## Cauchy-Euler Denklemleri

Bu kısımda,

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = b(x) \ \left(a_0 \neq 0, a_0, a_1, \ldots, a_n \text{ sabit}\right)$$

verilen n. mertebeden, değişken katsayılı lineer homojen olmayan adi türevli diferansiyel denklemi incelenecektir. Bu diferansiyel denkleme Cauchy-Euler diferansiyel denklemi denir.

***Teorem:*** Cauchy-Euler denklemine $x = e^t$ dönüşümü uygulanarak, bu denklem sabit katsayılı diferansiyel denkleme indirgenir.

.

## Örnek 1

$a_0 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_2 y = b(x)$ diferansiyel denklemini (Cauchy- Euler denklemi) çözünüz.

$x = e^t$ veya $t = \ln x$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{x} = e^{-t}\frac{dy}{dt}$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \left(e^{-t}\frac{d^2 y}{dt^2} - e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)e^{-t} = e^{-2t}\frac{d^2 y}{dt^2} - e^{-2t}\frac{dy}{dt}$$

ifadeleri diferansiyel denklemde yerine yazılırsa,

$$a_0 e^{2t}\left(e^{-2t}\frac{d^2 y}{dt^2} - e^{-2t}\frac{dy}{dt}\right) + a_1 e^t\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) + a_2 y = b(e^t)$$

$$a_0\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + a_1\left(\frac{dy}{dt}\right) + a_2 y = b(e^t),$$

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + (a_1 - a_0)\frac{dy}{dt} + a_2 y = b(e^t) \quad \Longrightarrow \quad A_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + A_1 \frac{dy}{dt} + A_2 y = B(t)$$

Örneğin $A_0 = 1, A_1 = -2, A_3 = -3$ için,

$\frac{d^2 y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 3y = 0$, karakteristik denklem $m^2 - 2m - 3 = 0$ ve kökleri $m_1 = 3$, $m_2 = -1$ için,

$y_c(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$,

$y_c(x) = C_1 x^3 + C_2 \frac{1}{x}$ bulunur.

**Örnek 2**

Aşağıda verilen Cauchy-Euler diferansiyel denklemlerine $x = e^t$ dönüşümünü uygulayarak sabit katsayılı diferansiyel denkleme indirgeyiniz.

a) $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 3x\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} + 3y = 0$

b) $x^3 \dfrac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 10x\dfrac{dy}{dx} - 8y = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d^3y}{dt^3} - \dfrac{d^2y}{dt^2} - 10\dfrac{dy}{dt} - 8y = 0$

c) $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 4x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 4\ln x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = 4\ln\left(e^t\right) = 4t$

**Örnek 3**

$x^3 \dfrac{d^3y}{dx^3} - 4x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 8x\dfrac{dy}{dx} - 8y = 4\ln x$ diferansiyel denklemini (Cauchy- Euler denklemi) çözünüz.

$x = e^t$ veya $t = \ln x$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{1}{x} = e^{-t}\dfrac{dy}{dt}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \left(e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2} - e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)e^{-t} = e^{-2t}\frac{d^2y}{dt^2} - e^{-2t}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{-2t}\frac{d^2y}{dt^2} - e^{-2t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

ifadeleri diferansiyel denklemde yerine yazılırsa,

$$e^{3t}e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) - 4e^{2t}\left(e^{-2t}\frac{d^2y}{dt^2} - e^{-2t}\frac{dy}{dt}\right) + 8e^t\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) - 8y = 4t$$

$\dfrac{d^3y}{dt^3} - 7\dfrac{d^2y}{dt^2} + 14\dfrac{dy}{dt} - 8y = 4t$ bulunur. Buradan denklemin çözümü,

$\dfrac{d^3y}{dt^3} - 7\dfrac{d^2y}{dt^2} + 14\dfrac{dy}{dt} - 8y = 0$, $\quad y_c(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{4t}$

Özel çözüm için $b(x) = 4t$ belirsiz katsayılar kümesi, $S = \{t, 1\}$

$y_p(t) = K_1t + K_2$ seçilir. Türevler alınır ve homojen olmayan diferansiyel denklemde yerine yazılırsa, uygun işlemler ile $K_1 = \frac{-1}{2}, K_2 = \frac{-7}{8}$ bulunur.

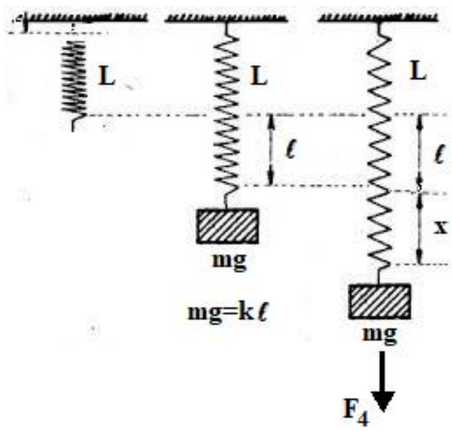
$y(t) = y_c(t) + y_p(t)$

$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{4t} - \frac{1}{2}t - \frac{7}{8}$, invers dönüşüm yerine yazılırsa yani, $t = \ln x$

$y(x) = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^4 - \frac{1}{2}\ln x - \frac{7}{8}$

## II. Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Diferansiyel Denklemlerin Uygulamaları

Yay-kütle sisteminin titreşim denklemleri.




m kütleli cisme etki eden kuvvetler;

i. Cismin ağırlık kuvveti $(F_1)$

ii. Yayda oluşan yay kuvveti $(F_2)$ (*lineer elastik yay*)

iii. Havadaki direnç kuvveti $(F_3)$

iv. Cisme harekete zorlayan, zorlayıcı kuvvet $(F_4)$dir.

$F_1 = mg$ (yerdeğiştirme doğrultusunda);

$F_2 = k(x+\ell), k>0$ (yerdeğiştirmeye zıt yönde),

$F_3 = a\frac{dx}{dt}$ , $a>0$ (yerdeğiştirmeye zıt yönde),

Bu durumda toplam kuvvet $F = F_1 - F_2 - F_3 + F_4$.

$F = mg - k\ell - kx - a\frac{dx}{dt} + F_4$ , $(mg = k\ell)$

Newton kanunu gereği $m\frac{d^2x}{dt^2} = F = -kx - a\frac{dx}{dt} + F_4$ veya

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = F_4$$

bulunur. Bu denklemde x düşey yerdeğiştirme, a havanın direnç katsayısı, k yay sabitidir. Bu diferansiyel denklem, kütlesi m, yay sabiti k olan bir kütle-yay sisteminin zorlanmış hareketini temsil eder. Bu denklem, denklemdeki bazı parametrelere göre irdelenirse, bu siteme ait farklı problemlere ait matematiksel modeller elde edilmiş olunur. Bunlar,

a) $F_4 = 0$ ve $a = 0$ için ***sönümsüz serbest titreşimi :*** $m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$ ,

b) $F_4 = 0$ ve $a \neq 0$ için ***sönümlü serbest titreşimi :*** $m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = 0$ ,

c) $F_4 \neq 0$ ve $a \neq 0$ için ***sönümlü zorlanmış titreşimi***: $m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = F_4$ ,

d) $F_4 \neq 0$ ve $a = 0$ için ***sönümsüz zorlanmış titreşimi :*** $m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_4$ , dir. Kütle-yay sitemine ait sönümlü zorlanmış titreşimini temsil eden diferansiyel denklemin yani, 2. mertebeden sabit katsayılı homojen olmayan diferansiyel denklemin çözümünü ele alalım.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+kx=F_4 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{a}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{1}{m}F_4$$

veya $\frac{d^2x}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+\lambda^2x=\frac{1}{m}F_4$ $(\lambda^2=\frac{k}{m}$ , $2b=\frac{a}{m})$ olur. Bu diferansiyel denklemin çözümlerini belirleyelim.

**1) Sönümsüz Serbest Titreşim**

Genel denklemde $a=0$ ve $F_4=0$ alınmıştır. Başlangıç koşulları çerçevesinde başlangıç değer probleminin matematiksel modeli,

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda^2x=0 \quad (\lambda^2=\frac{k}{m})$$

$$x(t_0)=x_0$$

$$\frac{dx(t_0)}{dt}=v_0$$

olur. Bu diferansiyel denklemin çözümü, $m^2+\lambda^2=0$ ve $m=\mp i\lambda$ için,

$$x(t)=C_1\cos\lambda t+C_2\sin\lambda t$$

bulunur. Başlangıç koşulları kullanılarak, $C_1=x_0$ ve $\lambda C_2=v_0$ için çözüm,

$x(t)=x_0\cos\lambda t+\frac{v_0}{\lambda}\sin\lambda t$ olur.

$\cos\phi=x_0\Big/\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\lambda}\right)^2}$ ve $\sin\phi=v_0\Big/\left(\lambda\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\lambda}\right)^2}\right)$ seçersek, çözüm

$x(t)=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\lambda}\right)^2}\cos\left(\lambda t+\phi\right)=C\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\phi\right)$ olarak düzenlenebilir.

Burada, $\cos\phi=\frac{x_0}{C}$ , $\sin\phi=-\frac{v_0}{\lambda C}$ için $C=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\lambda}\right)^2}$ genlik, $\lambda$ frekans ve $\phi$ başlangıç fazı dır. Titreşim hareketi sönümsüz olduğu için aynı ekstremal değerleri alarak, titreşim $t\to\infty$ için aynı şekilde sürekli olarak (periyodik olarak) devam eder. Buna göre, $x(t)$ fonksiyonu, $\lambda t+\phi=\mp\pi n$ için $t=\frac{1}{\lambda}\left(n\pi-\phi\right)$ noktalarında ekstramal değerlerini ve $\lambda t+\phi=\frac{\pi}{2}+k\pi$ için sıfır değerlerini alır. Bu fonksiyonun periyodu için $\cos t$ , T= $2\pi$ periyotlu ve $\cos \alpha t$ , T= $\frac{2\pi}{a}$ periyotlu oluğunu göz önüne alırsak, $\cos(\lambda t+\phi)$ için

periyot $T = 2\pi / \lambda = \sqrt{\frac{m}{k}}\, 2\pi$ olur. Titreşim hareketinin frekansı $f = \frac{1}{T}$ için, $f = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{\lambda}{2\pi}$

ve $\omega = 2\pi f$ dairesel frekans için

$$\omega = \lambda = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

bulunur. Bu değere ***doğal frekans*** adı verilir.

**2) Sönümlü Serbest Titreşim**

Genel denklemde $F_4 = 0$ alınmıştır. Bu durumda probleminin matematiksel modeli,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \lambda^2 x = 0$$

olur. Bu diferansiyel denklemin çözümü; $m^2 + 2bm + \lambda^2 = 0$ karakteristik denklemi ve bu denklemin kökleri

$$m_{1,2} = -b \mp \sqrt{b^2 - \lambda^2}$$

şeklinde bulunur. Burada karekökün içerisindeki değere göre üç farklı durum, dolayısıyla üç farklı homojen çözüm bulunur. Bunlar aşağıda incelenecektir.

i. ***Kritik altı sönüm*** $\left(b^2 - \lambda^2\right) < 0$ durumu.

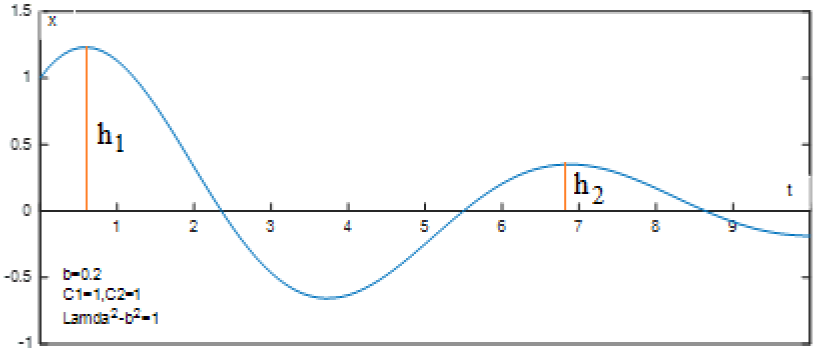
Kritik altı sönümlü sistemler denge konumu etrafında salınım yaparak ve bu salınımların genlikleri azalarak başlangıç konumlarına dönerler.

$b < \lambda$ (veya $\frac{a}{2m} < \frac{k}{m}$) için kökler kompleks sayı olur. Dolayısıyla,

$m_{1,2} = -b \mp i\sqrt{\lambda^2 - b^2}$ olur. Bu duruma ***kritik altı sönüm*** denir. Çözüm,

$$x(t) = e^{-bt}\left(C_1 \sin\left(t\sqrt{\lambda^2 - b^2}\right) + C_2 \cos\left(t\sqrt{\lambda^2 - b^2}\right)\right)$$ veya,

$$x(t) = Ce^{-bt}\cos\left[\left(t\sqrt{\lambda^2 - b^2}\right) + \phi\right],$$




Burada $Ce^{-bt}$ sönüm çarpanıdır. $x(t)$ fonksiyonu periyodik değildir. Ancak $T \approx \dfrac{2\pi}{\sqrt{\lambda^2 - b^2}}$ yaklaşık periyod olarak kabul edilir. $x\left(t + \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^2 - b^2}}\right)$ için $\frac{2\pi b}{\sqrt{\lambda^2 - b^2}}$ ***logaritmik azalış*** olur. Burada, salınımlı titreşim için ardışık gelen ve aynı taraftaki iki tepe yükseklikleri oranının logaritması (doğal logaritma) logaritmik azalış (Logarithmic Decrement) olarak tanımlanır yani, ***logaritmik azalış***$= \delta = \ln \frac{h_1}{h_2}$ dir. Sisteme ait sönüm oranı yaklaşık olarak $\delta/2\pi$ elde edilebilir. Salınımın periyodu için,

$\lambda^2 = \frac{k}{m}$, $2b = \frac{a}{m}$ için

$$x(t) = Ce^{-bt}\cos\left[\left(t\sqrt{\lambda^2 - b^2}\right) + \phi\right] = Ce^{-\frac{a}{2m}t}\cos\left[\left(t\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{a}{2m}\right)^2}\right) + \phi\right]$$ için,

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{a}{2m}\right)^2} < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ olur.

***ii. Kritik Sönüm*** $(\lambda = b)$

Bu durumda çözüm,

$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-bt}$ şeklinde olur ve çözüm salınım yapmaz. Burada, $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \dfrac{(C_1 + C_2 t)}{e^{bt}} = 0$ olur. Katsayı sabitlerinin değerlerine göre birbirinden farklı 4 durum gerçekleşebilir;

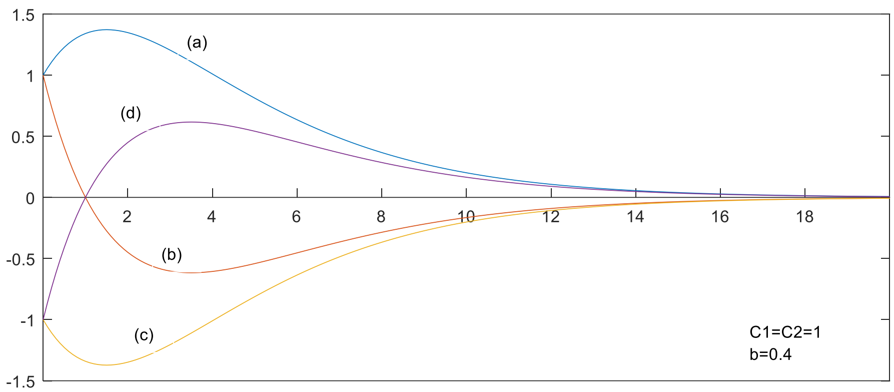
a) $C_1 > 0,\ C_2 > 0$

b) $C_1 > 0,\ C_2 < 0$

c) $C_1 < 0,\ C_2 < 0$

d) $C_1 < 0, C_2 > 0$

durumları olabilir. Bu durumlara ait grafikler aşağıda verilmiştir.

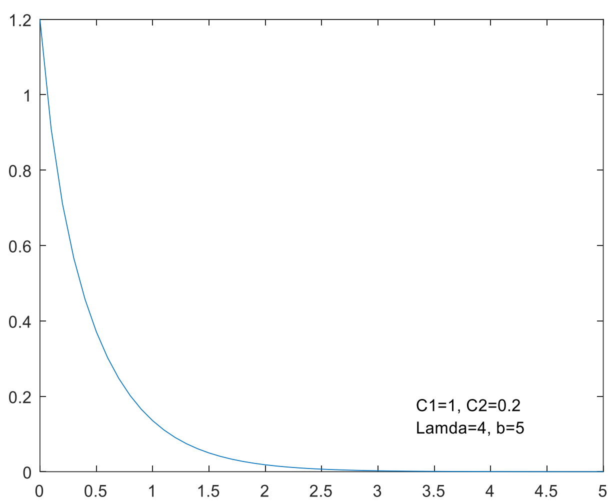



***iii.*** ***Kritik Üstü Sönüm*** $(b > \lambda)$

Kritik üstü sönümlü sistemler denge konumu etrafında salınım göstermeksizin başlangıç konumlarına dönerler. Bu durumda çözüm,

$$x(t) = C_1 e^{\left(-b+\sqrt{b^2-\lambda^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-b-\sqrt{b^2-\lambda^2}\right)t}$$

olur. Bu durumda çözümün grafiği aşağıda verilmiştir.




**3) Sönümlü Zorlanmış Titreşim**

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

Denkleminde $F(t) = F_1 \cos \omega t$ şeklinde seçilmiş olsun. Burada $F_1$ zorlama genliği, $\omega$ bu dış kuvvetin frekansı olur. $\frac{a}{m} = 2b$ , $\frac{k}{m} = \lambda^2$ , $\frac{F_1}{m} = E_1$ işaretlemeleri çin,

$\frac{d^2x}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+\lambda^2 x=E_1\cos\omega t$ olur. Bu diferansiyel denklemde b=0 durumunda $\omega_0\left(=\lambda=\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$doğal frekans için $\omega=\omega_0$ frekansına ***rezonans frekansı*** denir.

***a) Kritik Altı Sönüm*** $(b<\lambda)$

Durumu için homojen çözüm $x_c=Ce^{-bt}\cos\left(\sqrt{\lambda^2-b^2}\,t+\phi\right)$bulunmuştu. Şimdi özel çözümü belirleyelim. Bunun için belirsiz katsayılar yöntemini kullanarak;

$b(t)=E_1\cos\omega t$ için $S=\{\cos\omega t,\sin\omega t\}$ için özel çözüm

$x_p=A\cos\omega t+B\sin\omega t$ olur. Buradan,

$$\frac{dx_p}{dt}=-\omega A\sin\omega t+\omega B\cos\omega t$$

$$\frac{d^2x_p}{dt^2}=-\omega^2 A\cos\omega t-\omega^2 B\sin\omega t$$

ifadeleri homojen olmayan diferansiyel denklemde yerine yazılarak A ve B katsayıları bulunur. Yani,

$\frac{d^2x}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+\lambda^2 x=E_1\cos\omega t$ için,

$$\left\{-\omega^2 A\cos\omega t-\omega^2 B\sin\omega t\right\}+2b\left\{-\omega A\sin\omega t+\omega B\cos\omega t\right\}+\lambda^2\left\{A\cos\omega t+B\sin\omega t\right\}=E_1\cos\omega t$$

$$-2b\omega A+\left(\lambda^2-\omega^2\right)B=0$$

$\left(\lambda^2-\omega^2\right)A+2b\omega B=E_1$ den,

$A=\dfrac{E_1\left(\lambda^2-\omega^2\right)}{\left(\lambda^2-\omega^2\right)^2+4b^2\omega^2}$ ve $B=\dfrac{2b\omega E_1}{\left(\lambda^2-\omega^2\right)^2+4b^2\omega^2}$ için,

$$x_p=\frac{E_1}{\left(\lambda^2-\omega^2\right)^2+4b^2\omega^2}\left[\left(\lambda^2-\omega^2\right)\cos\omega t+2b\omega\sin\omega t\right]$$

$$\cos\theta = \frac{\lambda^2-\omega^2}{\sqrt{\left(\lambda^2-\omega^2\right)^2+4b^2\omega^2}} \ , \ \sin\theta = \frac{2b\omega}{\sqrt{\left(\lambda^2-\omega^2\right)^2+4b^2\omega^2}}$$ için,

$$x_p(t) = \frac{E_1}{\sqrt{\left(\lambda^2-\omega^2\right)^2+4b^2\omega^2}}\cos\left(\omega t-\theta\right)$$ bulunur. Genel çözüm,

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

$$x(t) = Ce^{-bt}\cos\left(\sqrt{\lambda^2-b^2}\,t+\phi\right) + \underbrace{\frac{E_1}{\sqrt{\left(\lambda^2-\omega^2\right)^2+4b^2\omega^2}}}_{\substack{f(\omega)\,\text{zorlamadan} \\ \text{olan kısım}}}\cos\left(\omega t-\theta\right)$$

$$f(\omega) = \frac{E_1}{\sqrt{\left(\lambda^2-\omega^2\right)^2+4b^2\omega^2}}$$

Bu denklemde,

eğer $\omega = 0$ ⇨ $f_1(\omega)\big|_{\omega=0} = \frac{E_1}{\lambda^2}$ veya

eğer $\omega \to \infty$ ⇨ $f_1(\omega) \to 0$ olur.

$f(\omega)$ fonksiyonunun ekstremal değerleri için,

$$f'(\omega) = 4\omega\left[2b^2-\left(\lambda^2-\omega^2\right)\right] = 0$$ için kökleri;

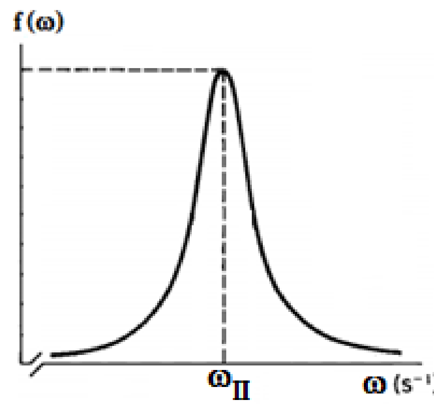
i. $\omega_I = 0$

ii. $\omega_{II} = \sqrt{\lambda^2-2b^2}$

olur. Eğer $\lambda^2 < 2b^2$ ise $\omega_{II} = \sqrt{\lambda^2-2b^2}$ kompleks sayı olur ve bu halde $f(\omega)$, $0<\omega<\infty$ için ekstremal değer almaz ayrıca bu ifadenin $\lambda^2 > 2b^2$ veya $k^2 > \frac{a^2}{2m_0}$ için fiziksel anlamı vardır.

$\omega_{II}$ değeri $f(\omega)$ da yerine yazılırsa,

$f\ (\omega)\big|_{\omega=\omega_{II}} = f_{\max}(\omega) = \dfrac{E_1}{2b\sqrt{\lambda^2 - b^2}}$ ***rezonans genliğidir***.

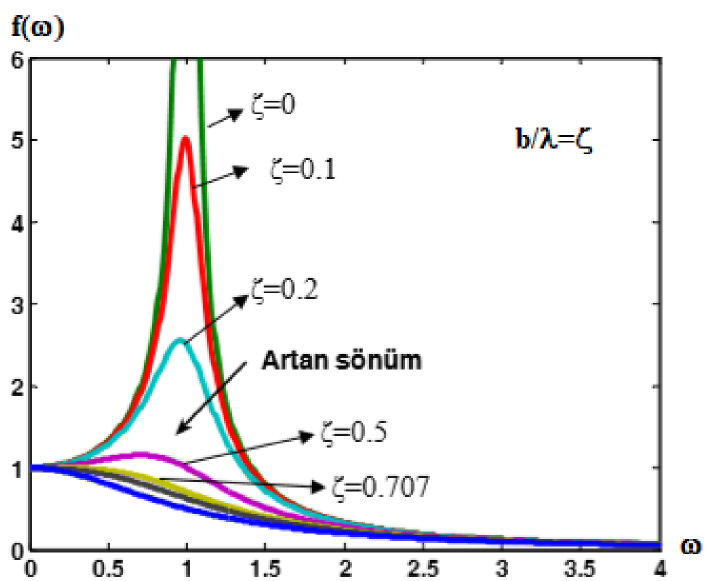



$\lambda^2 = \frac{k}{m} = \omega_0^2$ doğal frekans için

$f(\omega) = \dfrac{E_1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4b^2\omega^2}}$ den

$f(\omega)\big|_{\omega=\omega_I=0} = f_{\min}(\omega) = \dfrac{E_1}{\omega_0^2}$ bulunur.

$f(\omega)$ fonksiyonunun $\omega$ dan bağımlı grafiğine ***rezonans eğrisi*** denir. Yukarıda verilen grafik, $f(\omega)$ fonksiyonunun $\omega_{II}$ civarındaki grafiğini göstermektedir. Titreşim sönümlü olduğundan titreşimin genliği sonsuza gitmez ve bir maksimum değer alır. Sönüme bağlı olarak rezonans eğrileri aşağıda verilmiştir.




Eğer titreşimde sönüm yok ise, yani $b = \frac{a}{m} = 0\ (a = 0)$ için,

$f\ (\omega) = \dfrac{E_1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}$

olur.

***b) Kritik Üstü Sönüm*** $b^2-\lambda^2>0$

$r_1=-b+\sqrt{b^2-\lambda^2}$ ve $r_2=-b-\sqrt{b^2-\lambda^2}$ için,

$x(t)=C_1e^{r_1 t}+C_2e^{r_2 t}$

**Örnek:** Yaya bağlı ve birim kütlesi olan parçacığa $F=30\cos\omega t$ biçiminde verilen bir kuvvet etki ediyor. Parçacığın hareket denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+24x=30\cos\omega t.$$

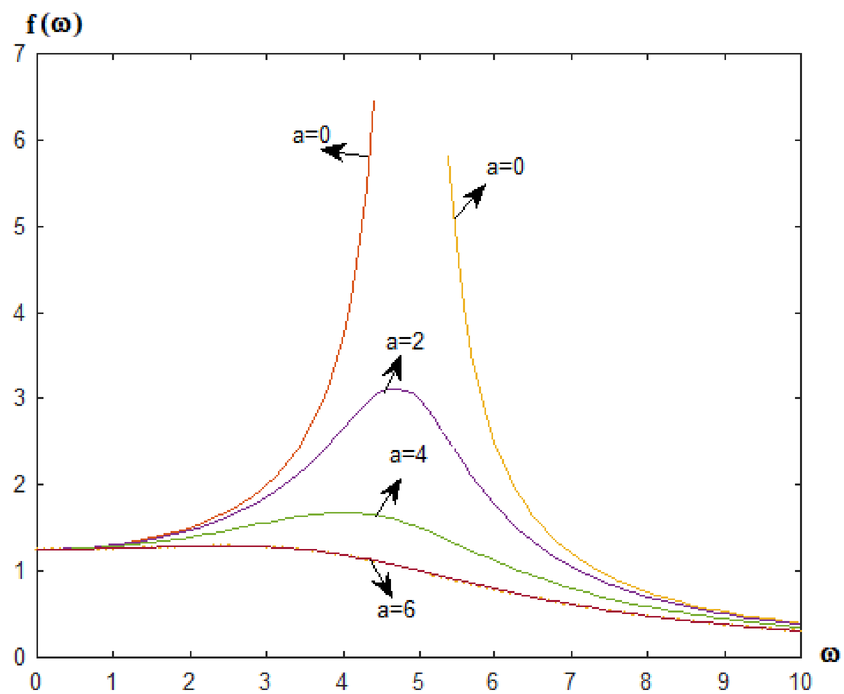
Burada $a\geq 0$ sönüm katsayısıdır.

a) $a=0;2;4$ ve 6 alarak parçacığın rezonans eğrilerini çiziniz

b) $a=2$ olduğunda parçacığın rezonans frekansını ve rezonans genliğini bulun.

Cevaplar.

a) $f(\omega)=\dfrac{E_1}{\sqrt{\left(\lambda^2-\omega^2\right)^2+4b^2\omega^2}}$ ; $b=\dfrac{a}{2m}=\dfrac{a}{2}$ , $\lambda^2=\dfrac{k}{m}=24$ , $E_1=\dfrac{F_1}{m}=30$ rezonans eğrileri aşağıda verilmiştir.



b) $a=2$ olduğunda parçacığın rezonans frekansını ve rezonans genliği aşağıda hesaplanmıştır.

sistemin rezonans frekansı

$\omega_{II} = \sqrt{\lambda^2 - 2b^2} = \sqrt{24-2} = \sqrt{22}$ olur.

Sistemin doğal frekansı $\omega_0 = \lambda = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{24}$ ve $\omega = \omega_{II}$ için sistemin rezonans genliği ise

$$f(\omega) = \frac{E_1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4b^2\omega^2}}$$ veya,

$$f_{\max}(\omega) = \frac{E_1}{2b\sqrt{\lambda^2 - b^2}} = \frac{30}{2\sqrt{24-1}} = 3.1277$$ bulunur.