T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KURZWEİL HENSTOCK İNTEGRALİ İÇEREN SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ

Kübra AKSOY

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Aralık, 2020

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KURZWEİL HENSTOCK İNTEGRALİ İÇEREN SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ

Kübra AKSOY tarafından hazırlanan tez çalışması 18.12.2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Yusuf ZEREN
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Yusuf ZEREN, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK, Üye
İstanbul Ticaret Üniversitesi _____

Doç. Dr. Özgür YILDIRIM, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Danışmanım Doç. Dr. Yusuf ZEREN sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Kurzweil Henstock İntegrali İçeren Schrödinger Denkleminin Başlangıç Değer Problemi başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Kübra AKSOY

İmza

Bu çalışma, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Proje Koordinatörlüğü' nün FYL-2020-3837 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

Anneme ve Babama

TEŞEKKÜR

Bu tezin olgunlaşmasında ve tamamlanmasında, bana ilgisini ve yardımını eksik etmeyen, yol gösteren ve zorlandığım zamanlarda bana olan inancı ile beni yüreklendiren ve sürekli aktif tutan değerli danışman hocam Doç. Dr. Yusuf ZEREN'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, birlikte çalışma fırsatı bulduğum ve her zaman desteğini hissettiğim değerli hocam Prof. Sofiène TAHAR' a teşekkürü bir borç bilirim.

Bu süreçte maddi manevi yardımları ile tüm hayatım boyunca her koşulda yanımda olan sevgili biricik ailem Cemil - Perihan AKSOY' a ve kardeşlerime ayrıca tezim için fikir alışverişinde bulunduğum tüm arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Kübra AKSOY

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ vii

KISALTMA LİSTESİ ix

ÖZET x

ABSTRACT xi

1 GİRİŞ 1
- 1.1 Literatür Özeti 1
- 1.2 Tezin Amacı 3
- 1.3 Hipotez 3

2 TEMEL KAVRAMLAR 4
- 2.1 Temel Tanım ve Teoremler 4

3 LEBESGUE İNTEGRALİ 13

4 KURZWEIL HENSTOCK İNTEGRALİ 19
- 4.1 KH İntegralinin Temel Özellikleri 25
- 4.2 KH integrallenebilir fonksiyonlar uzayı 43

5 KURZWEIL HENSTOCK İNTEGRALİ İÇEREN SCHRODINGER DENKLEMİNİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ 44
- 5.1 Varlık ve Teklik Teoremi 46

6 SONUÇ VE ÖNERİLER 53

KAYNAKÇA 54

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR 56

SİMGE LİSTESİ

$\delta(z)$	Ayar fonksiyonu
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$AC_*(D)$	D kümesine kısıtlı anlamda mutlak sürekli fonksiyonlar uzayı
$ACG_*(D)$	D kümesinde tanımlı genelleştirilmiş mutlak sürekli fonksiyonlar uzayı
χ_E	E kümesinin karakteristik fonksiyonu
$S(f;\mathcal{K})$	f fonksiyonunun $\mathcal{K}$ parçalanışına karşılık gelen Riemann toplamı
$\|\|f\|\|$	f in normu
$\|\|f\|\|_A$	f fonksiyonunun Alexiewicz normu
$f_n \rightrightarrows f$	f_n fonksiyon dizisi f' e düzgün yakınsar
$D^+F(x)$	F fonksiyonun sağdan üst türevi
$\mathbb{R}^*$	Genişletilmiş reel sayılar kümesi
$\mathscr{R}(I)$	I aralığında Riemann integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$\mathscr{R}^*(I)$	I aralığında Kurzweil- Henstock integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$\mathscr{L}(I)$	I aralığında Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$BV(I)$	I aralığındaki sınırlı salınımlı fonksiyonlar uzayı
$C(I)$	I aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı
$\ell(I)$	I aralığının uzunluğu (boyu)
K^c	K kümesinin komplemanı (tümleyeni)
$\mu^*(K)$	K kümesinin Lebesgue dış ölçüsü
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
μ	Lebesgue ölçüsü
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi

$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{F}$	Reel veya kompleks sayılar cismi
$dist(x,A)$	x noktasının A kümesine olan uzaklığı
$V_I\varphi$	φ fonksiyonunun I aralığındaki salınımı

KISALTMA LİSTESİ

h.h.y.	Hemen hemen her yerde
KH	Kurzweil-Henstock

ÖZET

Kurzweil Henstock İntegrali İçeren Schrödinger Denkleminin Başlangıç Değer Problemi

Kübra AKSOY

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm literatür özeti, tezin amacı ve hipotez kısımlarından oluşur. İkinci bölümde, bu çalışma ile ilgili temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde, ölçü ve Lebesgue integral teorisi verilmiş olup salınımlı fonksiyonlar ve mutlak integrallenebilirlik incelenmiştir. Dördüncü bölümde, ayar fonksiyonu ve Kurzweil-Henstock integral teorisi inşa edilmiş olup Lebesgue integrallenemeyen ancak Kurzweil-Henstock integrallenebilir fonksiyon örnekleri verilerek bu iki integral teori arasındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca, bir fonksiyonun Kurzweil-Henstock integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Beşinci bölümde, Schrödinger denklemi için başlangıç değer probleminde Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar yerine Lebesgue integralinin bir genişlemesi olan Kurzweil-Henstock integrallenebilir fonksiyonları kullanılarak çözümün varlığı ve tekliği araştırılmıştır. Altıncı bölümde, sonuç ve öneriler ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ayar fonksiyonu, Kurzweil-Henstock integrali, Lebesgue integrali, sınırlı salınım, Schrödinger operatörü

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

Initial Value Problem for Schrödinger Equation Containing Kurzweil Henstock Integral

Kübra AKSOY

Department of Mathematics
Master of Science Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Yusuf ZEREN

This thesis consists of six chapters.

The first chapter includes the literature review, the purpose of the thesis and the hypothesis. In the second chapter, basic definitions and theorems related to this study are given. Measure theory and Lebesgue integral theory are given and bounded variational functions and absolute integrability are examined in the chapter 3. At Chapter 4, gauge and the Kurzweil-Henstock integral theory are constructed, and the relationship between Kurzweil-Henstock and Lebesgue integral are examined, by giving examples of Kurzweil-Henstock integrable functions that are not Lebesgue integrable. Furthermore, necessary and sufficient conditions are given for a function to be Kurzweil-Henstock integrable. In the chapter 5, the existence and uniqueness of the solution in the initial value problem for Schrödinger equation are investigated by using Kurzweil-Henstock integrable functions, which are an extension of Lebesgue integral, instead of Lebesgue integrable functions. At chapter 6, results and recommendations are expressed.

Keywords: Gauge, Kurzweil-Henstock integral, Lebesgue integral, bounded variation, Schrödinger operator

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

1630' larda Fermat ve Decartes' ın analitik geometri ve türev teorisine uzanan çalışmaları, Isaac Newton' ın oluşturduğu türev teorisi ve eğri altındaki alanı bulmak için keşfettiği yöntem 1660' ların sonlarına kadar tam şekillenememişti. Ancak, alan için teğet çizgiler bulma sürecinin tersine çevrilmesi, 1680' lerde Newton' ın yayınlanmamış çalışmasından habersiz olan Gottfried Leibniz tarafından da keşfedilmişti. Böylece, integrasyonun bir toplama süreci ve türev işleminin tersi olduğu anlaşılmıştı. Bu tekniklerin geliştirilmesi bir buçuk yüzyıl boyunca analizdeki işlemlerde ve bunların esas olarak fiziksel problemlere uygulanmasından oluşuyordu. Ancak integralin kesin olarak tanımı Cauchy' e kadar verilmemişti. Cauchy, sürekli fonksiyonlar için eğri altındaki alan hesabında, alanı dikdörtgensel bölgelere ayırarak bir yaklaşım ortaya koymuştu. 1850'lerde ise Riemann, yaklaşık toplamların inşasını örneklem noktaların sayılamayan kümelerin bütününde incelemişti. Böylece, bir aralıktaki tüm fonksiyonları göz önünde bulundurarak bu "integrasyon" sürecinin tanımlanabileceği "integre edilebilir" fonksiyon sınıfı üzerine yoğunlaşılmıştı. Görünüşte küçük olan bu değişiklik, Riemann integralini Cauchy integralinden çok daha güçlü yapmış ve bugün bile integral teori denilince akla gelen ilk isimlerden biri olmuştur. Ancak Riemann' ın ortaya koyduğu bu çalışma kuruluş doğası itibariyle Riemann integrallenebilir fonksiyonlar sınıfının kısıtlı olması gibi birtakım problemleri de beraberinde getiriyordu. Kalkülüsün Temel Teoremi (Fundamental Theorem of Calculus), sadece sınırlı bir dizi integrallenebilir fonksiyonlar için elde edilen bir sonuç haline geldi. Tekillik veya integral aralığının sonsuz olması durumunda ise Riemann integrali genişletilerek "has olmayan (improper)" integraller tanımlandı. Bir diğer sorun ise Riemann integrallenebilir fonksiyonların noktasal limitlerinin alındığı durumlarda fonksiyonların artık Riemann integrallenebilir olmamasıdır. Dolayısıyla Kalkülüsün Temel Teoremi, Riemann integrallenebilir fonksiyonlar için her zaman geçerli olmayabilir veya gerçerli olması ancak daha fazla hipotezin sağlanması ile gerçekleşir.

19. yüzyılın sonlarında Riemann integralin eksiklikleri yeni teorilerin geliştirilmesini tetiklemiştir. Henri Lebesgue, 19. yüzyılın sonlarında ölçü teorisini geliştirerek integral hesabı yapmıştır. 20. yüzyılda matematiksel integralin doğası üzerine yapılan araştırmalarda ortaya çıkan Lebesgue integral, olasılık teorisini iyi bir şekilde formülize eden baskın yakınsaklık teoremi gibi iyi özelliklere sahiptir. Öyle ki Dirichlet fonksiyonu gibi Riemann integrali alınamayan fonksiyonların Lebesgue integrali alınmıştır. Böylece integrallenebilir fonksiyon sınıfı genişletilmiştir. Ancak Lebesgue teori, temel teoride sadece küçük bir basitleştirme yapmış oldu ve tüm türevleri integre edemediği görüldü. Örneğin, $[0,1]$ aralığında türevlenebilir

$$H(z) = \begin{cases} z^2 \sin(1/z^2) & z \in (0,1] \text{ ise} \\ 0 & z = 0 \text{ ise} \end{cases} \tag{1.1}$$

fonksiyonu mutlak sürekli olmadığı için H' nin türev fonksiyonu $H^{'}(x)$ Lebesgue integrali alınamayan bir fonskiyondur. Bu durumun bir sonucu olarak

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f = \int_a^b (f \circ \varphi)\varphi^{'} \tag{1.2}$$

yerine koyma formülü (substitution formula) çok daha karmaşık hale gelir. Yine bazı has olmayan integrallerin, örneğin Dİrichlet integralinin

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \tag{1.3}$$

Lebesgue integrali yoktur. Dahası Lebesgue integralinin tanımlanabilmesi için öncelikle ölçü teorisine ihtiyaç vardır. Tüm bu eksiklikler gidermek için 20. yy' ın başlarında Denjoy ve Perron yeni yaklaşımlar öne sürdüler. Bu değişikler Lebesgue integralini kapsamasına rağmen çalışılması oldukça karmaşık ve zordu. 1957'de Kurzweil [1] ve bağımsız olarak 1963'te Henstock [2], Lebesgue integralinin bir genellemesi olan yeni bir integral tanımı verdi. Riemann integral tanımında yapılan küçük ama etkili bir değişik ile ölçü teorisine ihtiyaç duyulmadan Lebesgue integralin gücüne sahip olan daha kolay anlaşılır bir yapı ortaya konulmuştur. Bu yapıda Riemann toplamları kullanılmış fakat parçalanışın boyunu kontrol etmek için Riemann tarafından kullanılandan farklı bir koşul olan $\delta > 0$ sayısı yerine $\delta(z) > 0$ ayar fonksiyonu kullanılmıştır. Böylece Riemann ve Lebesgue teorisinden daha genel olan çok güçlü bir teoriye ulaşılmıştır. Literatürde ayar (gauge) integrali [3], genelleştirilmiş Riemann (-tipi) integral [4], Kurzweil-Henstock veya Henstock-Kurzweil integral [5] olarak adlandırılmıştır. Tez kapsamında, bu integral için Kurzweil- Henstock integrali ismi kullanılacak ve kısaca KH integrali olarak ifade edilecektir.

Kurzweil- Henstock integralinin matematik, fizik ve mühendislik alanlarında pek çok uygulaması vardır. Örneğin, teorik ve uygulamalı matematikte dağılım fonksiyonları, harmonik analiz, Fourier dönüşümü ve diferansiyel denklemler üzerine; mühendislik alanında elektirik ve bilgisayar mühendisliğinde sistem doğrulamalarında yapılan hesaplamalarda; fizikte ise kuantum alanındaki problemlerde kullanımı mevcuttur.

Bu tezde, öncelikle Lebesgue integraline genel bir bakış verilmiş ve [6], [7], [8] kaynaklarından yararlanılmıştır. Daha sonra, Kurzweil-Henstock integrali inşası için gerekli tanım, teorem ve özellikler için [3], [7], [8], [9], [10], [11] , ve [12] çalışmalarından faydanılmıştır. Son olarak, kuantum fiziğinin en önemli denklemlerinden biri olan ve Lebesgue integrallenebilir fonksiyonları içeren Schrödinger denkleminin başlangıç değer problemi için çözümünün varlığı ve tekliğini Lebesgue integralinin bir genişlemesi olan Kurzweil-Henstock integrali için araştırılmasında S. Sánchez-Perales' in [13] makalesinden yararlanılmıştır.

1.2 Tezin Amacı

Bu tezde, Kurzweil-Henstock integral teori, Riemann ve Lebesgue integrallenemeyen ancak Kurzweil-Henstock integrallenebilen fonksiyon örnekleri verilerek Lebesgue integrali ile ilişkisi incelenmiş ve Kurzweil-Henstock integrali içeren Schrödinger denkleminin başlangıç değer problemi için çözümün varlığı ve tekliğinin araştırılması amaçlanmıştır.

1.3 Hipotez

Lebesgue integralinin gücüne sahip ve ondan daha genel olan Kurzweil- Henstock integralinin Schrödinger denkleminin başlangıç değer problemi için uygulanmasında elde edilecek bir çözüm vardır ve tektir.

2
TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1. $K \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathbb{F}$ cismi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olsun.

$$+ : K \times K \to K, \qquad (\kappa, \nu) \to \kappa + \nu,$$

$$. : F \times K \to K, \qquad (\alpha, \kappa) \to \alpha\kappa,$$

yukarıdaki gibi tanımlanan toplama ve çarpma işlemleri aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa K kümesine $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzayı) denir.

(i) $\forall \kappa, \nu \in K$ için $\kappa + \nu = \nu + \kappa$.

(ii) $\forall \kappa, \nu, z \in K$ için $(\kappa + \nu) + z = \kappa + (\nu + z)$.

(iii) $\forall \kappa \in K$ için K kümesinde öyle bir 0 elemanı vardır ki $0 + \kappa = \kappa + 0 = \kappa$ dir.

(iv) Verilen $\kappa \in K$ için $\kappa + (-\kappa) = 0$ ve $(-\kappa) + \kappa = 0$ olacak şekilde $-\kappa \in K$ vardır.

(v) $\forall \kappa \in K$ için $1.\kappa = \kappa$.

(vi) $\forall \kappa \in K$ ve $\forall \alpha, b \in F$ için $\alpha(b\kappa) = (\alpha b)\kappa$.

(vii) $\forall \kappa, y \in K$ ve $\forall \alpha, b \in F$ için $\alpha(\kappa + \nu) = \alpha\kappa + \alpha\nu$ ve $(\alpha + b)\kappa = \alpha\kappa + b\kappa$.

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ise K' ya reel vektör uzayı ve $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ise kompleks vektör uzayı denir.

Tanım 2.2. A bir küme ve K, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Tanım kümesi A ve görüntü kümesi K' nın bir alt kümesi olan bütün fonksiyonların kümesi

$$(f + g)(\kappa) = f(\kappa) + g(\kappa), \quad (\alpha f)(\kappa) = \alpha f(\kappa), \qquad x \in A,\ \alpha \in \mathbb{F} \qquad (2.1)$$

özelliklerini sağlıyorsa bir vektör uzayı oluşturur.

Örnek 2.1. *$C([a,b],\mathbb{C})$ olarak gösterilen $[a,b]$ üzerindeki sürekli kompleks değerli bütün fonksiyonların uzayı 2.1 şartını sağladığından kompleks vektör uzayıdır.*

Tanım 2.3. K ve V aynı $\mathbb{F}$ cismi üzerinde vektör uzayı olsunlar. $A : K \to V$ fonskiyonu

(i) $A(\kappa + \nu) = A(\kappa) + A(\nu) \qquad \forall \kappa, \nu \in K$

(ii) $A(\alpha\kappa) = \alpha A(\kappa) \qquad \forall \kappa \in K, \alpha \in \mathbb{F}$

koşullarını sağlıyorsa A' ye V' den U' ya lineer operatör denir.

Tanım 2.4. K boştan farklı bir küme ve

$$d : K \times K \to (0, \infty), \qquad (\kappa, \nu) \to d(\kappa, \nu)$$

dönüşümü verilsin. $\forall \kappa, \nu, z \in K$ için

(i) $d(\kappa, \nu) \geq 0$,

(ii) $d(\kappa, \nu) = 0 \Leftrightarrow \kappa = \nu$,

(iii) $d(\kappa, \nu) = d(\nu, \kappa)$,

(iv) $d(\kappa, \nu) \leq d(\kappa, z) + d(z, \nu)$,

özellikleri bu dönüşüm tarafından sağlanıyorsa d' ye K üzerinde bir metrik ve (K, d) ikilisine ise metrik uzay denir.

Tanım 2.5. K, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $||.|| : K \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa üzerinde yarı norm denir.

(i) Her $\kappa \in K$ için $||\kappa|| \geq 0$;

(ii) $||\kappa|| = 0$ iken $\kappa = 0$ ise;

(iii) Her $\kappa \in K$ ve $\alpha \in F$ için $\|\alpha\kappa\| = |\alpha|\|\kappa\|$;

(iv) Her $\kappa, \nu \in K$ için $\|\kappa + \nu\| \leq \|\kappa\| + \|\nu\|$ dir.

Eğer (ii) yerine $||\kappa|| = 0 \Leftrightarrow \kappa = 0$ koşulu gerçeklenirse $||.||$ K üzerinde norm tanımlar. $(K, ||.||)$ ikilisi normlu uzay belirtir.

Tanım 2.6. $A : K \to V$ bir lineer operatör olsun. Her $x \in K$ için

$$||Ax|| \leq M||x|| \tag{2.2}$$

olacak şekilde sabit bir $M > 0$ sayısı varsa A operatörü tanımlı olduğu K uzayında sınırlıdır denir.

Tanım 2.7. $A : K \to V$ sınırlı lineer bir operatör olsun. O halde, bu operatörün normu

$$||A|| = \inf\{m > 0 : \forall \kappa \in K,\ ||A\kappa|| \leq m||\kappa||\} \tag{2.3}$$

olarak tanımlanır ve

$$||A|| = \sup\{||A\kappa|| : \forall \kappa \in K,\ ||\kappa|| < 1\} \tag{2.4}$$

$$||A|| = \sup\{||A\kappa|| : \forall \kappa \in K,\ ||\kappa|| = 1\} \tag{2.5}$$

$$||A|| = \sup\left\{\frac{||A\kappa||}{||\kappa||} : \forall \kappa \in K,\ \kappa \neq 0\right\} \tag{2.6}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Tanım 2.8. $(K, ||.||)$ normlu bir uzay, (k_n) bu uzay içinde bir dizi ve $k_0 \in K$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} ||k_n - k_0|| = 0 \tag{2.7}$$

ise (k_n) dizisi k_0 noktasına yakınsıyor denir.

Tanım 2.9. (k_n), $(K, ||.||)$ normlu uzayında tanımlı bir dizi olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık her $n, m > N_\epsilon$ iken $||k_n - k_m|| < \epsilon$ olacak şekilde bir N_ϵ doğal sayısı varsa (k_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.10. $(K, ||.||)$ normlu bir uzayda her Cauchy dizisi K içinde bir limite yakınsıyorsa, bu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı denir.

Tanım 2.11. $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ veya $\mathbb{R}$ cismi ve K bir verktör uzayı olsun.

$$< ., . >: K \times K \to F = \mathbb{C}$$

dönüşümü aşağıdaki özelliklere sağlıyorsa bu dönüşüme K üzerinde bir iç çarpım ve $(K, < ., . >)$ ikilisine de iç çarpım uzayı denir.

(i) Her $\kappa \in K$ için $< \kappa, \kappa > \geq 0$ ve $< \kappa, \kappa >= 0 \Leftrightarrow \kappa = 0$;

(ii) Her $\kappa, \nu \in K$ için $< \kappa, y >= \overline{< \nu, \kappa >}$;

(iii) Her $\kappa, \nu \in K$ ve $c \in F$ için $< c\kappa, \nu >= c < \kappa, y >$;

(iv) Her $\kappa, \nu \in K$ ve $c \in F$ için $< \kappa, c\nu >= \overline{c} < \kappa, y >$;

(v) Her $\kappa, \nu, z \in K$ için $< \kappa + \nu, z >=< \kappa, z > + < \nu, z >$.

Tanım 2.12. $(K, <.,.>)$ bir iç çarpım uzayı ve $\kappa \in K$ olsun. κ vektörünün normu

$$||\kappa|| =< \kappa, \kappa >^{1/2} \tag{2.8}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.13. $(K, <.,.>)$ bir iç çarpım uzayı olsun. Cauchy-Schwartz eşitsizliği

$$| < \kappa, y > | \leq ||\kappa||||y||, \qquad \forall \kappa, y \in K \tag{2.9}$$

olarak verilir.

Tanım 2.14. $(K, <.,.>)$ içindeki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir.

Örnek 2.2. *$\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ ve $L^2[a,b]$ Hilbert uzayıdır.*

Tanım 2.15. K reel sayıların bir alt kümesi olsun. Her $x \in K$ için $x \leq \alpha$ sağlanacak şekilde bir $\alpha \in \mathbb{R}$ varsa, K kümesine üstten sınırlı denir.

Tanım 2.16. K reel sayıların bir alt kümesi olsun. Her $x \in K$ için $x \geq \beta$ gerçeklenmek üzere bir $\beta \in \mathbb{R}$ varsa, K kümesine alttan sınırlı denir.

Tanım 2.17. $K \subset \mathbb{R}$ boştan farklı bir küme olsun.

$$\forall x \in K \quad \text{için} \quad x < \alpha_0 \quad \text{ve} \quad \forall \epsilon > 0, \exists x \in K, \alpha_0 - \epsilon < x$$

koşullarını gerçekleyen bir $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ sayısına K kümesinin supremumu denir. $\sup K = \alpha_0$ yazılır.

$$\forall x \in K \quad \text{için} \quad x > \beta_0 \quad \text{ve} \quad \forall \epsilon > 0, \exists x \in K, x < \beta_0 + \epsilon$$

koşullarını gerçekleyen bir $\beta_0 \in \mathbb{R}$ sayısına K kümesinin infimumu denir. $\inf K = \beta_0$ yazılır [14].

Tanım 2.18. $\alpha > 0$ yarıçaplı merkezi κ olan

$$B[\kappa; \alpha] := \{y \in \mathbb{R} : |\kappa - y| \leq \alpha \equiv y \in [\kappa - \alpha, \kappa + \alpha]\} \tag{2.10}$$

ifadesine kapalı yuvar kümesi,

$$B(\kappa;\alpha) := \{y \in \mathbb{R} : |\kappa - y| < \alpha \equiv y \in (\kappa - \alpha, \kappa + \alpha)\} \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlanan kümeye ise açık yuvar kümesi denir.

Tanım 2.19. $a \in K \subset \mathbb{R}$ olsun. Eğer $(a-r, a+r) \subset K$ gerçeklenmek üzere $r > 0$ reel sayısı varsa a noktasına K kümesinin bir iç noktası denir. Eğer K' nın her noktası bir iç nokta ise K' ya açık küme denir.

Yorum 2.1. (i) Her açık aralık açık kümedir.

(ii) Reel sayılarda $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$ açık kümelerdir.

(iii) Reel sayılarda her açık küme açık aralıkların bir dizisinin birleşimidir.

(iv) Bir metrik uzayda her açık (kapalı) yuvar açık (kapalı) kümedir.

Tanım 2.20. X herhangi bir küme ve $\mathcal{O}$, X' in alt kümelerinin bir kümesi olsun. Eğer $\mathcal{O}$ kümesi,

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}$ ve $X \in \mathcal{O}$;

(ii) $U, V \in \mathcal{O}$ ise $U \cap V \in \mathcal{O}$

(iii) Her $i \in I$ için $(U_i) \in \mathcal{O}$ ise $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$;

şartlarını sağlıyorsa $\mathcal{O}$' ya X üzerinde bir topoloji denir. $(X, \mathcal{O})$ topolojik uzay adını alır.

Tanım 2.21. Bir topolojik uzayda açık bir kümenin tümleyenne kapalı küme denir.

Tanım 2.22. $K \subset X$ olsun. $K \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$ olacak şekilde X deki açık G_n alt kümelerin birleşimine K kümesinin açık örtüsü denir.

Tanım 2.23. $K \subset X$ olsun. Eğer K' nın her açık örtüsü sonlu sayıda alt örtü içeriyorsa K kümesine kompakt küme denir.

Teorem 2.1 (Heine-Borel Teoremi)**.** $\mathbb{R}^n$ *(veya* $\mathbb{C}^n$ *) de bir küme kompakt olması için gerek ve yeter koşul bu kümenin kapalı ve sınırlı olmasıdır.*

Tanım 2.24. Her noktası kompakt bir komşuluğa sahip olan topolojik uzaya lokal kompakt uzay denir.

Örnek 2.3. $\mathbb{R}^n$ *lokal kompakttır.*

Tanım 2.25. $h : K \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$ sayısı,

$$0 < |\kappa - a| < \delta \quad \text{iken} \quad |h(\kappa) - A| < \epsilon$$

gerçeklenmek üzere varsa, κ noktası a noktasına yaklaştığında $h(\kappa)$ fonksiyonunun limiti A sayısıdır, denir.

Tanım 2.26. $h : K \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $c \in K$ olsun.Her $\epsilon > 0$ ve $\kappa \in K$ için

$$|\kappa - c| < \delta \quad \text{iken} \quad |h(\kappa) - f(c)| < \epsilon$$

gerçekleyen bir $\delta > 0$ sayısı varsa h fonksiyonuna c noktasında süreklidir, denir.

Tanım 2.27. $h : K \to \mathbb{R}$ olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık bir $\delta > 0$ sayısı,

$$\forall \kappa, \nu \in K \quad \text{için} \quad |\kappa - \nu| < \delta \quad \text{iken} \quad |h(\kappa) - h(\nu)| < \epsilon$$

gerçeklenmek üzere varsa h fonksiyonuna K üzerinde düzgün süreklidir, denir.

Teorem 2.2. *$K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt bir alt küme ve $f : K \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu K üzerinde sürekli olsun. O zaman, f düzgün süreklidir [12].*

Sonuç 2.1. *$K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt bir alt küme ve $f : K \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu K üzerinde sürekli ise f fonksiyonu K üzerinde sınırlıdır [12].*

Tanım 2.28. $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için

$$\kappa \in I \quad \text{ve} \quad 0 < |\kappa - a| < \delta \quad \text{iken} \quad \left| \frac{f(\kappa) - f(a)}{\kappa - a} - A \right| < \epsilon$$

gerçekleyen bir $\delta > 0$ varsa $A \in \mathbb{R}$ sayısına f fonksiyonun a noktasındaki türevi denir. Başka bir deyişle, aşağıdaki limit var ise bir fonksiyonun türevi

$$f'(\kappa) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\kappa + t) - f(t)}{t} \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.29. $K \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : K \to \mathbb{R}$ olsun. $\kappa, \nu \in K$ ve $\kappa \leq \nu$ iken $f(\kappa) \leq f(\nu)$ ise f fonksiyonuna K kümesinde artan fonksiyon denir.

Tanım 2.30. $K \subseteq \mathbb{R}$ ve $f : K \to \mathbb{R}$ olsun. $\kappa, \nu \in K$ ve $\kappa \leq y$ iken $f(\kappa) \geq f(\nu)$ ise f fonksiyonuna K kümesinde azalan fonksiyon denir.

Tanım 2.31. K kümesi üzerinde artan veya azalan fonksiyona monoton fonksyion denir.

Tanım 2.32. $K \subseteq \mathbb{R}$ ve $\psi : K \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer ψ, sadece sonlu sayıda farklı değere sahip ve her değer K' da bir veya birden fazla aralıkta ise ψ fonksiyonuna adım fonksyionu denir.

Lemma 2.1. *$c < d$ uç noktalarına sahip $I = [a, b]$ nin alt aralığı J olsun. $x \in J$ için $\psi_J(x) := 1$ ve $x \in I/J$ için $\psi_J(x) := 0$ ise $\psi_J \in \mathscr{R}(I)$ ve $\int_a^b \psi_J = d - c$ dir.*

Teorem 2.3. *$\psi : I \to \mathbb{R}$ bir adım fonksiyonu ise $\psi \in \mathscr{R}(I)$ dır.*

Teorem 2.4. *$f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise $f \in \mathscr{R}(I)$ dır.*

Teorem 2.5. *$f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu monoton ise $f \in \mathscr{R}(I)$ dır.*

Tanım 2.33. $K \subseteq \mathbb{R}$ boştan farklı bir küme ve her $p \in \mathbb{N}$ için $f_p : K \to \mathbb{R}$ gerçel değerli fonksiyon dizisi verilsin. K kümesinin

$$K_0 = \left\{ x \in K : \exists \ell_x \in \mathbb{R}, \lim_{p \to \infty} f_p(x) = \ell_x \right\} \tag{2.13}$$

kümesi boştan farklı ise her $x \in K_0$ için $f(x) = \ell_x = \lim_{p\to\infty} f_p(x)$ noktasal limit fonksiyonunu gerçekler. Eğer böyle bir f fonksiyonu bulunabiliyorsa $\{f_p\}$ fonksiyon dizisi f gerçel değerli fonksiyonuna noktasal yakınsıyor denir ve $f_p \to f(x)$ olarak gösterilir.

Tanım 2.34. $K \subseteq \mathbb{R}$ boştan farklı bir küme ve her $p \in \mathbb{N}$ için $f_p : K \to \mathbb{R}$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için

$$\forall \kappa \in K, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, |f_p(\kappa) - f(\kappa)| < \epsilon \tag{2.14}$$

koşulu gerçekleniyorsa veya diğer bir ifadeyle,

$$\forall p \geq N, \exists N \in \mathbb{N}, ||f_p(\kappa) - f(\kappa)||_K < \epsilon \tag{2.15}$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı varsa $\{f_p(x)\}_{p=1}^{\infty}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsar denir ve $f_p \rightrightarrows f$ yazılır [14].

Tanım 2.35. (x_n) reel sayılarda bir dizi olsun.

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \tag{2.16}$$

toplamına seri denir. $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ ifadesi bu serinin kısmi toplamlar dizisidir. Bu dizinin limitine de serinin toplamı denir. Eğer verilen serinin S_n dizisi yakınsak ise bu seriye yakınsak değilse ıraksak seri denir.

Tanım 2.36. (a_n) pozitif terimli bir dizi olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \tag{2.17}$$

serisine alterne seri denir.

Örnek 2.4. $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^{t+1}}{t}$ *alterne serisi yakınsaktır.*
$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^p}$ *p-serisi* $p > 1$ *için yakınsak ve* $0 < p \leq 1$ *için ıraksaktır.*

Teorem 2.6. $f_k, f : K \to \mathbb{R}$ *negatif olmayan fonksiyonlar ve her bir* f_k *K' da integrallenebilir olsun.* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, *K da noktasal yakınsak ise o zaman*

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *K da düzgün yakınsaktır.*

(ii) f, *K da integrallenebilirdir ve* $\sum_{k=1}^{\infty} \int_K f_k = \int_K f$.

Teorem 2.7. f *fonksiyonu* $I = [a, b]$ *aralığında Riemann integrallenebilir ise sınırlıdır.*

Tanım 2.37. f fonksiyonu $I = [a, b]$ de Riemann integrallenebilir olsun.

$$F(z) := \int_a^z f, \quad z \in [a, b] \tag{2.18}$$

fonksiyonuna f' in a noktasına dayalı belirsiz integrali denir.

Teorem 2.8 (Lebesgue Integrallenebilirlik Kriteri)**.** *Sınırlı bir* $f : I \to \mathbb{R}$ *fonksiyonunun Rimeann integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul* f' *nin* I *aralığında hemen hemen her yerde (h.h.y.) sürekli olmasıdır [11].*

Tanım 2.38. $x \in \mathbb{R}$ ve $K \neq \emptyset$ olmak üzere $K \subseteq \mathbb{R}$ için,

$$dist(x, K) := \inf\{dist(x, y) : y \in K\} \tag{2.19}$$

ifadesine x noktasının K kümesine olan uzaklığı denir.

Tanım 2.39. (i) $\mathbb{R}$ de en çok bir nokta içeren aralığa dejenere aralık denir.

(ii) En az iki nokta içeren aralığa ise dejenere olmayan aralık denir.

(iii) Her $i \neq j$ için $K_i \cap K_j = \emptyset$ ise bu aralıklara ayrık aralıklar denir.

Tanım 2.40. $\mathbb{R}$ de iki aralık en çok bir noktada (uç noktada) kesişiyorsa veya kesişimleri boş küme ise bu aralıklara örtüşmeyen (nonoverlapping) aralıklar denir.

Tanım 2.41. $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı dejenere olmayan kompakt bir aralık olsun. I aralığındaki noktaların sonlu sıralı kümesi

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$$

olmak üzere $i = 1, 2, \cdots, n$ için $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ alt kümesine, I aralığının bir parçalanışı denir. Parçalanış $\Re := \{I_i\}_{i=1}^n$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.42. $a \leq b$ olsun. $I = [a,b]$ aralığının uzunluğu

$$\ell(I) := b - a \tag{2.20}$$

ile tanımlanır. Ayrıca, $\ell(I) \geq 0$ dır. Aralığın uç noktaları çakışık ise $\ell(I) = 0$ dır. Özel olarak, boş kümenin uzunluğu sıfırdır.

Tanım 2.43. $I = [a,b]$ dejenere olmayan kompakt bir aralık olsun. I aralığında $\{J_j\}_{j=1}^{r}$ örtüşmeyen kapalı aralıkların kümesinden oluşan bütüne I aralığının alt parçalanışı denir [5].

Tanım 2.44. $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ olsun. F fonksiyonun $\kappa \in [a,b)$ noktasında üst sağdan(upper right) ve alt sağdan(lower right) türevleri sırasıyla

$$D^{+}F(\kappa) = \lim_{\delta \to 0^{+}} sup \left\{ \frac{F(y)-F(\kappa)}{y-\kappa} : \kappa < y < \kappa + \delta \right\} \tag{2.21}$$

$$D_{+}F(\kappa) = \lim_{\delta \to 0^{+}} inf \left\{ \frac{F(y)-F(\kappa)}{y-\kappa} : \kappa < y < \kappa + \delta \right\} \tag{2.22}$$

olarak tanımlanır. Benzer şekilde, F fonksiyonunun $\kappa \in (a,b]$ noktasında üst soldan (upper left) ve alt soldan (lower left) türevleri sırasıyla

$$D^{-}F(\kappa) = \lim_{\delta \to 0^{+}} sup \left\{ \frac{F(y)-F(\kappa)}{y-\kappa} : \kappa - \delta < y < \kappa \right\} \tag{2.23}$$

$$D_F(\kappa) = \lim_{\delta \to 0^{+}} inf \left\{ \frac{F(y)-F(\kappa)}{y-\kappa} : \kappa - \delta < y < \kappa \right\} \tag{2.24}$$

biçiminde tanımlanır [7].

3
LEBESGUE İNTEGRALİ

Bu bölümde ölçü teorisi ve Lebesgue integralinin tanımı, temel özellikleri ve önemli teoremleri verilecektir.

Tanım 3.1. $X \neq \emptyset$ bir küme ve X' in alt kümelerinin bir ailesi ise Σ olsun. Σ için aşağıda verilen koşullar,

(i) $\emptyset \in \Sigma$

(ii) $K \in \Sigma$ iken $K^c \in \Sigma$

(iii) $i \in \mathbb{N}$ için $K_i \in \Sigma$ iken $K = \cup_{i=1}^{\infty} K_i \in \Sigma$

sağlanıyorsa Σ' ya X üzerinde bir σ-cebri, (X, Σ) ikilisine ölçülebilir uzay, K' ya ölçülebilir küme denir.

Tanım 3.2. X topolojik bir uzay olsun. Bütün açık (kapalı) kümeler tarafından üretilen σ-cebrine X' in Borel σ-cebri denir.

Örnek 3.1. *$X = \mathbb{R}^n$ uzayı Borel σ- cebridir.*

Tanım 3.3. $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ olsun. μ fonksiyonu için

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $i \notin j$ için $K_i \cap K_j = \emptyset$ ise $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i)$,

özellikleri sağlanıyorsa μ' ye ölçü denir. (K, Σ, μ) üçlüsüne ölçü uzayı denir.

Tanım 3.4. K reel sayıların bir kümesi olsun. $\mu(K)$ reel sayılarda pozitif değerler alan Lebesgue ölçüsünü belirtsin. O halde, aşağıdaki özellikler gerçeklenir:

(i) I bir aralık ise $\mu(I) = \ell(I)$ dır. Yani, bir aralığın Lebesgue ölçüsü aralığın uzunluğuna eşittir.

(ii) $K \subset E$ ise $\mu(K) \leq \mu(E)$ dir.

(iii) $K \subseteq \mathbb{R}$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $K + a_0 = \{a + a_0 : a \in K\}$ olarak tanımlanmak üzere $\mu(K + a_0) = \mu(K)$ dır.

(iv) K ve E ayrık kümeler olsun. O halde, $\mu(K \cup E) = \mu(K) + \mu(E)$ dir. Genel ifadeyle, $\{K_i\}$ ayrık kümelerin bir dizisi ise $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i)$ yazılır.

Tanım 3.5. $K \subseteq \mathbb{R}$ olsun. K kümesinin Lebesgue dış ölçüsü

$$\mu^*(K) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_i) : \{I_i\} \text{ açık aralıkların bir dizisi, } K \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \right\} \tag{3.1}$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca, $0 < \mu^*(K) \leq \infty$ olduğu açıktır.

Teorem 3.1. *Lebesgue dış ölçü aşağıdaki özellikleri sağlar:*

(i) $K_1 \subseteq K_2$ *ise* $\mu^*(K_1) \leq \mu^*(K_2)$ *dir.*

(ii) Herhangi sayılabilir kümenin dış ölçüsü sıfırdır.

(iii) Boş kümenin dış ölçüsü sıfırdır.

(iv) Her $a_0 \in \mathbb{R}$ *için* $\mu^*(K + a_0) = \mu^*(K)$ *dir.*

(v) Lebesgue dış ölçüsü sayılabilir alt toplamsaldır. Yani, $\{K_i\}$ *küme dizisi için* $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(K_i)$ *yazılır.*

(vi) Herhangi bir I *aralığı için* $\mu^*(I) = \ell(I)$ *dır.*

Tanım 3.6. $K \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Her $H \subset \mathbb{R}$ için

$$\mu^*(H) = \mu^*(H \cap K) + \mu^*(H \setminus K) = \mu^*(H \cap K) + \mu^*(H \cap K^c) \tag{3.2}$$

koşulu gerçekleniyorsa K kümesine Lebesgue ölçülebilir denir. Eğer K ölçülebilir bir küme ise μ^* dış ölçü $\mu(K)$ olarak yazılır.

Teorem 3.2. *Ölçülebilir kümelerin ailesi aşağıdaki özelliklere sahiptir:*

(i) $\emptyset$ *ve* $\mathbb{R}$ *ölçülebilirdir.*

(ii) Eğer K *ölçülebilir ise* K^c *de ölçülebilirdir.*

(iii) Ölçüsü sıfır olan kümeler ölçülebilirdir.

(iv) K *ve* E *ölçülebilir kümeler ise* $K \cup E$ *ve* $K \cap E$ *ölçülebilirdir.*

(v) K *ölçülebilir ise* $K + a_0$ *ölçülebilirdir.*

(vi) Her aralık ölçülebilirdir.

Yorum 3.1. Lebesgue ölçülebilir kümelerin ailesi bir σ- cebridir. Tüm açık kümeleri içeren en küçük σ- cebri Borel kümesi idi. Dolayısıyla bütün sayılabilir, açık ve kapalı kümeler ile aralıklar bir Borel kümesi dolayısıyla σ- cebridir. Tanımlarda kullanmak üzere, açık kümelerin sayılabilir keşimini G_δ ile kapalı kümelerin sayılabilir birleşimini ise F_σ olarak gösterelim.

Teorem 3.3. *Herhangi* $K \subseteq \mathbb{R}$ *için aşağıdakiler ifadeler birbirine denktir [7]:*

(i) K *kümesi ölçülebilirdir.*

(ii) Her $\epsilon > 0$ *için* $\mu^*(G \setminus K) < \epsilon$ *gerçeklenmek üzere bir* $G \supseteq K$ *açık kümesi vardır.*

(iii) Her $\epsilon > 0$ *için* $\mu^*(K \setminus F) < \epsilon$ *gerçeklenmek üzere bir* $F \subseteq K$ *kapalı kümesi vardır.*

(iv) $\mu^*(G \setminus K) = 0$ *olacak şekilde bir* G_δ *kümesi* $G \supseteq K$ *vardır.*

(v) $\mu^*(K \setminus F) = 0$ *olacak şekilde bir* F_σ *kümesi* $F \subseteq K$ *vardır.*

Tanım 3.7. $E \subseteq \mathbb{R}$ kümesi sonlu dış ölçüye sahip olsun. Her bir $x \in E$ ve $\epsilon > 0$ için $x \in I$ ve $\mu(I) < \epsilon$ olacak şekilde bir $I \in \mathscr{V}$ aralığı varsa böyle aralıkların $\mathscr{V}$ ailesine E kümesinin Vitali örtüsü denir.

Lemma 3.1 (Vitali Örtü Lemma)**.** $E \subseteq \mathbb{R}$ *kümesi için* $\mu^*(E) < \infty$ *olsun. Eğer* $\mathscr{V}$*, E' nin bir Vitali örtüsü ise o zaman her bir* $\epsilon > 0$ *için* $\mu^*(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} I_i) < \epsilon$ *gerçekleyen* $\mathscr{V}$*' de ayrık aralıkların sonlu bir* $\{I_i\}_{i=1}^{n}$ *ailesi vardır. Ayrıca,* $\mathscr{V}$*' de ayrık aralıkların sonlu bir* $\{I_i\}$ *dizisi için* $\mu^*(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i) = 0$ *gerçeklenmek üzere vardır.*

Tanım 3.8. $K \subset \mathbb{R}$ ve $h : K \to \mathbb{R}^*$ olsun. Eğer her $\xi \in \mathbb{R}$ için

$$\{x \in K : h(x) > \xi\} \tag{3.3}$$

kümesi ölçülebilir ise h fonksiyonu ölçülebilir fonksiyon denir.

Teorem 3.4. K *ölçülebilir bir küme ve* $h : K \to \mathbb{R}$ *bir fonksiyon olsun. O halde, her* $\xi \in \mathbb{R}$ *için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

(i) $\{x \in K : h(x) > \xi\}$ *kümesi ölçülebilirdir.*

(ii) $\{x \in K : h(x) \geq \xi\}$ *kümesi ölçülebilirdir.*

(iii) $\{x \in K : h(x) < \xi\}$ *kümesi ölçülebilirdir.*

(iv) $\{x \in K : h(x) \leq \xi\}$ *kümesi ölçülebilirdir.*

Tanım 3.9. Bir özellik ölçüsü sıfır olan küme dışında her yerde sağlanıyorsa bu özellik hemen hemen her yerde (h.h.y) sağlanır.

Tanım 3.10. $E \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir küme olsun. K ölçülebilir bir küme ve $E \subseteq K$ olsun.

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \text{ ise} \\ 0 & x \notin E \text{ ise} \end{cases} \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona E kümesinin karakteristik fonksiyonu denir.

Tanım 3.11. $f : K \to \mathbb{R}$, sayılabilir sonlu sayıda birbirinden farklı c_i değerlerine sahip bir fonksiyon ve K_i ölçülebilir ikili ikili ayrık kümeler ve birleşimleri K olsun. O halde,

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{K_i} \tag{3.5}$$

olarak tanımlanan fonksiyona basit fonksiyon denir.

Tanım 3.12. $h : K \to \mathbb{R}$ olsun.

$$h^+(\kappa) = \max\{h(\kappa), 0\}, \qquad h^-(\kappa) = \max\{-h(\kappa), 0\} \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanır. h ölçülebilir olduğunda h^+ ve h^- ölçülebilirdir. $h = h^+ - h^-$ ve $|h| = h^+ + h^-$ dir.

Tanım 3.13. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ bir dizi olsun. O halde,

$$\limsup_i x_i = \inf_i \left\{ \sup_{p \geq i} x_p \right\} = \lim_{i \to \infty} \left\{ \sup_{p \geq i} x_p \right\} \tag{3.7}$$

ifadesine $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin üst limiti (limit superior)

$$\liminf_i x_i = \sup_i \left\{ \inf_{p \geq i} x_p \right\} = \lim_{i \to \infty} \left\{ \inf_{p \geq i} x_p \right\} \tag{3.8}$$

ifadesine ise $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin alt limit (limit inferior) denir.

Bu durumda, $-\infty \leq \liminf_i x_i \leq \limsup_i x_i \leq +\infty$ ifadesi her zaman geçerlidir. Ayrıca, $\lim_{i \to \infty} x_i$ limitin var olması için gerek ve yeter koşul $\limsup_i x_i = \liminf_i x_i$ olmasıdır.

Tanım 3.14. $f : K \to \mathbb{R}$ basit fonksiyonu $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{K_i}$ kanonik formuyla verilmiş olsun. f fonksiyonun K üzerinde Lebesgue integrali $\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(K_i)$ olarak

tanımlanır. E, $[a,b]$ nin ölçülebilir bir alt kümesi ise

$$\int_E f = \int_a^b f\,\chi_E = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu\left(K_i \cap E\right) \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye f fonksiyonunun Lebesgue integrali denir.

Lebesgue integral tanımı sup kullanılarak da tanımlanabilir.

Tanım 3.15. K ölçülebilir bir küme ve $h : K \to \mathbb{R}$ negatif olmayan ölçülebilir fonksiyon olsun. h fonksiyonunun K üzerindeki Lebesgue integrali

$$\int_K h = \int_K h(\kappa)d\kappa = \sup\left\{\int_K \varphi : 0 \le \varphi \le h \text{ ve } \varphi \text{basit fonksiyon}\right\} \tag{3.10}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.5. *$h : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. h, $[a,b]$ üzerinde Lebesgue integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul h' in ölçülebilir olmasıdır [15].*

Tanım 3.16. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $\int_a^b f < \infty$ ise f fonksiyonu Lebesgue integrallenebilirdir.

Teorem 3.6 (Monoton Yakınsaklık Teoremi)**.** *E Lebesgue ölçülebilir bir küme ve üzerinde $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ E kümesi üzerinde negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ olmak üzere*

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \tag{3.11}$$

gerçeklenir [15].

Sonuç 3.1. *E Lebesgue ölçülebilir bir küme ve üzerinde $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ E kümesi üzerinde negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. O halde,*

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \tag{3.12}$$

gerçeklenir [15].

Lemma 3.2 (Fatou Lemma)**.** *$\{f_n\}$, $[a,b]$ üzerinde tanımlı negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise*

$$\int_a^b \liminf_{n\to\infty} f_n \le \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n \tag{3.13}$$

gerçeklenir [8].

Teorem 3.7 (Baskın Yakınsaklık Teoremi). *$[a,b]$ üzerinde $\{f_n\}$ Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların bir dizisi ve g Lebesgue integrallenebilir olsun. Farzedelim ki, h.h.y. $\{f_n\} \to f$ olsun. Her n için $|\{f_n\}| \leq g$ ise f Lebesgue integrallenebilirdir ve $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$ yazılır [8].*

Verilen teoremlerle görülür ki Lebesgue integral önemli yakınsaklık teoremlerini sağlar. Ancak, bir çok fonksiyon için kullanımı elverişli ve pek çok uygulamaya sahip olsa da Lebesgue integrali alınamayan fonksiyonlar vardır.

Örnek 3.2. *Türevlenebilir h fonksiyonu ve türevi h' aşağıdaki gibi tanımlansın.*

$$x \in (0,1] \qquad h(x) = x^2.\sin(\frac{\pi}{2x^2}), \quad h(0) = 0 \tag{3.14}$$

$$x \in (0,1] \qquad h'(x) = 2x.\sin(\frac{\pi}{2x^2}) - \frac{\pi}{x}\cos(\frac{\pi}{2x^2}), \quad h'(0) = 0 \tag{3.15}$$

h' fonksiyonu Lebesgue anlamında integrallenemediğni gösterelim [8].

$0 < a < b < 1$ olsun. Bu durumda, h' fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve Riemann integrallenebilirdir. Kalkülüsün Temel teoreminden

$$\int_a^b h' = h(b) - h(a) = b^2.\sin(\frac{\pi}{2b^2}) - a^2.\sin(\frac{\pi}{2a^2}) \tag{3.16}$$

yazılır. Burada $a_k = \sqrt{2/8k+1}$ ve $b_k = \sqrt{1/4k}$ seçimi ile $[a_k, b_k]$ ikili ikili ayrık olacağından, $\int_{a_k}^{b_k} h' = -\sqrt{2}/8k+1$ bulunur.

$$\int_0^1 \left|h'\right| \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} h' \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{8k+1} = \infty. \tag{3.17}$$

olduğundan h' fonksiyonu mutlak integrallenemez dolayısıyla Lebesgue integrallenemez. Ayrıca h' sınırsız olduğundan Riemann anlamında da integrallenemez.

4
KURZWEIL HENSTOCK İNTEGRALİ

Tanım 4.1. $I = [a, b]$ kapalı aralığında tanımlı herhangi bir δ fonksiyonu olsun. Her $z \in [a, b]$ için

$$\delta(z) > 0 \tag{4.1}$$

ise δ fonksiyonuna ayar (gauge) fonksiyonu denir.

Örnek 4.1. *$c > 0$ pozitif sayısı için $\delta : I \to \mathbb{R}^+$ sabit ayar fonksiyonu*

$$\delta(z) = c \qquad (\forall z \in I) \tag{4.2}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 4.2. $\delta : [a, b] \to (0, \infty)$ ayar fonksiyonu olmak üzere, $[a, b]$ üzerinde alınan etiketli parçalanış sonlu sıralı nokta-aralık ikililerin bir kümesidir ve

$$\Re = \{(\kappa_i, [x_{i-1}, x_i])\} \qquad i = 1, \cdots, n \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\kappa_i \in [x_{i-1}, x_i]$' lere ilişkili olduğu aralıkların etiketi (tag) denir.

Örnek 4.2. *$J = [0, 2]$ verilsin. $\delta(0) = \frac{1}{3}$ ve $0 < z \leq 2$ için $\delta(z) = \frac{7}{8}z$ olsun.*

(i) Verilen δ, J üzerinde bir ayar fonksiyonu mudur ?

(ii) $\Re$, δ- iyi etiketli parçalanışı için $z = 0$ bir etiket midir ?

(i) $\forall z \in [0, 2]$ için $\delta(z) > 0$ olduğundan 4.1 tanımı gereği δ, J aralığı üzerinde bir ayar fonksiyonudur.
(ii) $\Re$, J aralığının δ- iyi etiketli parçalanışı olduğundan $0 \in J$ bu parçalanışın bir alt aralığına ait olmalıdır. Bu alt aralığı $J_1 = [0, x_1]$ olarak yazabiliriz ve $z_1 = 0$ etiketi için

$$z_1 - \delta(z_1) < 0 \tag{4.4}$$

şartını sağlamalıdır. Seçilecek etiketler $[0,2]$ *aralığında olduğundan genel durumda* $z_i \geq 0$ *olmalıdır. Eğer* $z_1 > 0$ *ise o zaman* $z_1 - \delta(z_1) = z_1 - \frac{7}{8}z_1 = \frac{z_1}{8} > 0$ *bulunur ! Elde edilen bu çelişkiden* $z_1 = 0$ *olduğu açıktır.*

Tanım 4.3. $[a,b]$ kapalı arağının $\Re$ etiketli parçalanışı için aşağıdaki şart geçerli ise bu parçalanışa δ ile uyumludur veya δ- iyidir (δ- fine) denir.

$$\kappa_i - \delta(\kappa_i) \leq x_{i-1} \leq \kappa_i \leq x_i \leq \kappa_i + \delta(\kappa_i) \tag{4.5}$$

Başka bir ifadeyle, $i = 1, \cdots, n$ için

$$\kappa_i \in I_i = [x_{i-1}, x_i] \subseteq [\kappa_i - \delta(\kappa_i), \kappa_i + \delta(\kappa_i)] = B[\kappa_i; \delta(\kappa_i)] \tag{4.6}$$

gerçekleniyorsa $\Re$, $[a,b]$ aralığının δ- iyi etiketli parçalanışıdır.

Lemma 4.1. $\Re = \{(\kappa_i, [y_{i-1}, y_i])\}_{i=1}^n$, $I = [a,b]$*'nin etiketli parçalanışı ve* κ_k *etiketi bu parçalanışın* $[y_{k-1}, y_k]$ *alt aralığına kaşılık gelen bir iç noktası olsun.* ζ *hem* $[y_{k-1}, \zeta]$ *hem de* $[\zeta, y_k]$ *alt aralıkların etiketi olmak üzere* $\Re$ *ya bu yeni* $z_k = \zeta$ *parçalanış noktası eklenerek*

$$a = y_0 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_{k-1} \leq \zeta \leq y_k \leq \cdots \leq y_n = b \tag{4.7}$$

olacak şekilde $\dot{\Re}$ *parçalanışı elde ediliyorsa* $\Re$ *etiketli parçalanışına karşılık gelen Riemann toplamı* $\dot{\Re}$ *etiketli parçalanışına karşılık gelen Riemann toplamına eşit olacaktır [8].*

İspat. $[y_{k-1}, \zeta]$ ve $[\zeta, y_k]$ iki yeni alt aralık olsun. O halde,

$$f(\kappa_k)(y_k - y_{k-1}) = f(\kappa_k)(\zeta - y_{k-1}) + f(\kappa_k)(y_k - \zeta) \tag{4.8}$$

eşitliği sağlandığından $S(f;\Re)$ ile $S(f;\dot{\Re})$ aynı değeri verecektir. Dolayısıyla bu prosedür ile istediğimiz noktaları etiket yapmamız kolaylaşacaktır. ■

Örnek 4.3. $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ *bir ayar fonksiyonu olsun.* $\Re = \{(\kappa_i, [x_{i-1}, x_i])\}_{i=1}^n$ *etiketli parçalanışın* δ- *iyi olması için gerek ve yeter koşul*

$$I_i \subseteq (\kappa_i - \delta(\kappa_i), \kappa_i + \delta(\kappa_i)), \qquad i = 1, \cdots, n \tag{4.9}$$

olmasıdır. Dolayısıyla, bir ayar fonksiyonuna uyumlu olarak alınan etiketli parçalanışın δ- *iyi olması, her bir alt aralığının uzunluğunun*

$$\ell(I_i) \leq 2\delta(\kappa_i) \tag{4.10}$$

şartını sağlaması demektir.

Örnek 4.4. *$\delta : J = [0,1] \to (0,\infty)$ ayar fonksiyonu $\delta(0) := 1/2$ ve $0 < z \leq 10$ için $\delta(z) := z/2$ olarak tanımlansın. $\mathfrak{K} = \{(0,[0,1/3]),(1/2,[1/3,2/3]),(5/6,[2/3,1])\}$, etiketli parçalanışının δ- iyi olduğunu gösterelim.*

Öncelikle, J üzerinde

$$\gamma(z) := (z - \delta(z), z + \delta(z)) = (z/2, 3z/2) \tag{4.11}$$

açık aralık değerli γ fonksiyonunu tanımlayalım.

$$z_1 = 0 \Rightarrow \quad \gamma(0) = (-1/2, 1/2), \quad [0,1/3] \subseteq \gamma(0) \tag{4.12}$$

$$z_2 = 1/2 \Rightarrow \quad \gamma(1/2) = (1/4, 3/4), \quad [1/2,2/3] \subseteq \gamma(1/2) \tag{4.13}$$

$$z_3 = 5/6 \Rightarrow \quad \gamma(5/6) = (5/12, 5/4), \quad [2/3,1] \subseteq \gamma(5/6) \tag{4.14}$$

Böylece, 4.6 ifadesi sağlandığından $\mathfrak{K}$ etiketli parçalanışı δ- iyidir.

Tanım 4.4. $\mathfrak{K} = \{(\kappa_i, [x_{i-1}, 1x_i])\}_{i=1}^n$, $I = [a,b]$' nin etiketli parçalanışı, κ_i etiketlerine kaşılık gelen kapalı aralıklar $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu ele alalım. f' in $\mathfrak{K}$ etiketli parçalanışına göre $S(f;\mathfrak{K})$ Riemann toplamı bir sayıdır ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$S(f;\mathfrak{K}) := \sum_{i=1}^{n} f(\kappa_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{4.15}$$

Tanım 4.5. $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu ele alalım. Her $\epsilon > 0$ için sabit bir $\delta_\epsilon > 0$ sayısı bulunabilir öyle ki I aralığının herhangi bir $\mathfrak{K} = \{(\kappa_i, [x_{i-1}, x_i])\}_{i=1}^n$ etiketli parçalanışı ve $0 < x_i - x_{i-1} \leq \delta_\epsilon$ için

$$|S(f;\mathfrak{K}) - A| \leq \epsilon \tag{4.16}$$

sağlanıyorsa $A \in \mathbb{R}$ sayısına f fonksiyonun Riemann integrali denir ve aşağıdaki biçimde gösterilir:

$$\int_a^b f(z)dz = A \tag{4.17}$$

Riemann integral tanımında $\delta_\epsilon > 0$ sayısı yerine $\delta(z) > 0$ ayar fonksiyonu alınarak Kurzweil-Henstock integral tanımı aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 4.6 (Kurzweil-Henstock İntegrali)**.** $f : I \to \mathbb{R}$ ve $A \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık bir δ ayar fonksiyonu, I aralığının herhangi δ- iyi $\mathfrak{K}$ etiketli parçalanışı

için

$$|S(f;\Re)-A| \leq \epsilon \tag{4.18}$$

gerçekleniyorsa A' ya f fonksiyonun Kurzweil-Henstock integrali denir ve $f \in \mathscr{R}^*(I)$ yazılır.

Kurzweil-Henstock integralini kısaca KH integrali olarak yazacağız. Benzer tanımlamalar bir aralığın alt parçalanışı için de geçerlidir.

Tanım 4.7. $\{J_j\}_{j=1}^r$, $I=[a,b]$ dejenere olmayan kompakt aralığın alt parçalanışı ve $j=1,2,\cdots,r$ için $p_j \in J_j$ etiketler olmak üzere $\mathscr{P} := \{(p_j,J_j)\}_{j=1}^r$ nokta-aralık sıralı ikililerinden oluşan parçalanışa etiketli alt parçalanış denir.

Tanım 4.8. δ, I aralığında tanımlı ayar fonksiyonu olmak üzere eğer $j=1,2,\cdots,r$ için

$$J_j \subseteq B[p_j,\delta(p_j)] \tag{4.19}$$

ise $\mathscr{P}$ etiketli alt parçalanışına δ-iyi denir.

Tanım 4.9. δ, $E \subseteq I$ kümesinde tanımlı ayar fonksiyonu olmak üzere eğer her etiket $p_j \in E$ kümesinde ve $j=1,2,\cdots,r$ için

$$J_j \subseteq B[p_j,\delta(p_j)] \tag{4.20}$$

ise $\mathscr{P}$ etiketli alt parçalanışına (δ,E)-iyi denir.

Tanım 4.10. $\mathscr{P} := \{(p_j,J_j)\}_{j=1}^r$ I aralığında etiketli bir alt parçalanışı olsun. δ, I aralığında tanımlı bir ayar fonksiyonu olmak üzere KH integrallenebilir f fonksiyonun $\mathscr{P}$ alt parçalanışına karşılık gelen toplamı

$$S(f;\mathscr{P}) =: \sum_{j=1}^{r} f(p_j)\ell(J_j), \qquad \int_{\cup_{j=1}^r J_j} f := \sum_{j=1}^{r} \int_{J_j} f \tag{4.21}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanımlamalardan farkedilir ki I aralığında tanımlı bir δ fonksiyonu için bu aralığın herhangi bir parçalanışı δ- iyi değilse KH integral tanımı anlamsız olacaktır. Dolayısıyla, bir aralıktaki herhangi bir parçalanışın tanımlanan δ ile uyumlu olması gerekir.

Lemma 4.2 (Cousin Lemma)**.** *$I=[a,b]$ aralığında tanımlı δ ayar fonksiyonu olsun. Bu fonksiyona karşılık I aralığının δ- iyi $\Re$ etiketli parçalanışı vardır.*

İspat. $U, [a,p]$ nin δ- iyi etiketli parçalanışının var olduğu tüm $p \in [a,b]$ noktalarının bir kümesi olsun. $x \in (a-\delta(a), a+\delta(a)) \cap (a,b)$ alalım. O halde, $[a,x]$ aralığının $\{(a,[a,x])\}$ etiketli parçalanışı δ- iyi olacağından $U \neq \emptyset$ dır. Yani, x boştan farklı U kümesinin bir elemanıdır. $y = supU$ seçelim. Tanımdan, $y \in [a,b]$ dir. $x < y$ için $x \in (y-\delta(y), y+\delta(y))$ ve $\mathfrak{K}$, $[a,x]$ aralığının etiketli parçalanışı olmak üzere $\mathfrak{K} \cup \{(y,[x,y])\}$, $[a,y]$ aralığının δ- iyi etiketli parçalanışı olur. Yani, $y \in U$. Şimdi y=b olduğunu gösterelim. Farzedelim ki $y < b$ ve $v \in (y-\delta(y), y+\delta(y)) \cap (y,b)$ olarak seçilsin. $\mathfrak{K}$, $[a,y]$ aralığının etiketli parçalanışı olsun. O halde, $\dot{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K} \cup \{(y,[y,v])\}$ $[a,v]$ aralığının δ- iyi etiketli parçalanışı olacaktır. Bu ise y nin tanımı ile çelişir. Sonuç olarak $y = b$ olduğu görülür. ■

KH integral teori inşası için büyük önem taşıyan 4.2 lemma ile verilen aralık üzerinde tanımlı bir δ fonksiyonu için bu aralıkta δ- iyi etiketli bir parçalanış bulunacağı garantilenmiştir.

Örnek 4.5. *$f(x) = p \in \mathbb{R}$ sabit fonksiyonu $I = [c,d]$ aralığında integrallenebilir olsun. Keyfi seçilebilir ayar fonksiyonu için, f fonksiyonunun I üzerinde $\mathfrak{K}$ etiketli parçalanışına karşılık gelen Riemann toplamı*

$$S(f;\mathfrak{K}) = \sum_{i=1}^{n} f(\kappa_i)(x_i - x_{i-1}) = p\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = p(d-c) \tag{4.22}$$

şeklindedir. Buradan, $f \in \mathscr{R}^*(I)$. Aynı zamanda Riemann anlamında integrallenebilirdir.

Örnek 4.6.

$$h(\kappa) = \begin{cases} 3 & \kappa \neq 1 \text{ ise} \\ 29 & \kappa = 1 \text{ ise} \end{cases} \tag{4.23}$$

$h \in \mathscr{R}^*[0,2]$ ve $\int_0^2 h(\kappa)d\kappa = 6$ olduğunu gösterelim.

$[0,2]$ aralığının $\kappa \neq 1$ olan c_i etiketlerine sahip $\mathscr{P}$ parçalanışı için Riemann toplamı

$$\sum h(p_i)(\kappa_i - \kappa_{i-1}) = \sum 3(\kappa_i - \kappa_{i-1}) = 3.2 = 6 \tag{4.24}$$

olarak bulunur. Fonksiyonun süreksizlik noktası $\kappa = 1$ etiket olsun. O halde, bu etikete karşılık gelen parçalanışın elemanı $(1,[\kappa_{i-1},\kappa_i])$ olarak yazılabilir. Riemann toplamı ve integral değeri 6 arasındaki farkın mutlak değeri $|h(1)-3|(\kappa_i - \kappa_{i-1})$ ifadesi ile sınırlandırılır. Bunun için, $\epsilon > 0$ olsun. $\kappa = 1$ etiketini içeren alt aralıkların uzunlukları

$\epsilon/2\,[|h(1)|+3]$ *ifadesinden küçük olacak şekilde seçildiğinde*

$$\begin{aligned} |S(h;\mathscr{P})-6| &= \left|\sum h(1)(\kappa_i-\kappa_{i-1})-\sum 3(\kappa_i-\kappa_{i-1})\right| \\ &\leq \sum |h(1)-3|(\kappa_i-\kappa_{i-1}) \\ &< [|h(1)|+3]\,\frac{\epsilon}{2\,[|h(1)|+3]} \\ &= \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan görülür ki her etiketli parçalanış için $\kappa = 1$ *etiketini içeren alt aralıkların uzunluğu* $\epsilon/2\,[|h(1)|+3]$ *küçükse integral değeri* 6 *bulunur. Riemann yaklaşımında parçalanışın bütün alt aralık uzunlukları* $\delta > 0$ *sayısından küçüktür. Bu soru için kullanılan KH integral yaklaşımında ise parçalanışın alt aralık uzunlukları* $\kappa = 1$ *iken* $\delta = \epsilon/2\,[|h(1)|+3]$ *ifadesinden küçük* $\kappa \neq 1$ *için* $\delta = 1$ *den küçük kalmıştır. Yani,*

$$\delta(\kappa) = \begin{cases} 1 & \kappa \neq 1 \text{ ise} \\ \epsilon/2\,[|h(1)|+3] & \kappa = 1 \text{ ise} \end{cases} \tag{4.25}$$

şeklinde tanımlanan ayar fonksiyonu ile sonuca ulaşılır.

Bu örnekle, Riemann tanımından farklı olarak, δ' nın parçalanışın alt aralık uzunluklarını kontrol etmeye yarayan bir ayar fonksiyonu olarak işlev gördüğü açıkça anlaşılır.

Örnek 4.7. $I := [a,b]$ *ve* $d \in (a,b)$ *olsun.* $g : I \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu,*

$$g(x) = \begin{cases} 2 & a \leq x < d \text{ ise} \\ 9 & d \leq x \leq b \text{ ise} \end{cases} \tag{4.26}$$

olarak tanımlansın. $g \in \mathscr{R}^*(I)$ *ve* $\int_a^b g(x)dx = 9b-7d-2a$ *olduğunu gösterelim.*

$\epsilon > 0$ *olsun.* g, $x = d$ *noktasında süreksizliğe sahiptir.* d' *yi etiket olarak içeren parçalanışın bitişik iki alt aralığının uzunlukları* δ *sayısından küçük olsun.* I *aralığında* δ_ϵ *ayar fonksiyonu,*

$$\delta_\epsilon(\kappa) = \begin{cases} \frac{1}{2}dist(\kappa,d) & \kappa \neq d \text{ ise} \\ \delta & \kappa = d \text{ ise} \end{cases} \tag{4.27}$$

olarak tanımlansın. I *aralığının* $\mathscr{P} = \{(\kappa_i,[x_{i-1},x_i])\}_{i=1}^m$ *etiketli parçalanışı* δ_ϵ*- iyi olsun.* $x_n = d$ *noktasını etiket kabul eden alt aralıklar* $[x_{n-1},d]$ *ve* $[d,x_{n+1}]$ *olsun.* $i = 1,2,\cdots,n-1$ *için* $f(\kappa_i) = 2$ *olduğundan ilk* $n-1$ *terim için Riemann toplamı*

$$S(g;\mathscr{P}) = 2(x_{n-1}-a) \tag{4.28}$$

ve $i = n, \cdots, m$ için $f(\kappa_i) = 9$ olduğundan kalan terimler için Riemann toplamı

$$S(g;\mathscr{P}) = 9(b - x_{n-1}) \tag{4.29}$$

olacaktır. Dolayısıyla genel toplam

$$S(g;\mathscr{P}) = 2(x_{n-1} - a) + 9(b - x_{n-1}) \tag{4.30}$$

olur. $x_{n-1} - a = (d-a) - (d - x_{n-1})$ ve $b - x_{n-1} = (b-d) + (d - x_{n-1})$ ifadeleri 4.30 denkleminde yerine yazılırsa

$$S(g;\mathscr{P}) = 2(d-a) - 2(d - x_{n-1}) + 9(b-d) + 9(d - x_{n-1}) \tag{4.31}$$

elde edilir. $\mathscr{P}$ parçalanışı δ_ϵ- iyi olduğundan $d - \delta \leq x_{n-1} < d \;\Rightarrow\; 0 < d - x_{n-1} \leq \delta$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned} |S(g;\mathscr{P}) - [2(d-a) + 9(b-d)]| &\leq 2(d - x_{n-1}) \\ &\leq 2\delta \end{aligned} \tag{4.32}$$

için $\delta_\epsilon(d) = \delta = \epsilon/2$ seçildiğinde eşitsizlik sağlanır. $\epsilon > 0$ keyfi olduğundan $g \in \mathscr{R}^*(I)$.

4.1 KH İntegralinin Temel Özellikleri

Teorem 4.1 (Teklik). *$f \in \mathscr{R}^*([a,b])$ olsun. O zaman, f fonksiyonun integral değeri tektir [12].*

İspat. K_1 ve K_2 4.6 tanımını sağlasın. O halde, $\epsilon > 0$ için $[a,b]$ nin δ_1- iyi $\mathfrak{K}_1$ ve δ_2- iyi $\mathfrak{K}_2$ etiketli parçalanışlarına karşılık δ_1 ve δ_2 ayar fonksiyonları,

$$|S(f;\mathfrak{K}_1) - K_1| \leq \epsilon/2 \quad \text{ve} \quad |S(f;\mathfrak{K}_2) - K_2| \leq \epsilon/2 \tag{4.33}$$

olacak şekilde vardır. Her $z \in I$ için $\delta(z) := min\{\delta_1(z), \delta_2(z)\}$ tanımlayalım. O halde, δ I'da bir ayar fonksiyonudur. Eğer $\mathfrak{K}$ etiketli parçalanışı δ- iyi ise $\mathfrak{K}$, hem δ_1- iyi hem de δ_2- iyidir ve

$$|S(f;\mathfrak{K}) - K_1| \leq \epsilon/2, \quad |S(f;\mathfrak{K}) - K_2| \leq \epsilon/2 \tag{4.34}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Buradan,

$$|K_1 - K_2| \leq |K_1 - S(f;\mathfrak{K})| + |S(f;\mathfrak{K}) - K_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \tag{4.35}$$

elde edilir. $\epsilon > 0$ keyfi olduğundan $K_1 = K_2$ bulunur. ■

Teorem 4.2. *$I=[a,b]$ olsun. $f\in\mathscr{R}(I)$ ise $f\in\mathscr{R}^*(I)$ dır [12].*

İspat. $\epsilon>0$ ve $f\in\mathscr{R}(I)$ olsun. Tanım 4.5 den öyle bir $\delta_\epsilon>0$ sayısı vardır ki I aralığının herhangi bir $\mathfrak{K}=\{(z_i,[x_{i-1},x_i])\}_{i=1}^n$ etiketli parçalanışı ve $0<x_i-x_{i-1}\leq\delta_\epsilon$ için $|S(f;\mathfrak{K})-L|\leq\epsilon$ sağlanır. KH integrallenebilirlik için uygun bir ayar fonskiyonu tanımlanmalıdır. Her $z\in I$ için ayar fonksiyonu $\bar{\delta}_\epsilon(z)=\frac{1}{3}\delta_\epsilon$ olarak tanımlansın. Eğer $\mathfrak{K}$ parçalanışı $\bar{\delta}_\epsilon$- iyi ise

$$I_i\subseteq B[z_i;\bar{\delta}_\epsilon(z_i)]=[z_i-\frac{1}{3}\delta_\epsilon,z_i+\frac{1}{3}\delta_\epsilon] \tag{4.36}$$

gerçeklenir. Buradan, her $i=1,2,\cdots,n$ için $0<\ell(I_i)=x_i-x_{i-1}\leq\frac{2}{3}\delta_\epsilon<\delta_\epsilon$ olduğu görülür. Her $\bar{\delta}_\epsilon$- iyi $\mathfrak{K}$ parçalanışı $|S(f;\mathfrak{K})-L|\leq\epsilon$ koşulunu sağlar. ϵ keyfi olduğundan f fonksiyonu KH integrallenebilirdir. ■

4.2 teoreminin tersi genellikle doğru değildir. Riemann integrallenemeyen ancak KH integrallenebilen Dirichlet fonksiyonu buna bir örnektir.

Örnek 4.8.

$$f(x):=\begin{cases}1 & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q},\\ 0 & \text{diğer durumlarda}\end{cases} \tag{4.37}$$

Dirichlet fonksiyonu KH integrallenebilir ve $\int_0^1 f=0$ olduğunu gösterelim [15].

f fonksyonu $I:=[0,1]$ üzerindeki her noktada süreksizliği olduğundan Riemann anlamında integrallenemez. Ancak, KH integrallenebilirdir. Öncelikle, I aralığının etiketli bir parçalanışı $\mathfrak{K}=\{(z_i,[x_{i-1},x_i])\}_{i=1}^n$ olsun. $\{p_m:m\in\mathbb{N}\}$ rasyonel sayıların I daki bir sayımı ve $\epsilon>0$ için δ_ϵ ayar fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\delta_\epsilon(z):=\begin{cases}\epsilon/2^{m+1} & z=p_m\\ 1 & z\notin\mathbb{Q}\end{cases} \tag{4.38}$$

Bu durumda, $\mathfrak{K}$ etiketli parçalanışı δ_ϵ- iyidir. Şimdi f fonksiyonun bu parçalanışa karşılık gelen Riemann toplamını kuralım. Eğer $z_i\in I_i=[x_{i-1},x_i]$ etiketleri irrasyonel ise $f(z_i)=0$ olacağından Riemann toplamına bir etkisi olmayacaktır. Eğer z_i rasyonel ise $f(z_i)=1$ olacaktır. Her bir z_i' nin fonksiyon değerine karşılık gelen I_i alt aralıkları için p_m sayı dizisinin her elemanı etiket ise $\mathfrak{K}$ etiketli parçalanışı δ_ϵ- iyi olduğundan $I_i\subseteq(p_m-\delta_\epsilon(p_m),p_m+\delta_\epsilon(p_m))$ yazılır. Buradan, $\ell(J_i)\leq 2\delta_\epsilon(p_m)=\epsilon/2^m$ elde edilir. $\epsilon>0$ keyfi ve

$$|S(f;\mathfrak{K})-0|\leq\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^m}=\epsilon \tag{4.39}$$

olduğundan Dirichlet fonksiyonu KH integrallenebilirdir. $\int_0^1 f=0$ dır.

Teorem 4.3 (Lineerlik). *h ve s, $I=[a,b]$ üzerinde tanımlı reel değerli KH integrallenebilir fonksiyonlar olsun. O zaman, $h+s$ ve eh fonksiyonu I aralığında KH integrallenebilirdir ve*

(i) $\int_a^b (h+s) = \int_a^b h + \int_a^b s$

(ii) Her $e \in \mathbb{R}$ *için* $\int_a^b eh = e\int_a^b h$,

özellikleri sağlanır.

İspat. (i) $h,s \in \mathscr{R}^*(I)$ olduğundan L ve A sırasıyla h ve s fonksiyonlarının integral değerleri olmak üzere $\int_a^b h = L$ ve $\int_a^b s = A$ yazılır. 4.6 tanımından, verilen $\epsilon > 0$ sayısına karşılık I aralığında öyle δ_ϵ^* ve δ_ϵ^{**} ayar fonksiyonları vardır ki $\mathfrak{K} = \{(\kappa_i,[x_{i-1},x_i])\}_{i=1}^n$ etiketli parçalanışı δ_ϵ^*- iyi ve δ_ϵ^{**}- iyi iken sırasıyla

$$|S(h;\mathfrak{K})-L| \le \epsilon/2, \quad |S(s;\mathfrak{K})-A| \le \epsilon/2 \tag{4.40}$$

eşitsizliklerinin sağlandığı görülür. $\delta_\epsilon := \min\left\{\delta_\epsilon^*, \delta_\epsilon^{**}\right\}$ alınırsa $\mathfrak{K}$ parçalanışı δ_ϵ- iyi olacağından bu parçalanış hem δ_ϵ^*- iyi ve δ_ϵ^{**}- iyi olur. Buradan,

$$\begin{aligned} S(h+s;\mathfrak{K}) &= \textstyle\sum_{i=1}^n (h+s)(\kappa_i)(x_i-x_{i-1}) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n h(\kappa_i)(x_i-x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n s(\kappa_i)(x_i-x_{i-1}) \\ &= S(h;\mathfrak{K}) + S(s;\mathfrak{K}) \end{aligned} \tag{4.41}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} |S(h+s;\mathfrak{K})-[L+A]| &= |[S(h;\mathfrak{K})-L]+[S(s;\mathfrak{K})-A]| \\ &\le |S(h;\mathfrak{K})-L| + |S(s;\mathfrak{K})-A| \\ &\le \epsilon/2+\epsilon/2 = \epsilon \end{aligned} \tag{4.42}$$

eşitsizliği açıkça görülür. $\epsilon > 0$ keyfi seçildiğinden $h+s \in \mathscr{R}^*(I)$ elde edilir.
(ii) $\epsilon > 0$ olsun. $h \in \mathscr{R}^*(I)$ olduğundan δ_ϵ- iyi $\mathfrak{K}$ etiketli parçalanışı için $\left|S(h;\mathfrak{K})-\int_a^b h\right| < \epsilon/|e|+2$ olacak şekilde bir $\delta_\epsilon > 0$ ayar fonksyionu vardır. $\mathfrak{K}$ parçalanışı δ_ϵ- iyi olduğundan

$$\begin{aligned} S(eh;\mathfrak{K}) &= \textstyle\sum_{i=1}^n (eh)(\kappa_i)(x_i-x_{i-1}) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n eh(\kappa_i)(x_i-x_{i-1}) = e\sum_{i=1}^n h(\kappa_i)(x_i-x_{i-1}) \\ &= eS(h;\mathfrak{K}) \end{aligned} \tag{4.43}$$

yazılır. Böylece,

$$\left|S(eh;\aleph)-e\int_a^b h\right| = |c|\left|S(h;\aleph)-\int_a^b h\right| \leq \frac{\epsilon\,|e|}{|e|+2} \leq \epsilon \tag{4.44}$$

gerçeklenir. $\epsilon > 0$ keyfi olduğundan $eh \in \mathscr{R}^*(I)$ bulunur. ■

Teorem 4.4. *KH integrallenebilir $f, h : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için*

(i) $f \geq 0$ *ise* $\int_a^b f \geq 0$.

(ii) $f = h$ *ise* $\int_a^b f = \int_a^b h$.

(iii) $f \leq h$ *ise* $\int_a^b f \leq \int_a^b h$

özellikleri gerçeklenir [7, 8].

İspat. (i) $\epsilon > 0$ olsun. $f \in \mathscr{R}^*(I)$ olduğundan δ- iyi $\aleph$ etiketli parçalanışı için $\left|S(f;\aleph)-\int_a^b f\right| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta_\epsilon > 0$ ayar fonksyionu seçelim. $f \geq 0$ olduğundan $S(f;\aleph) \geq 0$ ve herhangi bir $\epsilon > 0$ için

$$\int_a^b f > S(f;\aleph) - \epsilon > -\epsilon \tag{4.45}$$

elde edilir. Buradan, $\epsilon > 0$ keyfi olduğundan (i) eşitsiziliği gerçeklenir.
(ii) $s := f - h = 0$ fonksiyonu teorem 4.3 den KH integrallenebilirdir. (i) den her $x \in I$ için $\int_a^b s = 0$ yazılır. $\int_a^b f - \int_a^b h = \int_a^b s = 0$ olduğundan istenen eşitlik sağlanır.
(iii) $\epsilon > 0$ olsun. $f, h \in \mathscr{R}^*(I)$ olduğundan I aralığının δ_1- iyi $\aleph_1$ ve δ_2- iyi $\aleph_2$ etiketli parçalanışları için sırasıyla

$$\left|S(f;\aleph_1)-\int_a^b f\right| \leq \epsilon/2 \quad \text{ve} \quad \left|S(h;\aleph_2)-\int_a^b h\right| \leq \epsilon/2 \tag{4.46}$$

olacak şekilde δ_1 ve δ_2 ayar fonksiyonları vardır. Bu durumda, I aralığında $\delta_x = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$ ayar fonksiyonu tanımlanırsa 4.2 lemmasından $\aleph$ parçalanışı δ- iyi ve aynı zamanda hem δ_1- iyi hem de δ_2- iyi olacaktır. Sonuç olarak, keyfi ϵ için

$$\int_a^b f < S(f;\aleph) + \frac{\epsilon}{2} \leq S(h;\aleph) + \frac{\epsilon}{2} < \int_a^b h + \epsilon$$

eşitsizliğinden (iii) sağlanır. ■

Sonuç 4.1. *Eğer f ve $|f|$ fonksiyonları KH integrallenebilir ise*

$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f| \tag{4.47}$$

eşitsizliği geçerlidir [15].

Teorem 4.5. *$|f| \leq g$ ve $\int_a^b g = 0$ olsun. O zaman, f fonksiyonu KH integrallenebilirdir ve integral değeri $\int_a^b f = 0$ dır.*

Teorem 4.6 (Cauchy Kriteri)**.** *$f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun KH integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul verilen $\epsilon > 0$ sayısına karşılık I aralığının her δ- iyi $\mathfrak{K}$ ve δ- iyi $\mathfrak{E}$ etiketli parçalanışları için*

$$|S(f,\mathfrak{K}) - S(f,\mathfrak{E})| < \epsilon \tag{4.48}$$

sağlayacak bir δ ayar fonksiyonunun var olmasıdır [15].

İspat. $(\Rightarrow)$: $f \in \mathscr{R}^*[a,b]$ ve integral değeri L olsun. O halde, öyle bir $\delta_{\epsilon/2}$ ayar fonksiyonu vardır ki $\delta_{\epsilon/2}$-iyi $\mathscr{K}$ ve $\delta_{\epsilon/2}$-iyi $\mathfrak{E}$ parçalanışları için

$$|S(f;\mathfrak{K}) - L| < \epsilon/2 \quad \text{ve} \quad |S(f;\mathfrak{E}) - L| < \epsilon/2$$

sağlanır. Her $z \in [a,b]$ için $\eta_\epsilon := \delta_{\epsilon/2}(z)$ tanımlayalım. $\mathfrak{K}$ ve $\mathfrak{E}$ parçalanışları η_ϵ- iyi ise

$$|S(f;\mathfrak{K}) - S(f;\mathfrak{E})| \leq |S(f;\mathfrak{K}) - L| + |L - S(f;\mathfrak{E})| < \epsilon \tag{4.49}$$

bulunur.
$(\Leftarrow)$: Her $n \in \mathbb{N}$ için δ_n, $[a,b]$ üzerinde bir ayar fonksiyonu olsun. O halde, $\mathfrak{K}$ ve $\mathfrak{E}$ parçalanışları δ_n- iyi ise

$$|S(f;\mathfrak{K}) - S(f;\mathfrak{E})| < 1/n \tag{4.50}$$

olur. Her $z \in [a,b]$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\delta_n \geq \delta_{n+1}$ olduğunu varsayalım. Diğer taraftan, δ_n fonksiyonunu $\delta_n'(z) = \min\{\delta_1(z), \delta_2(z), \cdots, \delta_n(z)\}$ ile yer değiştirelim. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için δ_n- iyi $\mathfrak{K}_n$ etiketli parçalanış olsun. $m > n$ ise hem $\mathfrak{K}_n$ hem de $\mathfrak{K}_m$ parçalanışları δ_n- iyi olacağından $m > n$ için

$$|S(f;\mathfrak{K}_n) - S(f;\mathfrak{K}_m)| < 1/n \tag{4.51}$$

gerçeklenir. Sonuç olarak reel sayılarda $(S(f;\mathfrak{K}_m))_{m=1}^{\infty}$ bir Cauchy dizisidir ve bir A sayısına yakınsar. 4.51 eşitliğinde $m \to \infty$ iken her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|S(f;\mathfrak{K}_n) - A| \leq 1/n \tag{4.52}$$

elde ederiz. Şimdi A sayısının f fonksiyonunun KH integrali olduğunu gösterelim. $\epsilon > 0$ verilsin. $C \in \mathbb{N}$ olmak üzere $C > 2/\epsilon$ sağlasın. Eğer $\mathfrak{E}$ parçalanışı δ_c- iyi ise

$$\begin{aligned} |S(f;\mathfrak{E}) - A| &\leq |S(f;\mathfrak{E}) - S(f;\mathfrak{K}_C)| + |S(f;\mathfrak{K}_C) - A| \\ &\leq 1/C + 1/C < \epsilon \end{aligned} \tag{4.53}$$

elde edilir. $\epsilon > 0$ keyfi olduğundan $f \in \mathscr{R}^*(I)$ dır. ■

Teorem 4.7. *f, $I = [a,b]$ üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon ve $d \in (a,b)$ olsun.*

(i) Eğer f fonksiyonu I üzerinde KH integrallenebilir ise I nın her alt aralığında da KH integrallenebilirdir.

(ii) f fonksiyonu $[a,d]$ ve $[d,b]$ üzerinde KH integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul I aralığında da KH integrallenebilmesidir. Bu durumda,

$$\int_a^b f = \int_a^d f + \int_d^b f \tag{4.54}$$

eşitliği geçerlidir [7].

İspat. (i) $[c,d] \subseteq [a,b]$ ve $\epsilon > 0$ olsun. Cauchy Kriterinden, $[a,b]$ aralığında tanımlı δ ayar fonksiyonu, $\mathscr{K}_1$ ve $\mathscr{K}_2$ δ- iyi etiketli parçalanışları

$$|S(f;\mathscr{K}_1) - S(f;\mathscr{K}_2)| \leq \epsilon \tag{4.55}$$

gerçeklenmek üzere vardır. Özel olarak, $[a,c]$ aralığının δ- iyi etiketli parçalanışı $\mathscr{K}_a$ ve $[d,b]$ aralığının δ- iyi etiketli parçalanışı $\mathscr{K}_b$ olsun. $[c,d]$ aralığının δ- iyi etiketli $\mathscr{N}_1$ ve $\mathscr{N}_2$ parçalanışları için

$$\mathscr{K}_1 = \mathscr{K}_a \cup \mathscr{N}_1 \cup \mathscr{K}_b \quad \text{ve} \quad \mathscr{K}_2 = \mathscr{K}_b \cup \mathscr{N}_2 \cup \mathscr{K}_b$$

olarak tanımlansın. O halde, $\mathscr{K}_1$ ve $\mathscr{K}_2$ δ- iyi etiketli parçalanışlar olduğundan

$$|S(f;\mathscr{N}_1) - S(f;\mathscr{N}_2)| = |S(f;\mathscr{K}_1) - S(f;\mathscr{K}_2)| < \epsilon \tag{4.56}$$

bulunur. Sonuç olarak, f fonksiyonu $[a,b]$ nin alt aralığı $[c,d]$ üzerinde de KH integrallenebilirdir.
(ii) ($\Rightarrow$) : $[a,d]$ aralığındaki f fonksiyonunu f_1, $[d,b]$ aralığındaki f fonksiyonunu f_2 ile ifade edelim. $\epsilon > 0$, $f_1 \in \mathscr{R}^*([a,d])$ ve $f_2 \in \mathscr{R}^*([d,b])$ olsun. O halde, 4.6 tanımından $[a,d]$ aralığında δ_1 ve $[d,b]$ aralığında δ_2 ayar fonksiyonları vardır öyle

ki δ_1- iyi $\mathfrak{K}_1$ ve δ_2-iyi $\mathfrak{K}_2$ etiketli parçalanışları için sırasıyla

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^d f\right| \leq \epsilon/2 \quad \text{ve} \quad \left|\sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_d^b f\right| \leq \epsilon/2$$

gerçeklenir. Şimdi, $[a,b]$ üzerinde δ ayar fonksyionu,

$$\delta(x) = \begin{cases} \min\left\{\delta_1(x), \frac{1}{2}(d-x)\right\} & x \in [a,d) \\ \min\{\delta_1(d), \delta_2(d)\} & x = d \\ \min\left\{\delta_2(x), \frac{1}{2}(x-d)\right\} & x \in (d,b] \end{cases} \tag{4.57}$$

olarak tanımlansın. $\mathfrak{K}$ parçalanışı I üzerinde δ- iyi olsun. O zaman, d noktası bu parçalanışın alt aralıklarının en az birinde etiket olacaktır. Buradan, $[a,d]$ aralığının $\mathfrak{K} \cap [a,d]$ elemanlarını içeren $\mathfrak{K}_1$ parçalanışı ve $[d,b]$ aralığının $\mathfrak{K} \cap [d,b]$ elemanlarını içeren $\mathfrak{K}_2$ parçalanışı için

$$S(f;\mathfrak{K}) = S(f_1;\mathfrak{K}_1) + S(f_2;\mathfrak{K}_2) \tag{4.58}$$

elde edilir. $\mathfrak{K}_1$ parçalanışı δ_1-iyi ve $\mathfrak{K}_2$ parçalanışı δ_2- iyi olduğundan

$$\begin{aligned} \left|S(f;\mathfrak{K}) - \left(\int_a^d f + \int_d^b f\right)\right| &\leq \left|S(f_1;\mathfrak{K}_1) - \int_a^d f\right| + \left|S(f_2;\mathfrak{K}_2) - \int_d^b f\right| \\ &\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \end{aligned} \tag{4.59}$$

eşitsizliği gerçeklenir. $\epsilon > 0$ keyfi olduğundan f fonksiyonu I aralığında KH integrallenebilirdir.

($\Leftarrow$) : Öte yandan, f fonksiyonu I aralığında KH integrallenebilir olsun. $\epsilon > 0$ ve Cauchy kriterini sağlayan ayar fonksiyonu ν olsun. f fonksiyonun $[a,d]$ deki kısıtlanışı f_1 olsun. Ayrıca, $\mathfrak{K}_1$ ve $\mathfrak{P}_1$ [a,d] nin ν-iyi parçalanışlar olsun. Parçalanış noktalarını ve $[d,b]$ aralığındaki etiketleri ekleyerek $\mathfrak{K}_1$ ve $\mathfrak{P}_1$ parçalanışlarını $[a,b]$ aralığının $\mathfrak{K}$ ve $\mathfrak{P}$ parçalanışları olarak genişletebiliriz. O halde

$$S(f;\mathfrak{K}) - S(f;\mathfrak{P}) = S(f_1;\mathfrak{K}_1) - S(f_1;\mathfrak{P}_1) \tag{4.60}$$

elde edilir. $\mathfrak{K}$ ve $\mathfrak{P}$ parçalanışları ν- iyi olduğundan $|S(f_1;\mathfrak{K}_1) - S(f_1;\mathfrak{P}_1)| < \epsilon$ sağlanır. Cauchy Kriteri ile $f_1 \in \mathscr{R}^*[a,d]$ bulunur. Benzer şekilde, f fonksiyonunun $[d,b]$ deki kısıtlanışı olan f_2 fonksiyonu $[d,b]$ aralığında KH integrallenebilirdir. ■

Lemma 4.3 (Henstock Lemma)**.** *$f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ ve $f \in \mathscr{R}^*(I)$ olsun. J_i ler I aralığının ikili ikili ayrık kapalı alt aralıkları ve $z_i \in J_i \subseteq B[z_i;\delta(z_i)]$ olmak üzere $\mathscr{J} =$*

$\{(z_1, J_1), (z_2, J_2), \cdots, (z_n, J_n)\}$ *ise*

$$\left| S(f;\mathscr{J}) - \sum_{i=1}^{n} \int_{J_i} f \right| \leq \epsilon, \quad \sum_{i=1}^{n} \left| f(z_i)\ell(J_i) - \int_{J_i} f \right| \leq 2\epsilon \tag{4.61}$$

eşitsizlikleri sağlanır [15].

İspat. $f \in \mathscr{R}^*(I)$ olduğundan $\epsilon > 0$ için I aralığında tanımlı öyle bir δ ayar fonksiyonu vardır ki $\mathfrak{K}$ etiketli parçalanışı δ- iyi iken

$$\left| S(f;\mathfrak{K}) - \int_I f \right| \leq \epsilon \tag{4.62}$$

sağlanır. $I \setminus \cup_{i=1}^{n} J_i$ sonlu sayıda ayrık aralıklardan oluşan bir kümedir. $D_1, D_2, \cdots, D_r$ kümeleri ise bu aralıklara uç noktalarından bitişik olan aralıklar olsun. $\xi > 0$ verilsin. f fonksiyonu her bir D_j aralığında KH integrallenebilir olduğundan bu D_j aralıklarına karşılık gelen δ- iyi etiketli $\mathscr{D}_j$ parçalanışı

$$\left| S(f;\mathscr{D}_j) - \int_{D_j} f \right| < \frac{\xi}{r} \tag{4.63}$$

gerçeklenmek üzere vardır. ξ/r hata payı için D_j aralığında tanımlı δ_j ayar fonksiyonu seçilerek $\delta \cap \delta_j$- iyi etiketli bir parçalanış bulunabilir. $\mathfrak{K} = \mathscr{J} \cup \mathscr{D}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{D}_r$ olsun. O halde, I aralığının $\mathfrak{K}$ etiketli parçalanışı δ- iyi olur.

$$S(f;\mathscr{K}) = S(f;\mathscr{J}) + \sum_{j=1}^{r} S(f;\mathscr{D}_j) \tag{4.64}$$

olduğu görülür.

$$\left| S(f;\mathscr{J}) - \sum_{i=1}^{n} \int_{J_i} f \right| \tag{4.65}$$

için mutlak değer içine $\sum_{j=1}^{r} \left\{ S(f;\mathscr{D}_j) - \int_{D_j} f \right\}$ ifadesini ekleyip çıkaralım. O halde,

$$\begin{aligned} \left| S(f;\mathscr{J}) - \sum_{i=1}^{n} \int_{J_i} f \right| &\leq \left| S(f;\mathfrak{K}) - \int_I f \right| + \sum_{j=1}^{r} \left| S(f;\mathscr{D}_j) - \int_{D_j} f \right| \\ &< \epsilon + r\frac{\xi}{r} = \epsilon + \xi \end{aligned} \tag{4.66}$$

elde edilir. $\xi > 0$ keyfi olduğu için

$$\left| S(f;\mathscr{J}) - \sum_{i=1}^{n} \int_{J_i} f \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \left\{ f(z_i)\ell(J_i) - \int_{J_i} f \right\} \right| \leq \epsilon \tag{4.67}$$

bulunur. Böylece ilk eşitsizlik elde edilmiş olur. İkinci eşitsizlik için ispat [15]' te verilmiştir. ■

Teorem 4.8. *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, fonksiyonu KH integrallenebilir ve her $z \in [a,b]$ için $F(z) = \int_a^z f$ olmak üzere,*

(i) F fonksiyonu $[a,b]$ de süreklidir;

(ii) F fonksiyonu $[a,b]$ de h.h.y. türevlenebilir ve $F' = f$ dir;

(iii) f ölçülebilirdir.

yukarıdaki ifadeler gerçeklenir [7].

İspat. (i) $e \in [a,b]$ ve $\epsilon > 0$ olsun. f fonksiyonu KH integrallenebilir olduğundan $[a,b]$ de δ ayar fonksiyonu vardır öyle ki δ- iyi $\mathscr{K}$ etiketli parçalanış için $\left|S(f;\mathscr{K}) - \int_I f\right| \leq \epsilon/2$ gerçeklenir. $\nu = \min\left\{\delta(e), \dfrac{\epsilon}{2(1+|f(e)|)}\right\}$ olsun. Şimdi, F fonksyionun sürekliliğini gösterelim. Her bir $y \in [a,b]$ için $|y-e| < \nu$ iken uç noktaları y ve etiket e olan δ- iyi aralık olsun. 4.3 lemmasından

$$\begin{aligned} |F(y) - F(e)| &\leq |F(y) - F(e) - f(e)(y-e)| + |f(e)(y-e)| \\ &< \epsilon/2 + |f(e)|\nu \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla, F fonksiyonu e noktasında süreklidir.
(ii) $[a,b]$ aralığında h.h.y. de $D^+F(x) = f(x)$ olduğunu ispatlayacağız. Diğer 3 türev için ispat oldukça benzerdir. $A = \{x \in [a,b) : D^+F(x) \neq f(x)\}$ olsun. Her bir $x \in A$ için bir η_x vardır öyle ki her bir $p > 0$ için

$$\left| F(v_p^x) - F(x) - f(x)(v_p^x - x) \right| \geq \eta_x (v_p^x - x) \tag{4.68}$$

gerçekleyen bir $v_p^x \in [a,b] \cap (x, x+p)$ noktası vardır. O halde, $n \in \mathbb{Z}^+$ için $A_n = \{x \in A : \eta_x \geq 1/n\}$ olsun. İspatı tamamlamak için her n için $\mu^*(A_n) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\epsilon > 0$ ve belli bir n alalım. F, f fonksiyonun KH belirsiz integrali olduğundan bir δ ayar fonksiyonu, δ- iyi $\mathscr{K}$ etiketli parçalanış için $|S(f;\mathscr{K}) - L| <$

$\epsilon/4n$ sağlamak üzere vardır. Aralıkların ailesi

$$\mathscr{I} = \left\{[x, v_p^x] : x \in A_n, 0 < p < \delta(x)\right\} \tag{4.69}$$

A_n aralıklarının bir Vitali örtüsüdür. Dolayısıyla, Vitali Örtü Kaplama lemmasından $\mathscr{I}$ da ayrık aralıkların $[c_i, d_i] : 1 \leq i \leq q$ sınırlı bir ailesi

$$\mu^*(A_n) < \sum_{i=1}^{q}(d_i - c_i) + \epsilon/2 \tag{4.70}$$

gerçeklenmek üzere vardır. $(c_i, [c_i, d_i])$ δ-iyi $\mathscr{K}$ parçalanışın elemanı olduğundan

$$\eta_{c_i}(d_i - c_i) \leq |F(d_i) - F(c_i) - f(c_i)(d_i - c_i)| \tag{4.71}$$

dir. Saks-Henstock Lemmayı kullanarak,

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^{q}(d_i - c_i)| &\leq \textstyle\sum_{i=1}^{q} \dfrac{1}{\eta_{c_i}} |F(d_i) - F(c_i) - f(c_i)(d_i - c_i)| \\ &\leq n \textstyle\sum_{i=1}^{q} |f(c_i)(d_i - c_i) - (F(d_i) - F(c_i))| \\ &\leq n\dfrac{2\epsilon}{4n} = \dfrac{\epsilon}{2} \end{aligned} \tag{4.72}$$

elde edilir. Buradan, $\mu^*(A_n) < \epsilon$ olur. $\epsilon > 0$ keyfi olduğundan $\mu^*(A_n) = 0$ dır.
(iii) de verilen ifade (ii) deki koşulun basit bir sonucudur. ■

Teorem 4.9. *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu KH integrallenebilir olsun. O zaman,*

(i) f fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta sınırlı ise Lebesgue integrallenebilirdir,

(ii) f, $[a, b]$ de negatif olmayan (nonnegative) bir fonskiyon ise f fonksiyonu $[a, b]$ de Lebesgue integrallenebilirdir,

(iii) f, $[a, b]$ nin her ölçülebilir alt aralığında KH integrallenebilir ise f, $[a, b]$ de Lebesgue integrallenebilirdir,

gerçeklenir [7].

Lemma 4.4 (Straddle Lemma). *$h : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\kappa \in [a, b]$ noktasında türevlenebilir olsun. Her $\epsilon > 0$ için, κ e bağlı öyle bir $\delta(\kappa) > 0$ vardır ki $\eta, \xi \in [a, b]$ ve $\kappa \in [\eta, \xi] \subseteq (\kappa - \delta, \kappa + \delta)$ iken*

$$\left|h(\xi) - h(\eta) - h'(\kappa)(\xi - \eta)\right| \leq \epsilon(\xi - \eta) \tag{4.73}$$

sağlanır [3]

İspat. h, κ noktasında türevlenebilir olduğundan verilen $\epsilon > 0$ için öyle bir $\delta(\kappa) > 0$ vardır ki $z \in [a,b]$ ve $0 < |z-\kappa| \leq \delta(\kappa)$ iken

$$\left| \frac{h(z)-h(\kappa)}{z-\kappa} - h^{'}(\kappa) \right| \leq \epsilon \tag{4.74}$$

sağlanır. Her tarafı $|z-\kappa|$ ile çarpılıp düzenlenirse

$$\left| h(z)-h(\kappa)-h^{'}(\kappa)(z-\kappa) \right| \leq \epsilon |z-\kappa| \tag{4.75}$$

elde edilir. Şimdi, $\kappa-\delta(\kappa) \leq \eta \leq \kappa \leq \xi \leq \kappa+\delta(\kappa)$ sağlanacak şekilde $\eta \leq \kappa$ ve $\xi \leq \kappa$ seçilsin. Burada, $\xi-\kappa \geq 0$ ve $\kappa-\eta \geq 0$ olduğu açıktır. Böylece,

$$\begin{aligned} &\left| h(\xi)-h(\eta)-h^{'}(\kappa)(\xi-\eta) \right| \\ &= \left| \left[h(\xi)-h(\kappa)-h^{'}(\kappa)(\xi-\kappa) \right] - \left[h(\eta)-f(\kappa)-h^{'}(\kappa)(\xi-\kappa) \right] \right| \\ &\leq \left| h(\xi)-h(\kappa)-h^{'}(\kappa)(\xi-\kappa) \right| + \left| h(\eta)-h(\kappa)-h^{'}(\kappa)(\xi-\kappa) \right| \\ &\leq \epsilon(\xi-\kappa)+\epsilon(\kappa-\eta) = \epsilon(\xi-\eta) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Bu lemmada δ ile fonksiyonun türevli olduğu her noktada nasıl davrandığı belirlenir. Eğer, fonksiyon davranışı düzgün ise δ' nın büyük olduğu varsayılır. Davranış güçlü salınım şeklinde ise δ' nın küçük olduğu varsayılır. Bu durum, KH integralinin arkasındaki temel düşüncedir. Böylece δ' nın boyunu noktadan naktaya değiştirerek salınım yapan fonksiyonların integrali alınmıştır.

Teorem 4.10 (Kalkülüsün Temel Teoremi 1)**.** *$h : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I' da türevlenebilir olsun. O zaman, $h^{'}$ KH integrallenebilirdir ve*

$$\int_a^b h^{'} = h(b)-h(a) \tag{4.76}$$

yazılır [15].

İspat. $\epsilon > 0$ verilsin. $h : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu I aralığında türevlenebilir olsun. 4.4 lemmadaki gibi verilen bir $\delta > 0$ ayar fonksiyonu ve δ-iyi $\mathfrak{K} = \{(\kappa_i, [x_{i-1}, x_i])\}_{i=1}^{n}$ etiketli parçalanışı alınırsa

$$\left| h(x_i)-h(x_{i-1})-h^{'}(\kappa_i)(x_i-x_{i-1}) \right| \leq \epsilon(x_i-x_{i-1}) \tag{4.77}$$

sağlanır. Teoremi ispatlamak için $h(b)-h(a)-S(h^{'},\mathfrak{K})$ sayısının varlığını

bulmalıyız.Bunun için teleskopik toplamı kullanırsak,

$$h(b)-h(a)=\sum_{i=1}^{n}[h(x_i)-h(x_{i-1})] \tag{4.78}$$

yazılır. Buradan,

$$\left|h(b)-h(a)-S(h^{'},\Re)\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}[h(x_i)-h(x_{i-1})-h^{'}(\kappa_i)(x_i-x_{i-1})]\right| \tag{4.79}$$

Bu eşitlikte üçgen eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{array}{ll}\left|h(b)-h(a)-S(h^{'},\Re)\right| & \leq \sum_{i=1}^{n}\left|[h(x_i)-h(x_{i-1})-h^{'}(\kappa_i)(x_i-x_{i-1})]\right| \\ & \leq \epsilon(b-a)\end{array} \tag{4.80}$$

elde edilir. $\epsilon>0$ keyfi olduğundan $h^{'}\in\mathscr{R}^{*}(I)$ dir. ■

Bu teoremle her türevlenebilir fonksiyonun KH integrallenebilir olduğu lemma 4.4 ün bir sonucu olarak verilmiştir.

Teorem 4.11. *h ve k fonksiyonlarının $I=[a,b]$ aralığındaki ilkel fonksiyonları sırasıyla H ve K olsun ($H^{'}=h ve K^{'}=k$). O halde, h.K çarpım fonksiyonunun KH integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul H.k nin de KH integrallenebilmesidir ve*

$$\int_a^b hK=H(b)K(b)-H(a)K(a)-\int_a^b Hk \tag{4.81}$$

eşitliği sağlanır [15].

İspat. Türevlenebilir fonksiyonlar için $(HK)^{'}=HK^{'}+H^{'}K$ çarpım kuralı, teorem 4.3 ve 4.10 kullanılarak istenen eşitlik ispatlanır. ■

Teorem 4.12. *$I=[a,b]$ olsun. $f\in\mathscr{R}^{*}(I)$ ve I aralığında tanımlı g fonksiyonu monoton ise $f.g$ çarpımı KH integrallenebilirdir. $f.g\in\mathscr{R}^{*}(I)$ yazılır [11].*

Teorem 4.13. *$f:I=[a,b]\to\mathbb{R}$ ve $\{J_i\}_{i=1}^{n}=I$ ayrık içlere sahip kapalı aralıkların sonlu bir kümesi olsun. f her bir J_i' de KH integrallenebilir ise f fonksiyonu I' da KH integrallenebilirdir ve*

$$\int_a^b f=\sum_{i=1}^{n}\int_{J_i} f. \tag{4.82}$$

eşitliği gerçeklenir [12].

İspat. Öncelikle $I=[a,b]$ aralığını $I_1=[a,e]$ ve $I_2=[e,b]$ olarak iki alt aralığa bölelim. f fonksiyonu bu iki aralıkta da KH integrallenebilir olsun. $\epsilon>0$ ve her $i=1,2$ için i aralığında tanımlı öyle bir δ_i ayar fonksyionu bulunur ki $\mathscr{P}$ etiketli parçalanışı δ_i-iyi ise $\left|S(f;\mathscr{P})-\int_{I_i}f\right|\leq\epsilon/2$ dir. $x<e$ iken $(x-|x-e|\,,x+|x-e|)$ aralığının x merkezli e yi içermeyen en geniş aralığı $(x-|x-e|\,,e)$ ve benzer şekilde $x>e$ iken en geniş aralığı $(e,x+|x-e|)$ olacak şekilde parçalanabilir. O halde, $\gamma_i(x):=(x-\delta_i(x),x+\delta_i(x))$ olmak üzere I üzerinde ayar fonksiyonu,

$$\delta(x)=\begin{cases}\gamma_1(x)\cap(x-|x-e|\,,e) & x\in[a,e)\\ \gamma_2(x)\cap(e,x+|x-e|) & x\in(e,b]\\ \gamma_1(e)\cap\gamma_2(e) & x=e\end{cases}\tag{4.83}$$

şeklinde tanımlansın. $x=e$ olduğunda $e\in\delta(x)$ olacağından e her δ- iyi etiketli parçalanış için bir etiket olacaktır. $\mathscr{P}$, I nın δ- iyi etiketli parçalanışı olsun. Eğer $(e,J)\in\mathscr{P}$ ve $J_i=J\cap I_i$ boştan farklı iken $i=1,2$ için

$$J_i\subset\gamma_i(e)\;\Rightarrow\;f(e)\ell(J)=f(e)\ell(J_1)+f(e)\ell(J_2)\tag{4.84}$$

eşitliği sağlanır. $\mathscr{P}_i=(x,J)\in\mathscr{P}:J\subset I_i$ olduğu zaman $\mathscr{P}$ parçalanışı $\mathscr{P}_1\cup\mathscr{P}_2$ olarak yazılsın. O halde, $\mathscr{P}_i$ etiketli parçalanışı I_i nin δ_i- iyi etiketli parçalanışı olur. c etiketi ile ilişkili aralık bölündüğünde

$$S(f;\mathscr{P})=S(f;\mathscr{P}_1)+S(f;\mathscr{P}_2)\tag{4.85}$$

olduğu görülür. Buradan,

$$\begin{aligned}\left|S(f;\mathscr{P})-\left\{\int_{I_1}f+\int_{I_2}f\right\}\right| &\leq\left|S(f;\mathscr{P}_1)-\int_{I_1}f\right|+\left|S(f;\mathscr{P}_2)-\int_{I_2}f\right|\\ &\leq\epsilon/2+\epsilon/2<\epsilon\end{aligned}\tag{4.86}$$

Böylece f fonksiyonu I üzerinde KH integrallenebilir ve $\int_a^b f=\int_{I_1}f+\int_{I_2}f$ dir. ■

Yorum 4.1. ψ, $I=[a,b]$ üzerinde bir adım fonksyionu $\sum_{i=1}^m a_i\chi_{I_i}$ kanonik formu ile tanımlansın. Bir aralık üzerinde karakteristik fonksiyon Riemann integrallenebilir olduğundan KH integrallenebilirdir ve lineerlikten

$$\int_I\psi=\sum_{i=1}^m a_i\int_I\chi_{I_i}=\sum_{i=1}^m a_i\ell(I_i)\tag{4.87}$$

yazılır. Dolayısıyla her adım fonksiyonu KH integrallenebilirdir ve $\int_I\psi$ integral değeri Riemann ve Lebesgue integral değeri ile aynıdır [15].

Teorem 4.14. *$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. O halde,*

f fonksiyonunun belirsiz integrali F süreklidir [12].

Teorem 4.15 (Kalkülüsün Temel Teoremi 2). *$h : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ olsun. h fonksiyonu I aralığında KH integrallenebilir ve $\kappa \in [a,b]$ de sürekli olsun. O zaman H,h in belirsiz integrali, κ noktasında türevlenebilirdir ve türevi $H^{'}(\kappa) = h(\kappa)$ dir. [15].*

İspat. h fonksiyonu $\kappa \in [a,b]$ noktasında sürekli olduğundan verilen her $\epsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki $\nu \in [a,b]$ ve

$$|\nu - \kappa| < \delta \quad \text{iken} \quad |h(\nu) - h(\kappa)| < \epsilon \tag{4.88}$$

gerçeklenir. $\kappa + e \in [a,b]$ olacak şekilde $e > 0$ alalım. O halde,

$$\begin{aligned} \frac{H(\kappa+e) - H(\kappa)}{e} - h(\kappa) &= \frac{1}{e}\int_{\kappa}^{\kappa+e} h(\nu)d\nu - h(\kappa) \\ &= \frac{1}{e}\int_{\kappa}^{\kappa+e} \big(h(\nu) - h(\kappa)\big)d\nu \end{aligned}$$

4.88 kullanılarak

$$-\epsilon \le h(\nu) - h(\kappa) \le \epsilon$$

$$-\frac{1}{e}\int_{\kappa}^{\kappa+e} \epsilon d\nu \le \frac{1}{e}\int_{\kappa}^{\kappa+e} \big(h(\nu) - h(\kappa)\big)d\nu \le \frac{1}{e}\int_{\kappa}^{\kappa+e} \epsilon d\nu$$

$$-\epsilon \le \frac{H(\kappa+e) - H(\kappa)}{e} - h(\kappa) \le \epsilon \tag{4.89}$$

olduğu açıkça görülür. Benzer şekilde, $e < 0$ için de

$$\left| \frac{H(\kappa+e) - H(\kappa)}{e} - h(\kappa) \right| \le \epsilon \tag{4.90}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece ispat tamamlanır. ■

Örnek 4.9. *3.2 örneğinde tanımlanan h fonksiyonunu için $h^{'}$ türev fonksiyonunun KH İntegrallenebilir ve $\int h^{'} = 1$ olduğunu gösterelim.*

Örnek 3.2' de $h^{'}$ fonksiyonunun Riemann ve Lebesgue integralinin olmadığı gösterilmişti. Ancak bu fonksiyon KH integrallenebilirdir. Öyle ki h fonksiyonu türevlenebilir ve türevi 3.15 de verilmişti. Dolayısıyla, 4.10 teoreminden $h^{'} \in \mathscr{R}^{*}([0,1])$ ve

$$\int h^{'} = h(1) - h(0) = \sin(\pi/2) - 0 = 1 \tag{4.91}$$

bulunur.

KH integrallebilir bir f fonksiyonunun mutlak değer fonksiyonu olan $|f|$' in mutlak integrallenebilir olup olmamasının garantisi yoktur. Matematiksel ifadeyle,

- $f \in \mathscr{R}^*([a,b])$ iken $|f| \in \mathscr{R}^*([a,b])$
- $f \in \mathscr{R}^*([a,b])$ iken $|f| \notin \mathscr{R}^*([a,b])$

olabilir. Bu durumun bir sonucu olarak mutlak integrallenebilir KH integrali ile Lebesgue integrali ilişkisi verilecektir.

Tanım 4.11. $I = [a,b]$ üzerinde hem kendi hem de mutlak değer fonksiyonu HK-integrallebilir olan f fonksiyonu Lebesgue integrallenebilirdir ve $f \in \mathscr{L}(I)$ ile gösterilir.

Teorem 4.16. *$f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan ve ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $f \in \mathscr{L}(I)$ olması için gerek ve yeter koşul $f \in \mathscr{R}^*(I)$ olmasıdır [15].*

Sonuç 4.2. *$f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. O halde, f fonksiyonunun Lebesgue integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul f in KH mutlak integrallenebilir olmasıdır.*

Teorem 4.17. *$f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun Lebesgue integrallenebilir olması için gerek ye yeter koşul hem f hem de $|f|$ fonksiyonunun KH integrallenebilir olmasıdır. Matematiksel gösterimle*

$$f \in \mathscr{L}(I) \quad \Leftrightarrow \quad f, |f| \in \mathscr{R}^*(I)$$

olarak ifade edilir [10].

Bu teoremle, KH integralin hem Lebesgue hem de Riemann integrali kapsadığı açıktır ve $I = [a,b]$ olmak üzere integraller arası ilişki

$$\mathscr{R}(I) \subset \mathscr{L}(I) \subset \mathscr{R}^*(I)$$

olarak verilir.

Lemma 4.5. *$f, g : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $(a,b]$ de sürekli, $\lim_{x \to a^+} g(x) = 0$ ve $g^{'}$ I'da mutlak integrallenebilir olsun. $F(x) = \int_x^b$ belirsiz integrali $(a,b]$ aralığında sınırlı olduğunu farzedelim. O halde, f g çarpımı I' da KH integrallenebilirdir.*

Sonuç 4.3. *$h, g : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir ve her $t \in [a,b]$ için $|h(t)| \leq g(t)$ olsun. O halde, h mutlak integrallenebilirdir ve*

$$\left| \int_I h \right| \leq \int_I |h| \leq \int_I g \tag{4.92}$$

sağlanır [12].

Teorem 4.18. *$f \in \mathscr{R}^*([a,b])$ ise aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

(i) $f \in \mathscr{L}[a,b]$.

(ii) Her $x \in [a,b]$ *için* $f(x) \leq \alpha(x)$ *koşulunu sağlayan bir* $\alpha \in \mathscr{L}[a,b]$ *vardır.*

(iii) Her $x \in [a,b]$ *için* $\beta(x) \leq f(x)$ *koşulunu sağlayan bir* $\beta \in \mathscr{L}[a,b]$ *vardır.*

Teorem 4.19. *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu KH integrallenebilir ise $[a,b] = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ olacak şekilde kapalı aralıkların bir $\{E_i\}$ dizisi vardır ve f fonksiyonu her bir E_i üzerinde Lebesgue integrallenebilirdir [7].*

Teorem 4.20 (Düzgün Yakınsaklık Teoremi)**.** *Eğer $(h_m) \in \mathscr{R}^*([a,b])$ fonksiyon dizisi h fonksiyonuna düngün yakınsıyorsa o zaman*

$$h \in \mathscr{R}^*([a,b]), \qquad \int_{[a,b]} h = \lim_{m\to\infty} \int_{[a,b]} h_m \tag{4.93}$$

gerçeklenir [3].

Teorem 4.21 (Monoton Yakınsaklık Teoremi)**.** *$(g_m) \in \mathscr{R}^*([a,b])$ monoton bir dizi ve her $x \in [a,b]$ için $g(x) := \lim g_m(x)$ olsun. O halde, $g \in \mathscr{R}^*([a,b])$ olması için gerek ve yeter koşul $\left(\int_I g_m\right)$ dizisi reel sayılarda sınırlıdır ve*

$$\int_I g = \lim_{m\to\infty} \int_I g_m \tag{4.94}$$

sağlanır. Ayrıca, $g_1 \in \mathscr{L}([a,b])$ ise $g \in \mathscr{L}([a,b])$ dir [12].

Teorem 4.22 (Baskın Yakınsaklık Teoremi)**.** *$(f_n) \in \mathscr{R}^*([a,b])$ bir dizi ve her $x \in [a,b]$ için $f(x) := \lim f_m(x)$ olsun. $\alpha, \beta \in \mathscr{R}^*([a,b])$ fonksiyonları*

$$\forall x \in [a,b],\ m \in \mathbb{N}\ \beta(x) \leq f_m(x) \leq \alpha(x) \tag{4.95}$$

koşulunu sağlasın. O halde,

$$f \in \mathscr{R}^*([a,b]), \qquad \int_{[a,b]} f = \lim_{m\to\infty} \int_{[a,b]} f_m \tag{4.96}$$

gerçeklenir [15].

Teorem 4.23. *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her bir $[c,d] \subseteq (a,b)$ üzerinde KH integrallenebilir olsun. Limit $c \to a^+$ ve $d \to b^-$ giderken $\int_c^d f$ yakınsak ise f KH integrallenebilirdir. Kısaca,*

$$\int_a^b f = \lim_{c\to a^+,\, d\to b^-} \int_c^d f \tag{4.97}$$

biçiminde ifade edilir [7].

Riemann teoride, bir fonksiyon sınırlı olmayan aralıkta integrali alındığında karşımıza has olmayan (improper) Riemann integral çıkar.

Örnek 4.10.

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{4.98}$$

olarak tanımlanan s fonksiyonu $[0,1]$ *üzerinde KH integranebilir ve* $\int_0^1 s(x)dx = 2$ *olduğunu gösterelim [4].*
$0 < \epsilon < 3/4$ *olsun.* $[0,1]$ *üzerinde ayar fonksiyonunu*

$$\delta(x) = \begin{cases} \epsilon x^2, & x \in (0,1] \\ \epsilon^2, & x = 0 \end{cases} \tag{4.99}$$

olarak tanımlayalım. $\Re$ *parçalanışı* $[0,1]$ *aralığının* δ*- iyi etiketli parçalanışı olsun. Her bir* $\xi > 0$ *ve* $\xi - \epsilon\xi^2 > 0$ *olduğundan etiketlerimizden biri sıfır olmalıdır.* $\xi > 0$ *için* $(\xi, [c,d]) \in \Re$ *alalım. O halde,*

$$c > \xi - \epsilon\xi^2 \geq \xi - \epsilon\xi > \xi/4$$

$$\sqrt{\xi}(\sqrt{\xi} + \sqrt{c})^2 > \sqrt{\xi}(\sqrt{\xi} + \sqrt{\xi/4})^2 = \frac{9\xi\sqrt{\xi}}{4} > \xi\sqrt{\xi} \geq \xi^2$$

eşitsizliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} \left| \frac{2\sqrt{\xi} - 2\sqrt{c}}{\xi - c} - \frac{1}{\sqrt{\xi}} \right| &= \left| \frac{2}{\sqrt{\xi} + \sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{\xi}} \right| \\ &= \frac{\sqrt{\xi} - \sqrt{c}}{\sqrt{\xi}(\sqrt{\xi} + \sqrt{c})} \\ &= \frac{\xi - c}{\sqrt{\xi}(\sqrt{\xi} + \sqrt{c})^2} < \frac{\epsilon\xi^2}{\xi^2} = \epsilon \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\left| \frac{2\sqrt{d} - 2\sqrt{\xi}}{d - \xi} - \frac{1}{\sqrt{\xi}} \right| < \epsilon$$

elde edilir.

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\xi}}(d - c) - \left(2\sqrt{d} - 2\sqrt{c}\right) \right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left|\frac{1}{\sqrt{\xi}}(d-\xi)-\left(2\sqrt{d}-2\sqrt{\xi}\right)\right|+\left|\frac{1}{\sqrt{\xi}}(\xi-c)-\left(2\sqrt{\xi}-2\sqrt{c}\right)\right| \\
&=\left|\frac{1}{\sqrt{\xi}}-\frac{\left(2\sqrt{d}-2\sqrt{\xi}\right)}{d-\xi}\right|(d-\xi)+\left|\frac{1}{\sqrt{\xi}}-\frac{\left(2\sqrt{\xi}-2\sqrt{c}\right)}{\xi-c}\right|(\xi-c) \\
&<\epsilon(d-\xi)+\epsilon(x-c)=\epsilon(d-c)
\end{aligned}
$$

sağlanır. $\mathfrak{E}=\{(\xi_i,[c_i,d_i]):1\leq i\leq n\}$ *ve* $\xi_0=0$ *için* $\mathfrak{K}=(\xi_0,[c_0,d_0])\cup\mathfrak{E}$ *etiketli parçalanışına karşılık gelen Riemann toplamı:*

$$
\begin{aligned}
|S(s,\mathfrak{K})-2| &= \left|\sum_{i=1}^{n}s(\xi_i)(d_i-c_i)-\sum_{i=0}^{n}\left(2\sqrt{d_i}-2\sqrt{c_i}\right)\right| \\
&\leq 2\sqrt{d_0}+\sum_{i=0}^{n}\left|\frac{1}{\sqrt{\xi}}(d_i-c_i)-2\left(\sqrt{d_i}-\sqrt{c_i}\right)\right| \\
&<2\epsilon+\sum_{i=0}^{n}\epsilon(d_i-c_i)<3\epsilon
\end{aligned}
\tag{4.100}
$$

bulunur. $\epsilon>0$ *keyfi olduğundan* $s\in\mathscr{R}^*([0,1])$ *dir.*

4.10' da ayar fonksiyonu parabolik fonksiyon içeren parçalı bir fonksiyon şeklinde alınması ile etiketli parçalanışın alt aralıkları kontrol edilmiştir. Ayrıca 4.10' nun çözümü has olmayan Riemann integral yaklaşımı kullanılarak

$$
\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{a\to0+}\int_0^a\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{a\to0+}2\sqrt{x}|_a^1=\lim_{a\to0+}(2-2\sqrt{a})=2
$$

şeklinde yapılabilir. Ancak KH yaklaşımı ile teorem 4.23 de görüleceği gibi KH integral için "has olmayan KH integrali" kavramı yoktur. Ayrıca daha geniş integrallenebilir fonksiyon sınıfına sahip ve Riemann integralden daha genel olan KH integrali, sınırlı olmayan aralıklarda tanımlı fonksiyonların integralini almak için de kolayca modifiye edilebilir.

Teorem 4.24 (Hake Teoremi)**.** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *olsun.* $f\in\mathscr{R}^*([a,b])$ *olması için gerek ve yeter koşul her* $c\in(a,b)$ *için f fonksiyonunun* $[a,c]$ *ye kısıtlanışı integrallenebilir ve*

$$
\lim_{c\to b^-}\int_a^c f=A \tag{4.101}
$$

gerçeklenmek üzere bir $A\in\mathbb{R}$ *sayısının var olmasıdır. Bu durumda,* $\int_a^b f=A$ *dır [8].*

Örnek 4.11. $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ *reel sayılarda yakınsak bir seri ve limiti A olsun.* $n=0,1,\cdots,n$ *için* $c_n:=1-2^{-n}$ *olmak üzere* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *fonksiyonu*

$$
f(x):=\begin{cases}2^k a_k & x\in[c_{k-1},c_k),k\in\mathbb{N}\ ise\\ 0 & x=1\ ise\end{cases}
$$

şeklinde tanımlansın. O halde $f \in \mathscr{R}^*([0,1])$ *dir ve* $\int_0^1 f = A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *yazılır [8].*

4.2 KH integrallenebilir fonksiyonlar uzayı

$\mathscr{R}^*(I)$ bir vektör uzayıdır ve $\mathscr{L}(I)$ Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayını ve Cauchy-Lebesgue (has olmayan Lebesgue) integrallenebilir fonksiyonların birleşimini içerir. Özel olarak, kapalı aralık üzerinde tanımlı mutlak integrallenebilir $\mathscr{R}^*(I)$ uzayı ile $\mathscr{L}(I)$ uzayı çakışır. Ancak, Lebesgue ve Riemann uzaylarından farklı olarak $\mathscr{R}^*([a,b])$ uzayında uygun bir metrik bulunamayabilir ve sonuçta bu uzay tam olmaz. Başka bir deyişle, $\mathscr{R}^*([a,b])$ uzayından alınan fonksiyonlar yine bu uzayda KH integrallenemeyen bir fonksiyona yakınsar. Dolayısıyla, bu uzay için uygun bir topoloji kurulması ve yeni bir norm tanımı yapılması gerekir.

Tanım 4.12. $f \in \mathscr{R}^*([a,b])$ olsun. Bu uzayda Alexiewicz normu

$$||f||_A = \sup\left\{\left|\int_I f\right| : I \subseteq [a,b] \text{ bir aralık}\right\} \tag{4.102}$$

olarak tanımlanır [16].

Sonuç 4.4. $(\mathscr{R}^*[a,b], ||.||_A)$ *normlu uzayın tamlaması olan* $\mathscr{A}$ $\mathscr{R}^*[a,b]$ *uzayının katı kesin süper kümesidir. Yani,*

$$\mathscr{R}^*[a,b] \subset \mathscr{A}$$

dır [17].

Lebesgue integrallebilir fonksiyonlar kümesi belirli normlar altında tam olması integral teoride KH integrali daha az tanınır yapsa da Öklid uzaylarında daha işlevsel olduğu gerçeğini değiştirmez.

5
KURZWEIL HENSTOCK İNTEGRALİ İÇEREN SCHRODINGER DENKLEMİNİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ

q, $I = [a,b]$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyon olmak üzere L bir boyutlu Schrödinger operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$Ly = -y'' + qy \tag{5.1}$$

Burada q ve g fonksiyonları I üzerinde Lebesgue integrallenebilir ise $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $c \in I$ için

$$(L-\lambda)y = g;\ f(c) = \alpha,\ f'(c) = \beta \tag{5.2}$$

başlangıç değer probleminin I aralığında mutlak sürekli olan f ve f' olmak üzere tek çözümü vardır. Bu bölümde, verilen ifade q ve g fonksiyonlarını I üzerinde KH integrallenebilir alarak genelleştireceğiz. Öncelikle, 4.6 tanımı aşağıdaki gibi modifiye edilmiştir:

Tanım 5.1. $f : I = [a,b] \to \mathbb{C}$ ve $L \in \mathbb{C}$ olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık bir δ ayar fonksiyonu, I aralığının her δ ile uyumlu $\Re$ etiketli parçalanışı için

$$|S(f;\Re) - L| = \left| \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i).(x_i - x_{i-1}) - L \right| < \epsilon \tag{5.3}$$

gerçeklenmek üzere bulunabiliyorsa L' ye f fonksiyonun KH integrali denir.

Tanım 5.2. $\varphi : I = [a,b] \to \mathbb{C}$ olsun. φ fonksyionunun [a,b] üzerindeki salınımı (değişimi)

$$V_I\varphi = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| : \{x_i\}_{i=1}^{n},\ I \text{ aralığının bir parçalanışı} \right\} \tag{5.4}$$

olarak tanımlanır. Eğer $V_I\varphi < \infty$ ise φ fonksiyonuna sınırlı salınıma sahip denir. $\varphi \in BV(I)$ olarak gösterilir.

Bir fonksiyonun değişimi o fonksiyonun salınımının bir ölçüsüdür.

Teorem 5.1. *$I=[a,b]$ ve $f\in\mathscr{R}^*(I)$ olsun. $|f|\in\mathscr{R}^*(I)$ olması için gerek ve yeter koşul $F(x)=\int_a^x f$ belirsiz integralinin I üzerinde sınırlı salınımlı olmasıdır. Bu durumda,*

$$V_I F=\int_a^b |f| \tag{5.5}$$

olarak ifade edilir [8].

Teorem 5.2. *Reel değerli $g\in\mathscr{R}^*(I)$ ve $h\in BV(I)$ ise gh çarpımı KH integrallenebilirdir [8].*

Teorem 5.3. *g reel değerli KH integrallenebilir bir fonksiyon ve $h\in BV(I)$ ise*

$$\left|\int_a^b hg\right|\leq \inf_{\zeta\in I}|h(\zeta)|\left|\int_a^b g(\zeta)d\zeta\right|+\|g\|_I V_I h \tag{5.6}$$

eşitsizliği gerçeklenir [18].

Teorem 5.4. *g reel değerli KH integrallenebilir bir fonksiyon ve her $n\in\mathbb{N}$ için $V_I h_n\leq K$ olacak şekilde (h_n), $BV(I)$ içinde bir dizi ve $g_n\to g$ $[a,b]$ aralığında noktasal yakınsıyor ise*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b hg_n=\int_a^b hg \tag{5.7}$$

eşitliği sağlanır [19].

Tanım 5.3. $F: I=[a,b]\to\mathbb{C}$ ve $D\subseteq I$ olsun. Her $\epsilon>0$ için bir $\delta_\epsilon>0$ sayısı bulunabilir öyle ki $\{([c_i,d_i])\}_{i=1}^m$ uç noktaları D kümesinde bulunan çakışık olmayan aralıkların bir yığını ve $\sum_{i=1}^m(d_i-c_i)<\delta_\epsilon$ için

$$\sum_{i=1}^m \sup\{|F(x)-F(y)|: x,y\in[c_i,d_i]\}<\epsilon \tag{5.8}$$

sağlanıyorsa F fonksiyonuna D kümesi üzerinde kısıtlı anlamda mutlak süreklidir denir. $F\in AC_*(D)$ notasyonu ile gösterilir.

F fonksiyonu için eğer $[a,b]=\cup_{m=1}^\infty D_m$ olacak şekilde her $m\in\mathbb{N}$ için $[a,b]$ aralığında sayılabilir kümelerin bir $(D_m)_{m=1}^\infty$ yığını varsa F her bir D_m üzerinde genelleştirilmiş mutlak sürekliliğe sahiptir. $F\in ACG_*(D_m)$ notasyonu ile gösterilir.

Teorem 5.5 (Kalkülüsün Temel Teoremi)**.** *$h,H: I=[a,b]\to\mathbb{C}$ ve $e\in I$ olsun. O halde,*

(i) Her $\kappa \in I$ için $h \in \mathscr{R}^*(I)$ ve $H(\kappa) = \int_e^\kappa h$ ancak ve ancak $H \in ACG_*(I)$, $H(e) = 0$ ve I aralığında h.h.y $H' = h$ dir.

(ii) $h \in \mathscr{R}^*(I)$ ve $\kappa \in (I)$ noktasında h sürekli ise $\dfrac{d}{d\kappa}\int_e^\kappa f = f(\kappa)$ dir.

(iii) $H \in ACG_*(I)$ olması için gerek ve yeter koşul I aralığında h.h.y. H' var ve her $\kappa \in I$ için $\int_e^\kappa H' = H(\kappa) - H(e)$ olmasıdır.

ifadeleri sağlanır [7].

5.1 Varlık ve Teklik Teoremi

q, $I = [a,b]$ aralığında tanımlı reel değerli KH integrallenebilir fonksiyon olsun. L Schrödinger operatörü

$$Ly = -y'' + qy$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 5.1. *$e \in I$, $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q-\lambda & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Eğer $g \in \mathscr{R}^*(I)$ ise*

$$\begin{aligned} (L-\lambda)y &= g \\ y(e) &= \alpha \\ y'(e) &= \beta \end{aligned} \tag{5.9}$$

başlangıç değer probleminin $h, h' \in ACG_*(I)$ olarak tek çözümünün var olması için gerek ve yeter şart

$$w : I \to \mathbb{C}^2 \quad \textit{fonksiyonu} \quad w(x) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \int_e^x \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} dt$$

olarak tanımlanmak üzere

$$u = \int_e^{(.)} K(t)u(t)dt + w \tag{5.10}$$

denkleminin $u \in C([a,b],\mathbb{C})$ tek çözümünün var olmasıdır [13].

İspat. $(\Rightarrow)$: I aralığında genelleştirilmiş mutlak sürekli fonksiyonlar h ve h' türev fonksiyonu 5.9 başlangıç değer probleminin çözümü olsun. $h' \in C(I)$ olduğundan $h(x) = \int_a^x f'(t)dt + f(a)$ yazabiliriz. Teorem 5.1 den h, I aralığında sınırlı salınımlıdır. Buradan, $g \in \mathscr{R}^*(I)$ oldUğu için teorem 5.2 uygulandığında $qh \in \mathscr{R}^*(I)$ elde edilir.

$u \in C([a,b],\mathbb{C}^2)$ olmak üzere u matrisi $u = \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix}$ biçiminde tanımlansın. O halde, $Ku = \begin{pmatrix} h' \\ qh - \lambda h \end{pmatrix} \in \mathscr{R}^*(I)$ dir. Böylece, teorem 5.5 ile $\forall x \in I$ için

$$\begin{aligned} \int_e^x K(t)u(t)ts + w(x) &= \begin{pmatrix} \int_e^x h'(t)dt + \alpha \\ \int_e^x [q(t)h(t) - \lambda h(t)]\,dt + \beta - \int_e^x g(t)dt \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \int_e^x h'(t)dt + h(e) \\ \int_e^x \left[h''(t) + g(t)\right]dt + h'(t) - \int_e^x g(t)dt \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \int_e^x h'(t)dt + h(e) \\ \int_e^x h''(t)dt + h'(e) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h(x) \\ h'(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, u matrisi 5.10 denklemini sağlar.

$(\Leftarrow) : u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in C([a,b],\mathbb{C}^2)$, 5.10 denkleminin bir çözümü olsun. O halde, her $x \in I$ için,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \int_e^x u_2(t)dt + \alpha \\ u_2(x) &= \int_e^x [q(t) - \lambda u_1(t) - g(t)]\,dt + \beta \end{aligned} \tag{5.11}$$

olur. Burada, I üzerinde $u_1' = u_2$ olduğundan teorem 5.5 den $u_2 \in ACG_*(I)$ ve I üzerinde h.h.y. $u_2' = (q-\lambda)u_1 - g$ dir. Bu durum, $u_1, u_1' \in ACG_*(I)$ ve $(L-y)u_1 = g$ denklemini h.h.y. sağlar. ■

Teorem 5.6. *$e \in I = [a,b]$, $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun. Eğer $g \in \mathscr{R}^*(I)$ ise 5.9 başlangıç değer probleminin $h, h' \in ACG_*(I)$ olmak üzere tek çözümü vardır [13].*

İspat. $I = [a,b]$ üzerinde $y_0(x) = \alpha$ ve $z_0(x) = \beta$ olmak üzere (y_n) ve (z_n) fonksiyon dizileri her $n \in \mathbb{N}$ için

$$y_n(x) = \alpha + \int_e^x z_{n-1}(t)dt \quad \text{ve} \quad z_n(x) = \beta - \int_e^x g(t)dt + \int_e^x (q(t)-\lambda)y_{n-1}(t)dt$$

olarak tanımlansın.Açıkça görülür ki y_0, z_0, y_1 ve z_1 iyi tanımlıdır. $y_2, z_2, \cdots, y_n, z_n$ var olsun. z_{n-1}, I aralığında Lebesgue integrallenebilir olduğundan ve teorem 5.1 den y_n I aralığında sınırlı salınımlıdır ve 5.2 den $(q-\lambda)y_n \in \mathscr{R}^*(I)$ dir. O halde, z_{n+1} vardır. Benzer şekilde y_{n+1} var olduğu açıktır. Buradan, (y_n) ve (z_n) fonksiyon dizilerinin iyi

tanımlıdır. Her $x \in I$ ve $x > e$ için,

$$\int_e^x |z_n(t) - z_{n-1}(t)|\, dt \leq \begin{cases} \|(q-\lambda)\alpha - g\|_I \dfrac{(x-e)^{k+1}}{(k+1)!} \|(q-\lambda)\|_I^k, & \text{n=2k+1 ise;} \\ |\beta| \dfrac{(x-e)^{k+1}}{(k+1)!} \|(q-\lambda)\|_I^k, & \text{n=2k ise} \end{cases} \tag{5.12}$$

olduğunu iddia edelim. Bu iddiayı ispatlamak için k üzerinden tümevarım alalım. n tek olsun. $k = 0$ ve her $x > e$ için,

$$\begin{aligned} \int_e^x |z_1(t) - z_0(t)|\, dt &= \int_e^x \left| \int_e^t [(q(s)-\lambda)\,\alpha - g(s)]\, ds \right| dt \\ &\leq \int_e^x \|(q-\lambda)\,\alpha - g\|_I\, dt \\ &= \|(q-\lambda)\,\alpha - g\|_I\,(x-e) \end{aligned} \tag{5.13}$$

elde edilir. Her $x > e$ için,

$$\int_e^x |z_{2k+1}(t) - z_{2k}(t)|\, dt \leq \|(q-\lambda)\,\alpha - g\|_I \frac{(x-c)^{k+1}}{(k+1)!} \|(q-\lambda)\|_I^k$$

olsun. O halde,

$$\int_e^x |z_{2k+1}(t) - z_{2k}(t)|\, dt = \int_e^x \left| \int_e^t (q(s)-\lambda) \left[y_{2(k+1)}(s) - y_{2k+1}(s) \right] ds \right| dt \tag{5.14}$$

yazabiliriz. $y_{2(k+1)} - y_{2k+1}$ ifadesi $[e,s]$ üzerinde sınırlı salınımlı ve

$$V_{[e,t]}(y_{2(k+1)} - y_{2k+1}) \leq \int_e^t |z_{2k+1}(s) - z_{2k}(s)|\, ds \tag{5.15}$$

olduğundan teorem 5.3 kullanılarak

$$\begin{aligned} &\int_e^x \left| \int_e^t (q(s)-\lambda) \left[y_{2(k+1)}(s) - y_{2k+1}(s) \right] ds \right| dt \\ &\quad \leq \int_e^x \left[\inf_{s\in[e,t]} \left| y_{2(k+1)}(s) - y_{2k+1}(s) \right| + V_{[e,t]}(y_{2(k+1)} - y_{2k+1}) \right] \|(q-\lambda)\|_I\, dt \\ &\quad \leq \int_e^x \left[\left| y_{2(k+1)}(e) - y_{2k+1}(e) \right| + V_{[e,t]}(y_{2(k+1)} - y_{2k+1}) \right] \|(q-\lambda)\|_I\, dt \\ &\quad = \int_e^x V_{[e,t]}(y_{2(k+1)} - y_{2k+1}) dt\, \|(q-\lambda)\|_I \\ &\quad \leq \int_e^x [|z_{2k+1}(s) - z_{2k}(s)|\, ds]\, dt\, \|(q-\lambda)\|_I \end{aligned}$$

$$\leq \int_e^x \left[\|(q-\lambda)\alpha - g\|_I \frac{(t-e)^{k+1}}{(k+1)!} \|(q-\lambda)\|_I^k \right] dt \, \|(q-\lambda)\|_I$$
$$\leq \|(q-\lambda)\alpha - g\|_I \frac{(x-e)^{k+2}}{(k+2)!} \|(q-\lambda)\|_I^{k+1} \tag{5.16}$$

elde edilir. Böylece 5.12 eşitsizliği n tek sayıları ve $x > c$ için ispatlanır.
Şimdi $x < e$ için

$$\int_e^x |z_n(t) - z_{n-1}(t)| \, dt \leq \begin{cases} \|(q-\lambda)\alpha - g\|_I \frac{(e-x)^{k+1}}{(k+1)!} \|(q-\lambda)\|_I^k, & \text{n=2k+1 ise;} \\ |\beta| \frac{(e-x)^{k+1}}{(k+1)!} \|(q-\lambda)\|_I^k, & \text{n=2k ise} \end{cases} \tag{5.17}$$

olduğunu ispatlayalım. Her $k \in \mathbb{N}$için $p_k = y_{2k+1} - y_{2k+1}$ olsun. Eğer $x < e$ ise

$$\begin{aligned} |p_k(x)| = |y_{2k+1} - y_{2k}| &= \left| \int_x^e [z_{2k}(t) - z_{2k-1}(t)] \, dt \right| \\ &\leq \int_x^e |z_{2k}(t) - z_{2k-1}(t)| \, dt \\ &\leq |\beta| \frac{(e-x)^{k+1}}{(k+1)!} \|(q-\lambda)\|_I^k \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan,

$$|p_k(x)| \leq \frac{|\beta|}{\|(q-\lambda)\|_I} \frac{(b-a)^{k+1} \|(q-\lambda)\|_I^{k+1}}{(k+1)!} \tag{5.18}$$

sağlandığı görülür. Bu eşitsizlik aynı zamanda $x \geq e$ için de geçerlidir. $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ serisi I aralığında düzgün yakınsaktır. Çünkü

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\beta|}{\|(q-\lambda)\|_I} \frac{(b-a)^{k+1} \|(q-\lambda)\|_I^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{|\beta|}{\|(q-\lambda)\|_I} e^{(b-a)\|(q-\lambda)\|_I} < \infty$$

serisi sonludur. Aynı şekilde 5.12 ve 5.17 denklemleri ile $c_k = y_{2k} - y_{2k-1}$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ serisinin $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsadığı görülür. Böylece,

$$y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [y_n - y_{n-1}] = y_0 + [y_1 - y_0] + \sum_{k=1}^{\infty} p_k + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \tag{5.19}$$

ifadesi I aralığında düzgün yakınsar. Eşitliğin sol tarafı için s_n kısmi toplamlar dizisi

$$s_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} [y_k - y_{k-1}] = y_n(x)$$

olduğundan (y_n) dizisi I aralığında tanımlı bir y limit fonksiyonuna düzgün yakınsar.

Diğer taraftan,

$$|z_{2k+1}(x)-z_{2k}(x)| \leq \|(q-\lambda)\alpha-g\|_I \frac{(b-a)^k \|(q-\lambda)\|_I^k}{k!}$$

ve

$$|z_{2k}(x)-z_{2k-1}(x)| \leq |\beta| \frac{(b-a)^k \|(q-\lambda)\|_I^k}{k!}$$

olduğundan $z_0+\sum_{k=0}^{\infty}[z_n-z_{n-1}]$ toplamı bir z limit fonksiyonuna I aralığında düzgün yakınsar. Sonuçta, her $x \in I$ için

$$\begin{aligned} y(x)=\lim_{n\to\infty} y_n(x) &= \lim_{n\to\infty}\left[\alpha+\int_e^x z_{n-1}(t)dt\right] \\ &= \alpha+\lim_{n\to\infty}\int_e^x z_{n-1}(t)dt \\ &= \alpha+\int_e^x \lim_{n\to\infty} z_{n-1}(t)dt \\ &= \alpha+\int_e^x z(t)dt \end{aligned}$$

dir. Benzer yöntemi (y_n) dizisi için uygulamak zordur çünkü $(q-\lambda)y_{n-1}$ fonksiyonu $(q-\lambda)y$ ifadesine düzgün yakınsamayabilir. Buna rağmen, teorem 5.4 kullanılarak bir sonuç elde edilebilir. $x>e$ olmak üzere $x \in [a,b]$ olsun. Öncelikle, $[e,x]$ aralığında y_n fonksiyon dizisinin düzgün sınırlı salınımlı olduğunu göstelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} V_{[e,x]}y_n &= V_{[e,x]}\left[y_1+\sum_{k=1}^{n-1}(y_{k+1}-y_k)\right] \\ &\leq V_{[e,x]}y_1+\sum_{k=1}^{n-1} V_{[e,x]}[y_{k+1}-y_k] \\ &\leq V_{[e,x]}y_1+\sum_{k=1}^{n-1}\int_e^x |z_k(t)-z_{k-1}(t)|\,dt \\ &\leq V_{[e,x]}y_1+\sum_{k=1}^{\infty}\int_e^x |z_k(t)-z_{k-1}(t)|\,dt \\ &= V_{[e,x]}y_1+\int_e^x |z_1(t)-z_0(t)|\,dt \\ &+\sum_{k=1}^{\infty}\int_e^x |z_{2k+1}(t)-z_{2k}(t)|\,dt+\sum_{k=1}^{\infty}\int_e^x |z_{2k}(t)-z_{2k-1}(t)|\,dt \\ &\leq \left[\frac{\|(q-\lambda)\alpha-g\|_I}{\|(q-\lambda)\|_I}+\frac{|\beta|}{\|(q-\lambda)\|_I}\right]\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(b-a)^{k+1}\|(q-\lambda)\|_I^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \frac{\|(q-\lambda)\alpha-g\|_I+|\beta|}{\|(q-\lambda)\|_I}e^{(b-a)\|(q-\lambda)\|} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, teorem 5.4 ile

$$\lim_{n\to\infty}\int_e^x (q(t)-\lambda)\,y_{n-1}(t)dt=\int_e^x (q(t)-\lambda)\,y(t)dt \tag{5.20}$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} z(x) = \lim_{n\to\infty} z_n(x) &= \lim_{n\to\infty}\left[\beta - \int_e^x g(t)dt + \int_e^x (q(t)-\lambda)\, y_{n-1}(t)dt\right] \\ &= \beta - \int_e^x g(t)dt + \lim_{n\to\infty}\int_e^x (q(t)-\lambda)\, y_{n-1}(t)dt \\ &= \beta - \int_e^x g(t)dt + \int_e^x (q(t)-\lambda)\, y(t)dt \end{aligned} \tag{5.21}$$

elde edilir. Bu sonuç, $x < e$ iken 5.21 denkleminin sağlandığını gösterir. Buradan $u = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$, 5.10 denkleminin bir çözümüdür. Şimdi, çözümün tek olduğunu ispatlayalım. $\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$, 5.10 denkleminin diğer bir çözümü olsun. O halde, her $x \in [a,b]$ için

$$\tilde{y} = \alpha + \int_e^x \tilde{z}(t)dt$$

ve

$$\tilde{z} = \beta - \int_e^x g(t)dt + \int_e^x (q(t)-\lambda)\, \tilde{y}(t)dt$$

dir. Her $k \in \mathbb{N}$ için,

$$\int_e^k |z_{2k}(t) - \tilde{z}(t)|\, dt \le \|(q-\lambda)\tilde{y} - g\|_I \frac{(x-e)^{k+1}}{(k+1)!} \|(q-\lambda)\|^k, \quad (x > e) \tag{5.22}$$

ve

$$\int_x^e |z_{2k}(t) - \tilde{z}(t)|\, dt \le \|(q-\lambda)\tilde{y} - g\|_I \frac{(e-x)^{k+1}}{(k+1)!} \|(q-\lambda)\|^k, \quad (x < e) \tag{5.23}$$

geçerlidir. Buradan, her $x \in [a,b]$ için

$$|y_{2k+1}(x) - \tilde{y}(x)| \le \frac{\|(q-\lambda)\tilde{y} - g\|_I}{\|(q-\lambda)\|} \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!} \|(q-\lambda)\|^{k+1} \tag{5.24}$$

ve

$$\left|z_{2(k+1)}(x) - \tilde{z}(x)\right| \le \frac{\|(q-\lambda)\tilde{y} - g\|_I}{\|(q-\lambda)\|} \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!} \|(q-\lambda)\|^{k+1} \tag{5.25}$$

bulunur. Böylece, $y_{2k+1}(x) \to \tilde{y}(x)$ ve $z_{2(k+1)(x)} \to \tilde{z}(x)$ elde edilir. Ancak, $y_{2k+1}(x) \to y(x)$ ve $z_{2(k+1)(x)} \to z(x)$ idi. Bu durumda $y(x) = \tilde{y}(x)$ ve $\tilde{z}(x) = z(x)$ olur ve 5.10 denkleminin çözümünün tekliği ispatlanır. ■

Örnek 5.1.

$$r(\kappa)=\begin{cases}\frac{2\pi}{\kappa}\sin(\frac{\pi}{\kappa^2}) & \kappa\in(0,1]\\ 0 & \kappa=0\end{cases} \tag{5.26}$$

ve $c_m=1-2^{-m}$ $m=0,1,2,\cdots$ *olmak üzere*

$$s(\kappa)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{m+1}2^m}{m} & \kappa\in[c_{m-1},c_m),\ m\in\mathbb{N}\\ 0 & \kappa=1\end{cases} \tag{5.27}$$

fonksiyonları tanımlansın. O halde, r ve s fonksiyonları $[0,1]$ *aralığında KH integrallenebilirdir. Öyle ki r fonksiyonu* $[0,1]$ *aralığında türevlenebilirdir ve türevi* $r^{'}(0)=0$ *ve* $\kappa\in(0,1]$ *için*

$$r^{'}(\kappa)=-\frac{2\pi}{\kappa^2}\sin(\frac{\pi}{\kappa^2})-\frac{4\pi^2}{\kappa^4}\cos(\frac{\pi}{\kappa^2})$$

şeklindedir. 4.10 teoreminden $r\in\mathscr{R}^*([0,1])$ *bulunur. Şimdi, s fonksiyonunun KH integrallenebilir olduğunu gösterelim.* $a_m=\dfrac{(-1)^{m+1}}{m}$ *olsun. O halde, s fonksiyonu*

$$s(\kappa)=\begin{cases}2^m a_m & \kappa\in[c_{m-1},c_m),\ m\in\mathbb{N}\\ 0 & \kappa=1\end{cases} \tag{5.28}$$

biçiminde düzenlenirse örnek 4.11 ile $\sum_{m=1}^{\infty}a_m$ *alterne serisi yakınsak olduğundan s fonksiyonunun KH integrallenebilir olduğu açıktır. Dolayısıyla, 5.6 teoremi ile*

$$\begin{aligned}u^{''}+r(\kappa)u-2u&=s(\kappa)\\ u(\frac{1}{2})&=0\\ u^{'}(\frac{1}{2})&=1\end{aligned} \tag{5.29}$$

olarak verilen KH integrallenebilir fonksiyonlar içeren Schrödinger denkleminin başlangıç değer probleminin bir çözümü vardır [13].

Sonuç olarak, r ve s fonksiyonları $[0,1]$ üzerinde Lebesgue integrallenemezken KH integrallenebilirdir. Böylece, 5.6 teoremi klasik varlık ve teklik sonuçlarından daha geneldir.

6
SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Kurzweil- Henstock integral teorisi verilmiş olup Lebesgue integrali ile ilişkisi örneklerle ifade edilmiştir. Mutlak integrallenebilirlik karakterizasyonu ile Lebesgue ve Kurzweil-Henstock integralin belirli koşullar altında denk olduğu görülmüştür. Bu teorinin ilk çıkış noktası olan diferansiyel denklem çalışmalarına atıfta bulunularak bu tezde kuantum mekaniğinde önemli rol oynayan Schrödinger denklemi için yapılan bir uygulama araştırılmıştır. Lebesgue integralden daha genel bir teori olan Kurzweil-Henstock integrali, matematiksel disiplinler içerisindeki kısmi diferansiyel denklemler, olasılık, harmonik analiz ve matematiksel fizikte; bilgisayar bilimi içerisindeki yapılan analiz ve hesaplamalarda ve de modern fiziğin bel kemiği kuantum mekaniği alanındaki uygulamalar için araştırılarak yeni ve orijinal çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKÇA

[1] J. Kurzweil, "Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter," *Czechoslovak Mathematical Journal*, vol. 7, no. 3, pp. 418–449, 1957.

[2] R. Henstock, *Theory of integration*. Butterworth & Co Publishers Ltd, 1963, vol. 1.

[3] C. W. Swartz, *Introduction to gauge integrals*. World Scientific, 2001.

[4] R. M. McLeod, *The generalized Riemann integral*. American Mathematical Soc., 1980, vol. 20.

[5] T. Y. Lee, *Henstock-Kurzweil integration on Euclidean spaces*. World Scientific, 2011, vol. 12.

[6] S. K. Berberian, *Fundamentals of real analysis*. Springer Science & Business Media, 2012.

[7] R. A. Gordon, *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, 4. American Mathematical Soc., 1994.

[8] R. G. Bartle, *A modern theory of integration*. American Mathematical Soc., 2001, vol. 32.

[9] F. E. Burk, *A garden of integrals*. American Mathematical Soc., 2007, vol. 31.

[10] P. Y. Lee, *Lanzhou lectures on Henstock integration*. World Scientific, 1989, vol. 2.

[11] R. G. Bartle, D. R. Sherbert, *Introduction to real analysis*. Wiley New York, 2000, vol. 2.

[12] J. DePree, C. Swartz, *Introduction to real analysis*. Wiley, 1988.

[13] S. Sanchez-Perales, "The initial value problem for the schrödinger equation involving the henstock–kurzweil integral," *Rev. Un. Mat. Argentina*, vol. 58, no. 2, 2017.

[14] N. Ergun. (). "Analiz ıı ders notları," [Online]. Available: `http://nurettinergun.blogspot.com/2016/02/ders-notlar.html`. (accessed: 21.02.2016).

[15] C. W. Swartz, D. S. Kurtz, *Theories of integration: the integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and Mcshane*. World Scientific Publishing Company, 2011, vol. 13.

[16] A. Alexiewicz, "Linear functionals on denjoy-integrable functions," in *Colloquium Mathematicum*, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, vol. 1, 1948, pp. 289–293.

[17] E. Talvila, "Continuity in the alexiewicz norm," *arXiv preprint math/0606536*, 2006.

[18] E. Talvila *et al.*, "Henstock-kurzweil fourier transforms," *Illinois Journal of Mathematics*, vol. 46, no. 4, pp. 1207–1226, 2002.

[19] E. Talvila, "Limits and henstock integrals of products," *Real Analysis Exchange*, vol. 25, no. 2, pp. 907–918, 1999.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

İletişim Bilgileri: kubraaksoy22@gmail.com

f2518006@std.yildiz.edu.tr

Konferans Bildirisi

1. K. Aksoy, Y. Zeren, " A Brief Introduction to Henstock-Kurzweil Integral," 3rd International E-Conference on Mathematical Advances and Application (ICOMAA-2020), Haziran 2020, Istanbul, Turkey, ss. 119.

2. K. Aksoy, Y.Zeren, " Kurzweil Henstock İntegrali İçeren Schrödinger Denkleminin Başlangıç Değer Problemi," Bilimsel Araştırma Projesi (BAP), Yıldız Teknik Üniversitesi, Ocak 2021, proje kodu: FYL-2020-3837.