Soru:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\sin^2 x}{3\cos^2 x}, & x<\pi/2 \\ a, & x=\pi/2 \\ \dfrac{b(1-\sin x)}{(\pi-2x)^2}, & x>\pi/2 \end{cases}$$

fonksiyonun $x=\pi/2$'de sürekli olabilmesi için a ve b değerleri ne olmalıdır.

Çözüm:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$ olmalıdır.

- $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to\pi/2^-} \frac{1-\sin^2 x}{3\cos^2 x}=\lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\cos^2 x}{3.\cos^2 x}=\boxed{1/3}$$

- $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{b(1-\sin x)}{(\pi-2x)^2}$$ ($x-\frac{\pi}{2}=h$ dönüşümü yapalım $x\to\frac{\pi}{2}^+ \Rightarrow h\to 0^+$)

$$=\lim_{h\to 0^+} \frac{b.(1-\sin(\frac{\pi}{2}+h))}{(\pi-2(\frac{\pi}{2}+h))^2}=\lim_{h\to 0^+} \frac{b(1-\cos h)}{4h^2}\cdot\frac{(1+\cos h)}{(1+\cos h)}$$

$$=\lim_{h\to 0^+} \frac{b}{4}\cdot\frac{\sin^2 h}{h^2}\cdot\frac{1}{1+\cos h}=\boxed{\frac{b}{8}}$$

Buradan $\frac{1}{3}=\frac{b}{8}=f(\frac{\pi}{2})=a$ olmalı, yani

$b=\frac{8}{3}$ ve $a=\frac{1}{3}$ olmalı.

Soru: $f(x)=1/x$ olmak üzere

a) f, $(0,1)$'de sürekli olduğunu gösteriniz.

b) f, $(0,1)$'de düzgün sürekli olmadığını gösteriniz.

Çözüm:

a) f nin keyfi $a\in(0,1)$ noktasında sürekli old. gösterelim.

$|x-a|<\delta$ iken $|f(x)-f(a)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|=\frac{|x-a|}{x.a}<\frac{\delta}{a}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{\leq K}$
$(x\in(0,1))$

Sınırı bulmaya çalışalım.

Eğer $\delta\leq\frac{a}{2}$ ise $|x-a|<\frac{a}{2}$ $\left(\frac{a}{2}<x<\frac{3a}{2}\right)$'den

$\frac{1}{x}<\frac{2}{a}$ ile sınırlandırmış oluruz.
$\left(K=\frac{2}{a}\right)$

Böylece;

$\varepsilon>0$ $\exists\delta=\min\left\{\frac{a}{2},\varepsilon.\frac{a^2}{2}\right\}>0$: $(x\in(0,1))$ ve $|x-a|<\delta\Rightarrow$

$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|=\frac{|x-a|}{x.a}<\frac{\delta}{a}\cdot\frac{1}{x}<\frac{\delta}{a}\cdot\frac{2}{a}\leq\varepsilon$, yani f keyfi

$a\in(0,1)$'de sürekli olduğundan f $(0,1)$ aralığında süreklidir.

b) Düzgün sürekli old. varsayalım.

1. Yol

$\varepsilon=1$ $\exists\delta>0: |x-y|<\delta\Rightarrow\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|<1$ dir.
$(x,y\in(0,1))$

özel olarak; $0<x<\min\{\delta,1\}$ ve $y=\frac{x}{2}$ alalım

$|x-y|=\frac{x}{2}<\frac{\delta}{2}<\delta$ old. $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|<1$ olmalı. Fakat

$1>\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=\left|\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\right|=\frac{1}{x}>1$ Çelişki!! O halde varsayım yanlış olup f $(0,1)$ de düzgün sürekli değildir.

2. Yol Düzgün sürekli old. varsayalım

$\varepsilon=1/2$ $\exists\delta>0: |x-y|<\delta\Rightarrow\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|<1/2$.

Arş. ilk $\exists n^\circ\in\mathbb{N}$ $\frac{1}{n^\circ}<\delta$ dir. Özel olarak $x=\frac{1}{2n^\circ}$, $y=\frac{1}{n^\circ}$ alalım.

$|x-y|=\frac{1}{2n^\circ}<\delta$ old $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|<\frac{1}{2}$ olmalı. Fakat

$\frac{1}{2}>\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|=n^\circ\geq1$ Çelişki!!

Soru: $f(x)=x.\sin x$ fonksiyonu $[0,\infty)$'de düzgün sürekli olmadığını gösteriniz.

Çözüm: Düzgün sürekli old. varsayalım.

$\varepsilon=\pi>0$ için $\exists\delta>0: |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\pi$.
$(x,y\in[0,\infty))$

Arş. ilk. $\exists n^\circ\in\mathbb{N}$ $\frac{1}{n^\circ}<\delta$ dir.

O halde

$x_n=2n\pi$, $y_n=2n\pi+\frac{1}{n}$, $n\geq n^\circ$ dizileri tanımlayalım.

$|x_n-y_n|=\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n^\circ}<\delta$ old. $|f(x_n)-f(y_n)|<\pi$ olmalı. ... (i)

Fakat

$$|f(x_n)-f(y_n)|=|(2n\pi+\tfrac{1}{n}).\sin\tfrac{1}{n}|=\frac{2n\pi+\frac{1}{n}}{n}\cdot\frac{\sin 1/n}{1/n}\xrightarrow{n\to\infty}2\pi$$

(i)'de her iki tarafın limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}|f(x_n)-f(y_n)|\leq\lim_{n\to\infty}\pi$$

$$2\pi\leq\pi \quad \text{Çelişki!!}$$

O halde f, $[0,\infty)$'de düzgün sürekli değildir.

Soru: $2^x+x=2$ denk. en az bir kökü vardır gösteriniz.

Çözüm:

$f(x)=2^x+x$ fonk. ele alalım.

$f(0)=1$ ve $f(1)=3$ tür.

$$\left.\begin{array}{l} f,\ [0,1]\text{'de sürekli} \\ \text{ve} \\ 2\in(1,3)=(f(0),f(1)) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Ara Değer Teo'den}} \exists c\in(0,1) \text{ öyleki}$$

$f(c)=2$, $2^c+c=2$ o.ş. $c\in(0,1)$ vardır.

Soru: $f: A \to \mathbb{R}$ düzgün sürekli olsun.

$(x_n) \subseteq A$ dizisi Cauchy $\Rightarrow$ $f(x_n)$ Cauchy dizisidir.

Çözüm:

f düzgün sürekli old

$\varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |x-y| < \delta \quad \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dur.
$(x, y \in A)$

Ayrıca x_n Cauchy dizisi old

$\delta > 0 \quad \exists \dot{N} \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq \dot{N} \quad |x_n - x_m| < \delta$ dir.

Böylece

$\varepsilon > 0 \quad \exists \dot{N} \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq \dot{N}$ için

$\left(|x_n - x_m| < \delta \text{ olduğundan} \atop (x = x_n, y = x_m) \right)$ $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ dur,
yani $f(x_n)$ Cauchy dizisidir.

Soru: $(1-x).\cos x = \sin x$ denkleminin $(0,1)$ aralığında en az bir kökü vardır gösteriniz.

Çözüm:

$f(x) = (1-x).\cos x - \sin x$ fonk. tanımlayalım.

$f(0) = \cos 0 - \sin 0 = 1 > 0$
$f(1) = -\sin 1 < 0$, $f(1) < 0 < f(0)$ dır.

f, $[0,1]$'de sürekli old. Ara Değer Teo. göre

$f(c) = 0$ olacak şekilde $c \in (0,1)$ vardır.

buradan $(1-c).\cos(c) = \sin(c)$, o.ş. $c \in (0,1)$ vardır.

Soru: $f:[a,b] \longrightarrow [a,b]$ sürekli fonk. olsun. O halde

$\exists x \in [a,b]$ öyleki $f(x)=x$ dir.

Çözüm:

$[a,b]$ aralığında $g(x)=f(x)-x$ sürekli fonksiyonunu tanımlayalım.

$(f(x) \in [a,b])$

$g(a)=f(a)-a \geq 0$ eğer $g(a)=0$ ise $f(a)=a$ olup ispat biter

$g(b)=f(b)-b \leq 0$ " $g(b)=0$ ise $f(b)=b$ " " ".

$g(a)>0$ ve $g(b)<0$ durumunu inceleyelim.

O halde $g(a)>0$ ve $g(b)<0$ olup $f(x)=x$

Ara Değer Teo'den $\exists x \in (a,b)$ öyleki $g(x)=0$ olur.

Ödev:

$f,g:[a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonk olsun.

$f(a)<g(a)$ ve $f(b)>g(b)$ ise $f(x)=g(x)$ olacak şekilde $x \in (a,b)$ vardır.

Soru: $f:(a,b) \to \mathbb{Q}$ sürekli ise f sabit fonk. old gösteriniz.

Çözüm: Varsayalım ki f sabit olmasın. O halde

$\exists x_1, x_2 \in (a,b)$ öyleki $f(x_1) \neq f(x_2)$ dir.

Biri diğerinden büyük olduğu için $f(x_1) < f(x_2)$ olsun

Her iki reel sayı arasında en az bir irrasyonel sayı old.

$\exists q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ öyleki $f(x_1) < q < f(x_2)$.

f, $[x_1, x_2]$ (veya $[x_2, x_1]$) aralığında sürekli

ve

$f(x_1) < q < f(x_2)$ old.

Ara Değer Teo göre

$\exists c \in (x_1, x_2)$ öyleki $f(c)=q \notin \mathbb{Q}$ Çelişki !!

Dolayısı ile f sabit fonksiyondur.