optik özellikler arasındaki karmaşık ilişkileri öğrenebilir ve optik özelliklerden ölçülen verileri tahmin etmek (ileri problem) veya ölçülen verilerden optik özellikleri yeniden oluşturmak (ters problem) için kullanılabilir. DOT'ta ileri ve ters problemler için derin öğrenme kullanmanın bir avantajı, ölçülen veriler ile optik özellikler arasındaki karmaşık ilişkileri öğrenme yeteneğidir. Konvolüsyonel sinir ağları ve tekrarlayan sinir ağları gibi derin öğrenme algoritmaları, bu ilişkileri büyük ve çeşitli veri kümeleri üzerinde eğitim yoluyla öğrenebilir. Bu, doğrusal regresyon veya regülarizasyon gibi geleneksel yöntemlere kıyasla tahminlerin veya yeniden yapılandırmaların doğruluğunu ve kararlılığını artırabilir.

Derin öğrenmenin DOT'taki ileri ve ters problemler için bir başka avantajı da büyük ve çeşitli veri kümelerinden öğrenme ve yeni verilere genelleme yeteneğidir. Bu, dokudaki optik özelliklerin değişkenliğini ve karmaşıklığını ele almak için yararlı olabilir. Derin öğrenme algoritmalarının, DOT'taki ileri ve ters problemler için büyük veri kümelerinden öğrenme ve yeni verilere genelleme yapma konusunda etkili olduğu gösterilmiştir.

Bu avantajlara rağmen, DOT'taki ileri ve ters problemler için derin öğrenmeyi kullanmanın çeşitli zorlukları da vardır. Bu zorluklardan biri, eğitim ve doğrulama için büyük ve çeşitli veri kümelerinin gerekli olmasıdır. Bu veri kümelerini pratikte, özellikle de belirli uygulamalar veya klinik senaryolar için elde etmek zor olabilir [129]. Bir diğer zorluk ise derin öğrenme algoritmalarının eğitilmesi zaman alabilen bir süreçtir ve özel donanım gerektirebilen hesaplama karmaşıklığıdır [130].

Bu zorluklara rağmen, derin öğrenme DOT'taki ters problem için umut verici sonuçlar göstermiştir ve yeniden yapılandırılan optik özelliklerin doğruluğunu ve kararlılığını artırma potansiyeline sahiptir. DOT'taki ters problem için derin öğrenmenin yeteneklerini ve sınırlamalarını tam olarak anlamak ve algoritmaları farklı uygulamalar için optimize etmek için daha fazla araştırmaya ihtiyaç vardır.

Derin öğrenme kullanarak DOT'taki ters probleme yaklaşmanın bir yolu, ölçülen verilerden dokunun optik özelliklerini tahmin etmek için bir sinir ağını eğitmektir. Bu, bilinen optik özellikler ve bunlara karşılık gelen ölçülen verilerden oluşan bir veri kümesi kullanılarak ve sinir ağı, tahmin edilen ve gerçek optik özellikler arasındaki hatayı en aza indirecek şekilde eğitilerek yapılabilir.

Diğer bir yaklaşım ise, ölçülen verilerden ve bir dizi önceki kısıtlamadan veya varsayımdan optik özellikleri tahmin etmek için bir sinir ağını eğiterek DOT'taki ters problemi düzenlemek için derin öğrenmeyi kullanmaktır. Bu, doku hakkında ek bilgiler ekleyerek yeniden yapılandırılan optik özelliklerin kararlılığını ve doğruluğunu artırmaya yardımcı olabilir.

DOT'ta ters problem için derin öğrenmeyi kullanırken dikkat edilmesi gereken önemli bir husus, sinir ağı mimarisinin ve optimizasyon algoritmasının seçimidir. Aralarından seçim yapılabilecek birçok farklı türde sinir ağı ve optimizasyon algoritması vardır ve en uygun olanları seçmek zor olabilir. DOT'taki sinir ağı mimarisi için bazı yaygın seçenekler, sırasıyla 2D ve 3D verilerden öğrenebilen CNN'leri ve RNN'leri içerir. Optimizasyon algoritması için bazı yaygın seçenekler arasında verimli ve yaygın olarak kullanılan algoritmalar olan stokastik gradyan inişi ve Adam bulunmaktadır. Dikkate alınması gereken bir diğer husus da verilerin ön işleme tabi tutulması ve normalleştirilmesidir. Gürültüyü, yapaylıkları ve diğer hata kaynaklarını ortadan kaldırmak için ölçülen verilerin ve optik özelliklerin önceden işlenmesi genellikle gereklidir. Sinir ağının verilerden etkili bir şekilde öğrenebilmesini sağlamak için verilerin normalleştirilmesi de önemlidir.

Son olarak, DOT'taki ters problem için derin öğrenme algoritmasının performansını uygun ölçütler ve kıyaslamalar kullanarak değerlendirmek önemlidir. Bu, algoritmanın yeteneklerini ve sınırlamalarını anlamaya ve iyileştirme alanlarını

belirlemeye yardımcı olabilir. Algoritmanın performansını değerlendirmek için kullanılan bazı yaygın ölçütler arasında ortalama karesel hata, korelasyon katsayısı ve yapısal benzerlik endeksi yer almaktadır [129, 131].

6.1 DERİN ÖĞRENME

Derin öğrenme, verilerdeki karmaşık örüntüleri ve ilişkileri öğrenmek için yapay sinir ağlarının kullanılmasını içeren makine öğreniminin bir alt alanıdır. Yapay sinir ağları, biyolojik beynin yapısından ve işlevinden esinlenilmiştir ve birbirine bağlı düğümlerin veya "nöronların" çoklu katmanlarından oluşur. Bu katmanlar, ağırlıklı bağlantılar ve doğrusal olmayan aktivasyon fonksiyonları aracılığıyla girdi verilerini işleyebilir ve dönüştürebilir, böylece ağın verilerdeki karmaşık kalıpları ve ilişkileri öğrenmesine olanak tanır.

Derin öğrenme algoritmaları büyük ve çeşitli veri kümelerinden öğrenebilir ve görüntü ve konuşma tanıma, doğal dil işleme ve tahmine dayalı modelleme dahil olmak üzere çeşitli uygulamalarda başarılı olmuştur. Bu algoritmalar, geleneksel makine öğrenimi yöntemlerinin performansını aşarak birçok görevde en son teknolojiye sahip performansa ulaşabilmiştir.

Derin öğrenmenin en önemli avantajlarından biri görüntü, ses ve metin gibi ham ve yapılandırılmamış verilerden öğrenme yeteneğidir. Bu, derin öğrenme algoritmalarının manuel özellik seçimine gerek kalmadan verilerden yararlı özellikleri ve kalıpları otomatik olarak çıkarmasına olanak tanır. Derin öğrenme algoritmaları ayrıca büyük ve çeşitli veri kümelerinden öğrenebilir, bu da yeni verilere genelleme yapmalarına ve değişen ortamlara uyum sağlamalarına olanak tanır.

Konvolüsyonel sinir ağları, tekrarlayan sinir ağları ve oto kodlayıcılar dahil olmak üzere çeşitli derin öğrenme algoritmaları vardır. CNN'ler genellikle görüntü ve video analizi için kullanılır ve konvolüsyonel katmanların kullanımı yoluyla verilerdeki yerel ve uzamsal örüntüleri yakalayabilir. RNN'ler zaman serileri veya doğal dil gibi sıralı verileri işleyebilir ve yineleme kullanarak verilerdeki zamansal bağımlılıkları yakalayabilir. Otomatik kodlayıcılar, kodlayıcı ve kod çözücü ağları kullanarak verilerin altında yatan yapıyı öğrenebilen denetimsiz öğrenme algoritmalarıdır.

Derin öğrenme, bilgisayarla görme, doğal dil işleme, konuşma tanıma, tahmine dayalı modelleme ve biyomedikal görüntüleme dahil olmak üzere çok çeşitli alanlara ve uygulamalara uygulanmıştır. Bilgisayarla görmede, derin öğrenme algoritmaları nesne tanıma, segmentasyon ve sahne anlama gibi görevler için kullanılmıştır. Doğal dil işlemede, dil çevirisi, metin sınıflandırma, duygu analizi, tahmine dayalı

modellemede tahmin ve risk değerlendirmesi gibi görevler için kullanılmaktadır. Biyomedikal görüntülemede, derin öğrenme algoritmaları görüntü segmentasyonu ve teşhis gibi alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Sinir ağlarından bazıları aşağıda kısaca verilmiştir.

Evrişimli sinir ağları (CNN): CNN'ler, görüntü ve video analizi için yaygın olarak kullanılan bir tür ileri beslemeli sinir ağıdır. CNN'ler birbirine bağlı düğümlerin veya "nöronların" birden fazla katmanından oluşur ve giriş verilerini bir dizi konvolüsyonel, havuzlama ve tam bağlı katmanlar aracılığıyla işlemek ve dönüştürmek için tasarlanmıştır. Konvolüsyonel katmanlar giriş verilerine bir konvolüsyon işlemi uygulayarak ağın verilerdeki yerel ve uzamsal örüntüleri yakalamasını sağlar. Havuzlama katmanları, konvolüsyonel katmanlar tarafından üretilen özellik haritalarını aşağı örnekleyerek verilerin boyutluluğunu azaltmaya ve en önemli özellikleri çıkarmaya yardımcı olur. Tam bağlı katmanlar, çıkarılan özellikleri birleştirir ve nihai bir tahmin veya sınıflandırma yapar [132, 133].

Tekrarlayan sinir ağları (Recurrent neural networks RNN): RNN'ler, zaman serileri veya doğal dil gibi sıralı verileri işlemek için tasarlanmış bir sinir ağı türüdür. RNN'ler birbirine bağlı düğümlerin veya "nöronların" birden fazla katmanından oluşur ve giriş verilerini bir dizi tekrarlayan bağlantı yoluyla işlemek üzere tasarlanmıştır. Tekrarlayan bağlantılar ağın verilerdeki zamansal bağımlılıkları yakalamasını ve olayların sırasını modellemesini sağlar. RNN'ler zaman içinde açılabilir, bu da uzun veri dizilerini işlemelerine ve uzun vadeli bağımlılıkları yakalamalarına olanak tanır [134, 135].

Üretken karşıt ağlar (Generative adversarial networks GAN): GAN'lar, verilerin altında yatan dağılımı öğrenmek ve bu dağılımdan yeni veri örnekleri oluşturmak için tasarlanmış bir tür denetimsiz öğrenme algoritmasıdır. Yeni veri örnekleri üretmek için bir üretici ağın ve gerçek ve sahte örnekleri ayırt etmek için bir ayırıcı ağın eğitilmesini içermektedir [136].

Derin inanç ağları: (Deep belief networks DBN): DBN'ler, verilerin hiyerarşik bir temsilini öğrenmek için birden fazla stokastik, gizli birim katmanı kullanan bir tür denetimsiz öğrenme algoritmasıdır. DBN'ler, her katmanın aşağıdaki katmandan verileri yeniden yapılandırmak için eğitilmesini içeren açgözlü bir katman-bilge eğitim algoritması kullanılarak eğitilir. DBN'ler özellik öğrenme, boyut azaltma ve sınıflandırma gibi görevler için kullanılabilir [137].

Uzun kısa süreli bellek (Long Short-Term Memory LSTM) ağları: LSTM ağları, sıralı verilerdeki uzun vadeli bağımlılıkları yakalamak için tasarlanmış bir RNN türüdür. LSTM ağları bellek hücreleri, giriş kapıları, çıkış kapıları ve unutma

kapılarından oluşur, bu da ağın uzun süreler boyunca bilgi depolamasına ve manipüle etmesine olanak tanır. LSTM ağları dil modelleme ve makine çevirisi gibi görevler için kullanılmıştır [134, 138].

Bu tez çalışmasında ters problem çözümü için Evrişimli Sinir Ağı kullanılmıştır. Aşağıda ayrıntılı olarak anlatılmıştır.

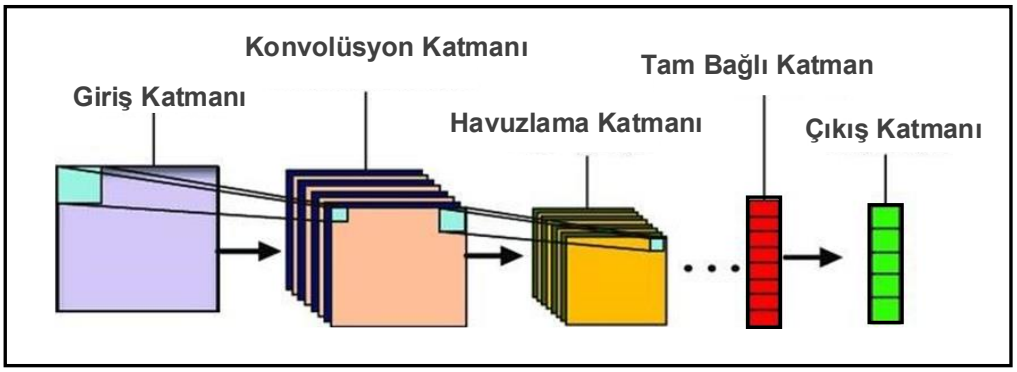
6.1.1 Evrişimli Sinir Ağları (Convolutional Neural Networks CNN)

Evrişimli sinir ağları, özellikle görüntü ve video analizi için tasarlanmış bir tür sinir ağı mimarisidir. CNN'ler birbirine bağlı düğümlerin çoklu katmanlarından oluşur ve bir eğitim ve optimizasyon süreci aracılığıyla verilerin hiyerarşik temsillerini öğrenmek için eğitilir.

CNN'lerin temel özelliği, giriş verilerinden özellikleri otomatik olarak öğrenmek ve çıkarmak için tasarlanmış olan evrişimli katmanların kullanılmasıdır. Evrişimsel katmanlar, verilerdeki belirli kalıpları veya özellikleri tespit etmek için eğitilen bir dizi filtreden oluşur. Örneğin, bir filtre bir görüntüdeki kenarları tespit etmek veya belirli bir piksel modelini tespit etmek için eğitilebilir. Bir CNN'deki her bir evrişimsel katman bir dizi giriş özelliği (örneğin, bir görüntünün piksel değerleri) alır ve bir dizi çıkış özelliği (örneğin, filtreler tarafından tespit edilen kenarlar veya desenler) üretmek için filtreleri uygular. Bir evrişimsel katmandan elde edilen çıktı özellikleri bir sonraki evrişimsel katmana girdi olarak verilebilir ve böylece ağın her katmanda daha karmaşık özellikleri öğrenmesi sağlanır. Konvolüsyonel katmanlara ek olarak, CNN'ler ayrıca veri boyutunu azaltmak ve konvolüsyonel katmanlardan en önemli özellikleri çıkarmak için tasarlanmış havuzlama katmanlarını da içerir. Havuzlama katmanları tipik olarak bir dizi bitişik giriş özelliğini alarak ve bunları tek bir toplu özellik (örneğin, maksimum değer, ortalama değer vb.) ile değiştirerek çalışır. Bu işlem, verilerin boyutunu küçültmeye ve modelin karmaşıklığını azaltmaya yardımcı olurken verilerin en önemli özelliklerini de korumaya devam eder. Son olarak CNN'ler, evrişimsel ve havuzlama katmanları tarafından öğrenilen özelliklere dayalı olarak verileri sınıflandırmak için kullanılan tam bağlantılı katmanları da içerir. Tam bağlı katmanlar geleneksel bir sinir ağındaki katmanlara benzer ve giriş özelliklerine dayalı olarak bir dizi çıkış sınıfı veya etiket üretmek üzere eğitilir [132, 139, 140].

6.1.2 Evrişimsel katmanlar:

Evrişimsel katmanlar CNN'lerin birincil yapı taşlarıdır ve girdi verilerinden özelliklerin öğrenilmesi ve çıkarılmasından sorumludur. Konvolüsyon, özellik çıkarma için kullanılan özel bir doğrusal işlem türüdür. Her bir evrişimsel katman, verilerdeki



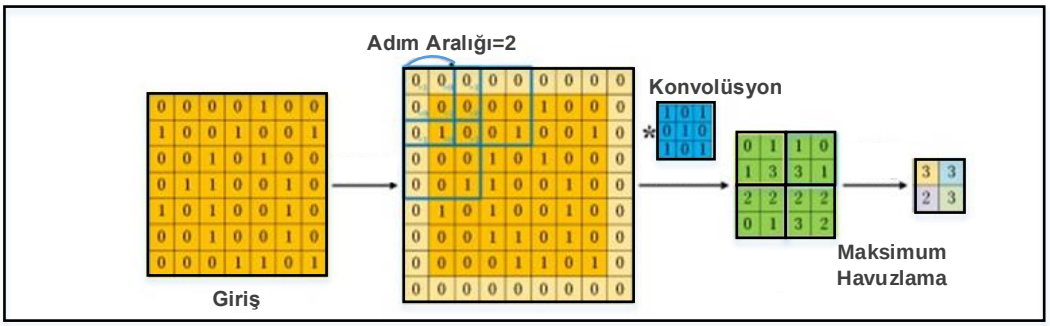
Şekil 6.1 Evrişmli Sinir Ağı Blok diyaramı[141]

belirli kalıpları veya özellikleri tespit etmek için eğitilen bir dizi filtreden oluşur. Burada çekirdek (kernel) adı verilen küçük bir sayı dizisi, tensör adı verilen bir sayı dizisi olan girişe uygulanır. Giriş verilerine bir filtre uygulamak için, evrişim katmanı filtreyi giriş verileri boyunca kaydırır ve her konumda filtre ile giriş verileri arasında bir nokta çarpımı gerçekleştirir. İki ardışık çekirdek konumu arasındaki mesafe adım olarak adlandırılır ve bu adım aynı zamanda konvolüsyon işlemini de tanımlar. Yaygın stride seçimi 1'dir; ancak, bir elde etmek için bazen 1'den büyük adımlar kullanılır. Bu işlem, giriş verilerinde öğrenilen örüntü veya özelliğin varlığını temsil eden bir dizi çıkış özelliği ile sonuçlanır. Bir evrişimsel katmandan elde edilen çıktı özellikleri bir sonraki evrişimsel katmana girdi olarak verilebilir ve böylece ağın her katmanda daha karmaşık özellikler öğrenmesi sağlanır. Denklem (6.1) 'de görüldüğü gibi, filtre katsayıları (f), görüntüdeki eşit büyüklükteki pencerelerle (w) çarpılır ve toplamları alınarak hesaplanır. Sonuç olarak, ayırt edici üst düzey özelliklere dayalı yeni bir görüntü elde edilir [142].

$$w(x,y) * f\,(x,y) = \sum_{i=-a}^{a} \sum_{j=-b}^{b} w(i,j)\, f\,(x+i, y+j) \tag{6.1}$$

6.1.3 Havuzlama katmanları:

CNN yalnızca konvolüsyon katmanları değil, aynı zamanda bazı havuzlama katmanları da içerir. Bir konvolüsyon katmanından hemen sonra bir havuzlama katmanı olabilir. Bu, konvolüsyon katmanlarının çıktılarının ağın havuzlama katmanlarının girdileri olduğunu göstermektedir. Havuzlama katmanları veri boyutunu azaltmak ve konvolüsyonel katmanlardan en önemli özellikleri çıkarmak için kullanılır. Havuzlama katmanları tipik olarak bir dizi bitişik giriş özelliğini alarak ve bunları tek bir toplu özellik (örneğin, maksimum değer, ortalama değer vb.) ile değiştirerek çalışır.



Şekil 6.2 2 boyutlu CNN işleyişi[143]

Havuzlama katmanları, verilerin boyutluluğunu adım adım azaltmayı ve bu nedenle ek olarak parametre sayısını ve ayrıca modelin prosedür karmaşıklığını azaltmayı ve böylece aşırı uyum konusunu kontrol etmeyi amaçlamaktadır. Şekil 6.2'de maksimum havuzlama işlemi gösterilmektedir.

Havuzlama katmanı, girdideki her aktivasyon haritası üzerinde çalışır ve 'MAX' fonksiyonunu kullanarak boyutluluğunu ölçeklendirir. Çoğu CNN'de bunlar, girdinin uzamsal boyutlarında 2'lik bir adımla uygulanan 2 x 2 boyutunda çekirdeklere sahip maxpooling katmanlarının mevcut şeklidir ve aktivasyon haritasını orijinal boyut - derinlik hacmini standart boyutunda tutarken girdinin %25'ine kadar ölçeklendirir [143].

6.1.4 Tam bağlantılı katmanlar:

Tam bağlantılı katmanlar, konvolüsyonel ve havuzlama katmanları tarafından öğrenilen özelliklere dayalı olarak verileri sınıflandırmak için kullanılır. Tam bağlı katmanlar geleneksel bir sinir ağındaki katmanlara benzer ve giriş özelliklerine dayalı olarak bir dizi çıkış sınıfı veya etiketi üretmek üzere eğitilir.

Tam bağlantılı katman, genellikle CNN'nin sonunda bulunur ve sınıflandırma işlemlerinde kullanılır. Bu katman sınıf skorlarını optimize etmek için kullanılır. Ayrıca, burada gizli katman sayısı derin öğrenmeye dayalı mimarilerde farklılık gösterebilir. Belli eşik değerin altındaki düğümlerin bırakılması ya da seyreltilmesinin (dropout) öğrenmede başarımı arttırmaktadır. Bir başka ifade ile zayıf bilgilerin unutulması öğrenimi arttırmaktadır.

Konvolüsyon ve havuzlama katmanlarının çıktılarından giriş görüntülerinin üst düzey özelliklerini çıkarabildiğimiz için, tam bağlantılı bir katman eklemek, bu özelliklerin

doğrusal olmayan kombinasyonlarını öğrenmek için ek olarak ucuz bir yaklaşımdır. Konvolüsyon ve havuzlama katmanlarından gelen özelliklerin çoğu sınıflandırma görevi için yeterli olabilir; ancak bu özelliklerin kombinasyonları daha da iyi olabilir. Tam bağlı bir katmandaki nöronlar uzamsal olarak organize değildir, bu nedenle tam bağlı bir katmandan sonra bir konvolüsyon katmanı olamaz. Tam bağlı katman, iki boyutlu çıktıyı, giriş sınıfı etiketini tahmin etmek için bir softmax fonksiyonu veya bir sigmoid kullanabileceğimiz çıkış katmanına aktarır [143].

$$sof\,tmax(z)_j = \frac{e^{z_j}}{\sum_{k=1}^{K} e^{z_k}},\ j = 1, \ldots, K \tag{6.2}$$

CNN mimarisinde tam bağlantılı katmanda çok sınıflı sınıflandırmaya ihtiyaç duyulduğundan, denklem (6.2) 'de verildiği gibi bir softmax fonksiyonu kullanılmaktadır. Bu fonksiyon ile kurulan Softmax sınıflandırıcısı, CNN mimarilerine sıkça kullanılır. Bu sınıflandırıcı, her sınıf için 0-1 arasında olasılıklı değerler üretir. Sonuç olarak, en yüksek olasılık değeri, model tarafından tahmin edilen sınıfı verir [132, 139].

Bazı durumlarda, tam bağlı katman, amacın ayrık bir sınıf etiketi yerine sürekli bir çıktı değerini tahmin etmek olduğu regresyon görevleri için de kullanılabilir. Bu durumda tam bağlı katman, ortalama karesel hata (MSE) gibi bir kayıp fonksiyonu kullanılarak tahmin hatasını en aza indirecek şekilde eğitilir.

6.1.5 Normalleştirme katmanları:

Normalleştirme katmanları, giriş verilerini veya konvolüsyonel katmanların çıkış özelliklerini normalleştirmek için kullanılır. Normalleştirme katmanları, CNN'in kararlılığını ve performansını artırmak veya modelin aşırı uyumunu önlemek için kullanılabilir. Toplu normalizasyon (batch normalization), katman normalizasyonu ve grup normalizasyonu dahil olmak üzere kullanılabilecek çeşitli normalizasyon teknikleri vardır.

6.1.6 Aktivasyon katmanları:

Aktivasyon katmanları CNN'e doğrusal olmayan özellikler katmak için kullanılır ve ağın verilerdeki daha karmaşık ilişkileri öğrenmesini sağlar. Aktivasyon katmanları tipik olarak giriş verilerine eleman bazında doğrusal olmayan bir fonksiyon (örn. sigmoid, tanh, ReLU, vb.) uygulayarak ağın daha karmaşık ilişkileri modellemesini sağlayacak şekilde dönüştürür [132, 139].

Düzeltilmiş doğrusal birim (ReLU), evrişimli sinir ağlarında (CNN'ler) ve diğer derin öğrenme modellerinde kullanılan yaygın bir aktivasyon fonksiyonudur ve bu çalışmada tasarlanan CNN mimarisi için tercih edilmişştir. ReLU fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f(x) = max(0, x) \tag{6.3}$$

Burada x aktivasyon fonksiyonunun girdisidir.

ReLU işlevi, onu derin öğrenme modellerinde kullanım için popüler bir seçim haline getiren bir dizi istenilen özelliğe sahiptir. Özellikle, ReLU fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

Doygun değildir (Non-saturating): ReLU fonksiyonu yüksek girdi değerlerinde doygunluğa ulaşmaz, bu da girdi verileri çok büyük olduğunda bile öğrenmeye ve gelişmeye devam edebileceği anlamına gelir.

Hesaplama açısından verimlidir: ReLU fonksiyonunun hesaplanması çok basittir, sadece tek bir karşılaştırma ve tek bir çarpma işlemi gerektirir. Bu da sigmoid veya tanh fonksiyonu gibi diğer aktivasyon fonksiyonlarından çok daha hızlı hesaplanmasını sağlar.

Doğrusal değildir: ReLU işlevi doğrusal değildir, yani verilerde doğrusal bir işleve göre daha karmaşık ilişkileri öğrenebilir. Bu önemlidir çünkü gerçek dünyadaki birçok veri dağılımı doğrusal değildir ve bu dağılımları doğru bir şekilde modellemek için doğrusal olmayan bir aktivasyon fonksiyonu gereklidir.

ReLU işlevini kullanmanın, ağın ağırlıkları doğru şekilde başlatılmadığında ve ağdaki bazı birimler etkin olmadığında (yani, her zaman 0 çıktı verdiğinde) ortaya çıkabilecek ReLU'ların ölmesi olasılığı da dahil olmak üzere birkaç potansiyel dezavantajı da vardır. Bununla birlikte, bu sorunlar genellikle ağırlıkların uygun şekilde başlatılması ve düzenlenmesi yoluyla hafifletilebilir [136, 144].

6.2 Uygulama

Tezin önceki bölümlerinde anlatıldığı üzere doğru derinlik lokalizasyonu, fonksiyonel optik tomografide (DOT) karşılaşılan başlıca zorluklardandır. Yakın kızılötesi ışık biyolojik dokularda yüksek oranda dağıldığından, bununla birlikte, foton yoğunluğu artan derinlikle birlikte hızla düşer bu da DOT'un derin dokudaki ölçüm hassasiyetini yüzeysel dokudakinden önemli ölçüde daha düşük hale getirir.

Derin bir nesneyi görüntüleme yeteneği, biyolojik dokulardaki fotonların kendine özgü dağınık doğası nedeniyle DOT yaklaşımından (CW-DOT, TD-DOT, FD-DOT) herhangi biri için bir sorun olmaya devam ediyor. DOT'un yüzeysel dokulara karşı yüksek duyarlılığı, derin bir nesnenin gerçek dışı bir şekilde yeniden yapılandırılmasına neden olarak zayıf bir derinlik lokalizasyonuna yol açar. Bu tez çalışmasının son bölümünde klasik regülarizasyon metotlarının gürültülü şartlarda derinlik arttıkça düşen inklüzyon bulma başarısının üstesinden gelmek için CNN tabanlı ters problem çözümü amaçlanmıştır.

Bu amaçla gürültülü ve gürültüsüz olarak elde edililen b görüntüleri CNN ağının eğitiminde kullanılmıştır. Farklı derinlikte ve konumda bulunan bir inklüzyon için ağ test edilmiş ve elde edilen değerler kullanularak x'ler çizdirilmiştir. CNN ağının çıkışında elde edilen x ile ideal x kullanılarak Bölüm 5'te antalılan hata metrikleri üzerinden sistemim başarısı test edilmiştir. Aşağıda veri setinin oluşturulması ve ağ tasarımı ayrıntılı olarak anlatılmaktadır.

6.2.1 Veri Kümesinin Oluşturulması

DOT'te ters problem çözümünde kullanılan b ölçüm vektörleri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır. Gerçek ölçüm verilerine sahip olmadığımız için sentetik veri seti oluşturulmuştur. Burada sentetik veri seti oluşturmak için ilk olarak MC simülasyonu kullanılarak ışık dağılımı modellenmiştir. Ancak tek bir kaynak için ışık dağılımı, ileri model ağırlık matrisini oluşturmak için yeterli değildir. Her bir kaynak-dedektör çifti için muz şekli kullanılarak ağırlık matrisi hesaplanmıştır.

Ağırlık matrisi üretiminde, radyal mesafe (r) 5 cm ve derinlik mesafesi (d) 3 cm için fluence oranı dağılımları hesaplanmıştır. Silindirik bir koordinattaki (r) ve (d) mesafeleri kartezyen koordinat sistemine dönüştürülmüştür. Daha sonra fuence oranı dağılımları gerçek geometriye aktarılmıştır. Kartezyen koordinat sisteminde x ekseni 9'a, y ekseni 9'a ve z ekseni 10 parçaya bölünmüştür, $N = Nx \times Ny \times Nz = 9 \times 9 \times 10 = 810(Nxyz)$

Ağırlık matrisi elde edildikten sonra inklüzyon 810 farklı noktaya yerleştirildiği durumlar için gürültüsüz b'lerden oluşan bir veri seti elde edilmiştir. Fakat görüntüleme cihazının gürültülü yapısı nedeniyle oluşturulan ölçüm vektörlerine beyaz Gauss gürültüsü eklenmiştir. Literatürde DOT uygulamalarında beyaz Gauss gürültüsü kullanılmaktadır. Her bir b vektörü için rastgele (10 dB'ye kadar) 1000 adet beyaz Gauss gürültüleri eklenerek toplamda 810000 tane gürültülü ve gürültüsüz ölçüm vektöründen oluşan bir veri seti elde edilmiştir. CNN'in görüntüler için iyi sonuç vermesi nedeniyle elde edilen b vektörleri b vektörünün boyutu kadar yan yana

ekleyerek çizdirilmiş ve b görüntüleri elde edilmiştir. Bu b görüntüleri gray scale olarak çizdirilmiş ve 64x64 boyutunda gürültülü ve gürültüsüz b görüntülerinden oluşan 81000 elemanda oluşan veri kümesi elde edilmiştir.

Elde edilen gürültülü ve gürültüsüz $64X64$ boyutunda b görünrülerinden oluşan veri seti kullanılarak CNN ağı eğitilmiştir. Tasarlanan CNN mimarisinde son katman sınıflandırma katmanı olarak kullanılmış ve sınıflandırma işlemi sonucunda elde edilen skor değerleri kullanılarak x matrisi elde edilmeye çalışılmıştır. Ağrılık matrisi olmadan ölçüm verileri kullanılarak ters problem çözülmüş ve inklüzyonun bulunduğu bölgeler tespit edilip (x matris) çizdirilmiştir. Veri kümesinin 80%'i eğitim 20%'i test kümesi olarak belirlenmiştir. CNN mimarisine regresyon katmanı yerine eklenen sınıflandırma kamanı sayesinde elde edilen skor değerleri kullanılarak sınıflandırma temelli bir regresyon yöntemi oluşturulmuştur. CNN tabanlı ters problem çözümünün başarısı doğruluk, CNR, KL diverjans ve Dice katsayıları kullanılarak değerlendirilmiştir. Ters problem çözümü için CNN tabanlı algoritma 6.1'de verilmektedir.

Tablo 6.1 CNN Eğitim ve Test İşlemi

Algoritma: CNN Eğitim ve Test İşlemi
Result: İnlüzyonun gürültülü şartlarda tespit edilmesi ve ters problem çözümü

eğer Eğitim
1) Beyaz Gaus gürültüsü eklenmiş ve gürültüsüz 64x64 boyutundaki ölçüm görüntüleri CNN ağının girişlerine uygula
2) CNN ağı kullanarak eğitim seti üzerinde bir model oluştur (810000 örnek, 80% rastgele seçilmiş
3) Eğitilmiş ağı elde et
değilse
CNN'ni doğruluğunu test et 162.000 örneği test ederek (%20 rastgele seçilmiş);
son
Sınıflandırma katmanından elde edilen skor değerlerini kullanarak x matrisini elde edin, model doğruluğunu hata metrikleri üzerinden hesaplayın

6.2.2 CNN Ağının Tasarımı

Bu çalışmada önerilen CNN tabanlı ters problem çözüm için oluşturulan model dört evrişim, beş havuzlama ağı, iki tam bağlı katman ve bir sınıflandırma katmanından oluşur. Önerilen CNN mimarisinde, bir giriş katmanı, dört evrişim (konvolüsyon) katmanı, beş havuzlama katmanı, iki tam bağlantılı katmanı ve bir çıkış katmanı bulunmaktadır. Birinci konvolüsyon katmanında 3×3 boyutunda 64 adet konvolüsyon filtresi, ikinci konvolüsyon katmanında 3×3 boyutunda 128 adet konvolüsyon filtresi, üçüncü konvolüsyon katmanında 3×3 boyutunda 256 adet konvolüsyon filtresi, dördüncü konvolüsyon katmanında ise 3×3 boyutunda 512 adet konvolüsyon filtresi

bulunmkatadır. Tüm evrişim katmanlarından sonra ReLU aktivasyon fonksiyonu uygulanmıştır. Ayrıca her konvolüsyon ve ReLU işleminden sonra adım kaydırma sayısı (kaydırma=[2 2]) alınarak 3×3 filtre boyutlu maksimum havuzlama ve son olarak ortalama havuzlama işlemi uygulanmıştır. Tam bağlı ilk iki katmanın her birinde sırası ile 512 ve 802 nöron bulunmaktadır. Son tam bağlı katmanda ise verideki sınıf sayısına bağlı olarak 810 tane nöron bulunmaktadır.

Eğitim deneylerinde, eğitim iterasyon sayısı 10, yığın boyutu, 16 olarak ayarlanmıştır. Derin öğrenmede hatayı en aza indirmek için kullanılan optimizasyon algoritmalarından Adam optimizasyon algoritması tercih edilmiştir. Sinir ağlarında ağın genelleme performansı aktivasyon fonksiyonuna göre değişkenlik gösterebilir. Bu bçalışmada bu nedenle, ReLU aktivasyon fonksiyonu derin sinir ağlarında ağın hızlı öğrenmesini ve yüksek sınıflandırma başarısı vermesi sebebi ile tercih edilmiştir. Bu çalışmada, ağda doğrusallığın önüne geçmek için ReLU aktivasyon fonksiyonu kullanılmıştır. CNN mimarisinde, tam bağlı katmanda çok sınıflı sınıflandırmaya ihtiyaç duyulduğundan softmax fonksiyon kullanılmıştır. Softmax katmanından elde edilen skor değerleri x matrisini oluşturmak için kullanılıştır. Bu değerler kullanılarak elde edilen x ile olması gereken x üzerinden hata metrikleri hesaplanmıştır. Aşırı öğrenme durumunun önüne geçmek için bu çalışmada, dropout değeri varsayılan olarak 0,5 (%50) olarak belirlenmiştir.

6.3 Uygulama Sonuçları ve Değerlendirme

Farklı gürültü seviyeleri için x'lerin bulunma doğrulukları, oluşturulan CNN ağı veri seti kullanılarak test edilmiştir. İlk olarak oluşturulan gürültüsüz ve gürültülü ölçüm verilerinden veri seti oluşturulmuş ve CNN ağı bu veri seti kullanılarak eğitilmiştir. CNN ağı oluşturulurken son katman sınıflama katmanı seçilip, 810 farklı sınıf oluşturulmuştur. x'ler softmax katmanından elde edilen 0 ve 1 arasında değer alan sınıfların olma olasılığını gösteren değerlerden elde edilmiştir. Bu değerler kullanılarak elde edilen x ve olması gereken x arasında hata metrikleri hesaplanmıştır.

6.3.1 CNN Tabanlı Ters Problem Çözümün Performansı

Bu simulasyonda incelenen örnek 6 mm çapında bir inklüzyon içeren, 5 cm çapında 3 cm derinliğinde bir silindirdir. İnklüzyon, $x = -0.6$ cm $\quad y = 0.3$ cm' yerleştirilmiştir. xy konumu sabit tutulup farklı derinlik değerleri için önerilen CNN ağının ters problemi çözme başarısı farklı gürültü seviyeleri için gözlemlenmiştir. Elde sonuçlar kullanılan hata metrikleri üzerinden hesaplanmış ve ortalama değerleri Tablo 6.2'te verilmiştir. DL Temelli metot 100 kez rastgele gürültü eklenerek çalıştırılmış ve tabloda

hata metriklerinin ortalama değerleri verilmiştir.

Tablo 6.2 Farklı gürültü seviyelerinde bütün derinlikler için CNN Tabanlı Ters Problem Çözümü

Doğruluk (%)

Derinlik	20dB	10dB	0dB	-5dB	-10dB
0.45	100	97,49	71,74	36,38	10,63
0,75	100	99,44	78,23	46,70	19,58
1,05	100	99,74	80,31	49,09	19,95
1,35	100	99,81	80,94	46,27	17,75
1,65	100	99,90	82,86	49,15	18,44
1,95	100	99,95	89,21	59,05	27,88
2,25	100	100	90,10	59,09	27,1
2,55	100	100	91,38	60,15	27,27
2,85	100	100	93,19	64,02	32,27

CNR Değeri

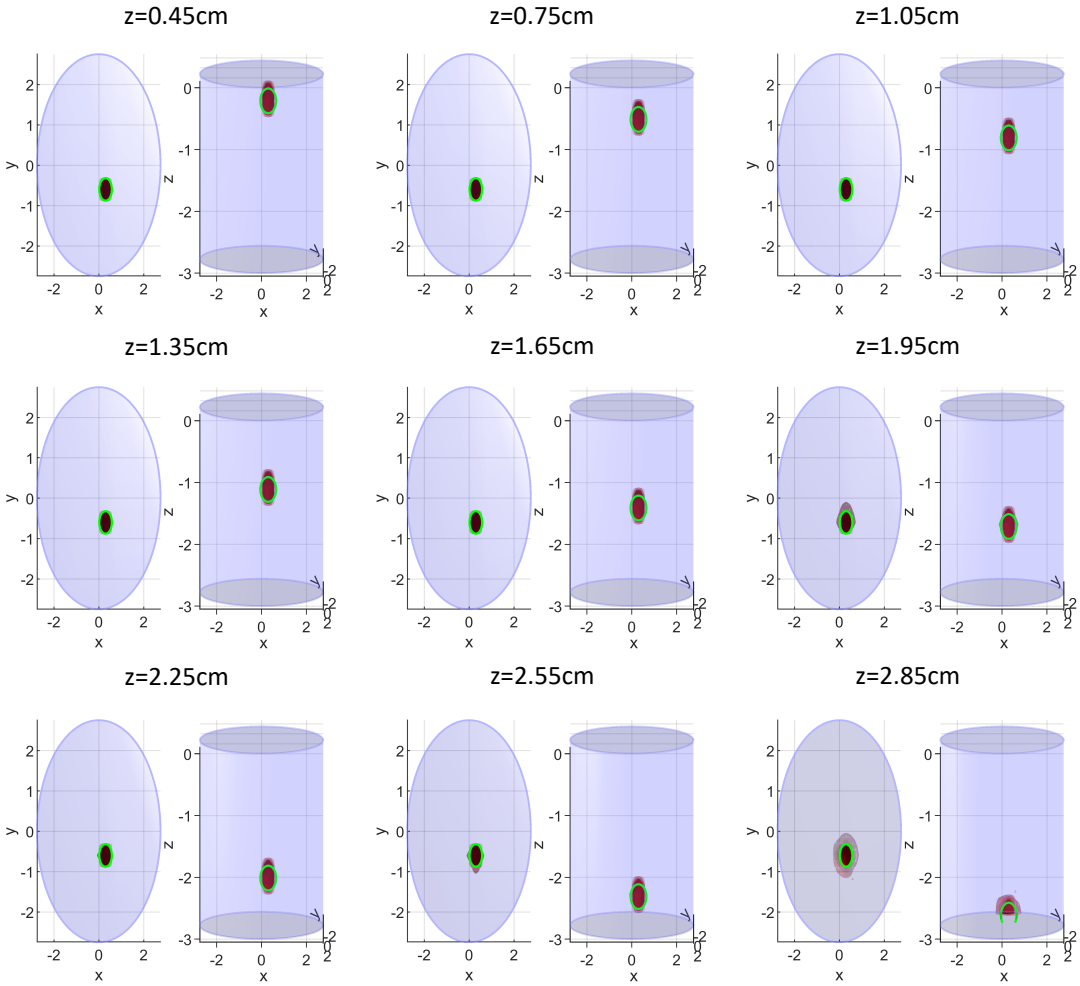
Derinlik	20dB	10dB	0dB	-5dB	-10dB
0,45	9.012,15	6.629,70	1.320,61	215,52	22,11
0,75	4.389,71	2.965,24	820,76	307,31	89,81
1,05	2.379,91	1.743,49	521,48	178,37	44,37
1,35	2.715,87	1.927,17	555,92	163,55	41,02
1,65	1.851,09	1.375,64	384,53	121,07	29,08
1,95	1.173,35	975,11	382,84	161,31	54,15
2,25	684,59	576,32	234,73	99,23	32,67
2,55	347,88	303,38	141,72	66,26	27,11
2,85	110,86	102,66	62,91	38,63	19,90

Ortalama Kullback–Leibler Diverjans Değeri

Derinlik	20dB	10dB	0dB	-5dB	-10dB
0,45	0,03	0,17	1,43	3,34	5,67
0,75	0,04	0,12	1,13	2,67	4,88
1,05	0,06	0,12	1,05	2,51	4,60
1,35	0,05	0,11	1,03	2,58	4,62
1,65	0,07	0,12	0,97	2,43	4,46
1,95	0,09	0,13	0,72	1,90	3,69
2,25	0,15	0,18	0,74	1,88	3,70
2,55	0,26	0,29	0,80	1,85	3,57
2,85	0,65	0,68	1,03	1,76	3,18

Tablo 6.2'de farklı derinlikler için elde edilen doğruluk, CNR ve KL diverjans değerleri verilmiştir. Düşük gürültü seviyelerinden derin dokuda ve yüzeye yakın bölgelere yerleştirlmiş inklüzyonlar yüksek başarı ile bulunmuştur. Artan gürültü seviyesi ile birlikte CNN tabanlı ters problem çözümünün derinde bulunan inklüzyon için yüzeyde bulunan inklüzyonlara kıyasla daha yüksek doğruluk ile çalıştığı görülmektedir. CNN

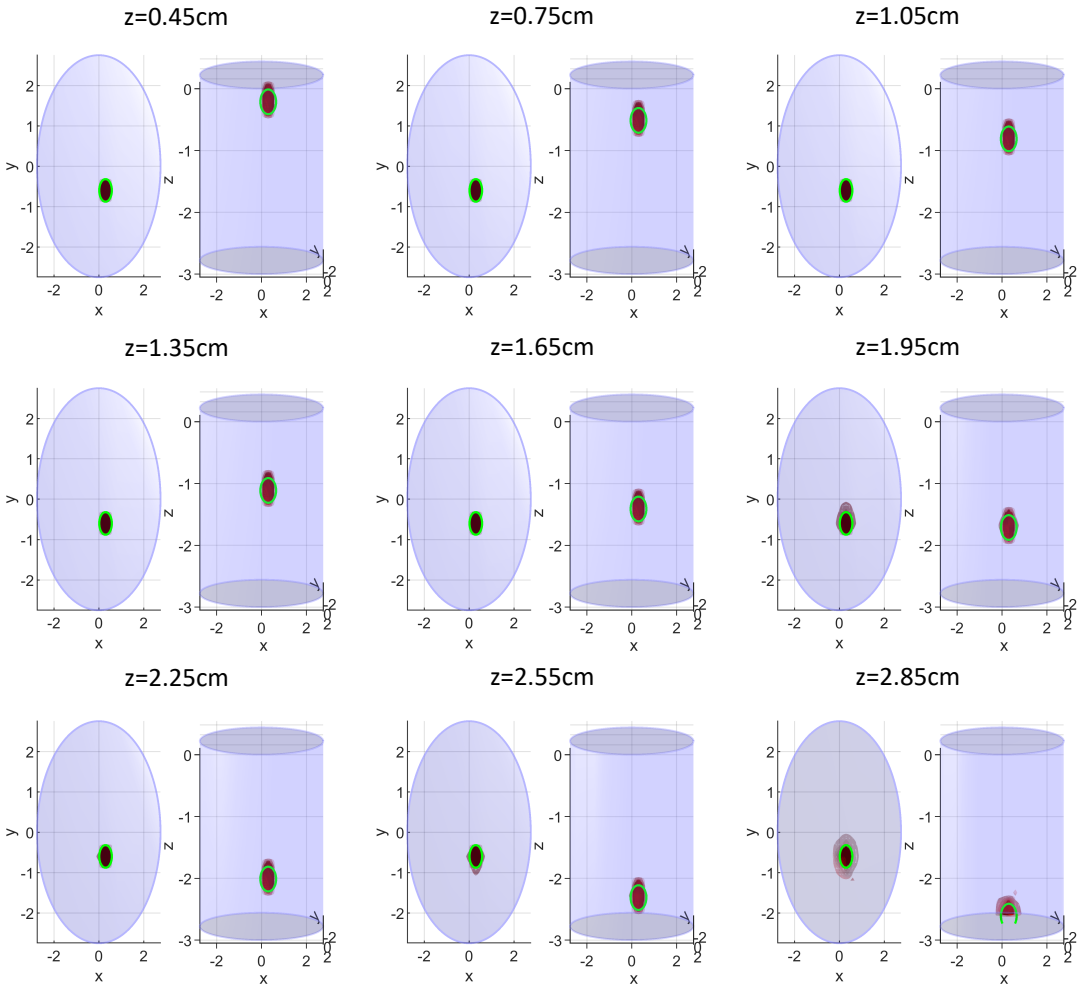
tabanlı metodun farklı gürültüler için tek inklüzyon için sonuçları Şekil 6.3- Şekil 6.7'de verilmektedir.



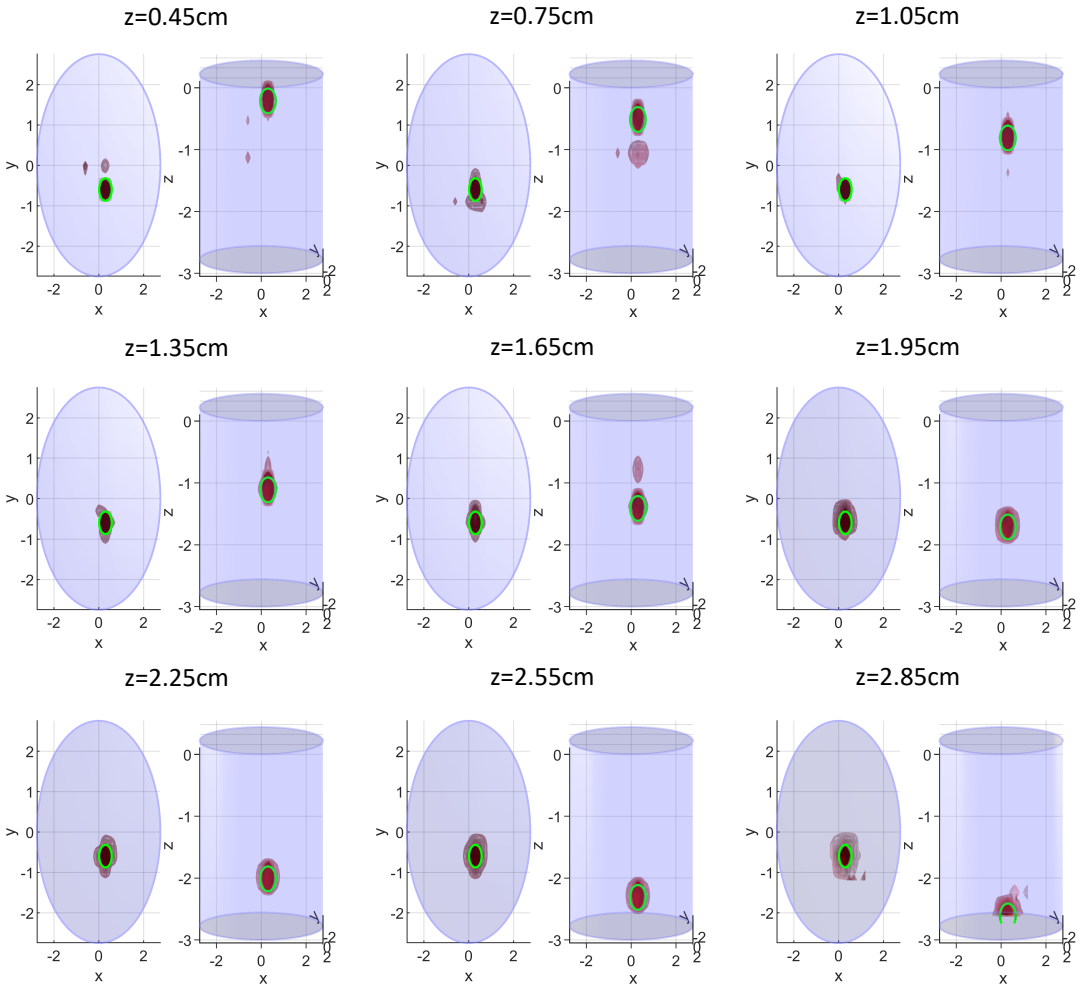
Şekil 6.3 20 dB gürültüde CNN sonuçları

6.3.2 CNN Tabanlı Ters Problem Çözümünde Bütün Voksellerin Ortalama Değerleri

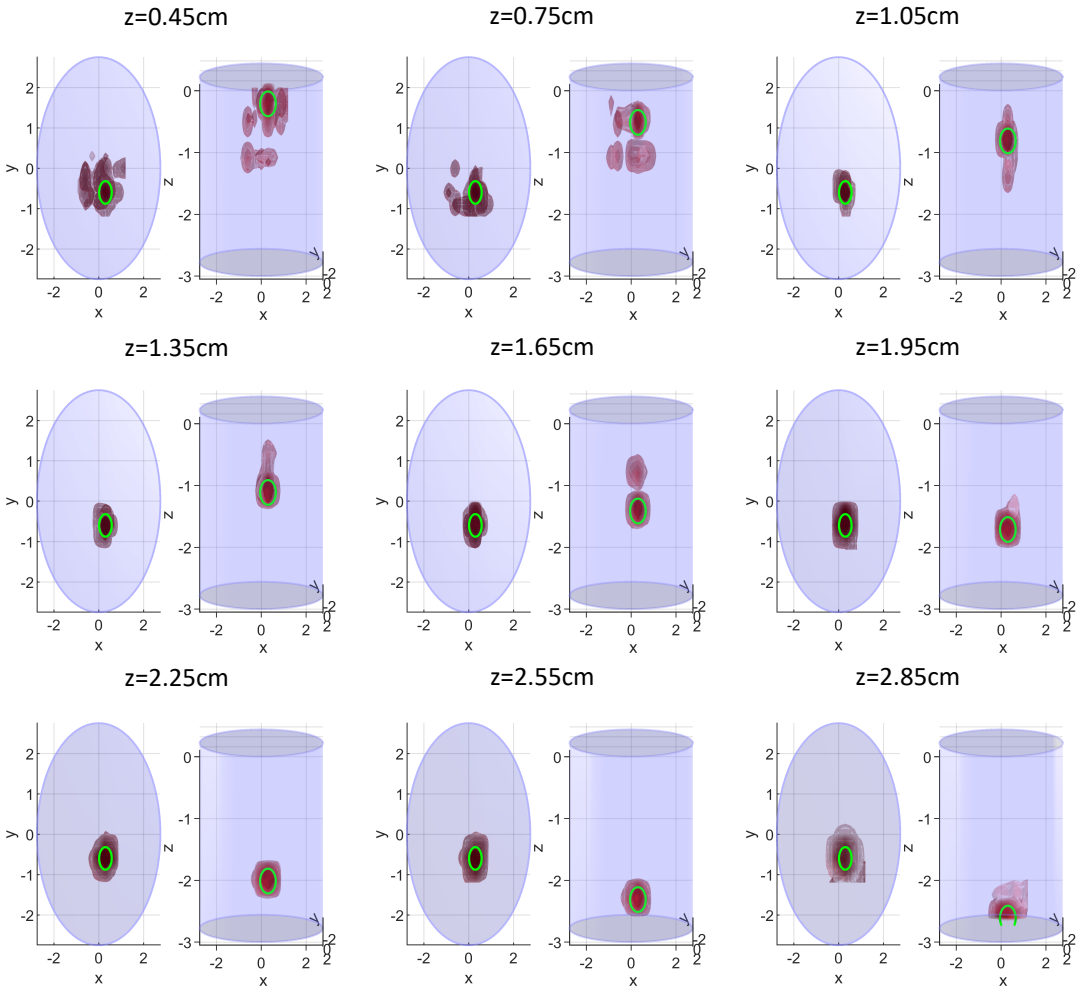
Tezde bir sonraki adımda, bulunan 810 voksel değeri için rastgele Gauss gürültüsü eklenerek her bir voksel için 100 kez çalıştırılmış ve elde edilen sonuçların ortalaması Tablo 6.3'de verilmiştir. Gürültüz ve düşük gürültülü şartlarda inklüzyon 100%'e yakın doğruluk, yüksek CNR ve düşük KL değerleri ile bulmaktadır. 0 dB gürültüde bile CNN tabanlı ters yöntem 82, 5% doğruluk ile başarılı bir şekilde inklüzyonu tespit edebilmektedir.



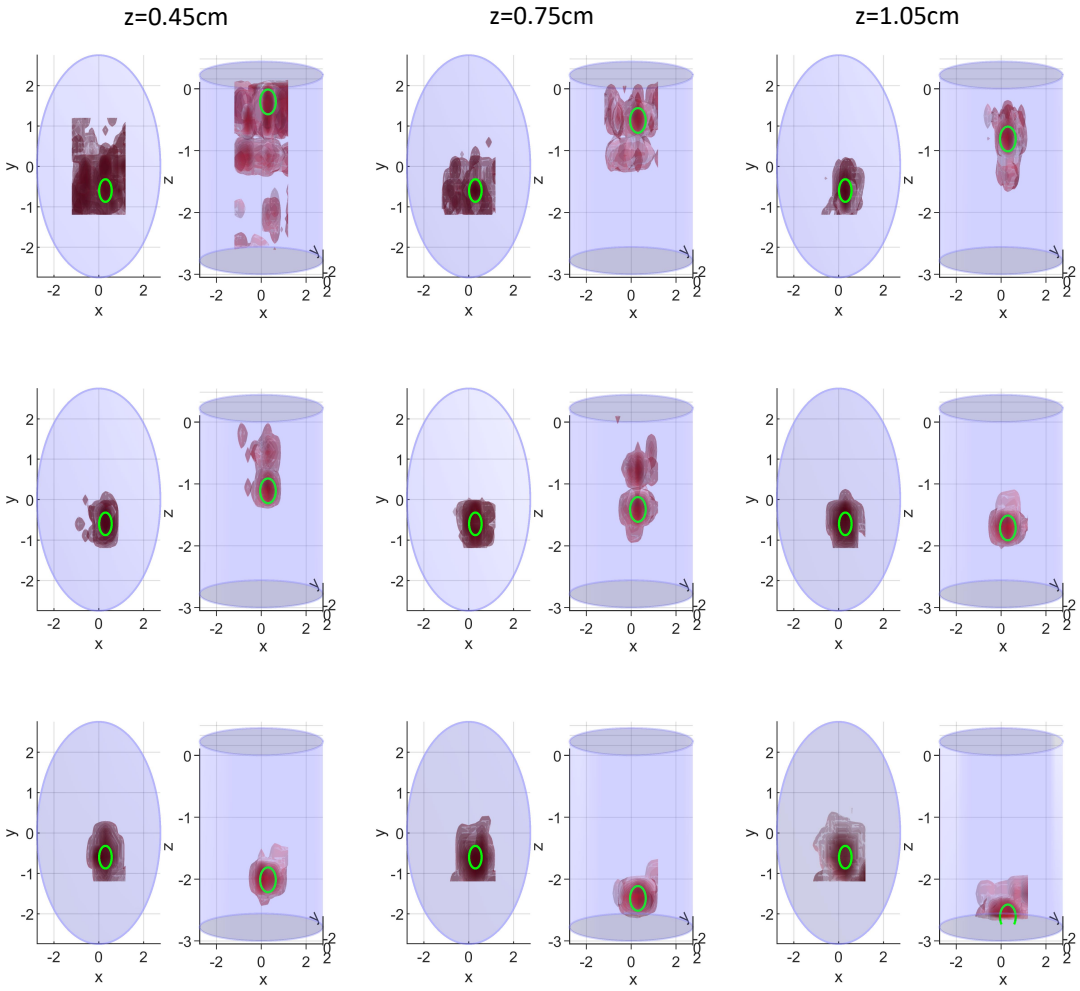
Şekil 6.4 10 dB gürültüde CNN sonuçları



Şekil 6.5 0 dB gürültüde CNN sonuçları



Şekil 6.6 -5 dB gürültüde CNN sonuçları



Şekil 6.7 -10 dB gürültüde CNN sonuçları

Tablo 6.3 Farklı gürültü seviyelerinde CNN Tabanlı Ters Problem Çözümü Ortalama Değerleri

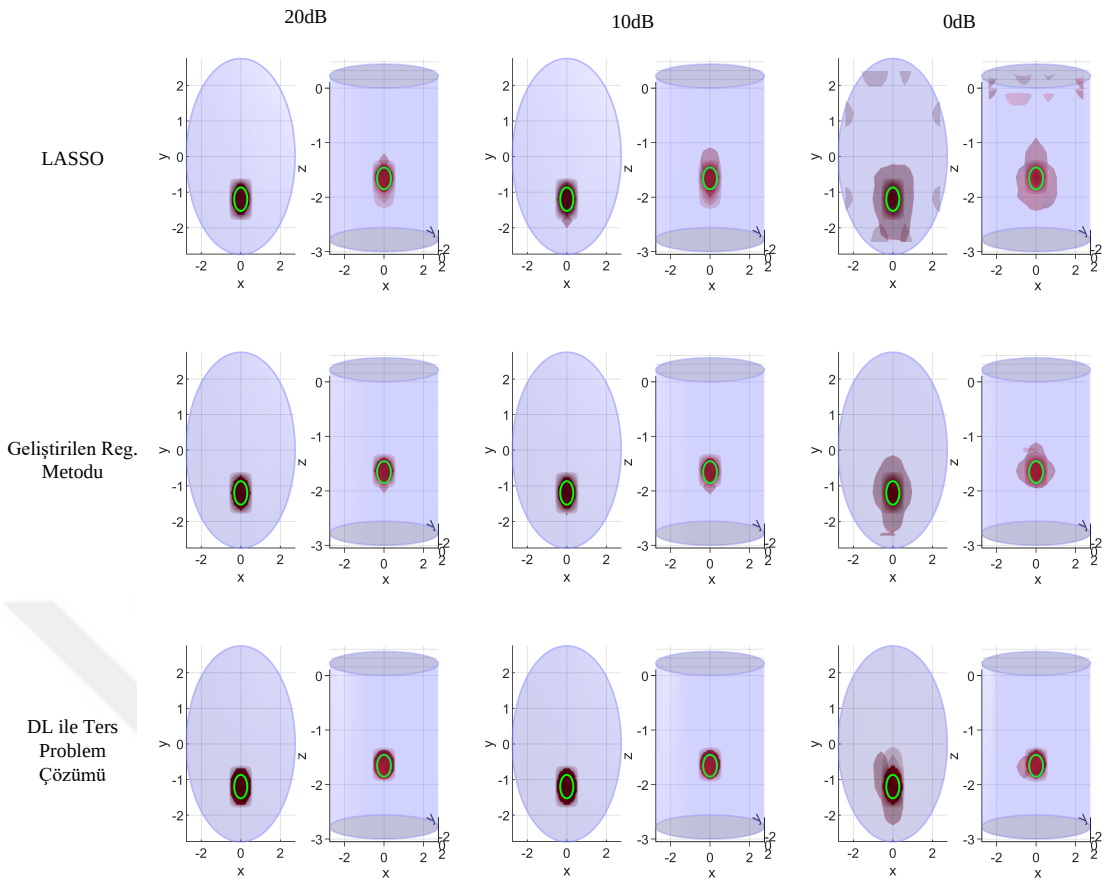
Gürültü Seviyesi (dB)	Ortalama Doğruluk (%)	Ortalama CNR Değeri	Ortalama Kullback–Leibler Diverjans Değeri
20	99,99	2.971,13	0,14
10	99,38	2.123,70	0,21
0	82,46	522,08	1,07
-5	50,19	149,17	2,49
-10	21,02	38,03	4,48

6.3.3 Farklı gürültü seviyeleri için CNN tabanlı inverse problem çözümü ile geliştirillen regülarizsyon Yöntemi ve LASSO regresyon 'un karşılaştırılması

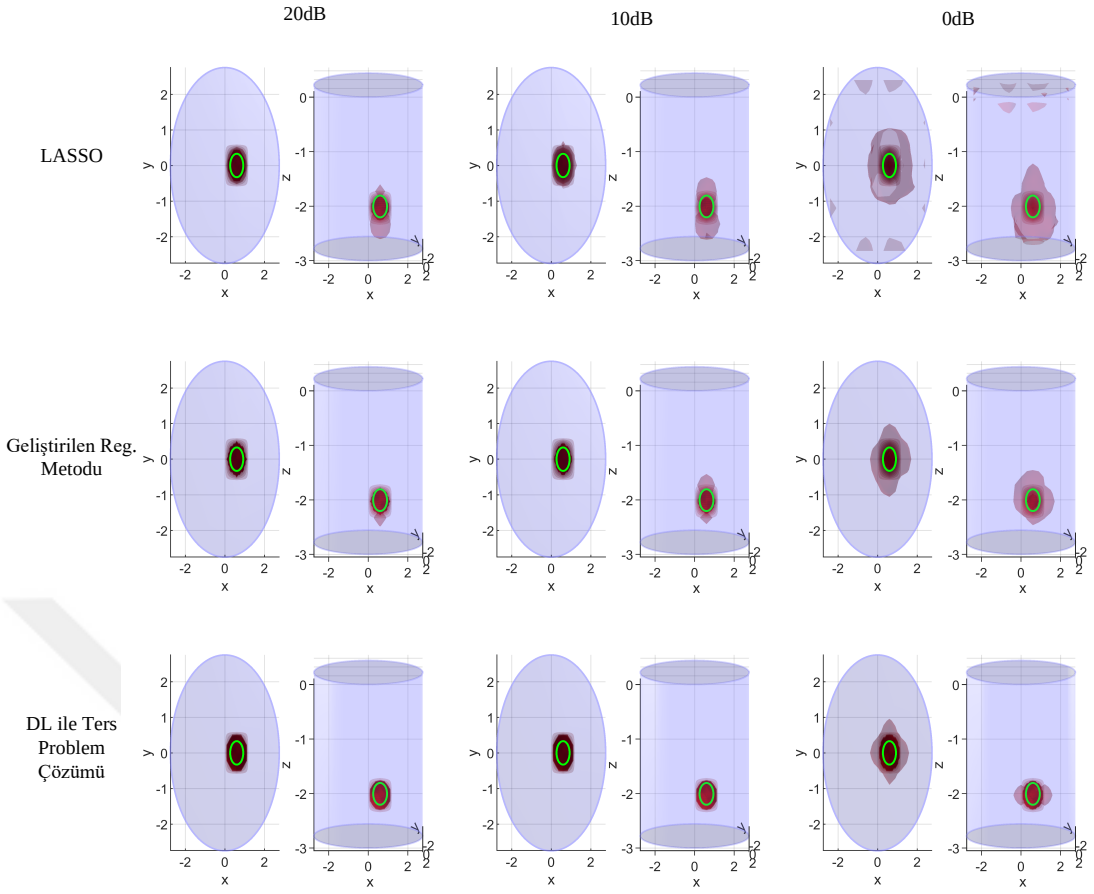
Bu simülasyonda klasik regülarizasyon yöntemleri ile CNN tabanlı ters problem çözümü karşılaştırılmıştır. Bu simulasyonda incelenen örnek 6 mm çapında bir inklüzyon içeren bir 5 cm çapında 3 cm derinliğe sahip bir silindirdir. İnklüzyon iki farklı konum için test edilmiştir. İlk olarak inklüzyon, $x = -0.6$ cm $y = 0$ cm $z = 1.95$ cm yerleştirilmiştir.

Derin öğrenme yöntemi ile geliştirilen regülarizasyon yöntemi ve LASSO regresyon derine yerleştirilmiş inklüzyon için test edilmiş ve elde sonuçlar hata metrikleri kullanarak hesaplanmış ve ortalama değerleri Tablo 6.3.3 ve şekil 6.8"de verilmiştir.

İkinci olarak inklüzyon, $x = 0$ cm $y = 0.3$ cm $z = 2.25$ cm yerleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde düşük gürültülü şartlara klasik ve DL tanalı metrotlar benzer doğruluk seviyesine sahip iken en yüksek CNR değerleri DL tabanlı ve bu tez çalışmada geliştirilen regülarizasyon metodu ile elde edilmiştir. Gürültü secviyesi arttığında en düşük doğruk LASSO yönteminde elde edilmiş olup, en yüksek doğruluk DL tabanlı regülarizasyon yönteminde elde edilmiştir. Sonuçlar Tablo6.3.3 ve Şekil 6.9'de görüleceği üzere geliştirdiğimiz regülarizasyon metodu ve DL tabanlı ters problem çözümü gürültülü şartlarda daha kararlı ve daha yüksek doğruluk ile sonuç vermiştir.



Şekil 6.8 DL tabanlı ters problem çözümü ile diğer regülarizasyon yöntemlerinin $x = -0.6$ cm, $y = 0$ cm, $z = 1.95$ cm konumuna yerleştirilmiş inklüzyon için karşılaştırılması



Şekil 6.9 DL tabanlı ters problem çözümü ile diğer regülarizasyon yöntemlerinin $x = 0$ cm, $y = 0.3$ cm, $z = 2.25$ cm konumuna yerleştirilmiş inklüzyon için karşılaştırılması

Tablo 6.4 Gürültülü şartlarda $x = -0.6$ cm $y = 0$ cm $z = 1.95cm$ için DL tabanlı ters problem çözümü ile geliştirilen regülarizasyon metodu ve LASSO metodun karşılaştırılması

Doğruluk (%)

Metot	20dB	10dB	0dB
Lasso Regresyon	100	86	49
Geliştirilen Regülarizasyon Metodu	100	99	82
DL Tabanlı Ters Problem Çözümü	100	100	95

Ortalama CNR Değeri

Metot	20dB	10dB	0dB
Lasso Regresyon	212	108	34,32
Geliştirilen Regülarizasyon Metodu	501	238	83,52
DL Tabanlı Ters Problem Çözümü	1266	1017	384,79

Ortalama Kullback–Leibler Diverjans Değeri

Metot	20dB	10dB	0dB
Lasso Regresyon	0,32	0,14	0,07
Geliştirilen Regülarizasyon Metodu	1,74	0,26	0.09
DL Tabanlı Ters Problem Çözümü	6,52	1,90	0,54

Bu tez çalışmanın diğer amacı, DOT'ta artan derinlik ile birlikte gürültülü şartlarda azalan doğruluk için kararlı ve yüksek doğruluğa sahip bir ters problem çözüm yöntemi geliştirmektir. Yalnızca ölçüm bilgisi kullanarak inklüzyonun bulunduğu bölgenin görüntülerinin yeniden yapılandırmak için bir CNN tabanlı bir çözüm önerilmektedir.

Bu yöntem kapsamında CNN'i eğitmek için, gürültülü ve gürültüsüz ölçüm görüntülerinden oluşan oluşan bir veri kümesi oluşturuldu. Girdi, yüzeyindeki ışık yoğunluğunun bir dizi ölçümü ve çıktı, örneğin ait olduğu sınıfı bulurken elde edilen skor değerlerinden bir görüntü oluşturmaktır. CNN daha sonra, tahmin edilen ve gerçek görüntü arasındaki farkı ölçen bir kayıp fonksiyonunu en aza indirerek eğitildi.

Yüzeydeki ışık yoğunluğu ölçümlerinden inlüzyonun bulunduğu bölgenin görüntülerini yeniden yapılandırarak CNN'in performansını test edildi. Sonuçlar tablodan da görüleceği üzere, CNN'in görüntüleri klasik regülarizasyon yöntemlerine göre yüksek doğruluk ile gürültülü şartlarda ve derin bölgede yer alan inklüzyonu başarı ile yeniden yapılandırabildiğini gösterdi.

Tablo 6.5 Gürültülü şartlarda $x = 0$ cm $y = 0.3$ cm $z = 2.25$ cm için DL tabanlı ters problem çözümü ile geliştirilen regülarizasyon metodu ve LASSO metodun karşılaştırılması

Doğruluk (%)

Metot	20dB	10dB	0dB
Lasso Regresyon	99	84	39,5
Geliştirilen Regülarizasyon Metodu	100	95	63,5
DL Tabanlı Ters Problem Çözümü	100	100	98

Ortalama CNR Değeri

Metot	20dB	10dB	0dB
Lasso Regresyon	274,6	109,8	30,26
Geliştirilen Regülarizasyon Metodu	570,4	246,54	67,94
DL Tabanlı Ters Problem Çözümü	1224	1100	496,1

Ortalama Kullback–Leibler Diverjans Değeri

Metot	20dB	10dB	0dB
Lasso Regresyon	0,28	1,4	6,4
Geliştirilen Regülarizasyon Metodu	0,14	0,7	4,5
DL Tabanlı Ters Problem Çözümü	0,06	0,073	0,29

7
YORUMLAR

Bu tez çalışmasında, en küçük kareler yöntemine dayalı yeni bir regülarizasyon metodu geliştirlmesi amaçlanmıştır. Değiştirilmiş yeni ağırlık matrisini kullanan iteratif olmayan tersine çevirme algoritması oluşturulmuş ve yeni ceza terimi eklenerek en küçük kare tabanlı regülarizasyon formülasyonu oluşturulmuştur. Literatürde hali hazırda verilen yöntemler, biri yüzeyde diğeri derinde bulunan iki inklüzyon olduğunda, her ikisini de gürültülü koşullarda bulmakta yetersiz kalmaktadır. Bu, DOT'ta karşılaşılan derinlik problemi olarak adlandırılmaktadır ve regülarizasyon yöntemleri, derinde bulunan inklüzyonu bulmakta problem yaşamaktadır.

Literatürde derinde bulunan inklüzyounu doğru bir şekilde görüntülemek için çeşitli girişimlerde bulunulmuş olsa da, derinlik lokalizasyonunda önemli bir gelişme hala bir zorluk olmaya devam etmektedir ve literatürde derinlik problemini çözmek için çok az sayıda çalışma bulunmaktadır.

Yalnızca Tikhonov Regülarizasyon yöntemi ile matris modifikasyonu, birden çok inklüzyon olduğu durumunda derinlik sorununa tam bir çözüm sağlamak için yetersiz kalmaktadır. Bu amaçla bu tez çalışmasında hem ağırlık matrisi değiştirilmiş hem de değiştirilmiş A ağırlığı kullanılarak yeni bir ceza terimi eklenmiştir.

Önerilen yöntem gürültülü şartlarda, farklı derinliklerdeki iki inklüzyon soruna çözüm sunmaktadır ve test işlemleri sonucunda elde edilen CNR değerlerinden de görüleceği üzere gürültüye karşı daha dayanıklıdır. Ters tanımlama modeline ilişkin ön bilgi gerekli değildir ve sunulan yöntem için yalnızca ölçülen yanıt yeterlidir.

Yapay veriler üzerinde yapılan simülasyondan elde edilen sonuçlar, bu tezde önerilen yöntemin, biri yüzeyde, diğeri derinde iki inklüzyon yer aldığında gürültülü koşullar altında daha yüksek doğruluk sağladığını, hataları azalttığını ve diğer yöntemlere kıyasla kararsızlık inversiyonu azalttığını göstermektedir.

Tezin son bölümünde literatürde kullanılan klasik regülarizasyon yöntemlerinin artan

gürültü ve derinlik ile birlikte azalan doğruluk değerleri için, gürültüye karşı sağlam ve artan derinlik ile birlikte daha kararlı ve yüksek duğruluğa sahip bir derin öğrenme tabanlı ters problem çözümü geliştirilmiştir. CNN tabanlı ters problem çözümü tek inklüzyon için test edilmiş ve klasik regülarizasyon yöntemleri ile karşılaştırılmıştır. Tasarlanan CNN tabanlı çözüm sonucunda derin bölgede bulunan inklüzyon yüksek gürültü seviyeleri için diğer yöntemlere kıyasla yüksek doğruluk ve CNR değeri elde edilmiştir.

KAYNAKÇA

[1] M. Elad, M. Aharon, "Image denoising via sparse and redundant representations over learned dictionaries.," *IEEE transactions on image processing : a publication of the IEEE Signal Processing Society*, vol. 15, no. 12, pp. 3736–45, Dec. 2006.

[2] N. Zhao, Q. Wei, A. Basarab, N. Dobigeon, D. Kouame, J. Tourneret, "Fast single ımage super-resolution using a new analytical solution for l2 - l2 problems.," vol. 25, no. 8, pp. 3736–45, 2016. DOI: 10.1109/TIP.2016.2567075.

[3] M. A. Figueiredo, R. D. Nowak, S. J. Wright, "Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems," *Selected Topics in Signal Processing, IEEE Journal of*, vol. 1, no. 4, pp. 586–597, 2007.

[4] H. H. Kagiwada, R. E. Kalaba, S. A. Timko, S. Ueno, "System identification: Associate memories for system identification: Inverse problems in remote sensing," *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 14, pp. 200–202, 1990.

[5] J. o. Yao, F. Tian, Y. Rakvongthai, S. Oraintara, H. Liu, "Quantification and normalization of noise variance with sparsity regularization to enhance diffuse optical tomograph," *Biomedical Optics Express*, vol. 6, no. 8, pp. 2961–2979, 2015. DOI: 10.1364/BOE.6.002961.

[6] A. S. Dehghani H Delpy DT, "Photon migration in non-scattering tissue and the effects on image reconstruction.," *Phys Med Biol.*, vol. 44, no. 12, pp. 2897–906, Nov. 1999. DOI: 10.1088/0031-9155/44/12/303.

[7] H. Dehghani, S. Srinivasan, B. W. Pogue, A. Gibson, "Numerical modelling and ımage reconstruction in diffuse optical tomography," *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, vol. 367, no. 1906, pp. 3073–93, 2009. DOI: 10.1098/rsta.2009.0090.

[8] B. Bi, B. Han, W. Han, J. Tang, L. Li, "Image reconstruction for diffuse optical tomography based on radiative transfer equation," *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, vol. 2015, 2015. DOI: 10.1155/2015/286161.

[9] S. R. Arridge, "Optical tomography in medical imaging," *Inverse Problems*, vol. 15, no. 2, R41–R93, Jan. 1999. DOI: 10.1088/0266-5611/15/2/022.

[10] C. Leng, D. Yu, S. Zhang, Y. An, Y. H, "Reconstruction method for optical tomography based on the linearized bregman ıteration with sparse regularization," *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, vol. 2015, p. 304 191, Sep. 2015.

[11] W. Cong *et al.*, "Practical reconstruction method for bioluminescence tomography," *Optics Express*, vol. 13, no. 18, pp. 6756–71, Sep. 2005.

[12] G. Wang, Y. Li, M. Jiang, "Uniqueness theorems in bioluminescence tomography," *Medical Physics*, vol. 31, no. 8, pp. 2289–99, Aug. 2004.

[13] B. Wang *et al.*, "An lp-norm regularized image reconstruction scheme for breast dot with non-negative-constraint," *BioMed Engineering OnLine*, vol. 16, 32 2017. DOI: 10.1186/s12938-017-0318-y.

[14] C. Habermehl, J. Steinbrink, K. R. Müller, S. Haufe, "Optimizing the regularization for image reconstruction of cerebral diffuse optical tomography," *Journal of Biomedical Optics*, vol. 19, no. 9, p. 096 006, 2014. DOI: 10.1117/1.JBO.19.9.096006.

[15] Y. Xiao, "A new method for determining optimal regularization parameter in near-field acoustic holography," *Shock and Vibration*, vol. 2018, 2018. DOI: 10.1155/2018/7303294.

[16] E. G. Williams, "Regularization methods for near-field acoustical holography," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 110, no. 4, pp. 1976–88, Oct. 2001. DOI: 10.1121/1.1380685.

[17] W. Q. Yang, D. M. Spink, T. A. York, H. McCann, "An image-reconstruction algorithm based on landweber's iteration method for electrical-capacitance tomography," *Measurement Science and Technology*, vol. 10, no. 11, pp. 1065–1069, Sep. 1999. DOI: 10.1088/0957-0233/10/11/315.

[18] E. L. Piccolomini, F. Zama, "The conjugate gradient regularization method in computed tomography problems," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 102, no. 1, pp. 87–99, 1999, ISSN: 0096-3003. DOI: 10.1016/S0096-3003(98)10007-3.

[19] C. Clason, *Regularization of inverse problems*, 2020. arXiv: 2001.00617 [math.NA].

[20] D. Colton, H. W"ubbeling, H. Engl, A. Louis, J. R. McLaughlin, W. Rundell, *Surveys on Solution Methods for Inverse Problems*. Springer Vienna, 2000. DOI: 10.1007/978-3-7091-6296-5.

[21] F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001. DOI: 10.1137/1.9780898719284.

[22] A. Tarantola, *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005. DOI: 10.1137/1.9780898717921.

[23] A. N. Tikhonov, "On the stability of inverse problems.," *in Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 39, pp. 195–198, 1943.

[24] A. N. Tikhonov, "Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method.," *Soviet Meth. Dokl.*, vol. 4, pp. 1035–1038, 1963.

[25] J. Hadamard, "Sur les problemes aux derivees partielles et leur signification physique," *Princeton University Bulletin*, pp. 49–52, 1902.

[26] F. John, "Continuous dependence on data for solutions of partial differential equations with a prescribed bound," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 13, pp. 551–585, 1960.

[27] R. A. Willoughby, “Solutions of ıll-posed problems (a. n. tikhonov and v. y. arsenin),” *SIAM Review*, vol. 21, no. 2, pp. 266–267, 1979. DOI: 10.1137/1021044.

[28] D. L. Phillips, “A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind.,” *Journal of the ACM (JACM)*, vol. 9, pp. 84–97, 1962.

[29] A. E. Hoerl, R. W. Kennard, “Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems,” *Technometrics*, vol. 12, no. 1, pp. 55–67, 1970. DOI: 10.1080/00401706.1970.10488634.

[30] G. Backus, F. Gilbert, “The Resolving Power of Gross Earth Data,” *Geophysical Journal International*, vol. 16, no. 2, pp. 169–205, Oct. 1968. DOI: 10.1111/j.1365-246X.1968.tb00216.x.

[31] R. S. Anderssen, “The linear functional strategy for ımproperly posed problems,” in *Inverse Problems: Proceedings of the Conference held at the Mathematical Research Institute at Oberwolfach, Black Forest, May 18–24, 1986*, J. R. Cannon, U. Hornung, Eds. Basel: Birkhäuser Basel, 1986, pp. 11–30. DOI: 10.1007/978-3-0348-7014-6_1.

[32] A. K. Louis, “Approximate inverse for linear and some nonlinear problems,” *Inverse Problems*, vol. 12, no. 2, pp. 175–190, Apr. 1996. DOI: 10.1088/0266-5611/12/2/005. [Online]. Available: https://doi.org/10.1088/0266-5611/12/2/005.

[33] P. C. Hansen, “The truncated svd as a method for regularization,” *BIT*, vol. 27, no. 4, pp. 534–553, Dec. 1987, ISSN: 0006-3835. DOI: 10.1007/BF01937276.

[34] H. W. Engl, “On the choice of the regularization parameter for iterated tikhonov regularization of ıı-posed problems,” *Journal of Approximation Theory*, vol. 49, no. 1, pp. 55–63, 1987, ISSN: 0021-9045. DOI: https://doi.org/10.1016/0021-9045(87)90113-4.

[35] L. Eldén, “Algorithms for the regularization of ill-conditioned least squares problems.,” *BIT*, vol. 17, pp. 134–145, 1977. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01932285.

[36] G. Wahba, “Practical approximate solutions to linear operator equations when the data are noisy,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 14, no. 4, pp. 651–667, 1977.

[37] C. W. Groetsch, J. T. King, “Extrapolation and the method of regularization for generalized inverses,” *Journal of Approximation Theory*, vol. 25, no. 3, pp. 233–247, 1979. DOI: https://doi.org/10.1016/0021-9045(79)90014-5.

[38] A. Neubauer, “An a posteriori parameter choice for tikhonov regularization in hilbert scales leading to optimal convergence rates,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 25, no. 6, pp. 1313–1326, 1988.

[39] F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001. DOI: 10.1137/1.9780898719284.

[40] T. I. Seidman, C. R. Vogel, "Well-posedness and convergence of some regularization methods for non-linear ill-posed problems," *Inverse Problems*, vol. 5, no. 2, pp. 227–238, Apr. 1989. DOI: 10.1088/0266-5611/5/2/008.

[41] H. W. Engl, K. Kunisch, A. Neubauer, "Convergence rates for tikhonov regularization of non-linear ill-posed problems," *Inverse Problems*, vol. 5, no. 4, pp. 523–540, Aug. 1989. DOI: 10.1088/0266-5611/5/4/007.

[42] M. Hanke, A. Neubauer, O. Scherzer, "A convergence analysis of the landweber iteration for nonlinear ill-posed problems," *Numerische Mathematik*, vol. 72, pp. 21–37, 1995. DOI: 10.1007/s002110050158.

[43] B. Kaltenbacher, "Some newton-type methods for the regularization of nonlinear ill-posed problems," *Inverse Problems*, vol. 13, no. 3, p. 729, Jun. 1997. DOI: 10.1088/0266-5611/13/3/012.

[44] O. Scherzer, "Convergence rates of iterated tikhonov regularized solutions of nonlinear ill-posed problems," *Numerische Mathematik*, vol. 66, pp. 259–279, 1993. DOI: 10.1007/BF01385697.

[45] L. I. Rudin, S. Osher, E. Fatemi, "Nonlinear total variation based noise removal algorithms," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 60, no. 1, pp. 259–268, 1992, ISSN: 0167-2789. DOI: https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90242-F.

[46] D. Mumford, J. Shah, "Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 42, pp. 577–685, 1989.

[47] D. L. Donoho, "Superresolution via sparsity constraints," *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 23, no. 5, pp. 1309–1331, 1992. DOI: 10.1137/0523074.

[48] D. L. Donoho, I. M. Johnstone, "Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage," *Journal of the American Statistical Association*, vol. 90, no. 432, pp. 1200–1224, 1995. DOI: 10.1080/01621459.1995.10476626.

[49] D. Donoho, "Compressed sensing," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306, 2006. DOI: 10.1109/TIT.2006.871582.

[50] E. J. Candès, D. L. Donoho, "Recovering edges in ıll-posed ınverse problems: Optimality of curvelet frames," *The Annals of Statistics*, vol. 30, no. 3, pp. 784–842, 2002, ISSN: 00905364. (visited on 10/25/2022).

[51] M. Benning, M. Burger, "Modern regularization methods for ınverse problems," *arXiv preprint arXiv:1801.09922*, 2018. DOI: 10.48550/ARXIV.1801.09922.

[52] M. Jiang, S. Jiang, L. Zhu, Y. Wang, W. Huang, H. Zhang, "Study on parameter optimization for support vector regression in solving the inverse ecg problem," *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, vol. 2013, p. 158 056, 2013. DOI: 10.1155/2013/158056.

[53] C. Fenu, L. Reichel, G. Rodriguez, H. Sadok, "Gcv for tikhonov regularization by partial svd," *BIT Numerical Mathematics*, vol. 57, no. 4, pp. 1019–1039, May 2017. DOI: 10.1007/s10543-017-0662-0.

[54] N. Cao, A. Nehorai, M. Jacobs, "Image reconstruction for diffuse optical tomography using sparsity regularization and expectation-maximization algorithm," *Optics Express*, vol. 15, no. 21, pp. 13 695–708, Oct. 2007.

[55] A. Kadu, T. Leeuwen, "A convex formulation for binary tomograph," *IEEE Transactions on Computational Imaging*, vol. 6, 2020.

[56] J. Prakash, H. Dehghani, B. Pogue, P. Yalavarthy, "Model-resolution-based basis pursuit deconvolution improves diffuse optical tomographic imaging," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 33, no. 4, pp. 891–901, 2014. DOI: 10.1109/TMI.2013.229769.

[57] J. Machkour, M. Muma, B. Alt, A. Zoubir, "A new sparse and robust adaptive lasso estimator for the ındependent contamination model," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 65, 2017.

[58] H. Niu, F. Tian, Z.-J. Lin, H. Liu, "Development of a compensation algorithm for accurate depth localization in diffuse optical tomography," *Optics letters*, vol. 35, no. 3, pp. 429–431, Feb. 2010. DOI: 10.1364/OL.35.000429.

[59] F. Tian, H. Niu, S. Khadka, Z.-J. Lin, H. Liu, "Algorithmic depth compensation improves quantification and noise suppression in functional diffuse optical tomography," *Biomedical Optics Express*, vol. 1, no. 2, pp. 441–452, Sep. 2010. DOI: 10.1364/BOE.1.000441.

[60] J. Feng, Q. Sun, Z. Li, Z. Sun, K. Ji, "Back-propagation neural network-based reconstruction algorithm for diffuse optical tomography," *J. Biomed. Opt.*, vol. 24, no. 5, p. 051 407, Dec. 2018. DOI: 10.1117/1.JBO.24.5.051407.

[61] S. Sabir *et al.*, "Convolutional neural network-based approach to estimate bulk optical properties in diffuse optical tomography," *Appl. Opt.*, vol. 59, no. 5, pp. 1461–1470, Feb. 2020. DOI: 10.1364/AO.377810.

[62] S. Li, M. Zhang, M. Xue, Q. Zhu, "Difference imaging from single measurements in diffuse optical tomography: A deep learning approach," *J. Biomed. Opt.*, vol. 27, no. 8, p. 086 003, Aug. 2022. DOI: 10.1117/1.JBO.27.8.086003.

[63] B. Y. Hanene, B. Cardoen, G. Hamarneh, "Multitask deep learning reconstruction and localization of lesions in limited angle diffuse optical tomography.," *IEEE Trans Med Imaging.*, vol. 41, no. 3, pp. 515–530, Mar. 2020. DOI: 10.1109/TMI.2021.3117276.

[64] J. Yoo *et al.*, "Deep learning diffuse optical tomography," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 39, no. 4, pp. 877–887, 2020. DOI: 10.1109/TMI.2019.2936522.

[65] Y. Fan, L. Ying, "Solving optical tomography with deep learning," *arXiv*, 2019. arXiv: 1910.04756 [cs.CV].

[66] R. K. Kumrular, A. Polat, "Klinik uygulamalarda İleri biyomedikal görüntüleme teknolojileri," *European Journal of Science and Technology*, pp. 207–222, 23 2021.

[67] R. Fitzgerald, "Phase-sensitive x-ray imaging," *Physics Today*, pp. 23–26, Jun. 2000.

[68] T. Dreiseidler, R. A. Mischkowski, "Comparison of cone-beam imaging with orthopantomography and computerized tomography for assessment in presurgical implant dentistry," *The International Journal of Oral & Maxillofacial Implants*, vol. 24, pp. 216–225, 2009.

[69] Y. Wu, F. F. Hanzaee, D. Jiang, R. H. Bayford, A. Demosthenous, "Electrical ımpedance tomography for biomedical applications: Circuits and systems review," *IEEE Open Journal of Circuits and Systems*, vol. 2, pp. 380–397, 2021. DOI: 10.1109/OJCAS.2021.3075302.

[70] H. Jiang, *Diffuse Optical Tomography: Principles and Applications*. CRC Press, 1965.

[71] B. C. Wilson, M. S. Patterson, "The physics of photodynamic therapy.," *Phys Med Biol.*, vol. 31, no. 4, pp. 327–60, Apr. 1986. DOI: 10.1088/0031-9155/31/4/001.

[72] J. R. Mourant, J. P. Freyer, A. H. Hielscher, A. A. Eick, D. Shen, T. M. Johnson, "Mechanisms of light scattering from biological cells relevant to noninvasive optical-tissue diagnostics," *Applied Optics*, vol. 37, no. 16, pp. 3586–3593, 1998.

[73] S. Wray, M. Cope, D. T. Delpy, J. S. Wyatt, E. O. Reynolds, "Characterization of the near infrared absorption spectra of cytochrome aa3 and haemoglobin for the non-invasive monitoring of cerebral oxygenation.," *Biochim Biophys Acta*, vol. 933, no. 1, pp. 184–92, Mar. 1988. DOI: 10.1016/0005-2728(88)90069-2.

[74] T. Durduran, R. Choe, W. Baker, A. Yodh, "Diffuse optics for tissue monitoring and tomography," *Reports on Progress in Physics*, vol. 73, p. 076 701, 2010.

[75] M. Xu, L. V. Wang, "Photoacoustic imaging in biomedicine," *Review of scientific instruments*, vol. 77, no. 4, p. 041 101, 2006.

[76] A. Cerussi, N. Shah, D. Hsiang, A. Durkin, J. Butler, B. Tromberg, "In vivo absorption, scattering, and physiologic properties of 58 malignant breast tumors determined by broadband diffuse optical spectroscopy," *J. Biomed Opt.*, vol. 11, p. 044 005, 4 2006. DOI: 10.1117/1.233754.

[77] S. Arridge, J. Schotland, "Optical tomography: Forward and inverse problems," *Inverse Problems*, vol. 25, p. 123 010, 2009.

[78] L. Wang, S. L. Jacques, L. Zheng, "Mcml—monte carlo modeling of light transport in multi-layered tissues," *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, vol. 47, no. 2, pp. 131–146, 1995, ISSN: 0169-2607. DOI: https://doi.org/10.1016/0169-2607(95)01640-F. [Online]. Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016926079501640F.

[79] W. Zou, D. Hu, X. Gao, J. Wang, "A reconstruction method for diffuse optical tomography by grouping of source-detector configuration," *Journal of Modern Optics*, vol. 64, pp. 771–776, 7 2017. DOI: 10.1080/09500340.2016.1260780.

[80] R. A. Rahim, L. L. Chen, C. K. San, M. H. Fazalul Rahiman, P. J. Fea, "Multiple fan-beam optical tomography: Modelling techniques," *Sensors*, vol. 9, no. 11, pp. 8562–8578, 2009, ISSN: 1424-8220. DOI: 10.3390/s91108562. [Online]. Available: https://www.mdpi.com/1424-8220/9/11/8562.

[81] L. V. Wang, H.-i. Wu, "Biomedical optics: Principles and ımaging," 2012. DOI: 10.1002/9780470177013.

[82] H. Ö. Kazancı, "Weight matrix analysis for back reflection continuous wave diffuse optical tomography (cwdot) systems: Translational method," *Optics and Quantum Electronics*, vol. 47, pp. 3847–3853, 2015. DOI: 10.1007/s11082-015-0252-9.

[83] L. Wu, Y. Lin, T. Li, "Effect of human brain edema on light propagation: A monte carlo modeling based on the visible chinese human dataset," *IEEE Photonics Journal*, vol. 9, no. 5, pp. 1–10, 2017. DOI: 10.1109/JPHOT.2017.2743048.

[84] H. O. KAZANCI, "Forward problem model neighborhood relations based on the monte carlo (mc) simulation photon fluence distributions," vol. 4, 2018, pp. 8–14.

[85] S. Jacques, "Optical properties of biological tissues: A review.," *Phys Med Biol*, vol. 58, no. 11, R37–R61, Jul. 2013. DOI: 10.1088/0031-9155/58/11/R37.

[86] P. C. Hansen, *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion* (SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation MM04), English. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.

[87] P. Alquier, E. Gautier, G. Stoltz, *Inverse problems and high dimensional estimation*. Springer, Stats in the Château summer school in econometrics and statistics, 2009, p. 198.

[88] L. Chaâri, N. Pustelnik, C. Chaux, J.-C. Pesquet, "Solving inverse problems with overcomplete transforms and convex optimization techniques," *Proc. SPIE*, vol. 7446, pp. 1535–1551, Sep. 2009. DOI: 10.1117/12.826110.

[89] H. Uysal, H. Sedef, H. Ö. Kazancı, "Beyin tümörü tespiti İçin diffüz optik tomografi sisteminin geliştirilmesi," in *4. Uluslararası Bilimsel Araştırmalar Kongresi*, 2019, pp. 211–220.

[90] K. J. Batenburg, J. Sijbers, "Dart: A practical reconstruction algorithm for discrete tomography.," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 20, no. 9, pp. 2542–2553, Sep. 2011. DOI: 10.1109/TIP.2011.2131661.

[91] M. Djafari-Rouhani, *Inverse Problems in Vision and 3D Tomography*. John Wiley & Sons, 2013.

[92] E. D. Vito, L. Rosasco, A. Caponnetto, U. D. Giovannini, F. Odone, "Learning from examples as an inverse problem," in *Journal of Machine Learning Research*, 2005, pp. 883–904.

[93] A. Tarantola, "1. the general discrete ınverse problem," in *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005, pp. 1–40. DOI: 10.1137/1.9780898717921.ch1.

[94] C. R. Vogel, *Computational Methods for Inverse Problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. DOI: 10.1137/1.9780898717570. eprint: https://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/1.9780898717570. [Online]. Available: https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9780898717570.

[95] C. Panagiotou, "Information theoretic regularization in diffuse optical tomography," Ph.D. dissertation, University College London, 2011.

[96] *Bir matrisin rankı*, http://gokhankelebek.blogspot.com/2016/06/bir-matrisin-rank.html, Accessed: 2023-01-10.

[97] G. Strang, "Appendıx a - wıthdrawn: Lınear transformatıons, matrıces, and change of basıs," in *Linear Algebra and its Applications*, G. Strang, Ed., Second, Academic Press, 1980, pp. 348–358, ISBN: 978-0-12-673660-1. DOI: https://doi.org/10.1016/B978-0-12-673660-1.50012-5. [Online]. Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780126736601500125.

[98] R. Penrose, "A generalized inverse for matrices," *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 51, no. 3, pp. 406–413, 1955. DOI: 10.1017/S0305004100030401.

[99] J. J. Leader, *Numerical Analysis and Scientific Computation*, 2nd ed. Boca Raton, FL: Chapman and Hall/CRC, 2022. DOI: 10.1201/9781003042273. [Online]. Available: https://www.crcpress.com/Numerical-Analysis-and-Scientific-Computation-Second-Edition/Leader/p/book/9781003042273.

[100] B. Mario, B. Patrizia, *Introduction to Inverse Problems in Imaging*, 1st. CRC Press, 1998. DOI: 10.1201/9780367806941.

[101] T. Buesing, R. Gribonval, *Inverse problems in signal processing*. Springer, 2007.

[102] M. Bertero, P. Boccacci, *Inverse problems in imaging*. Academic Press, 1998.

[103] J. L. Aurentz, J. E. Pryce, L. N. Trefethen, *Numerical Analysis and Scientific Computation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.

[104] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, Fourth. Wellesley, MA: Wellesley-Cambridge Press, 2009.

[105] J. P. Kaipio, V. Kolehmainen, E. Somersalo, M. Vauhkonen, "Statistical inversion and monte carlo sampling methods in electrical impedance tomography," *Inverse Problems*, vol. 16, no. 5, p. 1487, Oct. 2000. DOI: 10.1088/0266-5611/16/5/321.

[106] H. W. Engl, "Inverse problems and their regularization," in *Computational Mathematics Driven by Industrial Problems: Lectures given at the 1st Session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) held in Martina Franca, Italy, June 21–27, 1999*, R. E. Burkard *et al.*, Eds. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2000, pp. 127–150, ISBN: 978-3-540-44976-8. DOI: 10.1007/BFb0103919. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/BFb0103919.

[107] K. P. Murphy, *Probabilistic Machine Learning: An Introduction*. MIT Press, 2022. [Online]. Available: https://probml.ai.

[108] R. Tibshirani, "Regression shrinkage and selection via the lasso," *Journal of the Royal Statistical Society. Series B*, 1996.

[109] T. Hastie, *Statistical learning with sparsity: the lasso and generalizations*. 2015.

[110] M. R. Özkale, "Çoklu iç ilişki ile ilgili problemler," Ph.D. dissertation, 2007.

[111] S. Sakallıoğlu, S. Kaçıranlar, "A new biased estimator based on ridge estimation," *Statistical Papers*, vol. 49, pp. 669–689, 2008.

[112] T. Bhowmik, H. Liu, Z. Ye, S. Oraintara, "Dimensionality reduction based optimization algorithm for sparse 3-d image reconstruction in diffuse optical tomography," *Scientific Reports*, vol. 6, no. 1, p. 22 242, Mar. 2016. DOI: 10.1038/srep22242.

[113] M. Ç. Büyükuysal, *Ridge regresyon analizi ve bir uygulama*, 2010.

[114] H. Zou, T. Hastie, "Regularization and variable selection via the elastic net," *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, vol. 67, no. 2, pp. 301–320, 2005. DOI: 10.1111/j.1467-9868.2005.00503.x.

[115] Q. Zhou, W. Chen, S. Song, J. R. Gardner, K. Q. Weinberger, Y. Chen, "A reduction of the elastic net to support vector machines with an application to gpu computing," *arXiv*, 2014. DOI: 10.48550/ARXIV.1409.1976.

[116] M. V. Hernández, E. M. Montes, J. M. S. Bornot, A. L. Castellanos, P. A. V. Sosa, "Penalized least squares methods for solving the eeg ınverse problem," *Statistica Sinica*, vol. 18, no. 4, pp. 1535–1551, 2008.

[117] Y. Hu, C. Li, K. Meng, J. Qin, X. Yang, "Group sparse optimization via lp,q regularization," *Journal of Machine Learning Research*, vol. 18, no. 30, pp. 1–52, 2017.

[118] S. Uysal, H. Uysal, U. E. Ayten, "Novel regularization method for diffuse optical tomography inverse problem," *Optik*, vol. 261, p. 169 095, 2022. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.169095.

[119] E. Barcucci, A. Del Lungo, M. Nivat, R. Pinzani, "Reconstructing convex polyominoes from horizontal and vertical projections," *Theoretical Computer Science*, vol. 155, no. 2, pp. 321–347, 1996, ISSN: 0304-3975. DOI: https://doi.org/10.1016/0304-3975(94)00293-2.

[120] B. Goyal, A. Dogra, S. Agrawal, B. S. Sohi, "Noise ıssues prevailing in various types of medical ımages," *Biomedical and Pharmacology Journal*, 2018.

[121] O. Lee, J. M. Kim, Y. Bresler, J. C. Ye, "Compressive diffuse optical tomography: Noniterative exact reconstruction using joint sparsity.," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 30, no. 5, pp. 1129–1142, May 2011. DOI: 10.1109/TMI.2011.2125983.

[122] K. Prieto, O. Dorn, "Sparsity and level set regularization for diffuse optical tomography using a transport model in 2d," *Inverse Problems*, vol. 33, no. 1, p. 014 001, Nov. 2016. DOI: 10.1088/0266-5611/33/1/014001.

[123] L. R. Dice, "Measures of the amount of ecologic association between species," *Ecology*, vol. 26, no. 3, pp. 297–302, 1945.

[124] J. Baritaux, K. Hassler, M. Unser, "An efficient numerical method for general lp regularization in fluorescence molecular tomography," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 29, no. 4, pp. 891–901, Apr. 2010. DOI: 10.1109/TMI.2013.229769.

[125] B. C. T. Cabella, M. J. Sturzbecher, W. Tedeschi, O. Baffa Filho, D. B. d. Ara'ujo, U. P. d. C. Neves, "A numerical study of the kullback-leibler distance in functional magnetic resonance imaging," *Brazilian Journal of Physics*, vol. 38, no. 1, pp. 20–25, 2008.

[126] H. Samawi *et al.*, "Kullback-leibler divergence for medical diagnostics accuracy and cut-point selection criterion: How it is related to the youden ındex," *J Appl Bioinforma Comput Biol*, vol. 9, no. 2, May 2020.

[127] J. Tang, B. Han, W. Han, B. Bi, L. Li, "Mixed total variation and l1 regularization method for optical tomography based on radiative transfer equation.," *Comput Math Methods Med.*, vol. 2017, p. 2 953 560, 2017. DOI: 10.1155/2017/2953560.

[128] S. Jiang *et al.*, "Novel l2,1-norm optimization method for fluorescence molecular tomography reconstruction," *Biomedical Optics Express*, vol. 7, no. 6, pp. 2342–2359, 2016. DOI: 10.1364/BOE.7.002342.

[129] L. Zhang, G. Zhang, "Brief review on learning-based methods for optical tomography.," *Journal of Innovative Optical Health Sciences*, vol. 12, no. 6, 2019. DOI: 10.1142/S1793545819300118.

[130] S. Li, M. Zhang, M. Xue, Q. Zhu, "Difference imaging from single measurements in diffuse optical tomography: A deep learning approach," *Journal of Biomedical Optics*, vol. 27, no. 8, p. 086 003, 2022. DOI: 10.1117/1.JBO.27.8.086003.

[131] A. Lucas, M. Iliadis, R. Molina, A. K. Katsaggelos, "Using deep neural networks for ınverse problems in ımaging: Beyond analytical methods," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 35, no. 1, pp. 20–36, 2018. DOI: 10.1109/MSP.2017.2760358.

[132] A. Krizhevsky, I. Sutskever, G. E. Hinton, "Imagenet classification with deep convolutional neural networks," in *Advances in Neural Information Processing Systems*, F. Pereira, C. Burges, L. Bottou, K. Weinberger, Eds., vol. 25, Curran Associates, Inc., 2012.

[133] K. He, X. Zhang, S. Ren, J. Sun, *Deep residual learning for ımage recognition*, 2015. DOI: 10.48550/ARXIV.1512.03385.

[134] S. Hochreiter, J. Schmidhuber, "Long short-term memory," *Neural computation*, vol. 9, no. 8, pp. 1735–1780, 1997. DOI: 10.1162/neco.1997.9.8.1735.

[135] T. Mikolov, I. Sutskever, K. Chen, G. Corrado, J. Dean, *Distributed representations of words and phrases and their compositionality*, 2013. DOI: 10.48550/ARXIV.1310.4546.

[136] I. J. Goodfellow *et al.*, *Generative adversarial networks*, 2014. DOI: 10.48550/ARXIV.1406.2661.

[137] T. Y. Hinton GE Osindero S, "A fast learning algorithm for deep belief nets. neural comput.," *Neural computation*, vol. 18, no. 7, pp. 1527–54, 2006. DOI: 10.1162/neco.2006.18.7.1527.

[138] F. A. Gers, J. Schmidhuber, F. Cummins, "Learning to forget: Continual prediction with lstm," *Neural Computation*, vol. 12, no. 10, pp. 2451–2471, Oct. 2000. DOI: 10.1162/089976600300015015.

[139] Y. Lecun, L. Bottou, Y. Bengio, P. Haffner, "Gradient-based learning applied to document recognition," *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, no. 11, pp. 2278–2324, 1998. DOI: 10.1109/5.726791.

[140] K. Simonyan, A. Zisserman, *Very deep convolutional networks for large-scale ımage recognition*, 2014. DOI: 10.48550/ARXIV.1409.1556.

[141] M. Ashraf, G. Geng, X. Wang, F. Ahmad, F. Abid, "A globally regularized joint neural architecture for music classification," *IEEE Access*, vol. 8, pp. 220 980–220 989, 2020. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3043142.

[142] R. Yamashita, M. Nishio, R. Do, K. Togashi, "Convolutional neural networks: an overview and application in radiology.," *Insights Imaging*, vol. 9, no. 4, pp. 611–629, 2018. DOI: 10.1007/s13244-018-0639-9..

[143] R. Chauhan, K. K. Ghanshala, R. Joshi, "Convolutional neural network (cnn) for ımage detection and recognition," in *2018 First International Conference on Secure Cyber Computing and Communication (ICSCCC)*, 2018, pp. 278–282. DOI: 10.1109/ICSCCC.2018.8703316.

[144] X. Glorot, A. Bordes, Y. Bengio, "Deep sparse rectifier neural networks," in *Proceedings of the Fourteenth International Conference on Artificial Intelligence and Statistics*, G. Gordon, D. Dunson, M. Dudík, Eds., ser. Proceedings of Machine Learning Research, vol. 15, Fort Lauderdale, FL, USA: PMLR, Apr. 2011, pp. 315–323.

A
EK

A.1 Derinlik Kompanzasyonu Algoritması

DOT uygulamalarında, artan derinlikle birlikte hassasiyeti ciddi şekilde azaldığı için zayıf derinlik lokalizasyonuna sebep olur. Niu [58], derin dokudaki emicileri doğru bir şekilde lokalize etmek için dokudaki ışık yayılımının bozulma doğasını en iyi şekilde dengeleyen bir Derinlik Kompanzasyonu Algoritması (Depth Compensation Algorithm-DCA) önermiştir.

DCA, katmanlı ölçüm hassasiyetlerinin maksimum tekil değerlerine dayanmaktadır; bu maksimum tekil deperler, artan derinlikteki ölçüm hassasiyetini telafi etmek için dengeleyici bir ağırlık matrisi oluşturmak için tersine kullanılır. Geliştirilen ve Tikhonov Metodu için kullanılan DCA ile ağırlık matrisi modifikasyonu şu şekildedir.

Adım 1: DCA'ya göre, A matrisi $(A_1, A_2, \ldots A_l)$ alt matrislerine ayrıştırılır. Daha sonra her katman için maksimum tekil değerler (maximum singular values) hesaplanır.

$$M = \begin{bmatrix} S_{max.\ N_{layer}} I & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & S_{max.\ 1} I \end{bmatrix}^{\gamma} \tag{A.1}$$

burada γ, M'nin ayarlanabilir gücüdür ve verilen DCA algoritmasına göre 0 ile 3 arasında değer alır. Spesifik olarak, l. derinlik için S_{max}, l ile gösterilen katmanlı alt matris A_l'nın $(k = 1 \ldots N_{layer})$ maksimum tekil değeri, M matrisini oluşturmak için ters olarak düzenlenir:

Adım 2: A ağırlık matrisi, DCA'ya göre ayarlanmış M matrisi ile çarpılır ve yeni ağrlık matrisi elde edilir.

$$\hat{A} = MA \tag{A.2}$$

DCA ile matris modifikasyonu kısaca özetlenirse, A'nın derinlikteki hassasiyet kaybını dengelemek amacıyla, derinlikle birlikte büyüklükte sözde üstel bir artışa sahip bir ağırlık matrisi M oluşturmayı amaçlamışlardır.

Spesifik olarak, M matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir:

1. Yeniden yapılandırılacak görüntünün l katman içerdiğini varsayarsak, A matrisini l alt matrise ayrılır. Yani $(A_1, A_2, \ldots A_l)$ yukarıdan aşağıya doğru sayarak, her biri ortamdaki ilgili katmandaki ölçüm hassasiyetini yansıtır.

2. Alt matrislerin her biri için $(M(A_1), M(A_2), \ldots M(A_l))$ şeklinde ifade edilen maksimum tekil değerler hesaplanır. Bu maksimum tekil değerler, foton yoğunluğunun derinlikle birlikte azalmasından kaynaklanan, yüzeyselden derin katmanlara doğru yalancı üstel bir düşüş sergiler.

3. M matrisini $M = diag(M(A_l), M(A_{l-1}), \ldots M(A_1))$ şeklinde oluşturuyoruz, burada γ ayarlanabilir bir güçtür ve 0 ile 3 arasında değişir.

4. Bu maksimum tekil değerler, görüntülenen ortamın altından üstüne doğru ters olarak sıralanarak M matrisinde derinlikle dengeli bir artışı garanti eder ve böylece derinlikle ölçüm hassasiyetindeki azalmayı telafi eder.

5. A matrisini M ile çarplır ve ters problem çözümünde kullanılmak üzere $\hat{A} = MA$ olarak düzeltilmiş bir $\hat{A}$ matrisi tanımlanır.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Makale

1. Uysal S., Uysal H., Ayten E.U., "Novel regularization method for diffuse optical tomography inverse problem", Optik -International Journal for Light and Electron Optics, Volume 261, July 2022, 169095, doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.169095.

Konferans Bildirisi

1. Uysal S., Uysal H., Ayten E.U., "Diffüz Optik Tomografide Ters Problem ve Genetik Algoritma ile Regülarizasyon Parametresi Seçimi", 4. Uluslararası Bilimsel Araştırmalar Kongresi - UBAK, 2019.