T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SPLİT KUATERNİYON DİZİLER VE SERİLER

Sena Nur AKTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Prof. Dr. Salim YÜCE

Haziran, 2023

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SPLİT KUATERNİYON DİZİLER VE SERİLER

Sena Nur AKTAŞ tarafından hazırlanan tez çalışması 19.06.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Salim YÜCE
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Salim YÜCE, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Nurten GÜRSES, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN, Üye
İstanbul Üniversitesi _____

Danışmanım Prof. Dr. Salim YÜCE sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Split Kuaterniyon Diziler ve Seriler başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Sena Nur AKTAŞ

İmza

Bu çalışma, “Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)’ın 2210-E Doğrudan Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı” ile desteklenmiştir.

Eşime ve kızım Gülnihal'e
ithaf ediyorum.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma boyunca ve matematik eğitimim süresince yardımlarını esirgemeyen, sabır ve anlayışla zamanını ve bilgisini paylaşan, üzerimde büyük emek sahibi olan değerli hocam Prof. Dr. Salim YÜCE'ye; fedakarlıkları ve destekleri için aileme ve eşime teşekkürü bir borç bilirim.

Sena Nur AKTAŞ

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ vii

TABLO LİSTESİ viii

ÖZET ix

ABSTRACT x

1 GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1

1.2 Tezin Amacı 3

1.3 Bulgular 4

2 SPLIT KUATERNİYONLAR 5

2.1 Split Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler 14

3 SPLIT KUATERNİYON DİZİLER 31

3.1 Split Kuaterniyon Dizilerde Yakınsaklık 36

3.2 Split Kuaterniyon Dizilerde P-Yakınsaklık 37

3.3 Cauchy ve P-Cauchy Split Kuaterniyon Diziler 49

3.4 Split Kuaterniyon Dizilerde Yakınsaklık ve P-Yakınsaklık Testleri . 54

4 SPLIT KUATERNİYON SERİLER 56

4.1 Geometrik Split Kuaterniyon Seriler 56

4.2 Split Kuaterniyon Serilerde Yakınsaklık ve P-Yakınsaklık 57

4.3 Split Kuaterniyon Serilerinde Yakınsaklık Testleri 60

4.4 Split Kuaterniyon Kuvvet Serileri 65

5 SONUÇ 67

KAYNAKÇA 68

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR 69

SİMGE LİSTESİ

H	Hiperbolik Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu Reel Vektör Uzayı
$\mathbb{H}_S$	Pure Split Kuaterniyonlar Kümesi
$(.)$	Reel Dizi
$\mathbb{H}$	Reel Kuaterniyonlar Kümesi
$\{.\}$	Split Kuaterniyon Dizi
$\mathbb{H}_S$	Split Kuaterniyonlar Kümesi
$\mathbb{R}^n_\nu$	ν indeksli Pseudo Öklid Uzayı
$\langle , \rangle_{\mathbb{R}^n_\nu}$	ν indeksli Pseudo İç Çarpım
$\wedge_{\mathbb{R}^n_\nu}$	ν indeksli Vektörel Çarpım

TABLO LİSTESİ

Tablo 2.1 Baz elemanları çarpım tablosu 11
Tablo 2.2 Split kuaterniyonların sınıflandırılması 18
Tablo 2.3 Split kuaterniyonlarda iç çarpım inceleme 19
Tablo 2.4 Pure split kuaterniyonlarda iç çarpım inceleme 19
Tablo 3.1 P-limiti tek olmayan split kuaterniyon diziler 39
Tablo 3.2 P-limiti tek olan split kuaterniyon diziler 40

ÖZET

Split Kuaterniyon Diziler ve Seriler

Sena Nur AKTAŞ

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Salim YÜCE

Bu çalışmada, (+,+,-,-) pseudo-metriğini kullanarak split kuaterniyon dizileri, yakınsaklık ve ıraksaklık kavramları üzerinde çalışılmıştır. Yakınsaklık için; split kuaterniyon dizilerin bileşenleri ile limit ve pseudo-norma göre limit olmak üzere iki tanım verilmiştir. Ayrıca, split kuaterniyon dizilerin özellikleri üzerine çalışılmış, split kuaterniyon dizilerin yakınsaklığı test edilmiştir. Ek olarak, split kuaterniyon seri tanımı verilmiş ve split kuaterniyon serilerin yakınsaklığı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Diziler, Reel kuaterniyon diziler, Split kuaterniyonlar, Split kuaterniyon diziler, Split kuaterniyon seriler.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

Split Quaternion Sequences and Series

Sena Nur AKTAŞ

Department of Mathematics
Master of Science Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Salim YÜCE

In this study; split quaternion sequences, their convergence and divergence concepts were studied using the (+,+,-,-) pseudo-metric. For convergence; two definitions are given as limit with the components of split quaternion sequences and limit according to pseudo-norm. Also, the properties of split quaternion sequences were discussed and the convergence of split quaternion sequences was tested. In addition, the definition of the split quaternion series is given and the convergence of the split quaternion series is examined.

Keywords: Sequences, Real quaternion sequences, Split quaternions, Split quaternion sequences, Split quaternion series.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Öklid'in paralellik aksiyomunun ispatını arayan birçok matematikçiden biri olan Nikolay Lobaçevski, paralellik aksiyomunun geçerli olmadığı hiperboloid üzerinde bir geometri kurarak Öklid dışı geometrinin temellerini atmıştır. Henri Poincaré ise bu geometriyi sanal birim kullanarak oluşturmuştur. Böylece, Poincaré ve Minkowski'nin çalışmalarında özel görelilik kuramıyla bağlantılı olarak pseudo-Öklid uzayı ortaya çıkmıştır, [1]. Literatürdeki tanımı şu şekildedir: $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde tanımlı

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n_\nu} = \sum_{i=1}^{n-\nu} x_i y_i - \sum_{i=n-\nu+1}^{n} x_i y_i$$

metrik tensör ile beraber $\mathbb{R}^n$ uzayına ν indeksli *pseudo-Öklid veya semi-Öklid uzayı* denir ve $\mathbb{R}^n_\nu$ ile gösterilir, [2]. Ayrıca, $\mathbb{R}^n$ uzayının standart bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ve $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots z_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\mathbb{R}^n_\nu$ uzayındaki vektörel çarpım ise

$$\underbrace{x \wedge_{\mathbb{R}^n_\nu} y \wedge_{\mathbb{R}^n_\nu} \cdots \wedge_{\mathbb{R}^n_\nu} z}_{n-1 \text{ adet vektör}} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_{n-\nu} & -e_{n-\nu+1} & \dots & -e_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-\nu} & x_{n-\nu+1} & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{n-\nu} & y_{n-\nu+1} & \dots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1 & z_2 & \dots & z_{n-\nu} & z_{n-\nu+1} & \dots & z_n \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanır, [3].

Reel diziler, $f(n) = a_n$ gibi pozitif tam sayılar kümesinden reel sayılar kümesine giden bir fonksiyon olarak tanımlanır ve (a_n) olarak gösterilir. Eğer $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_n = b_n$ ise $(a_n) = (b_n)$ şeklinde gösterilen iki diziye *eşit diziler* denir. Eğer $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_n \neq 0$ ise (a_n) dizisine *sıfırdan farklı dizi* denir. Ayrıca, $n, m \in \mathbb{Z}^+$

olmak üzere (n_m) sürekli artan tam sayılar dizisi, (a_{n_m}) reel dizisinin bir alt dizisi olarak tanımlanır. *Geometrik diziler*, a reel sayısı sabit ve r reel sayısı ortak çarpan olmak üzere $(a_n) = (ar^n)$ ile tanımlanır. $|a_n| < M$ olacak şekilde $\exists M \in \mathbb{R}$ ise (a_n) dizisine *sınırlı dizi* denir. $((-1)^n a_n)$ dizisine *alterne dizi*, $(1/a_n)$ dizisine *harmonik dizi*, $((-1)^n/a_n)$ dizisine *alterne harmonik dizi* denir, [4].

Limit kelimesi ilk olarak Öklid ve Arşimet tarafından kullanılmıştır. M.Ö. 350 yılında Knidoslu Eudoxus, tüketme yöntemini geliştirerek limit ve yakınsama kavramını ilk kullanan isim olmuştur. Bir dairenin alanını, içine kenar sayısı artan bir dizi düzgün çokgen yazarak bulmuştur. Aynı yöntemi kullanarak M.Ö. 225 yılında Arşimet, sonlu toplamlı bir sonsuz serinin bilinen ilk örneğini vermiştir, [5]. Daha sonra Newton, Sonsuz Serilerle Analiz üzerine yaptığı çalışmalarda dizileri ele almıştır. Bolzano, Gauss ve Leibniz de bu alanda birçok çalışma yapmıştır. 1861 yılında Weierstrass, aşağıda verilen limitin epsilon-delta tanımını ilk olarak bugün genellikle yazıldığı biçimde tanıtmıştır.

Bir dizinin yakınsak olduğu, $\forall \epsilon > 0$ için $n \geq N$ iken $|a_n - a| < \epsilon$ olacak şekilde $N \in \mathbb{Z}^+$ varsa söylenir ve $a \in \mathbb{R}$ limit noktasına yakınsar denir. Reel dizilerin limitleri varsa, tektir. Ayrıca dizilerin; limitlerin toplamı, toplamların limitine; limitlerin çarpımı, çarpımların limitine; limitlerin bölümü, bölümlerin limitine eşittir, [4].

Bir reel dizinin *Cauchy dizisi* olduğu $n, m \in \mathbb{Z}^+$ ve $\forall \epsilon > 0$ için $\forall m, n \geq N$ iken $|a_n - a_m| < \epsilon$ olacak şekilde $N \in \mathbb{Z}^+$ varsa söylenir. Bir reel dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart Cauchy dizisi olmasıdır. Yine bir reel dizi sınırlı ise yakınsaktır.

Reel dizilerin terimlerinin sonsuz toplamına *seri*, sonlu toplamına serinin n. *kısmi toplamı*, buradan elde edilen yeni diziye *kısmi toplamlar dizisi* denir. Bir *geometrik seri*nin n. kısmi toplamı $S_n = a(1 - r^n)/1 - r$ şeklindedir.

Bir serinin yakınsak olması, kısmi toplamlar dizisinin yakınsak olmasıyla ilişkilendirilir. Serilerin yakınsaklık testlerine bakılacak olunursa $a_n \to 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ teleskopik reel serisinin yakınsaması için gerek ve yeter şart (a_n) reel dizisinin yakınsak olmasıdır. $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ geometrik serisi; $|r| < 1$ ise $a/1 - r$ sayısına yakınsar, $|r| > 1$ ise ıraksar. Yine bir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin

yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\forall \epsilon > 0$ için $m, n \in \mathbb{Z}^+$ iken $\left| \sum_{t=m}^{n} a_t \right| < \epsilon$ olmasıdır. Bir diğer test ise kök testidir: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ ise seri yakınsaktır. Buna benzer şekilde oran testinde de $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ise seri yakınsaktır.

1843 yılında William R. Hamilton reel kuaterniyonları keşfetti: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ijk = -1$ olmak üzere

$$\mathbb{H} = \{p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k \,:\, p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}\}$$

ile tanımladı. Burada $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$ şeklindedir. Hemen ardından 1849 yılında James Cockle *coquaternion* adını verdiği split kuaterniyonları tanımladı. Split kuaterniyonlar kümesi; $i^2 = -1$, $j^2 = k^2 = 1$, $ijk = 1$ olmak üzere

$$\mathbb{H}_S = \{p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k \,:\, p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $ij = -ji = k$, $jk = -kj = -i$, $ki = -ik = j$ şeklindedir.

2012 yılında Georgiev, Morais ve Spröss; reel kuaterniyon dizileri ve reel kuaterniyon serileri tanımlamıştır. Yaptıkları çalışmada bir reel kuaterniyon dizi, $\{p_n\} := (a_n) + (b_n)i + (c_n)j + (d_n)k$ şeklinde, reel dizileri bileşen kabul etmektedir. Bu dizilerin ve serilerin yakınsaklığını epsilon-delta tanımı ile vermiştir, ıraksaklığını tanımlamıştır. Reel kuaterniyon dizilerin; limitinin eşleniği, eşleniğinin limitine; limitlerinin toplamı, toplamlarının limitine; limitlerinin çarpımı, çarpımlarının limitine; limitlerinin bölümü, bölümlerinin limitine; limitlerinin normu, normlarının limitine eşit olduğu gösterilmiştir, [6]. Daha sonra 2014 yılında yaptıkları çalışmada *Cauchy kuaterniyon dizi* tanımını, yakınsaklık testlerini vermiştir, [7].

1.2 Tezin Amacı

Son yıllarda büyük ilgi gören kuaterniyonlar uzayı, geometri ve analizi çalışılan birçok uzaydan sadece biridir. Bu tezde geleneksel olarak dizi ve limit kavramını split kuaterniyonlara uyarlamaya çalışarak, literatüre katmak amaçlanmıştır.

1.3 Bulgular

Bu tezde split kuaterniyon diziler ve seriler tanımlanmış olup yakınsaklık kavramı bu uzaya uyarlanmıştır. Yakınsaklık özellikleri ve testleri incelenmiştir. Cauchy split kuaterniyon tanımı verilerek yakınsaklık şartları ele alınmıştır. Split kuaterniyon seriler tanımlanarak, yakınsaklık koşulları incelenmiştir. Split kuaterniyonlar için kuvvet fonksiyonu ve yakınsaklık yarıçapı tanımlanmıştır.

2
SPLIT KUATERNİYONLAR

Bu bölümde, çalışma boyunca kullanacağımız temel bilgilere yer verilecektir. Bu bilgiler, split kuaterniyonlar cebiri hakkındaki birkaç tanım ve teoremden oluşmaktadır. Bu bilgiler, [8–13] kaynakları kullanılarak oluşturulmuştur.

Tanım 2.1. $i = (0,1,0,0),\ j = (0,0,1,0),\ k = (0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4$ olmak üzere

$$\mathbb{H}_S = \{p = (p_0, p_1, p_2, p_3) \ :\ p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3 \in \mathbb{R}\}$$

kümesini tanımlayalım.

Ayrıca $\mathbf{p} = (0, p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere $\mathbb{H}_S$ kümesinin her elemanı $p = p_0 + \mathbf{p}$ olarak yeniden ifade edilebilir.

Tanım 2.2 (Toplama işlemi)**.** $\mathbb{H}_S$ kümesi üzerinde *toplama işlemi*

$$\begin{aligned} p + q =& (p_0 + q_0, p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3) \\ =& (p_0 + q_0) + (\mathbf{p} + \mathbf{q}) \end{aligned}$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.1. *$\mathbb{H}_S$ kümesi üzerinde toplama işlemi için aşağıdaki özellikler geçerlidir:*

1. $\forall p, q \in \mathbb{H}_S$ *için* $p + q \in \mathbb{H}_S$ *sağlanır.*
2. $\forall p, q, r \in \mathbb{H}_S$ *için* $(p + q) + r = p + (q + r)$ *sağlanır.*
3. $\forall p \in \mathbb{H}_S$ *için* $p + 0_{\mathbb{H}_S} = 0_{\mathbb{H}_S} + p = p$ *olacak şekilde* $0_{\mathbb{H}_S} = (0,0,0,0) \in \mathbb{H}_S$ *vardır.*
4. $\forall p \in \mathbb{H}_S$ *için* $p + (-p) = (-p) + p = 0_{\mathbb{H}_S}$ *olacak şekilde* $-p = (-p_0, -p_1, -p_2, -p_3) \in \mathbb{H}_S$ *vardır.*

Sonuç 2.1. $\mathbb{H}_S$ *kümesi, üzerindeki toplama işlemi ile birlikte bir abel gruptur.*

Tanım 2.3 (Eşitlik)**.** $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$, $q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere $p = q$ olması için gerek ve yeter şart $p_0 = q_0$, $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$, $p_3 = q_3$ olmasıdır.

Tanım 2.4 (Çarpma işlemi)**.** $\mathbb{H}_S$ kümesi üzerinde *çarpma işlemi*

$$\begin{aligned} pq =& (p_0q_0 - p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3, \\ & p_0q_1 + p_1q_0 - p_2q_3 + p_3q_2, \\ & p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1, \\ & p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0) \\ =& p_0q_0 - \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{R}^3_2} + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} - \mathbf{p} \wedge_{\mathbb{R}^3_2} \mathbf{q} \end{aligned}$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.2. $\mathbb{H}_S$ *kümesi üzerinde çarpma işlemi için aşağıdaki özellikler geçerlidir:*

1. $\forall p, q \in \mathbb{H}_S$ *için* $pq \in \mathbb{H}_S$ *sağlanır.*
2. $p, q \in \mathbb{H}_S$ *olmak üzere genellikle* $pq \neq qp$ *şeklindedir.*
3. $\forall p \in \mathbb{H}_S$ *için* $p1_{\mathbb{H}_S} = 1_{\mathbb{H}_S}p = p$ *olacak şekilde* $1_{\mathbb{H}_S} = (1, 0, 0, 0) \in \mathbb{H}_S$ *vardır.*
4. $\forall p, q, r \in \mathbb{H}_S$ *için* $p(q + r) = pq + pr$ *ve* $(p + q)r = pr + qr$ *sağlanır.*
5. $\forall p, q, r \in \mathbb{H}_S$ *için* $(pq)r = p(qr)$ *sağlanır.*

İspat.

1. $\forall p, q \in \mathbb{H}_S$ için

$$\begin{aligned} pq = (& p_0q_0 - p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3, \\ & p_0q_1 + p_1q_0 - p_2q_3 + p_3q_2, \\ & p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1, \\ & p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0) \in \mathbb{H}_S \end{aligned}$$

olduğu kolaylıkla görülür.

2. $p, q \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere

$$\begin{aligned} pq = (&p_0q_0 - p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3,\\ &p_0q_1 + p_1q_0 - p_2q_3 + p_3q_2,\\ &p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1,\\ &p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0) \end{aligned} \quad \text{ve} \quad \begin{aligned} qp = (&q_0p_0 - q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3,\\ &q_0p_1 + q_1p_0 - q_2p_3 + q_3p_2,\\ &q_0p_2 - q_1p_3 + q_2p_0 + q_3p_1,\\ &q_0p_3 + q_1p_2 - q_2p_1 + q_3p_0) \end{aligned}$$

olduğundan genellikle $pq \neq qp$ şeklindedir.

4. $\forall p, q \in \mathbb{H}_S$ için

$$\begin{aligned} p(q+r) =&(p_0(q_0+r_0) - p_1(q_1+r_1) + p_2(q_2+r_2) + p_3(q_3+r_3),\\ &p_0(q_1+r_1) + p_1(q_0+r_0) - p_2(q_3+r_3) + p_3(q_2+r_2),\\ &p_0(q_2+r_2) - p_1(q_3+r_3) + p_2(q_0+r_0) + p_3(q_1+r_1),\\ &p_0(q_3+r_3) + p_1(q_2+r_2) - p_2(q_1+r_1) + p_3(q_0+r_0))\\ =&(p_0q_0 - p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 + p_0r_0 - p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3,\\ &p_0q_1 + p_1q_0 - p_2q_3 + p_3q_2 + p_0r_1 + p_1r_0 - p_2r_3 + p_3r_2,\\ &p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1 + p_0r_2 - p_1r_3 + p_2r_0 + p_3r_1,\\ &p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0 + p_0r_3 + p_1r_2 - p_2r_1 + p_3r_0)\\ =&pq + pr \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (p+q)r =&((p_0+q_0)r_0 - (p_1+q_1)r_1 + (p_2+q_2)r_2 + (p_3+q_3)r_3,\\ &(p_0+q_0)r_1 + (p_1+q_1)r_0 - (p_2+q_2)r_3 + (p_3+q_3)r_2,\\ &(p_0+q_0)r_2 - (p_1+q_1)r_3 + (p_2+q_2)r_0 + (p_3+q_3)r_1,\\ &(p_0+q_0)r_3 + (p_1+q_1)r_2 - (p_2+q_2)r_1 + (p_3+q_3)r_0)\\ =&(p_0r_0 - p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3 + q_0r_0 - q_1r_1 + q_2r_2 + q_3r_3,\\ &p_0r_1 + p_1r_0 - p_2r_3 + p_3r_2 + q_0r_1 + q_1r_0 - q_2r_3 + q_3r_2,\\ &p_0r_2 - p_1r_3 + p_2r_0 + p_3r_1 + q_0r_2 - q_1r_3 + q_2r_0 + q_3r_1,\\ &p_0r_3 + p_1r_2 - p_2r_1 + p_3r_0 + q_0r_3 + q_1r_2 - q_2r_1 + q_3r_0)\\ =&pr + qr \end{aligned}$$

yazılabilir.

5. $\forall p, q, r \in \mathbb{H}_S$ için

$$\begin{aligned} qr = (&q_0r_0 - q_1r_1 + q_2r_2 + q_3r_3, \\ &q_0r_1 + q_1r_0 - q_2r_3 + q_3r_2, \\ &q_0r_2 - q_1r_3 + q_2r_0 + q_3r_1, \\ &q_0r_3 + q_1r_2 - q_2r_1 + q_3r_0) \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} (pq)r = (&p_0q_0r_0 - p_1q_1r_0 + p_2q_2r_0 + p_3q_3r_0 - (p_0q_1r_1 + p_1q_0r_1 - p_2q_3r_1 + p_3q_2r_1) \\ &+ p_0q_2r_2 - p_1q_3r_2 + p_2q_0r_2 + p_3q_1r_2 + p_0q_3r_3 + p_1q_2r_3 - p_2q_1r_3 + p_3q_0r_3, \\ &p_0q_0r_1 - p_1q_1r_1 + p_2q_2r_1 + p_3q_3r_1 + p_0q_1r_0 + p_1q_0r_0 - p_2q_3r_0 + p_3q_2r_0 \\ &- (p_0q_2r_3 - p_1q_3r_3 + p_2q_0r_3 + p_3q_1r_3) + p_0q_3r_2 + p_1q_2r_2 - p_2q_1r_2 + p_3q_0r_2, \\ &p_0q_0r_2 - p_1q_1r_2 + p_2q_2r_2 + p_3q_3r_2 - (p_0q_1r_3 + p_1q_0r_3 - p_2q_3r_3 + p_3q_2r_3) \\ &+ p_0q_2r_0 - p_1q_3r_0 + p_2q_0r_0 + p_3q_1r_0 + p_0q_3r_1 + p_1q_2r_1 - p_2q_1r_1 + p_3q_0r_1, \\ &p_0q_0r_3 - p_1q_1r_3 + p_2q_2r_3 + p_3q_3r_3 + p_0q_1r_2 + p_1q_0r_2 - p_2q_3r_2 + p_3q_2r_2 \\ &- (p_0q_2r_1 - p_1q_3r_1 + p_2q_0r_1 + p_3q_1r_1) + p_0q_3r_0 + p_1q_2r_0 - p_2q_1r_0 + p_3q_0r_0) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} p(qr) = (&p_0q_0r_0 - p_0q_1r_1 + p_0q_2r_2 + p_0q_3r_3 - (p_1q_0r_1 + p_1q_1r_0 - p_1q_2r_3 + p_1q_3r_2) \\ &+ p_2q_0r_2 - p_2q_1r_3 + p_2q_2r_0 + p_2q_3r_1 + p_3q_0r_3 + p_3q_1r_2 - p_3q_2r_1 + p_3q_3r_0, \\ &p_0q_0r_1 + p_0q_1r_0 - p_0q_2r_3 + p_0q_3r_2 + p_1q_0r_0 - p_1q_1r_1 + p_1q_2r_2 + p_1q_3r_3 \\ &- (p_2q_0r_3 + p_2q_1r_2 - p_2q_2r_1 + p_2q_3r_0) + p_3q_0r_2 - p_3q_1r_3 + p_3q_2r_0 + p_3q_3r_1, \\ &p_0q_0r_2 - p_0q_1r_3 + p_0q_2r_0 + p_0q_3r_1 - (p_1q_0r_3 + p_1q_1r_2 - p_1q_2r_1 + p_1q_3r_0) \\ &+ p_2q_0r_0 - p_2q_1r_1 + p_2q_2r_2 + p_2q_3r_3 + p_3q_0r_1 + p_3q_1r_0 - p_3q_2r_3 + p_3q_3r_2, \\ &p_0q_0r_3 + p_0q_1r_2 - p_0q_2r_1 + p_0q_3r_0 + p_1q_0r_2 - p_1q_1r_3 + p_1q_2r_0 + p_1q_3r_1 \\ &- (p_2q_0r_1 + p_2q_1r_0 - p_2q_2r_3 + p_2q_3r_2) + p_3q_0r_0 - p_3q_1r_1 + p_3q_2r_2 + p_3q_3r_3) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $(pq)r = p(qr)$ olduğu görülür.

■

Sonuç 2.2. *$\mathbb{H}_S$ kümesi, üzerindeki toplama işlemi ve çarpma işlemi ile birlikte değişmeli olmayan birimli bir halkadır.*

Sonuç 2.3. *$\mathbb{H}_S$ kümesi, üzerindeki toplama işlemi ve çarpma işlemi ile birlikte bir cisim değildir.*

İspat. $\mathbb{H}_S$ kümesi üzerindeki çarpma işlemi değişmeli olmadığından $\mathbb{H}_S - \{0_{\mathbb{H}_S}\}$ kümesi, üzerindeki çarpma işlemi ile bir abel grup değildir. O halde $\mathbb{H}_S$ kümesi, üzerindeki toplama işlemi ve çarpma işlemi ile birlikte bir cisim değildir. ■

Tanım 2.5. $\mathbb{H}_S$ kümesi, üzerindeki toplama, eşitlik ve çarpma işlemi ile birlikte, her $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ elemanına bir split kuaterniyon denir ve $\mathbb{H}_S$ kümesine *split kuaterniyonlar* kümesi denir.
p_0 elemanına, p split kuaterniyonunun *skaler kısmı* denir ve $S(p) = p_0$ ile gösterilir; $\mathbf{p}$ elemanına, p split kuaterniyonunun *vektörel kısmı* denir ve $V(p) = \mathbf{p}$ ile gösterilir. Böylece her p split kuaterniyonu $p = S(p) + V(p)$ ile ifade edilebilir. Her p split kuaterniyonunun vektörel kısmının oluşturduğu kümeye *pure split kuaterniyonlar* kümesi denir ve

$$\mathbb{H}_{\boldsymbol{S}} = \{\mathbf{p} = (0, p_1, p_2, p_3) \ : \ p_1,\ p_2,\ p_3 \in \mathbb{R}\}$$

ile tanımlanır.

Not. $p, q \in \mathbb{H}_S$ için genellikle $V(pq) \neq V(p)V(q)$ geçerlidir.

Tanım 2.6 (Dış çarpım işlemi)**.** Split kuaterniyonlar kümesi üzerinde *dış çarpım işlemi*

$$\lambda p = (\lambda p_0, \lambda p_1, \lambda p_2, \lambda p_3)$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.3. *Split kuaterniyonlar kümesi, bir reel vektör uzayıdır.*

İspat.

1. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{H}_S$ için

$$\begin{aligned}(\lambda_1 + \lambda_2)p &= ((\lambda_1 + \lambda_2)p_0, (\lambda_1 + \lambda_2)p_1, (\lambda_1 + \lambda_2)p_2, (\lambda_1 + \lambda_2)p_3) \\ &= (\lambda_1 p_0, \lambda_1 p_1, \lambda_1 p_2, \lambda_1 p_3) + (\lambda_2 p_0, \lambda_2 p_1, \lambda_2 p_2, \lambda_2 p_3) \\ &= (\lambda_1 p) + (\lambda_2 p)\end{aligned}$$

   sağlanır.

2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall p, q \in \mathbb{H}_S$ için

$$\begin{aligned}\lambda(p + q) &= (\lambda(p_0 + q_0), \lambda(p_1 + q_1), \lambda(p_2 + q_2), \lambda(p_3 + q_3)) \\ &= (\lambda p) + (\lambda q)\end{aligned}$$

sağlanır.

3. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{H}_S$ için

$$\begin{aligned}(\lambda_1\lambda_2)p &= ((\lambda_1\lambda_2)p_0, (\lambda_1\lambda_2)p_1, (\lambda_1\lambda_2)p_2, (\lambda_1\lambda_2)p_3)\\ &= (\lambda_1(\lambda_2 p_0), \lambda_1(\lambda_2 p_1), \lambda_1(\lambda_2 p_2), \lambda_1(\lambda_2 p_3))\\ &= \lambda_1(\lambda_2 p)\end{aligned}$$

sağlanır.

4. $(\mathbb{R}, +, .)$ cisminin "$\cdot$" işlemine göre birim elemanı 1 olmak üzere $\forall p \in \mathbb{H}_S$ için $1p = p$ sağlanır.

O halde split kuaterniyonlar kümesi, üzerindeki toplama işlemi ve çarpma işlemi ile birlikte bir reel vektör uzayıdır. ■

Teorem 2.4. *$i = (0,1,0,0)$, $j = (0,0,1,0)$, $k = (0,0,0,1) \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere $\{1, i, j, k\}$ sistemi, split kuaterniyonlar reel vektör uzayının bir bazıdır.*

İspat. $\forall p = (p_0, p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{H}_S$ için

$$\begin{aligned}p =& (p_0,0,0,0) + (0,p_1,0,0) + (0,0,p_2,0) + (0,0,0,p_3)\\ =& p_0(1,0,0,0) + p_1(0,1,0,0) + p_2(0,0,1,0) + p_3(0,0,0,1)\\ =& p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k\end{aligned}$$

yazılabileceğinden $Sp\{1, i, j, k\} = \mathbb{H}_S$ elde edilir. Öte yandan $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ için $\lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k = 0_{\mathbb{H}_S}$ iken $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ olacağından $\{1, i, j, k\}$ sistemi lineer bağımsızdır. ■

Sonuç 2.4. *$boy\mathbb{H}_S = 4$ olduğundan split kuaterniyonlar kümesine 4-boyutlu reel vektör uzayı denir.*

Not. Her p split kuaterniyonu $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ ile yeniden ifade edilebilir.

Not. Split kuaterniyonlar kümesinin baz elemanları için

$$\begin{aligned}i^2 &= (0,1,0,0)(0,1,0,0) = (-1,0,0,0) = -1\\ j^2 &= (0,0,1,0)(0,0,1,0) = (1,0,0,0) = 1\\ k^2 &= (0,0,0,1)(0,0,0,1) = (1,0,0,0) = 1\end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} ij =&(0,1,0,0)(0,0,1,0) = (0,0,0,1) = k, \\ ji =&(0,0,1,0)(0,1,0,0) = -(0,0,0,1) = -k, \\ jk =&(0,0,1,0)(0,0,0,1) = -(0,1,0,0) = -i, \\ kj =&(0,0,0,1)(0,0,1,0) = (0,1,0,0) = i, \\ ki =&(0,0,0,1)(0,1,0,0) = (0,0,1,0) = j, \\ ik =&(0,1,0,0)(0,0,0,1) = -(0,0,1,0) = -j, \\ i(jk) =&i(-i) = -i^2 = 1, \\ (ij)k =&(k)k = k^2 = 1 \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece split kuaterniyonlar kümesinin baz elemanları için aşağıdaki çarpım tablosu elde edilir.

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	1	$-i$
k	k	j	i	1

Tablo 2.1 Baz elemanları çarpım tablosu

Not. İki split kuaterniyonun çarpımı

$$pq = (p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k)(q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k)$$

şeklinde Tablo 2.1 kullanılarak bileşen bileşen çarpma ile de bulunabilir.

Not. Her p split kuaterniyonu,

- $p = (p_0 + p_1 i) + (p_2 + p_3 i)j = w + vj, \quad w, v \in \mathbb{C}$
- $p = (p_0 + p_1 i) + (p_3 - p_2 i)k = w + vk, \quad w, v \in \mathbb{C}$
- $p = (p_0 + p_3 k) + (p_1 + p_2 k)i = h + gi, \quad h, g \in H$
- $p = (p_0 + p_3 k) + (p_2 + p_1 k)j = h + gj, \quad h, g \in H$
- $p = (p_0 + p_2 j) + (p_1 - p_3 j)i = h + gj, \quad h, g \in H$
- $p = (p_0 + p_2 j) + (p_3 - p_1 j)k = h + gk, \quad h, g \in H$

şeklinde yeniden ifade edilebilir. Burada H kümesi hiperbolik sayılar kümesidir.

Teorem 2.5. *Split kuaterniyonlar kümesi bir reel kuaterniyon cebiridir.*

İspat. $\forall p, q, r \in \mathbb{H}_S$, $\lambda \in \mathbb{R}$ için

1. $p(q+r) = (pq) + (pr)$ ve $(p+q)r = (pr) + (qr)$,
2. $p(qr) = (pq)r$,
3. $(\lambda p)q = p(\lambda q) = \lambda(pq)$

yazılabildiğinden $\mathbb{H}_S$ kümesi, üzerindeki toplama işlemi, çarpma işlemi ve dış çarpım ile birlikte birimli ve birleşmeli bir reel kuaterniyon cebiridir. ■

Teorem 2.6. *Split kuaterniyonlar kümesi*

1. *Sıfır bölene,*
2. *Nilpotent elemana,*
3. *İdempotent elemana*

sahiptir.

İspat.

1. $0_{\mathbb{H}_S} \neq p, q \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere $pq = 0_{\mathbb{H}_S}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} pq = (&p_0q_0 - p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3, \\ &p_0q_1 + p_1q_0 - p_2q_3 + p_3q_2, \\ &p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1, \\ &p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0) \\ = &(0,0,0,0) \end{aligned}$$

yazılabilir. Eşitlik tanımından

$$\begin{aligned} p_0q_0 - p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 &= 0 \\ p_0q_1 + p_1q_0 - p_2q_3 + p_3q_2 &= 0 \\ p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1 &= 0 \\ p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0 &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisi determinantı

$$\begin{vmatrix} q_0 & -q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{vmatrix} = \left(q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2\right)^2 = 0$$

olması durumunda (2.1) sisteminin sıfırdan farklı çözümü vardır. O halde $q_0^2 + q_1^2 = q_2^2 + q_3^2$ eşitliğini sağlayan her q split kuaterniyon için $pq = 0_{\mathbb{H}_S}$ eşitliğini sağlayan p split kuaterniyonu vardır.

2. $p^2 = pp = 0_{\mathbb{H}_S}$ olsun. Bu durumda

$$p^2 = (p_0^2 - p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, 2p_0p_1, 2p_0p_2, 2p_0p_3) = 0_{\mathbb{H}_S}$$

yazılabilir. Böylece $p_0 = 0$ ve $p_1^2 = p_2^2 + p_3^2$ olması durumunda p split kuaterniyon nilpotent elemandır.

3. $p^2 = p$ olsun. Bu durumda

$$p^2 = (p_0^2 - p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, 2p_0p_1, 2p_0p_2, 2p_0p_3) = (p_0, p_1, p_2, p_3)$$

yazılabilir. Böylece $p_0 = \dfrac{1}{2}$ ve $p_2^2 + p_3^2 - p_1^2 = \dfrac{1}{4}$ olması durumunda p split kuaterniyon idempotent elemandır.

■

Örnek 2.1. $p = (1, 1, 1, -1)$, $q = (0, 1, 1, 0) \in \mathbb{H}_S$ için $pq = 0_{\mathbb{H}_S}$ elde edileceğinden p ve q sıfır bölendir.

Örnek 2.2. $p = (0, \sqrt{2}, 1, 1) \in \mathbb{H}_S$ için $p^2 = 0_{\mathbb{H}_S}$ elde edileceğinden p split kuaterniyonu, nilpotent elemandır.

Örnek 2.3. $p = (\dfrac{1}{2}, 0, 0, \dfrac{1}{2}) \in \mathbb{H}_S$ için $p^2 = p$ elde edileceğinden p split kuaterniyonu, idempotent elemandır.

2.1 Split Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler

Tanım 2.7 (Eşlenik)**.** $\forall p \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonunun *eşleniği*

$$\overline{p} = p_0 - p_1 i - p_2 j - p_3 k$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.7. *$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall p, q \in \mathbb{H}_S$ için aşağıdaki özellikler geçerlidir:*

1. $\overline{\overline{p}} = p$,
2. $\overline{\lambda p} = \lambda \overline{p}$,
3. $\overline{p+q} = \overline{p} + \overline{q}$,
4. $\overline{pq} = \overline{qp}$,
5. $\mathbf{pq} = \overline{\mathbf{qp}}$.

İspat.

1. $\forall p \in \mathbb{H}_S$ için

$$\begin{aligned}\overline{(\overline{p})} =& \overline{p_0 - p_1 i - p_2 j - p_3 k} \\ =& p_0 - (-p_1 i) - (-p_2 j) - (-p_3 k) \\ =& p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k = p\end{aligned}$$

   yazılabilir.

2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{H}_S$ için

$$\begin{aligned}\overline{(\lambda p)} =& \lambda p_0 - \lambda p_1 i - \lambda p_2 j - \lambda p_3 k \\ =& \lambda \left(p_0 - p_1 i - p_2 j - p_3 k\right) = \lambda \overline{p}\end{aligned}$$

   yazılabilir.

3. $\forall p, q \in \mathbb{H}_S$ için

$$\begin{aligned}\overline{(p+q)} =& \overline{p_0 + q_0 + (p_1 + q_1) i + (p_2 + q_2) j + (p_3 + q_3) k} \\ =& p_0 + q_0 - (p_1 + q_1) i - (p_2 + q_2) j - (p_3 + q_3) k \\ =& p_0 + q_0 - p_1 i - q_1 i - p_2 j - q_2 j - p_3 k - q_3 k \\ =& \overline{p} + \overline{q}\end{aligned}$$

yazılabilir.

4. $\forall p, q \in \mathbb{H}_S$ için

$$\begin{aligned}\overline{pq} =& p_0q_0 - p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3, \\ & - (p_0q_1 + p_1q_0 - p_2q_3 + p_3q_2)i \\ & - (p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1)j \\ & - (p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0)k\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\overline{q}\,\overline{p} =& q_0p_0 - (-q_1)(-p_1) + (-q_2)(-p_2) + (-q_3)(-p_3) \\ & + (q_0(-p_1) + (-q_1)p_0 - (-q_2)(-p_3) + (-q_3)(-p_2))i \\ & + (q_0(-p_2) - (-q_1)(-p_3) + (-q_2)p_0 + (-q_3)(-p_1))j \\ & + (q_0(-p_3) + (-q_1)(-p_2) - (-q_2)(-p_1) + (-q_3)p_0)k \\ =& q_0p_0 - q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3 \\ & + (-q_0p_1 - q_1p_0 - q_2p_3 + q_3p_2)i \\ & + (-q_0p_2 - q_1p_3 - q_2p_0 + q_3p_1)j \\ & + (-q_0p_3 + q_1p_2 - q_2p_1 - q_3p_0)k\end{aligned}$$

olup $\overline{pq} = \overline{q}\,\overline{p}$ elde edilir.

5. $\forall p, q \in \mathbb{H}_S$ için

$$\mathbf{pq} = -p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 + (-p_2q_3 + p_3q_2)i + (-p_1q_3 + p_3q_1)j + (p_1q_2 - p_2q_1)k$$

ve

$$\overline{\mathbf{qp}} = -q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3 - (-q_2p_3 + q_3p_2)i - (-q_1p_3 + q_3p_1)j - (q_1p_2 - q_2p_1)k$$

olup $\mathbf{pq} = \overline{\mathbf{qp}}$ elde edilir.

■

Tanım 2.8 (Split Kuaterniyon Değerli İç Çarpım Fonksiyonu)**.** Split kuaterniyonlar üzerinde

$$\begin{aligned}\langle , \rangle : \mathbb{H}_S \times \mathbb{H}_S &\to \mathbb{H}_S \\ (p, q) &\to \langle p, q\rangle = p\overline{q}\end{aligned}$$

ile tanımlanan fonksiyon, split kuaterniyon değerli bir *iç çarpım fonksiyonu*dur.

Tanım 2.9 (Reel Değerli İç Çarpım Fonksiyonu)**.** Split kuaterniyonlar reel vektör uzayı üzerinde

$$\begin{aligned}\langle , \rangle_{\mathbb{H}_S} : \mathbb{H}_S\mathbb{H}_S &\to \mathbb{R} \\ (p,q) \to \langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S} &= \frac{1}{2}(p\overline{q} + q\overline{p}) \\ &= p_0q_0 + p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3\end{aligned}$$

ile tanımlanan fonksiyon, aşağıdaki özellikleri sağladığından reel değerli bir indefinite *iç çarpım fonksiyonu*dur:

1. $\forall p, q \in \mathbb{H}_S$ için $\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S} = p_0q_0 + p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 = \langle q,p\rangle_{\mathbb{H}_S}$ geçerlidir.
2. $\forall p, q, r \in \mathbb{H}_S$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}\langle \lambda p + \mu q, r\rangle_{\mathbb{H}_S} &= (\lambda p_0 + \mu q_0)r_0 + (\lambda p_1 + \mu q_1)r_1 - (\lambda p_2 + \mu q_2)r_2 - (\lambda p_3 + \mu q_3)r_3 \\ &= \lambda p_0r_0 + \mu q_0r_0 + \lambda p_1r_1 + \mu q_1r_1 - \lambda p_2r_2 - \mu q_2r_2 - \lambda p_3r_3 - \mu q_3r_3 \\ &= \lambda(p_0r_0 + p_1r_1 - p_2r_2 - p_3r_3) + \mu(q_0r_0 + q_1r_1 - q_2r_2 - q_3r_3) \\ &= \lambda\langle p,r\rangle_{\mathbb{H}_S} + \mu\langle q,r\rangle_{\mathbb{H}_S}\end{aligned}$$

   ve

$$\begin{aligned}\langle p, \lambda q + \mu r\rangle_{\mathbb{H}_S} &= p_0(\lambda q_0 + \mu r_0) + p_1(\lambda q_1 + \mu r_1) - p_2(\lambda q_2 + \mu r_2) - p_3(\lambda q_3 + \mu r_3) \\ &= \lambda p_0q_0 + \mu p_0r_0 + \lambda p_1q_1 + \mu p_1r_1 - \lambda p_2q_2 - \mu p_2r_2 - \lambda p_3q_3 - \mu q_3r_3 \\ &= \lambda(p_0q_0 + p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + \mu(p_0r_0 + p_1r_1 - p_2r_2 - p_3r_3) \\ &= \lambda\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S} + \mu\langle p,r\rangle_{\mathbb{H}_S}\end{aligned}$$

   geçerlidir.

- $p \neq 0_{\mathbb{H}_S}$ için $\langle p,p\rangle_{\mathbb{H}_S} = p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$ olup pozitif, negatif veya sıfır olabilir.

Not. Reel değerli iç çarpım fonksiyonunun pseudo iç çarpımına eşit olduğu görülür. Yani $\langle , \rangle_{\mathbb{H}_S} = \langle , \rangle_{\mathbb{R}^4_2}$ yazılabilir. Ayrıca $\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S} = S(p\overline{q}) = S(q\overline{p})$ olduğunu görmek mümkündür.

Not. Split kuaterniyonlar uzayı üzerindeki reel değerli iç çarpım fonksiyonu için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

1. $p_0, q_0 \in \mathbb{R}$ ve $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}_{\boldsymbol{S}}$ olmak üzere $\forall p = p_0 + \mathbf{p},\ q = q_0 + \mathbf{q} \in \mathbb{H}_S$ için

$$\langle p, q \rangle_{\mathbb{H}_S} = p_0 q_0 + \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{R}^3_1},$$

2. $w_1, v_1, w_2, v_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\forall p = w_1 + v_1 j, q = w_2 + v_2 j \in \mathbb{H}_S$ için

$$\langle p, q \rangle_{\mathbb{H}_S} = \langle w_1, w_2 \rangle_{\mathbb{C}} - \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{C}},$$

3. $h_1, g_1, h_2, g_2 \in H$ olmak üzere $\forall p = h_1 + g_1 i, q = h_2 + g_2 i \in \mathbb{H}_S$ için

$$\langle p, q \rangle_{\mathbb{H}_S} = \langle h_1, h_2 \rangle_H + \langle g_1, g_2 \rangle_H$$

şeklindedir.

Tanım 2.10. $p, q \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere $\langle p, q \rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$ ise p ve q *pseudo-ortogonal*dir denir. $p \perp_{\mathbb{H}_S} q$ ile gösterilir.

Tanım 2.11. Her p split kuaterniyonunun *karakteristik fonksiyonu*

$$I_p = p\overline{p} = \langle p, p \rangle_{\mathbb{H}_S} = {p_0}^2 + {p_1}^2 - {p_2}^2 - {p_3}^2$$

ile tanımlanır. Buna bağlı olarak

- $I_p > 0$ ise p, spacelike (sl) split kuaterniyon,
- $I_p < 0$ ise p, timelike (tl) split kuaterniyon,
- $I_p = 0$ ise p, lightlike (ll) split kuaterniyon

olarak adlandırılır.

Teorem 2.8. $\forall p \in \mathbb{H}_S$ *için*

1. $I_{\overline{p}} = I_p$,
2. $I_{\lambda p} = \lambda I_p$,
3. $I_{p+q} = I_p + I_q + 2\langle p, q \rangle_{\mathbb{H}_S}$,
4. $I_{pq} = I_p I_q$

özellikleri sağlanır, [14].

Not. Split kuaterniyonlar, vektörel kısımlarının karakteristiğine göre 6 sınıfa ayrılır[1]:

	p	$\mathbf{p}$
1.	sl	sl
2.	sl	tl
3.	sl	ll
4.	tl	tl
5.	ll	tl
6.	ll	ll

Tablo 2.2 Split kuaterniyonların sınıflandırılması

Not. Split kuaterniyonların karakteristik fonksiyonu için aşağıdaki özellikler yazılabilir:

1. $p_0, q_0 \in \mathbb{R}$ ve $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere $\forall p = p_0 + \mathbf{p},\ q = q_0 + \mathbf{q} \in \mathbb{H}_S$ için $\langle p_0, \mathbf{p} \rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$ olup

$$I_p = \langle p_0 + \mathbf{p}, p_0 + \mathbf{p} \rangle_{\mathbb{H}_S} = \langle p_0, p_0 \rangle_{\mathbb{H}_S} + 2\langle p_0, \mathbf{p} \rangle_{\mathbb{H}_S} + \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle_{\mathbb{H}_S} = {p_0}^2 + I_{\mathbf{p}},$$

2. $w, v \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\forall p = w + vj \in \mathbb{H}_S$ için

$$I_p = \langle p, p \rangle_{\mathbb{H}_S} = \langle w, w \rangle_{\mathbb{C}} - \langle v, v \rangle_{\mathbb{C}} = \|w\|_{\mathbb{C}} - \|v\|_{\mathbb{C}},$$

3. $h, g \in H$ olmak üzere $\forall p = h + gi \in \mathbb{H}_S$ için

$$I_p = \langle p, p \rangle_{\mathbb{H}_S} = \langle h, h \rangle_H + \langle g, g \rangle_H = I_h + I_g$$

yazılabilir. Burada $\forall h \in H$ için hiperbolik sayıların karakteristik fonksiyonu $I_h = \langle h, h \rangle_H$ ile tanımlanmıştır.

Tanım 2.12. $w, v \in \mathbb{C}$ olmak üzere $p = w + vj \in \mathbb{H}_S$ için

1. $\|w\|_{\mathbb{C}} > \|v\|_{\mathbb{C}}$ ise p, spacelike split kuaterniyon,
2. $\|w\|_{\mathbb{C}} < \|v\|_{\mathbb{C}}$ ise p, timelike split kuaterniyon,
3. $\|w\|_{\mathbb{C}} = \|v\|_{\mathbb{C}}$ ise p, lightlike split kuaterniyon

olarak adlandırılır.

[1]Split kuaterniyonların sınıflandırılması hakkında detaylı bilgi, [14] numaralı kaynakta bulunabilir.

Örnek 2.4. $p, q \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere $\langle p, q\rangle_{\mathbb{H}_S}$ iç çarpımının durumu örneklerle incelenmiştir.

p \ q	spacelike	timelike	lightlike
spacelike	$\langle 2+k, 2+j\rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ $\langle 2+k, 1+3i+3k\rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ $\langle 2+k, 1+2i+2k\rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$	$\langle 2+k, 1+2j\rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ $\langle 2+k, 1+j+2k\rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ $\langle 2+k, 1+2k\rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$	$\langle 2+k, 1+k\rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ $\langle 1+2i+k, 2+i+j+2k\rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ $\langle 2+k, 1+2i+j+2k\rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$
timelike		$\langle 1+2k, 1+2j\rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ $\langle 1+2k, 1+i+j+2k\rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ $\langle 1+i+2k, 2+2i+3j+2k\rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$	$\langle 1+2k, 1+j\rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ $\langle 1+2k, 1+k\rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ $\langle 1+2k, 2+i+2j+k\rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$
lightlike			$\langle 1+k, 2+i+2j+k\rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ $\langle 1+k, 1+2i+j+2k\rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ $\langle 1+k, 2+i+j+2k\rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$

Tablo 2.3 Split kuaterniyonlarda iç çarpım inceleme

Sonuç 2.5. *Herhangi iki türdeki split kuaterniyon pseudo-ortogonal olabilir.*

Örnek 2.5. $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle_{\mathbb{H}_S}$ iç çarpımının durumu örneklerle incelenmiştir.

$\mathbf{p}$ \ $\mathbf{q}$	spacelike	timelike	lightlike
spacelike	$\langle 2i+k, 2i+j\rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ $\langle 2i+k, -2i+j+k\rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle_{\mathbb{H}_S} \neq 0$	$\langle 2i+k, -k\rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ $\langle 2i+k, k\rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ $\langle 2+k, 1+2k\rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$	$\langle 2i+k, i+k\rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ $\langle 2i+k, j+k\rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle_{\mathbb{H}_S} \neq 0$
timelike		$\langle i+2k, i+2j\rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ $\langle i+2k, j+2k\rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ $\langle i+2k, j\rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$	$\langle i+2k, i+j\rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ $\langle i+2k, i+k\rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ $\langle 3i+5k, 5i+4j+3k\rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$
lightlike			$\langle i+k, 2+2i+2j\rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ $\langle i+k, -2i+2j\rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ $\langle i+k, 2i+2k\rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$

Tablo 2.4 Pure split kuaterniyonlarda iç çarpım inceleme

Sonuç 2.6. $\mathbf{p}$ *spacelike,* $\mathbf{q}$ *spacelike (lightlike) pure split kuaterniyon ise* $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle_{\mathbb{H}_S} \neq 0$ *dır. Yani pseudo-ortogonal olamazlar.*

İspat. $\mathbf{p}$ spacelike, $\mathbf{q}$ spacelike (lightlike) olsun. O halde $I_{\mathbf{p}} = p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 > 0$ ve $I_{\mathbf{q}} = q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 \geq 0$ olup $p_1^2 q_1^2 > p_2^2 q_2^2 + p_3^2 q_2^2 + p_2^2 q_3^2 + p_3^2 q_3^2$ yazılabilir. $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$ olduğu kabul edilirse $p_1 q_1 = p_2 q_2 + p_3 q_3$ ve $p_1^2 q_1^2 = p_2^2 q_2^2 + p_3^2 q_3^2 + 2 p_2 q_2 p_3 q_3$ yazılabilir. O halde

$$p_2^2 q_2^2 + p_3^2 q_3^2 + 2 p_2 q_2 p_3 q_3 > p_2^2 q_2^2 + p_3^2 q_2^2 + p_2^2 q_3^2 + p_3^2 q_3^2$$

ve buradan

$$-(p_3 q_2 - p_2 q_3)^2 > 0$$

çelişki elde edilir. Dolayısıyla $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} \neq 0$ dır.

■

Not. $\langle p, q \rangle_{\mathbb{H}_S} = p_0 q_0 + \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S}$ olduğundan $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} \neq 0$ olsa bile $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S} = -p_0 q_0$ iken $\langle p, q \rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$ olabilir.
Ancak p lightlike $\mathbf{p}$ lightlike iken $p_0 = 0$ yani $\langle p, q \rangle_{\mathbb{H}_S} = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbb{H}_S}$ olduğundan $\mathbf{q}$ spacelike ise $\langle p, q \rangle_{\mathbb{H}_S} \neq 0$ dır. Yani vektörel kısmı spacelike olan spacelike split kuaterniyon ile pure lightlike split kuaterniyon pseudo-ortogonal olamazlar.

Tanım 2.13 (Ters)**.** $I_p \neq 0$ olmak üzere p split kuaterniyonunun tersi $p^{-1} = \dfrac{\overline{p}}{I_p}$ ile tanımlanır.

Teorem 2.9. $\forall p \in \mathbb{H}_S$ *için*

1. $(\overline{p})^{-1} = p^{-1}$,
2. $(\lambda p)^{-1} = \lambda p^{-1}$
3. $(p+q)^{-1} \neq p^{-1} + q^{-1}$ *(genellikle)*
4. $(pq)^{-1} \neq p^{-1} q^{-1}$ *(genellikle)*

özellikleri sağlanır.

Not. $p, q \in \mathbb{H}_S$ için

- $p \perp_{\mathbb{H}_S} q$ ve $I_p = I_q$ ise $(p+q)^{-1} = \dfrac{1}{2}(p^{-1} + q^{-1})$,
- $p \perp_{\mathbb{H}_S} q$ ve $I_q = 0$ ise $(p+q)^{-1} = p^{-1} + \dfrac{\overline{q}}{I_p}$,

- $p \perp_{\mathbb{H}_S} q$ ve $I_p = 0$ ise $(p+q)^{-1} = q^{-1} + \dfrac{\overline{p}}{I_q}$

eşitlikleri geçerlidir.

Tanım 2.14 (Bölme)**.** $I_q \neq 0$ olmak üzere split kuaterniyonlar kümesi üzerinde *sağdan bölme işlemi* pq^{-1} ile tanımlanır, *soldan bölme işlemi* $q^{-1}p$ ile tanımlanır.

! *Bu çalışma boyunca sağdan bölme işlemi ele alınacaktır.*

Tanım 2.15 (Norm)**.** $\forall p \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyonunun pseudo normu

$$\|p\|_{\mathbb{H}_S} = \sqrt{|\langle p, p\rangle_{\mathbb{H}_S}|} = \sqrt{|I_p|}$$

ile tanımlanır. Çalışma boyunca $\|.\|_{\mathbb{H}_S} = \|.\|$ olarak alınacaktır.

Not. Split kuaterniyonların pseudo normu için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

1. $p_0, q_0 \in \mathbb{R}$ ve $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere $\forall p = p_0 + \mathbf{p},\ q = q_0 + \mathbf{q} \in \mathbb{H}_S$ için $\|p\|^2 = |{p_0}^2 + I_{\mathbf{p}}|$,
2. $w, v \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\forall p = w + vj \in \mathbb{H}_S$ için $\|p\|^2 = \big|\|w\|_{\mathbb{C}} - \|v\|_{\mathbb{C}}\big|$,
3. $h, g \in H$ olmak üzere $\forall p = h + gi \in \mathbb{H}_S$ için $\|p\|^2 = |I_h + I_g|$

şeklindedir. Özel olarak $h, g \in H$ hiperbolik sayılarının üçgen eşitsizliğini sağlaması durumunda $\|p\| \leq \|h\| + \|g\|$ yazılabilir.

Teorem 2.10. *$\forall p, q \in \mathbb{H}_S$ için norm işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar:*

1. $\|\lambda p\| = |\lambda|\,\|p\|$,
2. $\|pq\| = \|p\|\,\|q\|$,
3. $\|\overline{p}\| = \|-p\| = \|p\|$.

İspat.

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ve $\forall p \in \mathbb{H}_S$ için

$$\begin{aligned}\|\lambda p\| &= \sqrt{\big|(\lambda p_0)^2 + (\lambda p_1)^2 - (\lambda p_2)^2 - (\lambda p_3)^2\big|} \\ &= \sqrt{\big|\lambda^2 p_0^2 + \lambda^2 p_1^2 - \lambda^2 p_2^2 - \lambda^2 p_3^2\big|} \\ &= \big|\lambda\big|\sqrt{\big|p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2\big|} = |\lambda|\,\|p\|\end{aligned}$$

   elde edilir.

2. $\forall p, q \in \mathbb{H}_S$ için

$$\begin{aligned}
\|pq\| &= \big(\big|(p_0q_0 - p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3)^2 + (p_0q_1 + p_1q_0 - p_2q_3 + p_3q_2)^2 \\
&\quad -(p_0q_2 - p_1q_3 + p_2q_0 + p_3q_1)^2 - (p_0q_3 + p_1q_2 - p_2q_1 + p_3q_0)^2\big|\big)^{1/2} \\
&= \big(\big|(p_0q_0)^2 + (p_1q_1)^2 + (p_2q_2)^2 + (p_3q_3)^2 - 2p_0q_0p_1q_1 + 2p_2q_2p_3q_3 \\
&\quad + 2p_0q_0p_2q_2 + 2p_0q_0p_3q_3 - 2p_1q_1p_2q_2 - 2p_1q_1p_3q_3 + (p_0q_1)^2 \\
&\quad + (p_1q_0)^2 + (p_2q_3)^2 + (p_3q_2)^2 + 2p_0q_1p_1q_0 - 2p_2q_3p_3q_2 \\
&\quad - 2p_0q_1p_2q_3 - 2p_1q_0p_2q_3 + 2p_0q_1p_3q_2 + 2p_1q_0p_3q_2 \\
&\quad - \big((p_0q_2)^2 + (p_1q_3)^2 + (p_2q_0)^2 + (p_3q_1)^2 - 2p_0q_2p_1q_3 \\
&\quad + 2p_2q_0p_3q_1 + 2p_0q_2p_2q_0 - 2p_1q_3p_2q_0 + 2p_0q_2p_3q_1 - 2p_1q_3p_3q_1\big) \\
&\quad - \big((p_0q_3)^2 + (p_1q_2)^2 + (p_2q_1)^2 + (p_3q_0)^2 + 2p_0q_3p_1q_2 \\
&\quad -2p_2q_1p_3q_0 - 2p_0q_3p_2q_1 - 2p_1q_2p_2q_1 + 2p_0q_3p_3q_0 + 2p_1q_2p_3q_0\big)\big|\big)^{1/2} \\
&= \big(\big|(p_0q_0)^2 + (p_1q_1)^2 + (p_2q_2)^2 + (p_3q_3)^2 + (p_0q_1)^2 + (p_1q_0)^2 \\
&\quad + (p_2q_3)^2 + (p_3q_2)^2 - (p_0q_2)^2 - (p_1q_3)^2 - (p_2q_0)^2 - (p_3q_1)^2 \\
&\quad -(p_0q_3)^2 - (p_1q_2)^2 - (p_2q_1)^2 - (p_3q_0)^2\big|\big)^{1/2}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|p\|\,\|q\| &= \sqrt{\big|p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2\big|}\sqrt{\big|q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2\big|} \\
&= \big(\big|p_0^2q_0^2 + p_1^2q_0^2 - p_2^2q_0^2 - p_3^2q_0^2p_0^2q_1^2 + p_1^2q_1^2 - p_2^2q_1^2 - p_3^2q_1^2 \\
&\quad -p_0^2q_2^2 - p_1^2q_2^2 + p_2^2q_2^2 + p_3^2q_2^2 - p_0^2q_3^2 - p_1^2q_3^2 + p_2^2q_3^2 + p_3^2q_3^2\big|\big)^{1/2} \\
&= \big(\big|(p_0q_0)^2 + (p_1q_0)^2 - (p_2q_0)^2 - (p_3q_0)^2 + (p_0q_1)^2 + (p_1q_1)^2 \\
&\quad - (p_2q_1)^2 - (p_3q_1)^2 - (p_0q_2)^2 - (p_1q_2)^2 + (p_2q_2)^2 + (p_3q_2)^2 \\
&\quad -(p_0q_3)^2 - (p_1q_3)^2 + (p_2q_3)^2 + (p_3q_3)^2\big|\big)^{1/2}
\end{aligned}$$

olup $\|pq\| = \|p\|\,\|q\|$ elde edilir.

3. $\forall p \in \mathbb{H}_S$ için

$$\begin{aligned}
\|\overline{p}\| &= \sqrt{\big|p_0^2 + (-p_1)^2 + (-p_2)^2 + (-p_3)^2\big|} = \sqrt{\big|p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\big|}, \\
\|-p\| &= \sqrt{\big|(-p_0)^2 + (-p_1)^2 + (-p_2)^2 + (-p_3)^2\big|} = \sqrt{\big|p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\big|}, \\
\|p\| &= \sqrt{\big|p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\big|}
\end{aligned}$$

yazılabileceğinden $\|\overline{p}\| = \|-p\| = \|p\|$ olduğu görülür.

■

Not. p spacelike split kuaterniyon ise $\|p\|^2 = I_p$ olup $p^{-1} = \dfrac{\overline{p}}{\|p\|^2}$ şeklindedir.

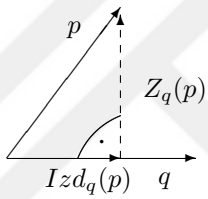
p timelike split kuaterniyon ise $\|p\|^2 = -I_p$ olup $p^{-1} = \dfrac{\overline{p}}{-\|p\|^2}$ şeklindedir.

Tanım 2.16. $p, q \in \mathbb{H}_S$ ve $I_q \neq 0$ olmak üzere p vektörünün q vektörü üzerine dik izdüşüm vektörü

$$Izd_q(p) = \frac{\langle p, q\rangle_{\mathbb{H}_S}}{I_q} q$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.17. $p, q \in \mathbb{H}_S$, $I_q \neq 0$ ve p vektörünün q vektörü üzerine dik izdüşüm vektörü $Izd_q(p)$ olmak üzere $Z_q(p) = p - Izd_q(p)$ ile tanımlanır. Ayrıca $Z_q(p) \perp_{\mathbb{H}_S} q$ şeklindedir.



Teorem 2.11. *$p, q \in \mathbb{H}_S$ ve $I_q \neq 0$ olmak üzere*

- *p spacelike, q timelike ise $Z_q(p)$ spacelike,*
- *p timelike, q spacelike ise $Z_q(p)$ timelike*

split kuaterniyondur.

İspat. $p, q \in \mathbb{H}_S$ için

$$\begin{aligned} I_{Z_q(p)} =& Z_q(p)\overline{Z_q(p)} \\ =& \left(p - \frac{\langle p, q\rangle_{\mathbb{H}_S}}{I_q} q\right)\left(\overline{p} - \frac{\langle p, q\rangle_{\mathbb{H}_S}}{I_q}\overline{q}\right) \\ =& p\overline{p} - \frac{\langle p, q\rangle_{\mathbb{H}_S}}{I_q} p\overline{q} - \frac{\langle p, q\rangle_{\mathbb{H}_S}}{I_q} q\overline{p} + \frac{\langle p, q\rangle^2_{\mathbb{H}_S}}{I_q^2} q\overline{q} \\ =& I_p - \frac{\langle p, q\rangle_{\mathbb{H}_S}}{I_q}(p\overline{q} + q\overline{p}) + \frac{\langle p, q\rangle^2_{\mathbb{H}_S}}{I_q^2} I_q \end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} I_{Z_q(p)} =& I_p - 2\frac{\langle p,q\rangle^2_{\mathbb{H}_S}}{I_q} + \frac{\langle p,q\rangle^2_{\mathbb{H}_S}}{I_q} \\ =& I_p - \frac{\langle p,q\rangle^2_{\mathbb{H}_S}}{I_q} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

- p spacelike, q timelike ise $I_{Z_q(p)} = I_p - \dfrac{\langle p,q\rangle^2_{\mathbb{H}_S}}{I_q} > 0$ olup $Z_q(p)$ spacelike split kuaterniyondur;
- p timelike, q spacelike ise $I_{Z_q(p)} = I_p - \dfrac{\langle p,q\rangle^2_{\mathbb{H}_S}}{I_q} < 0$ olup $Z_q(p)$ timelike split kuaterniyondur.

■

Teorem 2.12 (Cauchy Schwarz Eşitsizliği)**.** *$p, q \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere*

1. *p, q spacelike,*
   - *$Z_q(p)$ spacelike ise $\left|\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S}\right| < \|p\|\|q\|$,*
   - *$Z_q(p)$ timelike ise $\left|\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S}\right| > \|p\|\|q\|$,*
   - *$Z_q(p)$ lightlike ise $\left|\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S}\right| = \|p\|\|q\|$;*
2. *p, q timelike,*
   - *$Z_q(p)$ spacelike ise $\left|\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S}\right| > \|p\|\|q\|$,*
   - *$Z_q(p)$ timelike ise $\left|\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S}\right| < \|p\|\|q\|$,*
   - *$Z_q(p)$ lightlike ise $\left|\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S}\right| = \|p\|\|q\|$;*

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat. $p = 0_{\mathbb{H}_S}$ veya $q = 0_{\mathbb{H}_S}$ ise $\left|\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S}\right| = 0$ ve $\|p\|\|q\| = 0$ olduğundan $\left|\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S}\right| = \|p\|\|q\|$ aşikardır.
p veya q lightlike ise $\left|\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S}\right| \geq 0$ ve $\|p\|\|q\| = 0$ olduğundan
$\left|\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S}\right| \geq \|p\|\|q\|$ yazılabilir (aşikardır).

1. p, q spacelike ise $0 < I_p = \|p\|^2$, $0 < I_q = \|q\|^2$ olup

   - $Z_q(p)$ spacelike ise

     $$I_p - \frac{\langle p, q\rangle^2_{\mathbb{H}_S}}{I_q} > 0$$

     yazılabilir. Buradan

     $$I_p I_q > \langle p, q\rangle^2_{\mathbb{H}_S}$$

     olmak üzere

     $$\|p\|^2\|q\|^2 > \langle p, q\rangle^2_{\mathbb{H}_S}$$

     veya

     $$\|p\|\|q\| > \left|\langle p, q\rangle_{\mathbb{H}_S}\right|$$

     elde edilir.
   - $Z_q(p)$ timelike ise $\|p\|\|q\| < \left|\langle p, q\rangle_{\mathbb{H}_S}\right|$ elde edilir.
   - $Z_q(p)$ lightlike ise $\|p\|\|q\| = \left|\langle p, q\rangle_{\mathbb{H}_S}\right|$ elde edilir.

2. p, q timelike ise $0 > I_p = -\|p\|^2$, $0 > I_q = -\|q\|^2$ olup

   - $Z_q(p)$ spacelike ise

     $$I_p - \frac{\langle p, q\rangle^2_{\mathbb{H}_S}}{I_q} > 0$$

     yazılabilir. Buradan

     $$I_p > \frac{\langle p, q\rangle^2_{\mathbb{H}_S}}{I_q}$$

     veya

     $$I_p I_q < \langle p, q\rangle^2_{\mathbb{H}_S}$$

     olmak üzere

     $$\|p\|^2\|q\|^2 < \langle p, q\rangle^2_{\mathbb{H}_S}$$

veya

$$\|p\|\|q\| < \left|\langle p, q\rangle_{\mathbb{H}_S}\right|$$

elde edilir.

- $Z_q(p)$ timelike ise $\|p\|\|q\| > \left|\langle p, q\rangle_{\mathbb{H}_S}\right|$ elde edilir.
- $Z_q(p)$ lightlike ise $\|p\|\|q\| = \left|\langle p, q\rangle_{\mathbb{H}_S}\right|$ elde edilir.

■

Sonuç 2.7. *$p, q \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere p spacelike (timelike), q timelike (spacelike) ise*

$$-\|p\|^2\|q\|^2 < \langle p, q\rangle^2_{\mathbb{H}_S}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. p spacelike, q timelike ise Teorem 2.11 gereğince $Z_q(p)$ spacelike split kuaterniyondur. Ayrıca $0 < I_p = \|p\|^2$, $0 > I_q = -\|q\|^2$ olup

$$I_p - \frac{\langle p, q\rangle^2_{\mathbb{H}_S}}{I_q} > 0$$

yazılabilir. Buradan

$$I_p > \frac{\langle p, q\rangle^2_{\mathbb{H}_S}}{I_q}$$

olmak üzere

$$I_p I_q < \langle p, q\rangle^2_{\mathbb{H}_S}$$

veya

$$-\|p\|^2\|q\|^2 < \langle p, q\rangle^2_{\mathbb{H}_S}$$

elde edilir.
Benzer şekilde p timelike, q spacelike ise Teorem 2.11 gereğince $Z_q(p)$ timelike split kuaterniyondur. Ayrıca $0 > I_p = -\|p\|^2$, $0 < I_q = \|q\|^2$ olup

$$I_p - \frac{\langle p, q\rangle^2_{\mathbb{H}_S}}{I_q} < 0$$

yazılabilir. Buradan

$$I_p < \frac{\langle p, q\rangle^2_{\mathbb{H}_S}}{I_q}$$

olmak üzere

$$I_p I_q < \langle p, q\rangle^2_{\mathbb{H}_S}$$

veya

$$-\|p\|^2\|q\|^2 < \langle p, q\rangle^2_{\mathbb{H}_S}$$

elde edilir.

■

Teorem 2.13 (Üçgen Eşitsizliği)**.** *$p, q \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:*

1. *p, q spacelike ve*
   - *$Z_q(p)$ spacelike ise $\|p+q\| < \|p\| + \|q\|$,*
   - *$Z_q(p)$ timelike, $p+q$ spacelike ve $\langle p, q\rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ ise $\|p+q\| > \|p\| + \|q\|$,*
   - *$Z_q(p)$ lightlike ise $\|p+q\| \leq \|p\| + \|q\|$,*

   şeklindedir.
2. *p, q timelike ve*
   - *$Z_q(p)$ spacelike, $p+q$ timelike ve $\langle p, q\rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ ise $\|p+q\| > \|p\| + \|q\|$,*
   - *$Z_q(p)$ timelike ise $\|p+q\| < \|p\| + \|q\|$,*
   - *$Z_q(p)$ lightlike ise $\|p+q\| \leq \|p\| + \|q\|$*

   şeklindedir.

İspat. $p, q \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\|p+q\|^2 = |I_{p+q}| &= |(p+q)\overline{(p+q)}| \\ &= |(p+q)(\overline{p}+\overline{q})| \\ &= |p\overline{p} + p\overline{q} + q\overline{p} + q\overline{q}| \\ &= |I_p + I_q + 2\langle p, q\rangle_{\mathbb{H}_S}|\end{aligned}$$

yazılabilir. Üçgen eşitsizliği ve Tanım 2.15 kullanılarak

$$\|p+q\|^2 \leq |I_p| + |I_q| + \left|2\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S}\right| = \|p\|^2 + \|q\|^2 + \left|2\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S}\right|$$

elde edilir.

- $p = 0_{\mathbb{H}_S}$ veya $q = 0_{\mathbb{H}_S}$ ise

$$\begin{aligned}\|p+q\|^2 \leq \|p\|^2 + \|q\|^2 + \left|2\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S}\right| &= \|p\|^2 + \|q\|^2 + 2\|p\|\|q\| \\ &= (\|p\| + \|q\|)^2\end{aligned}$$

  veya $\|p+q\| \leq \|p\| + \|q\|$ yazılabilir (aşikardır).

- p spacelike, q lightlike, $p+q$ spacelike ve $\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ ise Teorem 2.12 gereğince

$$\begin{aligned}\|p+q\|^2 = I_{p+q} &= \|p\|^2 + \|q\|^2 + 2\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S} \\ &\geq \|p\|^2 + \|q\|^2 + 2\|p\|\|q\| = (\|p\| + \|q\|)^2\end{aligned}$$

  veya $\|p+q\| \geq \|p\| + \|q\|$ yazılabilir.

1. p ve q spacelike,

   - $Z_q(p)$ spacelike ise Teorem 2.12 gereğince

$$\begin{aligned}\|p+q\|^2 \leq \|p\|^2 + \|q\|^2 + \left|2\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S}\right| &< \|p\|^2 + \|q\|^2 + 2\|p\|\|q\| \\ &= (\|p\| + \|q\|)^2\end{aligned}$$

     veya $\|p+q\| < \|p\| + \|q\|$ yazılabilir.

   - $Z_q(p)$ timelike, $p+q$ spacelike ve $\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S} > 0$ ise Teorem 2.12 gereğince

$$\begin{aligned}\|p+q\|^2 = I_{p+q} &= \|p\|^2 + \|q\|^2 + 2\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S} \\ &> \|p\|^2 + \|q\|^2 + 2\|p\|\|q\| = (\|p\| + \|q\|)^2\end{aligned}$$

     veya $\|p+q\| > \|p\| + \|q\|$ yazılabilir.

   - $Z_q(p)$ lightlike ise Teorem 2.12 gereğince

$$\begin{aligned}\|p+q\|^2 \leq \|p\|^2 + \|q\|^2 + \left|2\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S}\right| &= \|p\|^2 + \|q\|^2 + 2\|p\|\|q\| \\ &= (\|p\| + \|q\|)^2\end{aligned}$$

veya $\|p+q\| \leq \|p\| + \|q\|$ yazılabilir.

2. p ve q timelike,

   - $Z_q(p)$ spacelike, $p+q$ timelike ve $\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S} < 0$ ise Teorem 2.12 gereğince

$$\begin{aligned}\|p+q\|^2 = -I_{p+q} =& -I_p - I_q - 2\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S} \\ =& \|p\|^2 + \|q\|^2 - 2\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S} \\ >& \|p\|^2 + \|q\|^2 + 2\|p\|\|q\| \\ =& (\|p\| + \|q\|)^2\end{aligned}$$

   veya $\|p+q\| > \|p\| + \|q\|$ yazılabilir.

   - $Z_q(p)$ timelike ise Teorem 2.12 gereğince

$$\begin{aligned}\|p+q\|^2 \leq \|p\|^2 + \|q\|^2 + \left|2\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S}\right| &< \|p\|^2 + \|q\|^2 + 2\|p\|\|q\| \\ &= (\|p\| + \|q\|)^2\end{aligned}$$

   veya $\|p+q\| < \|p\| + \|q\|$ yazılabilir.

   - $Z_q(p)$ lightlike ise Teorem 2.12 gereğince

$$\begin{aligned}\|p+q\|^2 \leq \|p\|^2 + \|q\|^2 + \left|2\langle p,q\rangle_{\mathbb{H}_S}\right| &= \|p\|^2 + \|q\|^2 + 2\|p\|\|q\| \\ &= (\|p\| + \|q\|)^2\end{aligned}$$

   veya $\|p+q\| \leq \|p\| + \|q\|$ yazılabilir.

■

Sonuç 2.8. *p,q spacelike (timelike), $Z_q(p)$ spacelike (timelike) veya lightlike split kuaterniyonlar ise $\|p+q\| < \|p\| + \|q\|$ eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumu sadece $Z_q(p)$ lightlike iken mümkündür.*

Teorem 2.14. *$p,q \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere $V(p\overline{q})$ spacelike ise $\|p+q\| < \|p\| + \|q\|$ eşitsizliği, $V(p\overline{q})$ lightlike ise $\|p+q\| \leq \|p\| + \|q\|$ eşitsizliği geçerlidir, [15].*

Teorem 2.15. *$p,q \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere $p-q, p, q$ spacelike (timelike), $Z_q(p-q)$ ve $Z_p(p-q)$ spacelike (timelike) veya lightlike ise $\left|\|p\| - \|q\|\right| < \|p-q\|$ eşitsizliği sağlanır. Eşitlik durumu sadece $Z_q(p-q)$ ve $Z_p(p-q)$ lightlike iken mümkündür.*

İspat. $p-q, q$ spacelike (timelike), $Z_q(p-q)$ spacelike (timelike) veya lightlike ise Sonuç 2.8 gereğince $\|p\| = \|(p-q)+q\| < \|p-q\| + \|q\|$ olup $\|p\| - \|q\| < \|p-q\|$

yazılabilir. Benzer şekilde $p, p-q$ spacelike (timelike), $Z_p(p-q)$ spacelike (timelike) veya lightlike ise Sonuç 2.8 gereğince $\|q\| = \|(q-p)+p\| < \|p-q\|+\|p\|$ olup $\|q\|-\|p\| < \|p-q\|$ yazılabilir. Buradan $\big|\|p\|-\|q\|\big| < \|p-q\|$ elde edilir. ■

Teorem 2.16. *$p, q \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere $V((p-q)\overline{q})$ ve $V((p-q)\overline{p})$ spacelike veya lightlike ise $\big|\|p\| - \|q\|\big| < \|p-q\|$ eşitsizliği sağlanır. Eşitlik durumu sadece $V((p-q)\overline{q})$ ve $V((p-q)\overline{p})$ lightlike iken mümkündür.*

3
SPLIT KUATERNİYON DİZİLER

Tezin orijinal kısımlarından biri olan bu bölümde, split kuaterniyon diziler tanımlanmış, özellikleri verilmiş, split kuaterniyon dizilerin yakınsaklığı incelenmiştir.

Tanım 3.1. $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}^+ &\to \mathbb{H}_S \\ n &\mapsto f(n) = p_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k \end{aligned}$$

fonksiyonu *split kuaterniyon dizi* olarak tanımlanır. $\{p_n\}$ ile gösterilir.
Eğer $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ tamsayısı için

1. p_n spacelike split kuaterniyon ise $\{p_n\}$ dizisine *spacelike split kuaterniyon dizi*,
2. p_n timelike split kuaterniyon ise $\{p_n\}$ dizisine *timelike split kuaterniyon dizi*,
3. p_n lightlike split kuaterniyon ise $\{p_n\}$ dizisine *lightlike split kuaterniyon dizi*,
4. $p_n = \begin{cases} \text{spacelike}, & n \geq n_t \\ \text{timelike}, & n_s \geq n \\ \text{lightlike}, & n_t \geq n > n_s \end{cases}$ ise $\{p_n\}$ dizisine *karma split kuaterniyon dizi*

denir.

Tanım 3.2. (a_n) reel değerli dizi ve $\{\mathbf{p_n}\} =: (b_n)i + (c_n)j + (d_n)k$ olmak üzere her $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi

$$\{p_n\} := (a_n) + \{\mathbf{p_n}\}$$

şeklinde yazılabilir. $\{\mathbf{p_n}\}$ dizisine $\{p_n\}$ dizisinin vektörel kısmı denir.

Tanım 3.3. (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) reel değerli diziler olmak üzere her $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi

$$\{p_n\} := (a_n) + (b_n)i + (c_n)j + (d_n)k$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 3.4. $\{w_n\}, \{v_n\}$ kompleks diziler olmak üzere her $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi

$$\{p_n\} := \{w_n\} + \{v_n\}j$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\{w_n\} := (a_n) + (b_n)i$ ve $\{v_n\} := (c_n) + (d_n)i$ dir.

Teorem 3.1. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k$, $q_n = x_n + y_n i + z_n j + t_n k \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ split kuaterniyon dizileri için aşağıdaki özellikler geçerlidir.*

1. *Toplama:* $\{p_n\} + \{q_n\} := \{p_n + q_n\}$
2. *Çarpma:* $\{p_n\}\{q_n\} := \{p_n q_n\}$
3. *Eşlenik:* $\overline{\{p_n\}} := \{\overline{p_n}\}$
4. *Norm:* $\|\{p_n\}\| := \{\|p_n\|\}$
5. *İnvers:* $\{p_n\}^{-1} := \{p_n^{-1}\}$

İspat.

1. $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ split kuaterniyon dizilerinin toplamı

$$\begin{aligned}\{p_n\} \pm \{q_n\} :=& [(a_n) + (b_n)i + (c_n)j + (d_n)k] \pm [(x_n) + (y_n)i + (z_n)j + (t_n)k] \\ =& [(a_n) \pm (x_n)] + [(b_n) \pm (y_n)]\, i + [(c_n) \pm (z_n)]\, j + [(d_n) \pm (t_n)]\, k \\ :=& \{(a_n \pm x_n) + (b_n \pm y_n)i + (c_n \pm z_n)j + (d_n \pm t_n)k\} \\ =& \{p_n \pm q_n\}\end{aligned}$$

   şeklindedir.

2. $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ split kuaterniyon dizilerinin çarpımı

$$\begin{aligned}\{p_n\}\{q_n\} :=&(a_n)(x_n) - \langle\{\mathbf{p_n}\},\{\mathbf{q_n}\}\rangle_{\mathbb{R}_2^3} + (a_n)\{\mathbf{p_n}\} + (x_n)\{\mathbf{q_n}\} - \{\mathbf{p_n}\} \wedge_{\mathbb{R}_2^3} \{\mathbf{q_n}\}\\ =&(a_n)(x_n) - (b_n)(y_n) + (c_n)(z_n) + (d_n)(t_n) +\\ &[(a_n)(y_n) + (b_n)(x_n) - (c_n)(t_n) + (d_n)(z_n)]\, i +\\ &[(a_n)(z_n) - (b_n)(t_n) + (c_n)(x_n) + (d_n)(y_n)]\, j\\ &[(a_n)(t_n) + (b_n)(z_n) - (c_n)(y_n) + (d_n)(x_n)]\, k\\ :=&\{(a_n x_n - b_n y_n + c_n z_n + d_n t_n) + (a_n y_n + b_n x_n - c_n t_n + d_n z_n)\, i +\\ &(a_n z_n - b_n t_n + c_n x_n + d_n y_n)\, j + (a_n t_n + b_n z_n - c_n y_n + d_n x_n)\, k\}\\ =&\{p_n q_n\}\end{aligned}$$

şeklindedir.

3. $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisinin eşleniği

$$\begin{aligned}\overline{\{p_n\}} :=&\overline{(a_n) + (b_n)i + (c_n)j + (d_n)k}\\ =&(a_n) - (b_n)i - (c_n)j - (d_n)k\\ =&(a_n) + (-b_n)i + (-c_n)j + (-d_n)k\\ :=&\{a_n - b_n i - c_n j - d_n k\} = \{\overline{p_n}\}\end{aligned}$$

şeklindedir.

4. $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisinin normu

$$\begin{aligned}\|\{p_n\}\| =&\sqrt{\left|(a_n)^2 + (b_n)^2 - (c_n)^2 - (d_n)^2\right|}\\ =&\sqrt{\left|(a_n^2) + (b_n^2) - (c_n^2) - (d_n^2)\right|}\\ =&\sqrt{\left|(a_n^2 + b_n^2 - c_n^2 - d_n^2)\right|}\\ :=&\left\{\sqrt{\left|a_n^2 + b_n^2 - c_n^2 - d_n^2\right|}\right\} = \{\|p_n\|\}\end{aligned}$$

şeklindedir.

5. $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisinin inversi

$$\{p_n\}^{-1} = \frac{\overline{\{p_n\}}}{\|\{p_n\}\|^2} := \frac{\{\overline{p_n}\}}{\{\|p_n\|^2\}} = \left\{\frac{\overline{p_n}}{\|p_n\|^2}\right\} = \{p_n^{-1}\}$$

şeklindedir.

■

Tanım 3.5. $p_n, q_n \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere

1. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n = q_n$ ise $\{p_n\}$ ve $\{q_n\}$ split kuaterniyon dizileri eşittir denir.
2. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n \neq 0_{\mathbb{H}_S}$ ise $\{p_n\}$ dizisine sıfırdan farklı split kuaterniyon dizi denir.

Tanım 3.6. $n, m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere (n_m) sürekli artan tam sayılar dizisi olsun. O halde $\{p_{n_m}\}$ split kuaterniyonlar dizisi, $\{p_n\}$ split kuaterniyonlar dizisinin bir alt dizisidir.

Örnek 3.1. $n, m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $n_m = 2m + 1$ dizisi, $p_{n_m} = \frac{1}{m+1}i - mj$ split kuaterniyon dizisinin bir alt dizisidir.

Tanım 3.7 (Geometrik dizi)**.** $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{R}$, $r = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}_S$ ve p herhangi split kuaterniyon olmak üzere

$$\begin{aligned} g_l : \mathbb{Z}^+ &\to \mathbb{H}_S \\ n &\mapsto g_l(n) = p_n = pr^{n-1} \end{aligned}$$

fonksiyonu *sağ geometrik split kuaterniyon dizi* olarak tanımlanır. $\{p_n\} = \{pr^{n-1}\}$ ile gösterilir.

$$\begin{aligned} g_r : \mathbb{Z}^+ &\to \mathbb{H}_S \\ n &\mapsto g_r(n) = p_n = r^{n-1}p \end{aligned}$$

fonksiyonu *sol geometrik split kuaterniyon dizi* olarak tanımlanır. $\{p_n\} = \{r^{n-1}p\}$ ile gösterilir. $r \in \mathbb{H}_S$ split kuaterniyon sayısına ortak çarpan adı verilir. Eğer $r \in \mathbb{R}$ ise $\{p_n\}$ sağ (sol) geometrik split kuaterniyon dizisine reel ortak çarpana sahip sağ (sol) geometrik split kuaterniyon dizi denir.

! *Bu çalışma boyunca sağ geometrik split kuaterniyon diziler ele alınacaktır. Kısaca geometrik split kuaterniyon dizi denilecektir.*

Örnek 3.2. $\{pr^{n-1}\} = \{p,\ pr,\ pr^2,\ \dots\}$

Teorem 3.2. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için genel terimi $p_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k$ olan split kuaterniyon dizisinin reel ortak çarpana sahip geometrik split kuaterniyon dizi olması için gerek ve yeter şart $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ reel dizilerinin geometrik dizi olmasıdır.*

İspat.

$(\Rightarrow):$ $r \in \mathbb{R}$, $p = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}_S$ ve $p_n = r^{n-1}p = pr^{n-1}$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} p_n =& pr^{n-1} \\ =& (a + bi + cj + dk)\, r^{n-1} \\ =& ar^{n-1} + br^{n-1}i + cr^{n-1}j + dr^{n-1}k \end{aligned}$$

yazılabilir. O halde

$$p_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k = ar^{n-1} + br^{n-1}i + cr^{n-1}j + dr^{n-1}k$$

olup $a_n = a \cdot r^{n-1}$, $b_n = b \cdot r^{n-1}$, $c_n = c \cdot r^{n-1}$, $d_n = d \cdot r^{n-1}$ yazılacağından $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ reel dizileri birer geometrik dizi belirtir.

$(\Leftarrow):$ $a, b, c, d, r, r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{R}$ için $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ dizilerinin genel terimleri sırasıyla $a_n = a \cdot r_1^{n-1}$, $b_n = b \cdot r_2^{n-1}$, $c_n = c \cdot r_3^{n-1}$, $d_n = d \cdot r_4^{n-1}$ olsun. Buradan $r \neq 0_{\mathbb{H}_S}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} p_n =& a_n + b_n i + c_n j + d_n k \\ =& a \cdot r_1^{n-1} + b \cdot r_2^{n-1} i + c \cdot r_3^{n-1} j + d \cdot r_4^{n-1} k \\ =& \left[a \cdot \left(\frac{r_1}{r}\right)^{n-1} + b \cdot \left(\frac{r_2}{r}\right)^{n-1} i + c \cdot \left(\frac{r_3}{r}\right)^{n-1} j + d \cdot \left(\frac{r_4}{r}\right)^{n-1} k \right] r^{n-1} \\ =& \left[a_* + b_* i + c_* j + d_* k\right] r^{n-1} \\ =& p_* r^{n-1} \end{aligned}$$

yazılabildiğinden ortak çarpanı reel olan split kuaterniyon dizi elde edilir.

■

Tanım 3.8 (Sınırlı split kuaterniyon dizi)**.** $(a_n),\ (b_n),\ (c_n),\ (d_n)$ reel dizileri sınırlı ise $\{p_n\} : (a_n)+(b_n)i+(c_n)j+(d_n)k$ split kuaterniyon dizisi sınırlı split kuaterniyon dizidir.

Tanım 3.9 (P-sınırlı split kuaterniyon dizi)**.** $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\|p_n\| < M$ olacak şekilde $\exists M \in \mathbb{R}$ ise $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi P-sınırlı split kuaterniyon dizidir.

Tanım 3.10 (Alterne split kuaterniyon dizi)**.** $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere $\{(-1)^n p_n\}$ dizisine alterne split kuaterniyon dizi denir.

Tanım 3.11 (Harmonik split kuaterniyon dizi)**.** $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere

1. $\{p_n\} := (\frac{1}{a_n}) + (\frac{1}{b_n})i + (\frac{1}{c_n})j + (\frac{1}{d_n})k$ veya
2. $\{p_n^{-1}\} := \{\frac{1}{p_n}\}$

harmonik split kuaterniyon dizi olarak adlandırılır.

Not. $\{p_n\}$ harmonik split kuaterniyon dizi ise $\{(-1)^n p_n\}$ alterne harmonik split kuaterniyon dizi olarak adlandırılır.

3.1 Split Kuaterniyon Dizilerde Yakınsaklık

Tanım 3.12 (Yakınsaklık)**.** $\{p_n\} := (a_n) + (b_n)i + (c_n)j + (d_n)k$ split kuaterniyon dizi olmak üzere $a_n \to a$, $b_n \to b$, $c_n \to c$, $d_n \to d$ ise $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi $p = a + bi + cj + dk$ limit (koordinatsal limit) noktasına yakınsar denir. Yani (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) reel dizileri için $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = d$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n i + \lim_{n\to\infty} c_n j + \lim_{n\to\infty} d_n k$$

şeklinde tanımlanır. Bir diğer ifadeyle (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) reel dizileri yakınsak ise $\{p_n\} := (a_n) + (b_n)i + (c_n)j + (d_n)k$ split kuaterniyon dizisi yakınsaktır.

Teorem 3.3. *$\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisinin limiti varsa tektir.*

İspat. (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) reel dizilerinin limiti tek olduğundan $p = a+bi+cj+dk$ limit noktası tek türlü yazılır. ■

Tanım 3.13 (Iraksaklık)**.** $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi yakınsak değilse ıraksaktır.

Teorem 3.4. *$\{w_n\}$ ve $\{v_n\}$ kompleks diziler, $\{p_n\} := \{w_n\} + \{v_n\}j$ split kuaterniyon dizi ve $w, v \in \mathbb{C}$, $p = w + vj \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere $w_n \to w$ ve $v_n \to v$ ise $p_n \to p$ dir.*

İspat. $\{w_n\} := (a_n) + (b_n)i$, $\{v_n\} := (c_n) + (d_n)i$ kompleks diziler ve $w = a + bi \in \mathbb{C}$, $v = c + di \in \mathbb{C}$ olmak üzere $w_n \to w$ ise $a_n \to a$ ve $b_n \to b$ dir. Benzer şekilde $v_n \to v$ ise $c_n \to c$ ve $d_n \to d$ dir. O halde Tanım 3.12 gereğince $p_n \to p = a + bi + cj + dk$ yani $p_n \to p = w + vj$ elde edilir. ■

Teorem 3.5. $\{p_n\}$ *ve* $\{q_n\}$ *split kuaterniyon dizi olmak üzere* $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, $\lim_{n\to\infty} q_n = q$ *olsun. Öyleyse aşağıdaki özellikler geçerlidir:*

1. $\lim_{n\to\infty} \overline{p_n} = \overline{p}$,
2. $\lim_{n\to\infty} p_n \pm q_n = p \pm q$,
3. $\lim_{n\to\infty} \|p_n\| = \|p\|$,
4. $\lim_{n\to\infty} p_n q_n = pq$,
5. $\|p_n\|, \|p\| \neq 0$ *olmak üzere* $\lim_{n\to\infty} p_n^{-1} = p^{-1}$.

İspat. $\{p_n\} := (a_n) + (b_n)i + (c_n)j + (d_n)k$ split kuaterniyon dizi olmak üzere

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|p_n\| &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{|a_n^2 + b_n^2 - c_n^2 - d_n^2|} \\ &= \sqrt{\left| \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^2 + \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)^2 - \left(\lim_{n\to\infty} c_n\right)^2 - \left(\lim_{n\to\infty} d_n\right)^2 \right|} \\ &= \sqrt{|a^2 + b^2 - c^2 - d^2|} \\ &= \|p\|\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer şıklar benzer şekilde ispatlanabilir. ■

Teorem 3.6. $\{p_n\}$ *split kuaterniyon dizisi yakınsak ise sınırlıdır.*

İspat. $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi yakınsak ise (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) reel dizileri yakınsaktır ve dolayısıyla sınırlıdır. O halde $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi sınırlıdır. ■

3.2 Split Kuaterniyon Dizilerde P-Yakınsaklık

Tanım 3.14. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\|p_n - p\| \to 0$ ise $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi $\|.\|$ pseudo normuna göre $p \in \mathbb{H}_S$ P-limit noktasına P-yakınsar denir.

$$P\text{-}\lim_{n\to\infty} p_n = p \quad \text{veya} \quad p_n \xrightarrow{P} p$$

ile gösterilir.

Tanım 3.15. $\forall \epsilon > 0$ için $n \geq N$ iken $\|p_n - p\| < \epsilon$ olacak şekilde $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ ise $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi $p \in \mathbb{H}_S$ P-limit noktasına P-yakınsar denir.

Teorem 3.7. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ reel diziler ve $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a_n \to a$, $b_n \to b$, $c_n \to c$, $d_n \to d$ ise genel terimi $p_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k$ olan split kuaterniyon dizisi $p = a + bi + cj + dk$ noktasına P-yakınsar.*

İspat. $\epsilon > 0$ için;
$a_n \to a$ ise $n \geq N_1$ iken $|a_n - a| < \epsilon/4$ olacak şekilde $\exists N_1 \in \mathbb{Z}^+$,
$b_n \to b$ ise $n \geq N_2$ iken $|b_n - b| < \epsilon/4$ olacak şekilde $\exists N_2 \in \mathbb{Z}^+$,
$c_n \to c$ ise $n \geq N_3$ iken $|c_n - c| < \epsilon/4$ olacak şekilde $\exists N_3 \in \mathbb{Z}^+$,
$d_n \to d$ ise $n \geq N_4$ iken $|d_n - d| < \epsilon/4$ olacak şekilde $\exists N_4 \in \mathbb{Z}^+$ yazılabilir.
Buradan $n \geq N = \text{maks}\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ iken

$$\begin{aligned}
\|p_n - p\| &= \sqrt{|(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 - (c_n - c)^2 - (d_n - d)^2|} \\
&\leq \sqrt{|(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 + (c_n - c)^2 + (d_n - d)^2|} \\
&\leq \sqrt{|(a_n - a)^2|} + \sqrt{|(b_n - b)^2|} + \sqrt{|(c_n - c)^2|} + \sqrt{|(d_n - d)^2|} \\
&= |a_n - a| + |b_n - b| + |c_n - c| + |d_n - d| \\
&< \epsilon/4 + \epsilon/4 + \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon
\end{aligned}$$

olacak şekilde $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ bulunabildiğinden $p_n \xrightarrow{P} p$ dir. ■

Sonuç 3.1. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ reel dizileri yakınsak ise $\{p_n\} := (a_n) + (b_n)i + (c_n)j + (d_n)k$ split kuaterniyon dizisi P-yakınsaktır.*

Teorem 3.8. *$\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi yakınsak ise P-yakınsaktır. Tersi doğru değildir.*

İspat. $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi yakınsak ise $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ reel dizileri yakınsaktır. Sonuç 3.1 gereğince $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi P-yakınsaktır. ■

Sonuç 3.2. *$b_n \to b$, $c_n \to c$, $d_n \to d$ ise $\mathbf{p_n} \xrightarrow{P} \mathbf{p}$ dir.*

Teorem 3.9. *$\{w_n\}$ ve $\{v_n\}$ kompleks diziler ve $\{p_n\} := \{w_n\} + \{v_n\}j$ split kuaterniyon dizi ve $w, v \in \mathbb{C}$, $p = w + vj \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere $w_n \to w$ ve $v_n \to v$ ise $p_n \xrightarrow{P} p$ dir.*

İspat. $\epsilon > 0$ için;
$w_n \to w$ ise $n \geq N_1$ iken $|w_n - w| < \epsilon/2$ olacak şekilde $\exists N_1 \in \mathbb{Z}^+$,

$v_n \to v$ ise $n \geq N_2$ iken $|v_n - v| < \epsilon/2$ olacak şekilde $\exists N_2 \in \mathbb{Z}^+$ yazılabilir. Buradan $n \geq N = \text{maks}\{N_1, N_2\}$ için

$$\begin{aligned}
\|p_n - p\| &= \sqrt{|(w_n - w)^2 - (v_n - v)^2|} \\
&\leq \sqrt{|(w_n - w)^2 + (v_n - v)^2|} \\
&\leq \sqrt{|(w_n - w)^2|} + \sqrt{|(v_n - v)^2|} \\
&= |w_n - w| + |v_n - v| \\
&< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon
\end{aligned}$$

olacak şekilde $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ bulunabildiğinden $p_n \xrightarrow{P} p$ dir. ■

Teorem 3.10. *Her lightlike split kuaterniyon dizinin P-yakınsadığı noktalardan biri $0_{\mathbb{H}_S}$ noktasıdır.*

İspat. $\forall \epsilon > 0$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $\|p_n - 0_{\mathbb{H}_S}\| = \|p_n\| = \sqrt{|I_q|} = 0 < \epsilon$ olduğundan $p_n \xrightarrow{P} 0_{\mathbb{H}_S}$ yazılabilir. ■

Sonuç 3.3. *Her lightlike split kuaterniyon dizi P-yakınsaktır.*

Not. Split kuaterniyon dizilerinde genel olarak P-limit tek değildir.

Örnek 3.3. Aşağıda 6 tip split kuaterniyon dizi için P-limitin tek olmadığı örnekler verilmiştir.

p_n	p_n	$\mathbf{p_n}$	P-Yakınsadığı noktalar
$\frac{1}{n+1} + \frac{2n}{n+1}i + \frac{1}{n+2}j + \frac{n}{n+1}k$	sl	sl	$2i + k, 4i + 2k, 6i + 3k, \ldots$
$\frac{n+1}{n+2} + ni + nj + \frac{1}{n+1}k$	sl	tl	$1 + i + j, 1 + 2i + 2j, 1 + 3i + 3j, \ldots$
$\frac{1}{n} + \frac{n+1}{n^2}i + \frac{1}{n}j + \frac{\sqrt{2n+1}}{n^2}k$	sl	ll	$1 + j, 2 + 2j, 3 + 3j, \ldots$
$\frac{1}{n+1} + ni + nj + \frac{n+1}{n+2}k$	tl	tl	$i + j + 1, 2i + 2j + 1, 3i + 3j + 1, \ldots$
$n + ni + nj + nk$	ll	tl	$i + j, 1 + k, j + k, 1 + i + j + k \ldots$
$\frac{n}{n+1}i + \frac{n}{n+1}j$	ll	ll	$i + j, 2i + 2j, 3i + 3j, \ldots$

Tablo 3.1 P-limiti tek olmayan split kuaterniyon diziler

Örnek 3.4. Aşağıda 6 tip split kuaterniyon dizi için $0_{\mathbb{H}_S}$ dan farklı P-limitlerin tek olduğu örnekler verilmiştir.

p_n	p_n	$\mathbf{p_n}$	P-Yakınsadığı nokta
$\frac{n}{(n+1)}+\frac{n}{n+1}i+\frac{1}{n+2}j$	sl	sl	$1+i$
$\frac{n}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)}i+\frac{n}{(n+1)}j$	sl	tl	$1+j$
$\frac{n}{(n+1)}+\frac{n}{(n+1)}i+\frac{n}{(n+1)}k$	sl	ll	$1+i+k$
$\frac{n}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)}j+\frac{n}{(n+1)}k$	tl	tl	$1+k$
$1+\frac{\sqrt{2n+1}}{(n+1)}j+\frac{n}{(n+1)}k$	ll	tl	$1+k$
$i+\frac{\sqrt{2n+1}}{(n+1)}j+\frac{n}{(n+1)}k$	ll	ll	$i+k$

Tablo 3.2 P-limiti tek olan split kuaterniyon diziler

Tanım 3.16. $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi P-yakınsak değilse yani P-limiti yok ise P-ıraksaktır denir.

Tanım 3.17. $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizinin P-limiti tek değil ve

- Sonlu sayıda noktaya P-yakınsıyor ise $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisine *sonlu P-ıraksak*,
- Sonsuz sayıda noktaya P-yakınsıyor ise $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisine *sonsuz P-ıraksak*

denir.

Örnek 3.5. Genel terimi $p_n = n + n^2 i + n^3 j$ olan split kuaterniyon dizisi P-ıraksaktır.

Örnek 3.6. Genel terimi $p_n = \frac{1}{n}+ni+\frac{1}{n}j$ olan split kuaterniyon dizisi P-ıraksaktır.

Teorem 3.11. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n = a_n + \mathbf{p_n} \in \mathbb{H}_S$ ve $p = a + \mathbf{p} \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere $\mathbf{p_n} - \mathbf{p}$ spacelike iken $p_n \xrightarrow{P} p$ olması için gerek ve yeter şart $a_n \to a$ ve $\mathbf{p_n} \xrightarrow{P} \mathbf{p}$ olmasıdır. Yani*

$$P\text{-}\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} a_n + P\text{-}\lim_{n\to\infty} \mathbf{p_n}$$

yazılabilir.

İspat.

$(\Rightarrow)$: $p_n \xrightarrow{P} p$ ise $\epsilon > 0$ için $n \geq N$ iken $\|p_n - p\| < \epsilon$ olacak şekilde $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}\epsilon^2 > \|p_n - p\|^2 &= |(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 - (c_n - c)^2 - (d_n - d)^2| \\ &= |(a_n - a)^2 + I_{\mathbf{p_n - p}}| \\ &= (a_n - a)^2 + \|\mathbf{p_n} - \mathbf{p}\|^2\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $(a_n - a)^2 < \epsilon^2$, $\|\mathbf{p_n} - \mathbf{p}\|^2 < \epsilon^2$ veya $|a_n - a| < \epsilon$, $\|\mathbf{p_n} - \mathbf{p}\| < \epsilon$ yazılabileceğinden $a_n \to a$ ve $\mathbf{p_n} \xrightarrow{P} \mathbf{p}$ dir.

$(\Leftarrow)$: $a_n \to a$ ise $n \geq N_1$ iken $|a_n - a| < \sqrt{\epsilon/2}$ olacak şekilde $\exists N_1 \in \mathbb{Z}^+$, $\mathbf{p_n} \xrightarrow{P} \mathbf{p}$ ise $n \geq N_2$ iken $\|\mathbf{p_n} - \mathbf{p}\| < \sqrt{\epsilon/2}$ olacak şekilde $\exists N_2 \in \mathbb{Z}^+$ yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}\|p_n - p\|^2 &= |(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 - (c_n - c)^2 - (d_n - d)^2| \\ &= |(a_n - a)^2 + I_{\mathbf{p_n - p}}| \\ &= (a_n - a)^2 + \|\mathbf{p_n} - \mathbf{p}\|^2 < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $p_n \xrightarrow{P} p$ dir.

■

Teorem 3.12. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k,\ p = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}_S$ ve $p_n - p$ spacelike split kuaterniyon olmak üzere $a_n \to a$ ve $b_n \to b$ ise $c_n \to c$ ve $d_n \to d$ dir.*

İspat. $a_n \to a$ olduğundan $\epsilon > 0$ için $n \geq N_1$ iken $|a_n - a| < \sqrt{\epsilon/2}$ olacak şekilde $\exists N_1 \in \mathbb{Z}^+$, $b_n \to b$ olduğundan $n \geq N_2$ iken $|b_n - b| < \sqrt{\epsilon/2}$ olacak şekilde $\exists N_2 \in \mathbb{Z}^+$ yazılabilir. Buradan $\forall m, n \geq N = \text{maks}\{N_1, N_2\}$ iken

$$(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

elde edilir. Ayrıca, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n - p$ spacelike olduğundan

$$I_{p_n - p} = (a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 - (c_n - c)^2 - (d_n - d)^2 > 0$$

yazılabilir. Öyleyse

$$(c_n - c)^2 + (d_n - d)^2 < (a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 < \epsilon$$

olup $(c_n - c)^2 < \epsilon$, $(d_n - d)^2 < \epsilon$ veya $|c_n - c| < \sqrt{\epsilon}$, $|d_n - d| < \sqrt{\epsilon}$ yazılabildiğinden $c_n \to c$ ve $d_n \to d$ elde edilir. ■

Sonuç 3.4. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k,\ p = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}_S$ ve $p_n - p$ spacelike split kuaterniyon olmak üzere $a_n \to a$ ve $b_n \to b$ ise $p_n \to p$ ve $p_n \xrightarrow{P} p$ dir.*

İspat. Teorem 3.12 gereğince $c_n \to c$ ve $d_n \to d$ dir. Böylece Teorem 3.7 gereğince $p_n \xrightarrow{P} p$ dir. Tanım 3.12 gereğince $p_n \to p$ dir. ■

Sonuç 3.5. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k \in \mathbb{H}_S$ ve $p_n - p$ spacelike split kuaterniyon olmak üzere (a_n) ve (b_n) reel dizileri yakınsak ise $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi hem yakınsak hem de P-yakınsaktır.*

Teorem 3.13. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $w_n,\ v_n,\ w,\ v \in \mathbb{C}$, $p_n = w_n + v_n j,\ p = w + vj \in \mathbb{H}_S$ ve $p_n - p$ spacelike split kuaterniyon olmak üzere $w_n \to w$ ise $v_n \to v$ dir.*

İspat. $w_n \to w$ olduğundan $\epsilon > 0$ için $n \geq N$ iken $|w_n - w| < \epsilon$ olacak şekilde $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ yazılabilir. Ayrıca, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n - p$ spacelike olduğundan

$$I_{p_n - p} = (w_n - w)^2 - (v_n - v)^2 > 0$$

yazılabilir. Öyleyse

$$(v_n - v)^2 < (w_n - w)^2 < \epsilon^2$$

olup $(v_n - v)^2 < \epsilon^2$ veya $|v_n - v| < \epsilon$ yazılabildiğinden $v_n \to v$ elde edilir. ■

Sonuç 3.6. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $w_n,\ v_n,\ w,\ v \in \mathbb{C}$, $p_n = w_n + v_n j,\ p = w + vj \in \mathbb{H}_S$ ve $p_n - p$ spacelike split kuaterniyon olmak üzere $w_n \to w$ ise $p_n \xrightarrow{P} p$ dir.*

Teorem 3.14. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k,\ p = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}_S$ ve $p_n - p$ timelike split kuaterniyon olmak üzere $c_n \to c$ ve $d_n \to d$ ise $a_n \to a$ ve $b_n \to b$ dir.*

İspat. $c_n \to c$ olduğundan $\epsilon > 0$ için $n \geq N_1$ iken $|c_n - c| < \sqrt{\epsilon/2}$ olacak şekilde $\exists N_1 \in \mathbb{Z}^+$, $d_n \to d$ olduğundan $n \geq N_2$ iken $|d_n - d| < \sqrt{\epsilon/2}$ olacak şekilde

$\exists N_2 \in \mathbb{Z}^+$ yazılabilir. Buradan

$$(c_n - c)^2 + (d_n - d)^2 < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

elde edilir. Ayrıca, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n - p$ timelike olduğundan

$$I_{p_n - p} = (a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 - (c_n - c)^2 - (d_n - d)^2 < 0$$

yazılabilir. Öyleyse

$$(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 < (c_n - c)^2 + (d_n - d)^2 < \epsilon$$

olup $(a_n - a)^2 < \epsilon$, $(b_n - b)^2 < \epsilon$ veya $|a_n - a| < \sqrt{\epsilon}$, $|b_n - b| < \sqrt{\epsilon}$ yazılabildiğinden $a_n \to a$ ve $b_n \to b$ elde edilir. ■

Sonuç 3.7. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k,\ p = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}_S$ ve $p_n - p$ timelike split kuaterniyon olmak üzere $c_n \to c$ ve $d_n \to d$ ise $p_n \to p$ ve $p_n \xrightarrow{P} p$ dir.*

İspat. Teorem 3.14 gereğince $a_n \to a$ ve $b_n \to b$ dir. Böylece Teorem 3.7 gereğince $p_n \xrightarrow{P} p$ dir. Tanım 3.12 gereğince $p_n \to p$ dir. ■

Sonuç 3.8. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k \in \mathbb{H}_S$ ve $p_n - p$ timelike split kuaterniyon olmak üzere (c_n) ve (d_n) reel dizileri yakınsak ise $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi hem yakınsak hem de P-yakınsaktır.*

Teorem 3.15. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $w_n,\ v_n,\ w,\ v \in \mathbb{C}$, $p_n = w_n + v_n j,\ p = w + vj \in \mathbb{H}_S$ ve $p_n - p$ timelike split kuaterniyon olmak üzere $v_n \to v$ ise $w_n \to w$ dir.*

İspat. $v_n \to v$ olduğundan $\epsilon > 0$ için $n \geq N$ iken $|v_n - v| < \epsilon$ olacak şekilde $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ yazılabilir. Ayrıca, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n - p$ timelike olduğundan

$$I_{p_n - p} = (w_n - w)^2 - (v_n - v)^2 < 0$$

yazılabilir. Öyleyse

$$(w_n - w)^2 < (v_n - v)^2 < \epsilon^2$$

olup $(w_n - w)^2 < \epsilon^2$ veya $|w_n - w| < \epsilon$ yazılabildiğinden $w_n \to w$ elde edilir. ■

Teorem 3.16. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n - p$ lightlike split kuaterniyon ise $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi p noktasına P-yakınsar.*

İspat. $\forall \epsilon > 0$ için $I_{p_n - p} = \|p_n - p\|^2 = 0 < \epsilon$ yazılabileceğinden $p_n \xrightarrow{P} p$ dir. ■

Sonuç 3.9. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n - p$ lightlike split kuaterniyon ise $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ reel dizilerinin yakınsaklığı aranmaksızın $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi p noktasına P-yakınsar.*

Örnek 3.7. $p_n = \sqrt{2}n + ni - nj + \sqrt{2}nk$ veya $p_n = n + ni + nj + nk$ (Burada $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ ıraksak, $\{p_n\}$ P-yakınsak)

Örnek 3.8. $p_n = n + \frac{n}{n+1}i - nj$, (Burada $(a_n), (d_n)$ ıraksak (b_n) yakınsak, $\{p_n\}$ P-yakınsak)

Teorem 3.17. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k,\ p = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}_S$ ve $p_n - p$ lightlike split kuaterniyon olmak üzere $a_n \to a$ ve $b_n \to b$ olması için gerek ve yeter şart $c_n \to c$ ve $d_n \to d$ olmasıdır.*

İspat. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n - p$ lightlike olduğundan

$$I_{p_n - p} = (a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 - (c_n - c)^2 - (d_n - d)^2 = 0$$

veya

$$(c_n - c)^2 + (d_n - d)^2 = (a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 \tag{3.1}$$

yazılabilir.

$(\Rightarrow)$: $a_n \to a$ olduğundan $\epsilon > 0$ için $n \geq N_1$ iken $|a_n - a| < \sqrt{\epsilon/2}$ olacak şekilde $\exists N_1 \in \mathbb{Z}^+$, $b_n \to b$ olduğundan $n \geq N_2$ iken $|b_n - b| < \sqrt{\epsilon/2}$ olacak şekilde $\exists N_2 \in \mathbb{Z}^+$ yazılabilir. Buradan

$$(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

elde edilir. Eşitlik (3.1) kullanılırsa; $(c_n - c)^2 < \epsilon$, $(d_n - d)^2 < \epsilon$ veya $|c_n - c| < \sqrt{\epsilon}$, $|d_n - d| < \sqrt{\epsilon}$ yazılabildiğinden $c_n \to c$ ve $d_n \to d$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$: $c_n \to c$ olduğundan $\epsilon > 0$ için $n \geq N_1$ iken $|c_n - c| < \sqrt{\epsilon/2}$ olacak şekilde $\exists N_1 \in \mathbb{Z}^+$, $d_n \to d$ olduğundan $n \geq N_2$ ise $|d_n - d| < \sqrt{\epsilon/2}$ olacak şekilde $\exists N_2 \in \mathbb{Z}^+$ yazılabilir. Buradan $(c_n - c)^2 + (d_n - d)^2 < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$ elde edilir. Eşitlik (3.1) kullanılırsa; $(a_n - a)^2 < \epsilon$, $(b_n - b)^2 < \epsilon$ veya $|a_n - a| < \sqrt{\epsilon}$, $|b_n - b| < \sqrt{\epsilon}$ yazılabildiğinden $a_n \to a$ ve $b_n \to b$ elde edilir.

■

Sonuç 3.10. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k,\ p = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}_{\mathbb{S}}$ ve $p_n - p$ lightlike split kuaterniyon olmak üzere*

1. *$a_n \to a$ ve $b_n \to b$ ise*

ya da

2. *$c_n \to c$ ve $d_n \to d$ ise*

$p_n \to p$ dir.

İspat. Teorem 3.17 gereğince;

1. $c_n \to c$ ve $d_n \to d$ dir. Böylece Tanım 3.12 gereğince $p_n \to p$ dir.
2. $a_n \to a$ ve $b_n \to b$ dir. Böylece Tanım 3.12 gereğince $p_n \to p$ dir.

■

Sonuç 3.11. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k \in \mathbb{H}_{\mathbb{S}}$ ve $p_n - p$ lightlike split kuaterniyon olmak üzere*

1. *(a_n) ve (b_n) reel dizileri yakınsak ise ya da*
2. *(c_n) ve (d_n) reel dizileri yakınsak ise*

$\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi yakınsaktır.

Teorem 3.18. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $w_n,\ v_n,\ w,\ v \in \mathbb{C}$, $p_n = w_n + v_n j,\ p = w + vj \in \mathbb{H}_S$ ve $p_n - p$ lightlike split kuaterniyon olmak üzere $w_n \to w$ olması için gerek ve yeter şart $v_n \to v$ olmasıdır.*

İspat. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n - p$ lightlike olduğundan

$$I_{p_n - p} = (w_n - w)^2 - (v_n - v)^2 = 0$$

yazılabilir.

$(\Rightarrow)$: $w_n \to w$ olduğundan $\epsilon > 0$ için $n \geq N$ iken $|w_n - w| < \epsilon$ olacak şekilde $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ yazılabilir. Öyleyse

$$(v_n - v)^2 = (w_n - w)^2 < \epsilon^2$$

olup $(v_n - v)^2 < \epsilon^2$ veya $|v_n - v| < \epsilon$ yazılabildiğinden $v_n \to v$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$: $v_n \to v$ olduğundan $\epsilon > 0$ için $n \geq N$ iken $|v_n - v| < \epsilon$ olacak şekilde $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ yazılabilir. Öyleyse

$$(w_n - w)^2 = (v_n - v)^2 < \epsilon^2$$

olup $(w_n - w)^2 < \epsilon^2$ veya $|w_n - w| < \epsilon$ yazılabildiğinden $w_n \to w$ elde edilir.

■

Teorem 3.19. *$\{p_n\}$ lightlike split kuaterniyon dizi, p lightlike split kuaterniyon olmak üzere $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $\langle p_n, p\rangle_{\mathbb{H}_S} = 0$ ise $p_n \xrightarrow{P} p$ dir.*

İspat. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $I_{p_n} = \langle p_n, p_n\rangle = 0$ ve $I_p = \langle p, p\rangle = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}\|p_n - p\| =& \sqrt{|\langle p_n - p, p_n - p\rangle|} \\ =& \sqrt{|\langle p_n, p_n\rangle + \langle p, p\rangle - 2\langle p_n, p\rangle|} \\ =& \sqrt{2\,|\langle p_n, p\rangle|}\end{aligned}$$

yazılabilir. O halde $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $\langle p_n, p\rangle = 0$ ise $p_n \xrightarrow{P} p$ dir. ■

Teorem 3.20. *$\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi yakınsak ise sınırlıdır.*

İspat. $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi yakınsak ise bileşenlerini oluşturan reel diziler de yakınsak, dolayısıyla sınırlıdır. Öyleyse $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi sınırlıdır.

■

Teorem 3.21. *$\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi $p \in \mathbb{H}_S$ noktasına P-yakınsıyor ve $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n - p, p_n, p$ spacelike (timelike), $Z_p(p_n - p)$ ve $Z_{p_n}(p_n - p)$ spacelike (timelike) veya lightlike ise $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi P-sınırlıdır.*

İspat. $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi P-yakınsak ise $p \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere $\forall \epsilon > 0$ için $n \geq N$ iken $\|p_n - p\| < \epsilon$ olacak şekilde $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ yazılabilir. Teorem 2.15 gereğince $p_n - p, p_n, p$ spacelike (timelike), $Z_p(p_n - p)$ ve $Z_{p_n}(p_n - p)$ spacelike (timelike) veya lightlike ise $\|p_n\| - \|p\| \leq \big|\|p_n\| - \|p\|\big| < \|p_n - p\|$

yazılabilir. $\epsilon_1 = 1$ seçilirse $n \geq N$ için $\|p_n\| - \|p\| < \|p_n - p\| < \epsilon_1 = 1$ yazılabilir. O halde $n \geq N$ için $\|p_n\| < \|p\| + 1$ olur.
$M = \text{maks}\{\|p_1\|, \|p_2\|, \ldots, \|p_{N-1}\|, \|p\| + 1\}$ alınırsa $\forall n$ için $\|p_n\| \leq M$ elde edildiğinden $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi P-sınırlıdır denir. ■

Teorem 3.22. *$\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi $p \in \mathbb{H}_S$ noktasına P-yakınsıyor ve $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $V((p_n - p)\overline{p})$ ve $V((p_n - p)\overline{p_n})$ spacelike veya lightlike ise $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi P-sınırlıdır.*

Teorem 3.23. *$\{p_n\}$, $\{q_n\}$ split kuaterniyon diziler olmak üzere $p_n \xrightarrow{P} p$ ve $q_n \xrightarrow{P} q$ olsun. Öyleyse aşağıdaki özellikler geçerlidir.*

1. *$\overline{p_n} \xrightarrow{P} \overline{p}$ dir.*
2. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n - p, q_n - q$ spacelike (timelike), $Z_{q_n - q}(p_n - p)$ spacelike (timelike) veya lightlike ise $p_n \pm q_n \xrightarrow{P} p \pm q$ dir.*
3. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n - p, p_n, p$ spacelike (timelike), $Z_p(p_n - p)$ ve $Z_{p_n}(p_n - p)$ spacelike (timelike) veya lightlike ise $\|p_n\| \xrightarrow{P} \|p\|$ dir.*
4. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n - p, p_n, p$ spacelike (timelike), $Z_p(p_n - p)$ ve $Z_{p_n}(p_n - p)$ spacelike (timelike) veya lightlike ise ve $p_n(q_n - q), (p_n - p)q$ spacelike (timelike), $Z_{(p_n - p)q}(p_n(q_n - q))$ spacelike (timelike) veya lightlike ise $p_n q_n \xrightarrow{P} pq$ dir.*
5. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n - p, p_n, p$ spacelike (timelike), $Z_p(p_n - p)$ ve $Z_{p_n}(p_n - p)$ spacelike (timelike) veya lightlike ise $p_n^{-1} \xrightarrow{P} p^{-1}$ dir.*

İspat. $p_n \xrightarrow{P} p$ ve $q_n \xrightarrow{P} q$ olduğundan $\forall \epsilon_1 > 0$ için $n \geq N_1$ iken $\|p_n - p\| < \epsilon_1$ olacak şekilde $\exists N_1 \in \mathbb{Z}^+$ ve $\forall \epsilon_2 > 0$ için $n \geq N_2$ iken $\|p_n - p\| < \epsilon_2$ olacak şekilde $\exists N_2 \in \mathbb{Z}^+$ yazılabilir.

1. Teorem 2.10 kullanılırsa $n \geq N_1$ iken $\|\overline{p_n} - \overline{p}\| = \|\overline{p_n - p}\| = \|p_n - p\| < \epsilon_1$ yazılabileceğinden $\overline{p_n} \xrightarrow{P} \overline{p}$ elde edilir.
2. Teorem 2.13 kullanılırsa $n \geq N = \text{maks}\{N_1, N_2\}$ iken

$$\begin{aligned}\|(p_n + q_n) - (p + q)\| =& \|(p_n - p) + (q_n - q)\| \\ <& \|(p_n - p)\| + \|(q_n - q)\| < \epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon_3\end{aligned}$$

yazılabileceğinden $p_n + q_n \xrightarrow{P} p + q$ elde edilir. Benzer şekilde $p_n - q_n = p_n + (-q_n) \xrightarrow{P} p + (-q) = p - q$ yazılabileceğinden $p_n \pm q_n \xrightarrow{P} p \pm q$ elde edilir.

3. Teorem 2.15 kullanılırsa $n \geq N_1$ iken $\big|\|p_n\| - \|p\|\big| < \|p_n - p\| < \epsilon_1$ yazılabileceğinden $\|p_n\| \xrightarrow{P} \|p\|$ elde edilir.

4. Teorem 3.21 gereğince $\{p_n\}$ dizisi sınırlıdır. O halde $\forall n$ için $\|p_n\| < M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Ayrıca $n \geq N = \text{maks}\{N_1, N_2\}$ için $\epsilon_1 = \epsilon/2\|q\|$ ve $\epsilon_2 = \epsilon/2M$ seçilsin. Teorem 2.10 ve Teorem 2.13 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|p_n q_n - pq\| &= \|p_n q_n - p_n q + p_n q - pq\| \\
&= \|p_n(q_n - q) + (p_n - p)q\| \\
&< \|p_n(q_n - q)\| + \|(p_n - p)q\| \\
&= \|p_n\|\|(q_n - q)\| + \|(p_n - p)\|\|q\| \\
&< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon
\end{aligned}$$

yazılabileceğinden $p_n q_n \xrightarrow{P} pq$ elde edilir.

5. $p_n \xrightarrow{P} p$ olduğundan $n \geq N_1$ iken $\epsilon = \|p\|/2$ için $\|p_n - p\| < \|p\|/2$ olacak şekilde $\exists N_1 \in \mathbb{Z}^+$ yazılabilir. Ayrıca

$$\|p\| = \|p_n - (p_n - p)\| < \|p_n\| + \|(p_n - p)\| < \|p_n\| + \frac{\|p\|}{2}$$

olup $\|p\| < \|p_n\| + \|p\|/2$ veya $\|p\|/2 < \|p_n\|$ elde edilir. Yine $n \geq N_2$ iken $\epsilon = \epsilon\|p\|^3/8$ için $\|p_n - p\| < \epsilon\|p\|^2/8 < \epsilon\|p\|^3/8$ olacak şekilde $\exists N_2 \in \mathbb{Z}^+$ yazılabilir. 3. şık gereğince $\big|\|p_n\| - \|p\|\big| < \epsilon\|p\|^3/8$ olup eğer $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için p_n ve p aynı türde olduklarından $\big|I_{p_n} - I_p\big| = \big||I_{p_n}| - |I_p|\big| < \epsilon\|p\|^3/8$ yazılabilir. Buradan $n \geq N = \text{maks}\{N_1, N_2\}$ için

$$\begin{aligned}
\big\|p_n^{-1} - p^{-1}\big\| = \left\|\frac{\overline{p_n}}{I_{p_n}} - \frac{\overline{p}}{I_p}\right\| = \frac{\big\|\overline{p_n} I_p - \overline{p} I_{p_n}\big\|}{|I_{p_n}|\,|I_p|} &= \frac{\big\|\overline{p_n} I_p - \overline{p} I_p + \overline{p} I_p - \overline{p} I_{p_n}\big\|}{|I_{p_n}|\,|I_p|} \\
&< \frac{|I_p|\big\|\overline{p_n} - \overline{p}\big\|}{|I_{p_n}|\,|I_p|} + \frac{\big\|\overline{p}\big\||I_p - I_{p_n}|}{|I_{p_n}|\,|I_p|} \\
&< \frac{\big\|p_n - p\big\|}{\|p_n\|^2} + \frac{|I_p - I_{p_n}|}{\|p_n\|^2\|p\|} \\
&< \frac{4}{\|p\|^2}\frac{\epsilon\|p\|^2}{8} + \frac{4}{\|p\|^2}\frac{1}{\|p\|}\frac{\epsilon\|p\|^3}{8} = \epsilon
\end{aligned}$$

yazılabileceğinden $p_n^{-1} \xrightarrow{P} p^{-1}$ elde edilir.

■

Teorem 3.24. *$\{p_n\}$, $\{q_n\}$ split kuaterniyon diziler olmak üzere $p_n \xrightarrow{P} p$ ve $q_n \xrightarrow{P} q$ olsun. Öyleyse aşağıdaki özellikler geçerlidir.*

1. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $V(p_n - p)\overline{q_n - q}$ spacelike veya lightlike ise $p_n \pm q_n \xrightarrow{P} p \pm q$ dir.*
2. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $V(p_n - p)\overline{p}$ ve $V(p_n - p)\overline{p_n}$ spacelike veya lightlike ise $\|p_n\| \xrightarrow{P} \|p\|$ dir.*
3. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $V(p_n - p)\overline{p}$, $V(p_n - p)\overline{p_n}$ ve $V(p_n(q_n - q)\overline{(p_n - p)q})$ spacelike veya lightlike ise $p_n q_n \xrightarrow{P} pq$ dir.*
4. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $V(p_n - p)\overline{p}$ ve $V(p_n - p)\overline{p_n}$ spacelike veya lightlike ise $p_n^{-1} \xrightarrow{P} p^{-1}$ dir.*

Teorem 3.25. *$p \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere $\|p\| < 1$ ise $\underset{n\to\infty}{P\text{-}\lim} p^n = 0_{\mathbb{H}_S}$ sağlanır.*

İspat. $p = 0_{\mathbb{H}_S}$ ise $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p^n = 0_{\mathbb{H}_S}$ olup $p^n \xrightarrow{P} 0_{\mathbb{H}_S}$ dır.
$p \neq 0_{\mathbb{H}_S}$ ise $\|p\| < 1$ olduğundan $r \in \mathbb{R}$ için $\|p\| = \dfrac{1}{1+r}$ yazılabilir. O halde $\epsilon > 0$ için $N > \dfrac{1}{r\epsilon}$ seçilirse $n \geq N$ için

$$\|p^n - 0_{\mathbb{H}_S}\| = \|p\|^n = \frac{1}{(1+r)^n} \leq \frac{1}{1+nr} < \frac{1}{nr} < \frac{1}{Nr} < \epsilon$$

olup $p^n \xrightarrow{P} 0_{\mathbb{H}_S}$ elde edilir. ■

3.3 Cauchy ve P-Cauchy Split Kuaterniyon Diziler

Tanım 3.18. $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ reel dizileri Cauchy dizileri ise $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisine Cauchy split kuaterniyon dizi denir.

Tanım 3.19. $n, m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\forall \epsilon > 0$ için $\forall m, n \geq N$ iken $\|p_n - p_m\| < \epsilon$ olacak şekilde $\exists N > 0$ ise $\{p_n\}$ dizisine *P-Cauchy split kuaterniyon dizi* denir.

Örnek 3.9. Genel terimi $p_n = \frac{2-i+j-k}{\sqrt{3n}}$ olan split kuaterniyon dizi hem Cauchy hem de P-Cauchy split kuaterniyondur.

Teorem 3.26. *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{R}$ ve $p_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ reel dizileri Cauchy dizileri ise $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi P-Cauchy split kuaterniyon dizisidir.*

İspat. $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ reel dizileri Cauchy dizileri ise $\epsilon > 0$ için

- $\forall m, n \geq N_1$ iken $|a_n - a_m| < \epsilon/4$ olacak şekilde $\exists N_1 > 0$,
- $\forall m, n \geq N_2$ iken $|b_n - b_m| < \epsilon/4$ olacak şekilde $\exists N_2 > 0$,
- $\forall m, n \geq N_3$ iken $|c_n - c_m| < \epsilon/4$ olacak şekilde $\exists N_3 > 0$,
- $\forall m, n \geq N_4$ iken $|d_n - d_m| < \epsilon/4$ olacak şekilde $\exists N_4 > 0$

yazılabilir. Buradan $\forall m, n \geq N = \text{maks}\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ iken

$$\begin{aligned}
\|p_n - p_m\| =& \sqrt{|(a_n - a_m)^2 + (b_n - b_m)^2 - (c_n - c_m)^2 - (d_n - d_m)^2|} \\
<& \sqrt{|(a_n - a_m)^2 + (b_n - b_m)^2 + (c_n - c_m)^2 + (d_n - d_m)^2|} \\
<& \sqrt{|(a_n - a_m)^2|} + \sqrt{|(b_n - b_m)^2|} + \sqrt{|(c_n - c_m)^2|} + \sqrt{|(d_n - d_m)^2|} \\
=& |a_n - a_m| + |b_n - b_m| + |c_n - c_m| + |d_n - d_m| \\
<& \epsilon/4 + \epsilon/4 + \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon
\end{aligned}$$

elde edildiğinden $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi P-Cauchy split kuaterniyon dizidir denir. ■

Sonuç 3.12. *$\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi, Cauchy split kuaterniyon dizi ise P-Cauchy split kuaterniyon dizidir. Tersi doğru değildir.*

İspat. $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi, Cauchy split kuaterniyon dizi ise $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ reel dizileri Cauchy dizileridir. Teorem 3.26 gereğince $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi, P-Cauchy split kuaterniyon dizidir. ■

Örnek 3.10. Genel terimi $p_n = n + \frac{1}{n}i + \frac{1}{2^n}j + nk$ olan split kuaterniyon dizi P-Cauchy split kuaterniyon dizidir. Ancak Cauchy split kuaterniyon dizi değildir.

Teorem 3.27. *$\forall n, m \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k$, $p_m \in \mathbb{H}_S$ ve $p_n - p_m$ spacelike kuaterniyon olmak üzere $(a_n), (b_n)$ reel dizileri Cauchy dizileri ise $(c_n), (d_n)$ reel dizileri Cauchy dizileridir.*

İspat. $(a_n), (b_n)$ reel dizileri Cauchy dizileri ise $\epsilon > 0$ için

- $\forall m, n \geq N_1$ iken $|a_n - a_m| < \sqrt{\epsilon/2}$ olacak şekilde $\exists N_1 > 0$,
- $\forall m, n \geq N_2$ iken $|b_n - b_m| < \sqrt{\epsilon/2}$ olacak şekilde $\exists N_2 > 0$

yazılabilir. Buradan $\forall m, n \geq N = \text{maks}\{N_1, N_2\}$ iken

$$(a_n - a_m)^2 + (b_n - b_m)^2 < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

elde edilir. Ayrıca, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n - p_m$ spacelike olduğundan

$$I_{p_n - p_m} = (a_n - a_m)^2 + (b_n - b_m)^2 - (c_n - c_m)^2 - (d_n - d_m)^2 > 0$$

yazılabilir. Öyleyse

$$(c_n - c_m)^2 + (d_n - d_m)^2 < (a_n - a_m)^2 + (b_n - b_m)^2 < \epsilon$$

olup $(c_n - c_m)^2 < \epsilon$, $(d_n - d_m)^2 < \epsilon$ veya $|c_n - c_m| < \sqrt{\epsilon}$, $|d_n - d_m| < \sqrt{\epsilon}$ yazılabildiğinden $(c_n), (d_n)$ reel dizileri Cauchy dizileridir. ■

Sonuç 3.13. *$\forall n, m \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k,\ p_m \in \mathbb{H}_S$ ve $p_n - p_m$ spacelike kuaterniyon olmak üzere $(a_n), (b_n)$ reel dizileri Cauchy dizileri ise $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi hem Cauchy hem de P-Cauchy split kuaterniyon dizisidir.*

İspat. Teorem 3.27 gereğince $(c_n), (d_n)$ reel dizileri Cauchy dizileridir. Böylece $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi; Tanım 3.18 gereğince Cauchy split kuaterniyon dizisidir, Sonuç 3.12 gereğince P-Cauchy split kuaterniyon dizisidir. ■

Teorem 3.28. *$\forall n, m \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k,\ p_m \in \mathbb{H}_S$ ve $p_n - p_m$ timelike kuaterniyon olmak üzere $(c_n), (d_n)$ reel dizileri Cauchy dizileri ise $(a_n), (b_n)$ reel dizileri Cauchy dizileridir.*

İspat. $(c_n), (d_n)$ reel dizileri Cauchy dizileri ise $\epsilon > 0$ için

- $\forall m, n \geq N_1$ iken $|c_n - c_m| < \sqrt{\epsilon/2}$ olacak şekilde $\exists N_1 > 0$,
- $\forall m, n \geq N_2$ iken $|d_n - d_m| < \sqrt{\epsilon/2}$ olacak şekilde $\exists N_2 > 0$

yazılabilir. Buradan $\forall m, n \geq N = \text{maks}\{N_1, N_2\}$ iken

$$(c_n - c_m)^2 + (d_n - d_m)^2 < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

elde edilir. Ayrıca, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n - p_m$ timelike olduğundan

$$I_{p_n - p_m} = (a_n - a_m)^2 + (b_n - b_m)^2 - (c_n - c_m)^2 - (d_n - d_m)^2 < 0$$

yazılabilir. Öyleyse

$$(a_n - a_m)^2 + (b_n - b_m)^2 < (c_n - c_m)^2 + (d_n - d_m)^2 < \epsilon$$

olup $(a_n - a_m)^2 < \epsilon$, $(b_n - b_m)^2 < \epsilon$ veya $|a_n - a_m| < \sqrt{\epsilon}$, $|b_n - b_m| < \sqrt{\epsilon}$ yazılabildiğinden $(a_n), (b_n)$ reel dizileri Cauchy dizileridir. ■

Sonuç 3.14. *$\forall n, m \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k,\ p_m \in \mathbb{H}_S$ ve $p_n - p_m$ timelike kuaterniyon olmak üzere $(c_n), (d_n)$ reel dizileri Cauchy dizileri ise $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi hem Cauchy hem de P-Cauchy split kuaterniyon dizisidir.*

İspat. Teorem 3.28 gereğince $(a_n), (b_n)$ reel dizileri Cauchy dizileridir. Böylece $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi; Tanım 3.18 gereğince Cauchy split kuaterniyon dizisidir, Sonuç 3.12 gereğince P-Cauchy split kuaterniyon dizisidir. ■

Teorem 3.29. *$\forall n, m \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k,\ p_m \in \mathbb{H}_S$ ve $p_n - p_m$ lightlike kuaterniyon ise $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi P-Cauchy split kuaterniyon dizisidir.*

İspat. $\forall \epsilon > 0$ ve $\forall n, m \in \mathbb{Z}^+$ için $I_{p_n - p_m} = \|p_n - p_m\|^2 = 0 < \epsilon$ yazılabileceğinden $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi P-Cauchy split kuaterniyon dizisidir. ■

Teorem 3.30. *$\forall n, m \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k,\ p_m \in \mathbb{H}_S$ ve $p_n - p_m$ lightlike kuaterniyon olmak üzere $(a_n), (b_n)$ reel dizilerinin Cauchy dizileri olması için gerek ve yeter şart ise $(c_n), (d_n)$ reel dizileri Cauchy dizileri olmasıdır.*

İspat. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n - p_m$ lightlike olduğundan

$$I_{p_n - p_m} = (a_n - a_m)^2 + (b_n - b_m)^2 - (c_n - c_m)^2 - (d_n - d_m)^2 = 0$$

veya

$$(c_n - c_m)^2 + (d_n - d_m)^2 = (a_n - a_m)^2 + (b_n - b_m)^2 \tag{3.2}$$

yazılabilir.

$(\Rightarrow)$: (a_n) reel dizisi Cauchy dizisi olduğundan $\epsilon > 0$ için $n \geq N_1$ iken $|a_n - a_m| < \sqrt{\epsilon/2}$ olacak şekilde $\exists N_1 \in \mathbb{Z}^+$, (b_n) reel dizisi Cauchy dizisi olduğundan $n \geq N_2$ iken $|b_n - b_m| < \sqrt{\epsilon/2}$ olacak şekilde $\exists N_2 \in \mathbb{Z}^+$ yazılabilir. Buradan

$$(a_n - a_m)^2 + (b_n - b_m)^2 < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

elde edilir. Eşitlik (3.2) kullanılırsa; $(c_n - c_m)^2 < \epsilon$, $(d_n - d_m)^2 < \epsilon$ veya $|c_n - c_m| < \sqrt{\epsilon}$, $|d_n - d_m| < \sqrt{\epsilon}$ yazılabildiğinden $(c_n), (d_n)$ reel dizileri Cauchy dizileridir.

$(\Leftarrow)$: (c_n) reel dizisi Cauchy dizisi olduğundan $\epsilon > 0$ için $n \geq N_1$ iken $|c_n - c_m| < \sqrt{\epsilon/2}$ olacak şekilde $\exists N_1 \in \mathbb{Z}^+$, (d_n) reel dizisi Cauchy dizisi olduğundan $n \geq N_2$ iken $|d_n - d_m| < \sqrt{\epsilon/2}$ olacak şekilde $\exists N_2 \in \mathbb{Z}^+$ yazılabilir. Buradan

$$(c_n - c_m)^2 + (d_n - d_m)^2 < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

elde edilir. Eşitlik (3.2) kullanılırsa; $(a_n - a_m)^2 < \epsilon$, $(b_n - b_m)^2 < \epsilon$ veya $|a_n - a_m| < \sqrt{\epsilon}$, $|b_n - b_m| < \sqrt{\epsilon}$ yazılabildiğinden $(a_n), (b_n)$ reel dizileri Cauchy dizileridir.

■

Sonuç 3.15. *$\forall n, m \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k,\ p_m \in \mathbb{H}_S$ ve $p_n - p_m$ lightlike kuaterniyon olmak üzere*

1. *$(a_n), (b_n)$ reel dizileri Cauchy dizileri ise veya*
2. *$(c_n), (d_n)$ reel dizileri Cauchy dizileri ise*

$\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi Cauchy split kuaterniyon dizisidir.

İspat. Teorem 3.30 gereğince

1. $(c_n), (d_n)$ reel dizileri Cauchy dizileridir. Böylece Tanım 3.18 gereğince $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi Cauchy split kuaterniyon dizisidir.
2. $(a_n), (b_n)$ reel dizileri Cauchy dizileridir. Böylece Tanım 3.18 gereğince $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi Cauchy split kuaterniyon dizisidir.

■

Teorem 3.31. *$\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi yakınsak ise Cauchy split kuaterniyon dizisidir.*

İspat. $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi p noktasına yakınsasın. O halde $\{p_n\} := (a_n) + (b_n)i + (c_n)j + (d_n)k$ olmak üzere $(a_n),\ (b_n),\ (c_n),\ (d_n)$ dizileri yakınsaktır ve dolayısıyla Cauchy dizileridir. Tanım 3.18 gereğince $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi Cauchy split kuaterniyon dizidir. ■

Teorem 3.32. *$\forall n, m \in \mathbb{Z}^+$ için $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi p noktasına P-yakısıyor ve $p_n - p, p - p_m$ spacelike (timelike), $Z_{p-p_m}(p_n - p)$ spacelike (timelike) veya lightlike split kuaterniyonlar ise $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi P-Cauchy split kuaterniyon dizisidir.*

İspat. $p_n \to p$ olduğundan $\epsilon > 0$ ve $n, m \geq N > 0$ için $\|p_n - p\| < \epsilon/2$ ve $\|p_m - p\| < \epsilon/2$ yazılabilir. Buradan $\forall n, m \in \mathbb{Z}^+$ için $p_n - p, p - p_m$ spacelike (timelike), $Z_{p-p_m}(p_n - p)$ spacelike (timelike) veya lightlike split kuaterniyonlar ise

$$\|p_n - p_m\| = \|p_n - p + p - p_m\| < \|p_n - p\| + \|p_m - p\| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

yazılabileceğinden $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi Cauchy split kuaterniyon dizisidir. ■

Teorem 3.33. *$\forall n, m \in \mathbb{Z}^+$ için $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi p noktasına P-yakısıyor ve $V((p_n - p)\overline{p_m - p})$ spacelike veya lightlike ise $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi P-Cauchy split kuaterniyon dizisidir.*

3.4 Split Kuaterniyon Dizilerde Yakınsaklık ve P-Yakınsaklık Testleri

Teorem 3.34. *$\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi Cauchy split kuaterniyon dizi ise yakınsaktır.*

İspat. $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi Cauchy split kuaterniyon dizi ise $(a_n),\ (b_n),\ (c_n),\ (d_n)$ dizileri Cauchy dizileridir, dolayısıyla yakınsaktırlar. Tanım 3.12 gereğince $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi yakınsaktır. ■

Teorem 3.35. $\forall n, m \in \mathbb{Z}^+$ *için*

1. $p_n - p_m$ *spacelike kuaterniyon ve* $(a_n), (b_n)$ *reel dizileri Cauchy dizileri ise,*
2. $p_n - p_m$ *timelike kuaterniyon ve* $(c_n), (d_n)$ *reel dizileri Cauchy dizileri ise*

$\{p_n\}$ *split kuaterniyon dizisi* P*-yakınsaktır.*

İspat.

1. Teorem 3.27 gereğince $(c_n), (d_n)$ reel dizileri Cauchy dizileridir. O halde $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ reel dizileri yakınsaktır. Buradan Teorem 3.1 gereğince $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi P-yakınsaktır.
2. Teorem 3.28 gereğince $(a_n), (b_n)$ reel dizileri Cauchy dizileridir. O halde $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$ reel dizileri yakınsaktır. Buradan Teorem 3.1 gereğince $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisi P-yakınsaktır.

■

4
SPLIT KUATERNİYON SERİLER

Tezin son orijinal kısmını oluşturan bu bölümde, split kuaterniyon seriler tanımlanmış, özellikleri verilmiş, split kuaterniyon serilerin yakınsaklığı incelenmiş, split kuaterniyon kuvvet serileri ve yakınsaklık yarıçapları tanımlanmıştır.

Tanım 4.1 (Split kuaterniyon seri)**.** $\{p_n\} := (a_n) + (b_n)i + (c_n)j + (d_n)k$ split kuaterniyon dizi olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n i + \sum_{n=1}^{\infty} c_n j + \sum_{n=1}^{\infty} d_n k$ toplamına *split kuaterniyon seri* denir.

Tanım 4.2 (Kısmi toplamlar dizisi)**.** $S_n = \sum_{t=1}^{n} p_t = \sum_{t=1}^{n} a_t + \sum_{t=1}^{n} b_t i + \sum_{t=1}^{n} c_t j + \sum_{t=1}^{n} d_t k$ toplamına $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ split kuaterniyon serisinin n*. kısmi toplamı* denir. Ayrıca $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \sum_{n=1}^{\infty} d_n$ reel serilerinin kısmi toplamlar dizileri sırasıyla $(S_{a_n}), (S_{b_n}), (S_{c_n}), (S_{d_n})$ olmak üzere $\{S_n\} := (S_{a_n}) + (S_{b_n})i + (S_{c_n})j + (S_{d_n})k$ split kuaterniyon dizisine *split kuaterniyon serisinin kısmi toplamlar dizisi* denir.

4.1 Geometrik Split Kuaterniyon Seriler

Tanım 4.3 (Geometrik Split Kuaterniyon Seri)**.** $p, r \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere

1. $\sum_{n=1}^{\infty} pr^{n-1}$ toplamına sağ geometrik split kuaterniyon seri,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}p$ toplamına sol geometrik split kuaterniyon seri denir.

! *Bu çalışma boyunca sağ geometrik split kuaterniyon seriler ele alınacaktır. Kısaca geometrik split kuaterniyon denilecektir.*

Teorem 4.1. *$p, r \in \mathbb{H}_S$ olmak üzere $\|1 - r\| \neq 0$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} pr^{n-1}$ geometrik split kuaterniyon serisinin n. kısmi toplamı*

$$S_n = p(1 - r^n)(1 - r)^{-1}$$

şeklindedir.

İspat. $\sum_{n=1}^{\infty} pr^{n-1}$ geometrik split kuaterniyon serisinin n. kısmi toplamı

$$\begin{aligned} S_n =& \sum_{t=1}^{n} pr^{t-1} \\ =& p + pr + pr^2 + \cdots + pr^{n-1} \\ =& p(1 + r + \cdots + r^{n-1}) \end{aligned}$$

olup

$$S_n r = pr + pr^2 + \cdots + pr^n$$

ile taraf tarafa çıkarma işlemi yapılırsa

$$S_n - S_n r = p - pr^n$$

elde edilir. Buradan $\|1 - r\| \neq 0$ ise geometrik split kuaterniyon serisinin n. kısmi toplamı

$$S_n = p(1 - r^n)(1 - r)^{-1}$$

şeklindedir. ■

4.2 Split Kuaterniyon Serilerde Yakınsaklık ve P-Yakınsaklık

Tanım 4.4. $\{S_n\}$ split kuaterniyon kısmi toplamlar dizisi $\lim_{n\to\infty} S_n = s \in \mathbb{H}_S$ gibi bir limite sahip ise $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ serisi yakınsaktır denir. $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = s$ şeklinde ifade edilir. $\{S_n\}$ split kuaterniyon kısmi toplamlar dizisi ıraksak ise $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ serisi ıraksaktır denir.

Tanım 4.5. $\{S_n\}$ split kuaterniyon kısmi toplamlar dizisi $P\text{-}\lim_{n\to\infty} S_n = s \in \mathbb{H}_S$ gibi bir limite sahip ise $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ serisi P-yakınsaktır denir. $\sum_{n=1}^{\infty} p_n \overset{P}{=} s$ şeklinde ifade

edilir. $\{S_n\}$ split kuaterniyon kısmi toplamlar dizisi P-ıraksak ise $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ serisi P-ıraksaktır denir.

Not. $(S_{a_n}), (S_{b_n}), (S_{c_n}), (S_{d_n})$ reel kısmi toplamlar dizileri sırasıyla

$$\lim_{n\to\infty} S_{a_n} = s_a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} S_{b_n} = s_b \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} S_{c_n} = s_c \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} S_{d_n} = s_d \in \mathbb{R}$$

limitlerine sahip ise $\{S_n\} := (S_{a_n}) + (S_{b_n})i + (S_{c_n})j + (S_{d_n})k$ split kuaterniyon kısmi toplamlar dizisi $\lim_{n\to\infty} S_n = P\text{-}\lim_{n\to\infty} S_n = s_a + s_b i + s_c j + s_d k = s \in \mathbb{H}_S$ gibi bir limite ve P-limite sahiptir.

Teorem 4.2. *$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ iki split kuaterniyon seri olsun.*

1. *$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ split kuaterniyon serileri yakınsak ve sırasıyla serilerin kısmi toplam dizilerinin limitleri $\lim_{n\to\infty} S_n = s$, $\lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n = \tilde{s}$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} (p_n \pm q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} q_n$ ile elde edilen split kuaterniyon seri de yakınsaktır.*
2. *$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ yakınsak split kuaterniyon seri $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ ıraksak split kuaterniyon seri ise $\sum_{n=1}^{\infty} (p_n \pm q_n)$ ile elde edilen split kuaterniyon seri ıraksaktır.*
3. *$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ split kuaterniyon serileri P-yakınsak ve sırasıyla serilerin kısmi toplam dizilerinin limitleri $P\text{-}\lim_{n\to\infty} S_n = s$, $P\text{-}\lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n = \tilde{s}$ olmak üzere*
   - *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $S_n - s$, $\tilde{S}_n - \tilde{s}$ spacelike(timelike), $Z_{\tilde{S}_n - \tilde{s}}(S_n - s)$ spacelike(timelike) veya lightlike ise $\sum_{n=1}^{\infty} (p_n \pm q_n)$ ile elde edilen split kuaterniyon seri de P-yakınsaktır. Burada $Z_{\tilde{S}_n - \tilde{s}}(S_n - s)$ vektörü, Tanım 2.17 ile elde edilen vektördür.*
   - *$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $V((S_n - s)\overline{\tilde{S}_n - \tilde{s}})$ spacelike veya lightlike ise $\sum_{n=1}^{\infty} (p_n \pm q_n)$ ile elde edilen split kuaterniyon seri de P-yakınsaktır.*
4. *$N \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ split kuaterniyon seri P-yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} p_{N+n}$ split kuaterniyon serisi de P-yakınsaktır.*

İspat. $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ split kuaterniyon serisinin $n.$ kısmi toplamı $S_n = \sum_{t=1}^{n} p_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ split kuaterniyon serisinin $n.$ kısmi toplamı $\tilde{S_n} = \sum_{t=1}^{n} q_n$ olmak üzere

1. $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ serileri yakınsak olduğundan $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ ve $\lim_{n\to\infty} \tilde{S_n} = \tilde{s}$ limitleri mevcuttur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} S_n \pm \lim_{n\to\infty} \tilde{S_n} = \lim_{n\to\infty} \left(S_n \pm \tilde{S_n} \right) \tag{4.1}$$

limiti mevcut olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} (p_n \pm q_n)$ split kuaterniyon serisi yakınsaktır.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ yakınsak ve $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ ıraksak olduğundan $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ limiti mevcuttur ancak $\lim_{n\to\infty} \tilde{S_n}$ limiti mevcut değildir. O halde (4.2) limiti mevcut değildir. Öyleyse $\sum_{n=1}^{\infty} (p_n \pm q_n)$ split kuaterniyon serisi ıraksaktır.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ serileri P-yakınsak olduğundan $P\text{-}\lim_{n\to\infty} S_n = s$ ve $P\text{-}\lim_{n\to\infty} \tilde{S_n} = \tilde{s}$ P-limitleri mevcuttur. Buradan $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $S_n - s, \tilde{S_n} - \tilde{s}$ spacelike(timelike), $Z_{\tilde{S_n} - \tilde{s}}(S_n - s)$ spacelike(timelike) veya lightlike ise

$$P\text{-}\lim_{n\to\infty} S_n \pm P\text{-}\lim_{n\to\infty} \tilde{S_n} = P\text{-}\lim_{n\to\infty} \left(S_n \pm \tilde{S_n} \right) \tag{4.2}$$

P-limiti mevcut olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} (p_n \pm q_n)$ split kuaterniyon serisi P-yakınsaktır.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ serisi yakınsak olduğundan $P\text{-}\lim_{n\to\infty} S_n = s$ limiti mevcuttur. Öyleyse $\epsilon > 0$ için $n \geq N_1$ için $\|S_n - s\| < \epsilon$ olacak şekilde $\exists N_1 \in \mathbb{N}^+$ yazılabilir. Buradan $n + N \geq N_1 + N > N_1$ için de $\|S_{N+n} - s\| < \epsilon$ yazılabileceğinden $P\text{-}\lim_{n\to\infty} S_{N+n} = s$ limiti mevcuttur. Öyleyse $\sum_{n=1}^{\infty} p_{N+n}$ split kuaterniyon serisi P-yakınsaktır.

■

Teorem 4.3 (Teleskopik split kuaterniyon seri)**.** $\sum_{n=1}^{\infty}(p_n - p_{n+1})$ *teleskopik split kuaterniyon serisinin yakınsaması (P-yakınsaması) için gerek ve yeter şart $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisinin yakınsak (P-yakınsak) olmasıdır.*

İspat. $\sum_{n=1}^{\infty}(p_n - p_{n+1})$ split kuaterniyon serisinin $n.$ kısmi toplamı

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{t=1}^{n}(p_t - p_{t+1}) \\ &= p_1 - p_2 + p_2 - p_3 + p_3 - p_4 \pm \cdots + p_n - p_{n+1} \\ &= p_1 - p_{n+1} \end{aligned}$$

olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty}(p_n - p_{n+1})$ split kuaterniyon serisinin yakınsak olabilmesi için

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(p_1 - p_{n+1}) = p_1 - \lim_{n\to\infty} p_n$$

limitinin var olması gerekir. Bunun için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to\infty} p_n$ limitinin var olması, yani $\{p_n\}$ split kuaterniyon dizisinin yakınsak olmasıdır. P-yakınsaklığı için de benzer ispat yapılabilir. ■

Tanım 4.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\|p_n\|$ split kuaterniyon serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ split kuaterniyon serisi mutlak yakınsaktır.

Tanım 4.7. $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ split kuaterniyon serisi yakınsak ancak $\sum_{n=1}^{\infty}\|p_n\|$ split kuaterniyon serisi ıraksak ise $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ split kuaterniyon serisi koşullu yakınsaktır.

4.3 Split Kuaterniyon Serilerinde Yakınsaklık Testleri

Teorem 4.4. $p, r \in \mathbb{H}_S$ *ve* $\|1 - r\| \neq 0$ *olmak üzere* $\sum_{n=1}^{\infty}pr^{n-1}$ *geometrik split kuaterniyon serisi* $\|r\| < 1$ *ise* $p(1-r)^{-1}$ *sayısına P-yakınsar.*

İspat. $\|r\| < 1$ ise $P\text{-}\lim_{n\to\infty} r^n = 0_{\mathbb{H}_S}$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} P\text{-}\lim_{n\to\infty} S_n = P\text{-}\lim_{n\to\infty}\left[p(1-r^n)(1-r)^{-1}\right] &= p\left[P\text{-}\lim_{n\to\infty}(1-r^n)\right](1-r)^{-1} \\ &= p(1-r)^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\sum_{n=1}^{\infty} pr^{n-1} \overset{P}{=} p(1-r)^{-1}$ yazılabilir. ■

Teorem 4.5. $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ *split kuaterniyon serisi*

- *Yakınsak ise* $\lim_{n\to\infty} p_n = 0_{H_S}$,
- P*-yakınsak ise* $P\text{-}\lim_{n\to\infty} p_n = 0_{H_S}$

şeklindedir.

İspat. $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ split kuaterniyon serisi yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ gibi bir limiti vardır. Ayrıca $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = s$ ve $S_n - S_{n-1} = a_n$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - S_{n-1} = s - s = 0_{H_S}$$

elde edilir. P-yakınsak olma durumu benzer şekilde ispatlanabilir. ■

Sonuç 4.1. $\lim_{n\to\infty} p_n \neq 0_{\mathbb{H}_S}$ *ise* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ *split kuaterniyon serisi ıraksaktır.*

$P\text{-}\lim_{n\to\infty} p_n \neq 0_{\mathbb{H}_S}$ *ise* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ *split kuaterniyon serisi* P*-ıraksaktır.*

Not. $\lim_{n\to\infty} p_n = 0_{H_S}$ durumunda $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ split kuaterniyon serisi yakınsak olmak zorunda değildir. $P\text{-}\lim_{n\to\infty} p_n = 0_{H_S}$ durumunda $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ split kuaterniyon serisi P-yakınsak olmak zorunda değildir.

Teorem 4.6 (Cauchy Kriteri)**.** $p_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k$ *ve* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ *split kuaterniyon serisinin* n*. kısmi toplamı* $S_n = S_{a_n} + S_{b_n} i + S_{c_n} j + S_{d_n} k$ *olmak üzere her* $\epsilon > 0$ *için* $n > m \geq N$ *iken* $\left|\sum_{t=m}^{n} a_t\right| < \epsilon$, $\left|\sum_{t=m}^{n} b_t\right| < \epsilon$, $\left|\sum_{t=m}^{n} c_t\right| < \epsilon$, $\left|\sum_{t=m}^{n} d_t\right| < \epsilon$ *ise* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ *split kuaterniyon serisi yakınsaktır.*

İspat. $(S_{a_n}),\ (S_{b_n}),\ (S_{c_n}),\ (S_{d_n})$ reel kısmi toplamlar dizileri Cauchy dizileri ise yani her $\epsilon > 0$ için $n > m \geq N$ iken

$$|S_{a_n} - S_{a_m}| = \left|\sum_{t=1}^{n} a_t - \sum_{t=1}^{m} a_t\right| = \left|\sum_{t=m+1}^{n} a_t\right| < \epsilon \quad \text{veya} \quad \left|\sum_{t=m}^{n} a_t\right| < \epsilon,$$

$$|S_{b_n} - S_{b_m}| = \left|\sum_{t=1}^{n} b_t - \sum_{t=1}^{m} b_t\right| = \left|\sum_{t=m+1}^{n} b_t\right| < \epsilon \quad \text{veya} \quad \left|\sum_{t=m}^{n} b_t\right| < \epsilon,$$

$$|S_{c_n} - S_{c_m}| = \left|\sum_{t=1}^{n} c_t - \sum_{t=1}^{m} c_t\right| = \left|\sum_{t=m+1}^{n} c_t\right| < \epsilon \quad \text{veya} \quad \left|\sum_{t=m}^{n} c_t\right| < \epsilon$$

ve

$$|S_{d_n} - S_{d_m}| = \left|\sum_{t=1}^{n} d_t - \sum_{t=1}^{m} d_t\right| = \left|\sum_{t=m+1}^{n} d_t\right| < \epsilon \quad \text{veya} \quad \left|\sum_{t=m}^{n} d_t\right| < \epsilon$$

ise $S_n = S_{a_n} + S_{b_n} i + S_{c_n} j + S_{d_n} k$ split kuaterniyon kısmi toplamlar dizisi Cauchy split kuaterniyon dizisidir, dolayısıyla yakınsaktır. Böylece $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ split kuaterniyon serisi yakınsaktır. ■

Teorem 4.7 (P-Cauchy Kriteri)**.** *$p_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ split kuaterniyon serisinin n. kısmi toplamı $S_n = S_{a_n} + S_{b_n} i + S_{c_n} j + S_{d_n} k$ olmak üzere her $\epsilon > 0$ için $n > m \geq N$ iken*

1. *$S_n - S_m$ spacelike veya lightlike ve $\left|\sum_{t=m}^{n} a_t\right| < \epsilon$, $\left|\sum_{t=m}^{n} b_t\right| < \epsilon$ ise,*
2. *$S_n - S_m$ timelike veya lightlike ve $\left|\sum_{t=m}^{n} c_t\right| < \epsilon$, $\left|\sum_{t=m}^{n} d_t\right| < \epsilon$ ise*

$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ split kuaterniyon serisi P-yakınsaktır.

İspat.

1. $S_n - S_m$ spacelike veya lightlike, (S_{a_n}) ve (S_{b_n}) dizileri Cauchy dizileri ise yani her $\epsilon > 0$ için $n > m \geq N$ iken

$$|S_{a_n} - S_{a_m}| = \left| \sum_{t=1}^{n} a_t - \sum_{t=1}^{m} a_t \right| = \left| \sum_{t=m+1}^{n} a_t \right| < \epsilon \quad \text{veya} \quad \left| \sum_{t=m}^{n} a_t \right| < \epsilon$$

ve

$$|S_{b_n} - S_{b_m}| = \left| \sum_{t=1}^{n} b_t - \sum_{t=1}^{m} b_t \right| = \left| \sum_{t=m+1}^{n} b_t \right| < \epsilon \quad \text{veya} \quad \left| \sum_{t=m}^{n} b_t \right| < \epsilon$$

ise,

2. $S_n - S_m$ timelike veya lightlike, (S_{c_n}) ve (S_{d_n}) dizileri Cauchy dizileri ise yani her $\epsilon > 0$ için $n > m \geq N$ iken

$$|S_{c_n} - S_{c_m}| = \left| \sum_{t=1}^{n} c_t - \sum_{t=1}^{m} c_t \right| = \left| \sum_{t=m+1}^{n} c_t \right| < \epsilon \quad \text{veya} \quad \left| \sum_{t=m}^{n} c_t \right| < \epsilon$$

ve

$$|S_{d_n} - S_{d_m}| = \left| \sum_{t=1}^{n} d_t - \sum_{t=1}^{m} d_t \right| = \left| \sum_{t=m+1}^{n} d_t \right| < \epsilon \quad \text{veya} \quad \left| \sum_{t=m}^{n} d_t \right| < \epsilon$$

ise Teorem 3.35 gereğince $\{S_n\}$ split kuaterniyon kısmi toplamlar dizisi P-yakınsaktır. Dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ split kuaterniyon serisi P-yakınsaktır. ■

Teorem 4.8 (Kök Testi)**.** $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n i + \sum_{n=1}^{\infty} c_n j + \sum_{n=1}^{\infty} d_n k$ *split kuaterniyon seri ve*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L_1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = L_2, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = L_3, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{d_n} = L_4$$

olmak üzere $L_1, L_2, L_3, L_4 < 1$ *ise* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ *serisi yakınsaktır.*

İspat. Reel dizilerin kök testine göre, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ serisinin bileşenleri yakınsak olduğundan kendisi de yakınsaktır. ■

Teorem 4.9 (Kök Testi)**.** $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ *split kuaterniyon seri ve*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|p_n\|} = L_1$$

olmak üzere $L_1 < 1$ *ise* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ *serisi mutlak yakınsaktır.*

İspat. $L_1 < 1$ olsun. $L_1 < l_1 < 1$ olacak şekilde $l_1 \in \mathbb{R}$ vardır. $n \geq N$ iken

$$\sqrt[n]{\|p_n\|} < l_1$$

olacak şekilde $N \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan her $n \geq N$ için $\|p_n\| < l_1^n$ olup $\sum_{n=1}^{\infty} \|p_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} l_1^n$ reel geometrik serisi tarafından sınırlandırılmıştır. Böylece $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ serisi mutlak yakınsaktır. ■

Örnek 4.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n!}$ split kuaterniyon serisi mutlak yakınsaktır.

Çözüm. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n!}$ split kuaterniyon serisine kök testi uygulanırsa

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left\|\frac{p^n}{n!}\right\|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\|p^n\|}{|n!|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\|p\|^n}}{\sqrt[n]{|n!|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\|p\|}{\sqrt[n]{|n!|}}$$

yazılabilir. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n!|} = \infty$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \frac{\|p\|}{\sqrt[n]{|n!|}} = 0 < 1$ elde edilir. O halde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n!}$ split kuaterniyon serisi mutlak yakınsaktır.

Teorem 4.10 (Oran Testi)**.** $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n i + \sum_{n=1}^{\infty} c_n j + \sum_{n=1}^{\infty} d_n k$ *split kuaterniyon seri ve*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L_1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = L_2, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = L_3, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = L_4$$

olmak üzere $L_1, L_2, L_3, L_4 < 1$ *ise* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ *serisi yakınsaktır.*

İspat. Reel dizilerin oran testine göre, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ serisinin bileşenleri yakınsak

olduğundan kendisi de yakınsaktır. ■

Teorem 4.11 (Oran Testi)**.** $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ *split kuaterniyon seri ve*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|p_{n+1}\|}{\|p_n\|} = L_2$$

olmak üzere $L_2 < 1$ *ise* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ *serisi mutlak yakınsaktır.*

İspat. $L_2 < 1$ olsun. $L_2 < l_2 < 1$ olacak şekilde $l_2 \in \mathbb{R}$ vardır. $n \geq N$ iken

$$\|p_n\| \leq l_2\|p_{n-1}\| \leq l_2^2\|p_{n-2}\| \leq \cdots \leq l_2^{n-N}\|p_N\| = \frac{l_2^n}{l_2^N}\|p_N\|$$

olacak şekilde $N \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan $\sqrt[n]{\|p_n\|} \leq l_2 \sqrt[n]{\frac{\|p_N\|}{l_2^N}}$ elde edilir. Kök testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ split kuaterniyon serisi mutlak yakınsaktır. ■

4.4 Split Kuaterniyon Kuvvet Serileri

Tanım 4.8. $x,\ x_0 \in \mathbb{H}_S$, u_n keyfî split kuaterniyon katsayılar ve x, değişken olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x - x_0)^n = u_0 + u_1(x - x_0) + u_2(x - x_0)^2 + \dots$$

toplamına x_0 merkezli sağ split kuaterniyon kuvvet seri,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x - x_0)^n u_n = u_0 + (x - x_0)u_1 + (x - x_0)^2 u_2 + \dots$$

toplamına x_0 merkezli sol split kuaterniyon kuvvet seri denir. $(x-x_0)^0 = 1$ şeklinde tanımlanabilir.

! *Bu çalışma boyunca sağ split kuaterniyon kuvvet seriler ele alınacaktır. Kısaca split kuaterniyon kuvvet seri denilecektir.*

Örnek 4.2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^2}(x-(1+i+j-k))^n = 1 + \frac{1}{4}(x-(1+i+j-k)) + \frac{2}{9}(x-(1+i+j-k))^2 + \frac{6}{16}(x-(1+i+j-k))^2 + \dots$$

toplamına $1+i+j-k$ split kuaterniyon merkezli split kuaterniyon kuvvet seri denir.

Tanım 4.9 (Lorentz 3-Küre)**.** Split kuaterniyonlar vektör uzayında ρ yarıçaplı Lorentz 3-küre

$$L^3 = \{x \in \mathbb{H}_S \ : \ \langle x, x\rangle_{\mathbb{H}_S} = \rho^2\}$$

ile, x_0 merkezli ρ yarıçaplı Lorentz 3-küre

$$L^3 = \{x \in \mathbb{H}_S \ : \ \langle x - x_0, x - x_0\rangle_{\mathbb{H}_S} = \rho^2\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 4.10 (Hiperbolik 3-Küre)**.** Split kuaterniyonlar vektör uzayında ρ yarıçaplı Hiperbolik 3-küre

$$H^3 = \{x \in \mathbb{H}_S \ : \ \langle x, x\rangle_{\mathbb{H}_S} = -\rho^2\}$$

ile, x_0 merkezli ρ yarıçaplı Hiperbolik 3-küre

$$H^3 = \{x \in \mathbb{H}_S \ : \ \langle x - x_0, x - x_0\rangle_{\mathbb{H}_S} = -\rho^2\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 4.11 (P-Yakınsaklık Lorentz Yarıçapı)**.** $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x-x_0)^n$ split kuaterniyon kuvvet serisini P-yakınsak yapan x değerlerinin oluşturduğu en büyük Lorentz 3-küreye *P-yakınsaklık Lorentz 3-küresi* denir. Lorentz 3-kürenin yarıçapına *P-yakınsaklık yarıçapı* denir.

Tanım 4.12 (P-Yakınsaklık Hiperbolik Yarıçapı)**.** $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x-x_0)^n$ split kuaterniyon kuvvet serisini P-yakınsak yapan x değerlerinin oluşturduğu en büyük Hiperbolik 3-küreye *P-yakınsaklık Hiperbolik 3-küresi* denir. Hiperbolik 3-kürenin yarıçapına *P-yakınsaklık yarıçapı* denir.

5
SONUÇ

Bu tezde split kuaterniyon diziler ve seriler ele alınmıştır.

Tezin orijinal kısmı, üçüncü bölüm ve sonrasından oluşmaktadır. İkinci bölümde split kuaterniyonların birbirlerine göre dik olma durumları incelenmiştir.

Üçüncü bölümde split kuaterniyon diziler ve split kuaterniyon dizilerin iki farklı yakınsaklık tanımı literatüre kazandırılmıştır.

Dördüncü bölümde split kuaterniyon seriler, split kuaterniyon serilerin iki farklı yakınsaklık tanımı ve kuvvet serileri literatüre kazandırılmıştır. Ayrıca split kuaterniyon kuvvet serilerinin yakınsaklık yarıçapı tanımlanmıştır.

KAYNAKÇA

[1] B. A. Rosenfeld, *A history of non-Euclidean geometry: Evolution of the concept of a geometric space*. Springer-Verlag, 1988.

[2] B. O'neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press, 1983.

[3] I. T. Couto, A. Lymberopoulos, *Introduction to Lorentz geometry: curves and surfaces*. CRC Press, 2021.

[4] K. Knopp, *Infinite sequences and series*. Courier Corporation, 1956.

[5] H. Dela Cruz, "A history of real analysis," *Available at SSRN 3946980*, 2021.

[6] S. Georgiev, J. Morais, W. Spröss, "New aspects on elementary functions in the context of quaternionic analysis," *Cubo (Temuco)*, vol. 14, no. 1, pp. 93–110, 2012.

[7] J. P. Morais, S. Georgiev, W. Spröß ig, *Real quaternionic calculus handbook*. Springer, 2014.

[8] S. Yüce, *Sayılar ve Geometri*. Pegem Akademi Yayıncılık, 2020.

[9] I. L. Kantor, A. S. Solodovnikov, A. Shenitzer, *Hypercomplex numbers: an elementary introduction to algebras*. Springer-Verlag, 1989.

[10] Y. Alagöz, K. H. Oral, S. Yüce, "Split quaternion matrices," *Miskolc Mathematical Notes*, vol. 13, no. 2, pp. 223–232, 2012.

[11] L. Kula, Y. Yayli, "Split quaternions and rotations in semi euclidean space $\mathbb{E}_2^4$," *Journal of the Korean Mathematical Society*, vol. 44, no. 6, pp. 1313–1327, 2007.

[12] M. Özdemir, A. Ergin, "Some geometric applications of timelike quaternions," in *Int. Conf. Jonhjean Math. Soc*, vol. 16, 2005, pp. 108–115.

[13] M. Özdemir, "The roots of a split quaternion," *Applied Mathematics Letters*, vol. 22, no. 2, pp. 258–263, 2009.

[14] H. F. Aykut, "Split kuaterniyonlarda üstel, logaritmik ve trigonometrik fonksiyonlar," *YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, Danışman: S. Yüce*, 2023.

[15] E. Ergül, "Split kuaterniyonlarda kombinasyon ve faktöriyel hesabı ile kalkulus," *YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, Danışman: S. Yüce*, 2023.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirisi

S. N. Aktaş, S. Yüce, "Split Quaternion Sequences," 6th International HYBRID Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA2023), İstanbul, Türkiye, 10 - 13 Mayıs 2023, ss.170