Ek-1

Örnek: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$ integralinin yakınsaklığını araştırınız.

Çözüm: $\displaystyle\underbrace{\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}}_{I} = \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}}_{\substack{\text{2. Tip improper}\\ \text{integrali}\\ I_1}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}}_{\substack{\text{1. Tip improper}\\ \text{Integrali}\\ I_2}}$

$$\boxed{I = I_1 + I_2}$$

$I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$ integrali için:

Her $x \in (0,1]$ için $x^2 \leq \sqrt{x} < x^2+\sqrt{x}$ olur.

$$\frac{1}{x^2+\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^2} \text{ olur}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_a^1 = \lim_{a\to 0^+} 2(1-\sqrt{a})$$

$= 2$ yakınsaktır.

$I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}dx < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ olduğundan I_1 integralide yakınsaktır.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{a\to 0^+} -\frac{1}{x}\Big|_a^1 = \lim_{a\to 0^+} -\left(1-\frac{1}{a}\right) = \infty \text{ ıraksaktır}$$

EK-2

$I_2 = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$ integrali için;

Her $x \in [1,\infty)$ için $\frac{1}{x^2+\sqrt{x}} < \frac{1}{x^2}$ dir.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{b}+1$$

$= 1$ yakınsaktır.

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ olur. O halde

$I_2 = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$ integralide yakınsak olacaktır.

<u>Sonuç:</u> $I = I_1 + I_2$ olduğundan (I_1 yakınsak, I_2 yakınsak)

$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$ integralide yakınsaktır.

CamScanner ile tarandı

EK-3

Örnek: $\int_1^{\infty} \frac{1+\cos\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}+x^4}\,dx$ integralinin yakınsak veya ıraksak olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm: Her $x \in [1,\infty)$ için $-1 \leq \cos\sqrt{x} \leq 1$ dir.

$$-1+1 \leq 1+\cos\sqrt{x} \leq 1+1$$

$$0 \leq 1+\cos\sqrt{x} \leq 2$$

$$0 \leq \frac{1+\cos\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}+x^4} \leq \frac{2}{1+\sqrt{x}+x^4} < \frac{2}{x^4}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{2}{x^4}\,dx = 2\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4}\,dx$$ (p integrali $p=4>1$ yakınsaktır)

$$= 2.\lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^4}\,dx = 2.\lim_{b\to\infty} -\frac{1}{x^3}\Big|_1^b = -2.\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b^3} - 1$$

$= 2$ olur. Yakınsak olur.

$$\int_1^{\infty} \frac{1+\cos\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}+x^4}\,dx < \int_1^{\infty} \frac{2}{x^4}\,dx$$ olduğundan

$$\int_1^{\infty} \frac{1+\cos\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}+x^4}\,dx$$ integrali yakınsak olacaktır.

EK-4

Örnek: $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{(\ln x).\sin^2 x}{x^3+2}\,dx$ integralinin yakınsak veya ıraksak olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm:

Her $x \in [1,\infty)$ için $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ dir.

Her $x \in [1,\infty)$ için $0 \leq \dfrac{(\ln x).\sin^2 x}{x^3+2} \leq \dfrac{\ln x}{x^3+2} < \dfrac{\ln x}{x^3}$ dür.

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{\ln x}{x^3}\,dx \Rightarrow$$

$\ln x = u \quad \frac{1}{x^3}dx = dv$

$\frac{1}{x}dx = du \quad -\frac{1}{2x^2} = v$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{\ln x}{2x^2}\Big|_1^b + \int_1^b \frac{1}{2x^3}\,dx\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{\ln b}{2b^2} + 0 - \frac{1}{4x^2}\Big|_1^b\right] = \lim_{b\to\infty}\left[\underbrace{-\frac{\ln b}{2b^2}}_{?\,(0)} - \underbrace{\frac{1}{4b^2}}_{(0)} + \frac{1}{4}\right] = \left(\frac{1}{4}\right) \text{ olur.}$$

$$\lim_{b\to\infty} \frac{\ln b}{2b^2} = \lim_{b\to\infty} \frac{\frac{1}{b}}{4b} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{4b^2} = 0 \quad (0)$$

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3}\,dx = \frac{1}{4}$ yakınsaktır. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{(\ln x).\sin^2 x}{x^3+2}\,dx < \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3}\,dx$

olduğundan verilen integralde yakınsak olacaktır.