T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARDY OPERATÖRÜNÜN DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULAMASI

KADER ŞİMŞİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. YUSUF ZEREN

İSTANBUL, 2017

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARDY OPERATÖRÜNÜN DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULAMASI

Kader ŞİMŞİR tarafından hazırlanan tez çalışması 30.05.2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Yrd. Doç. Dr. Özgür YILDIRIM

Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK

İstanbul Ticaret Üniversitesi _____

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında; Hardy Eşitsizliği, Varyasyonel yöntemler ve monoton operatörler incelenmiş, Sınır değer problemi için Hardy eşitsizliğinden faydalanarak çözüm elde edilmiştir.

Tez çalışma sürecim boyunca bana bilgi ve tecrübeleriyle yol gösteren, eşsiz bilgi donanımı ve sonsuz desteğiyle kısa zamanda çok yol almamı sağlayan sayın Doç. Dr. Yusuf ZEREN (Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) hocama sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, çalışmalarımda bana yol gösteren, bilgi ve tecrübeleriyle beni hep bir adım öteye taşıyan, çok kıymetli Prof. Dr. Farman MAMEDOV (Azerbaycan Milli İlimler Akademisi, Mekanik ve Matematik Enstitüsü) hocama saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Eğitim hayatım boyunca bana her türlü maddi manevi destek olan biricik ailem Fikriye-Mustafa Niyazi ŞİMŞİR 'e minnettarım. Bana destek olan değerli arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Mayıs, 2017

Kader ŞİMŞİR

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ vi

KISALTMA LİSTESİ vii

ŞEKİL LİSTESİ viii

ÖZET ix

ABSTRACT x

BÖLÜM 1

GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 6
1.3 Hipotez 6

BÖLÜM 2

TEMEL İFADELER 7

2.1 Vektör Uzayları 7
2.2 Normlu uzay 8
2.3 Lineer Operatörler 11
2.4 Ölçü Kavramı ve Lebesgue İntegrallenebilme 12
2.5 Lebesgue Uzayı 15
2.5.1 Ağırlıklı Lebesgue Uzayı 17
2.6 Sobolev uzayı 18
2.6.1 Ağırlıklı Sobolev uzayı 19
2.7 Önemli Teoremler 20

BÖLÜM 3

DEĞİŞKEN ÜSTLÜ LEBESGUE UZAYI VE HARDY OPERATÖRÜ 21

3.1 Modüler ve Orlicz Uzayı 21

3.2 Değişken Üstlü Lebesgue Uzayı 23
3.3 Değişken Üstlü Sobolev Uzayı 29
3.4 Hardy Operatörü için Değişken Üstlü Lebesgue Uzaylarında Bazı Sonuçlar 29
3.5 $L^{p(x)}$ Uzayında Hardy Operatörünün Sınırlılığı ile ilgili Örnekler 34

BÖLÜM 4

VARYASYONEL YAKLAŞIM 37

4.1 Temel İfadeler 37
4.2 Varyasyonel Yaklaşım 38
4.3 Varyasyonel Yaklaşımda Kullanılan Teoremler 39

BÖLÜM 5

MONOTON OPERATÖR TEORİSİ 43

BÖLÜM 6

HARDY OPERATÖRÜNÜN DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI 47

BÖLÜM 7

SONUÇ VE ÖNERİLER 52

KAYNAKLAR 53

ÖZGEÇMİŞ 57

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{F}$	Reel veya Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu Reel Öklid uzayı
$\mathbb{C}^n$	n-boyutlu Kompleks Öklid uzayı
$\forall$	Her
V'	V'nin duali
$[a, b]$	$\mathbb{R}$ de kapalı bir aralık
C[a,b]	[a,b] aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar kümesi
$C_0^\infty(\Omega)$	Ω'da sonsuz mertebeden türevlenebilen, sınırlarda sıfır olan sürekli fonksiyon uzayı
l_p	$(1 \leq p < \infty)$ yakınsak dizi uzayı
D_T	T operatörünün tanım kümesi

KISALTMA LİSTESİ

h.h.h. Hemen Hemen Her
(PS) Palais Smale

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 4.1 Dağ aşırım Teoreminin 3-boyutlu görüntüsü ……42
Şekil 4.2 Dağ aşırım teoreminin 2-boyutlu düzleme izdüşümü……42

ÖZET

HARDY OPERATÖRÜNÜN DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULAMASI

Kader ŞİMŞİR

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm literatür özeti, tezin amacı ve hipotez kısımlarından oluşmaktadır. İkinci bölümde, temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, değişken üstlü Lebesgue uzayı, Sobolev uzayı ve Hardy eşitsizliği için koşullar incelenmiştir. Dördüncü bölümde, Varyasyonel yaklaşım verilmiştir. Beşinci bölümde, monoton operatör teorisi ve Browder Minty Teoremi incelenmiştir. Altıncı bölümde, sınır değer problemi için Hardy operatörü kullanılarak çözüm elde edilmiştir. Son bölümde, sonuç ve öneriler ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hardy Eşitsizliği, Hardy Operatörü, Değişken Üstlü Lebesgue Uzayı, Sobolev Uzayı, Dağ Aşırım Teoremi, Browder Minty Teoremi, Palais-Smale Dizisi.

ABSTRACT

HARDY'S OPERATOR APPLICATION TO DIFFERENTIAL EQUATION

Kader ŞİMŞİR

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Yusuf ZEREN

This thesis involves six chapters.

The first chapter is summary of the literature, aim of the thesis and hypothesis. The second chapter consists of main definitions and theorems. In the third chapter Variable Lebesgue Space, Sobolev Space and condition for Hardy's Operator is examined. In the fourth chapter Variational approach is given. In the fifth chapter, monotone operator theory and Browder Minty theorem is examined. In sixth chapter, for the boundary value problem, the solution is obtained by using the Hardy operator. In the last chapter, conclusions and recommendations are expressed.

Keywords: Hardy's Inequality, Hardy's Operator, Variable Lebesgue Space, Sobolev Space, Mountain Pass Theorem, Browder Minty Theorem, Palais-Smale Sequence.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

1920 yılında Godfrey Harold Hardy [1] çalışmasında; $0 < a,\ 0 \le f(x),\ 1 < p$ ve $\int_a^\infty f^p(x)dx$ yakınsak olmak üzere,

$$\int_a^\infty \left(\frac{1}{x}\int_a^x f(t)dt\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^\infty f^p(x)dx \qquad (1.1)$$

eşitsizliğini ifade etmiştir. Daha sonra 1925 yılındaki [2] çalışmasında (1.1) eşitsizliğinin f, herhangi sınırlı $(0,x)$ aralığında integrallenebilir, $1 < p$ ve $f^p, (0,\infty)$ aralığında integrallenebilir iken,

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)dx \qquad (1.2)$$

eşitsizliğinin sağlandığını ispatlamıştır. Bu eşitsizlik Hardy eşitsizliği olarak adlandırılır. Hardy eşitsizliği daha sonraları kapsamlı olarak çalışılmış ve genel integral eşitsizliklerinin incelenmesinde örnek model olarak kullanılmıştır.

G.H. Hardy (1.2) eşitsizliğinden sonraki, ağırlık fonksiyonları ile ilgili ilk ünlü eşitsizliğini, $1 < p,\ \varepsilon < p-1$ ve f ölçülebilir negatif olmayan fonksiyonlar için, $\left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p$ mümkün olan en iyi sabit olmak üzere,

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p x^\varepsilon dx \le \left(\frac{p}{p-1-\varepsilon}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)\, x^\varepsilon dx \qquad (1.3)$$

şeklinde ifade etmiştir. (1.3) den türetilerek aşağıdaki dual eşitsizlik yazılabilir; $1 < p$, $p-1 < \varepsilon$ ve f ölçülebilir negatif olmayan fonksiyonlar için, $\left(\frac{p}{\varepsilon+1-p}\right)^p$ mümkün olan en iyi sabit olmak üzere

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_x^\infty f(t)dt\right)^p x^\varepsilon dx \le \left(\frac{p}{\varepsilon+1-p}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)\, x^\varepsilon dx \qquad (1.4)$$

dir[3]. Daha sonra yapılan çalışmalarla (1.3) eşitsizliği genişletilmiş ve Hardy eşitsizliğinin modern hali olan aşağıdaki eşitsizlik elde edilmiştir[4].

$$\left(\int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int_a^b |f(x)|^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1.5)$$

burada, $a, b \in \mathbb{R}$ ve $-\infty \le a < b \le \infty$, u ve v fonksiyonları (a,b) aralığında birer ağırlık fonksiyonu, $C = C(p,q,u,v)$, $0 < q \le \infty$ ve $1 \le p \le \infty$ 'dir.

Hardy eşitsizlikleri ile ilgili en önemli kavram Hardy operatörüdür. u ve v pozitif fonksiyonlar olmak üzere

$$\left(H_{u,v}f\right)(x) \coloneqq v(x)\int_0^x f(t)u(t)dt \qquad (1.6)$$

ifadesine Hardy operatörü denir. Pek çok yazar $\int_0^x f(t)dt$ yerine daha genel olan $(Hf)(x)$ operatörünü inceler. Burada $(Hf)(x)$ operatöründe, f yerine $\hat{f} = f(t)\, u(t)$ seçilerek ve yeni u, v ağırlık fonksiyonları atanarak kolaylıkla ilk Hardy eşitsizliğine dönüştürülebilir. Benzer çalışmalar N. Levinson [5], R.P. Boas [6], K.C. Lee ve G.S. Yang [7], G. Pachpatte[8], R.S. Chisholm ve W.N.Everitt[9], D.E. Edmunds ve W.D. Evans [10] tarafından yapılmıştır.

P. R. Beesack 1950-1960 yıllarında Hardy eşitsizliği üzerine sistemli bir araştırma başlattı. $p = q$ ve $p < 0$ durumlarını ve (1.5) eşitsizliğinin yön değiştirmiş hali için $0 < p < 1$ durumlarını inceledi. Beesack [11] çalışmasında

$$\left(\int_0^\infty |f(x)|^q u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty |f'(x)|^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.7}$$

eşitsizliği ile,

$$J(y) = \int_0^\infty \left[\left(y'(x)\right)^p v(x) - y^p(x)u(x)\right]dx$$

fonksiyoneli için Euler-Lagrange denkleminin

$$\frac{d}{dx}\left(v(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{p-1}\right) + u(x)y^{p-1}(x) = 0 \tag{1.8}$$

adi diferansiyel denkleminin var olan bir y çözümüyle ilişkilendirdi. Beesack'ın bu yaklaşımı, Hardy eşitsizliklerini içeren eşitsizlikler sınıfının özel bir konusu olarak genişletildi. Bu konuyla ilgili çalışmalar için P. R. Beesack [12] ve D. T. Shum [13] çalışmaları örnek gösterilebilir.

(1.3) eşitsizliğinde $\varepsilon = p - 1$ değeri göz ardı edilmişti. 1965 yılında, J. Kadlec ve A. Kufner [14] x^ε ağırlık fonksiyonu yerine, $x^\varepsilon|\log x|^\eta$ ağırlık fonksiyonunu koyarak bu boşluğu doldurdular.

(1.5) eşitsizliği, $(a, b) = (0, \infty)$ ve $p = q$ koşullarıyla 1966 ve 1967 yılları arasında G.Talenti [15],[16],17] tarafından incelendi. Ayrıca, 1969 yılında G. Tomaselli [18], (1.8) denkleminin çözülebilirliğinin; (1.5) eşitsizliğinin sağlanması için sadece yeterlilik değil, belli durumda gerekliliğin sağlandığını gösterdi.

1971 yılında R.S. Chisholm ve W. N. Everitt[9], (1.5) eşitsizliğinde C en iyi sabit ve $p = q = 2$ durumu için bir gereklilik ve yeterlilik koşulu olarak

$$A_M := \sup_{r>0}\left(\int_r^\infty u(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^r v^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty \tag{1.9}$$

koşulunu koydular. 1972 yılında, B.Muckenhoupt [19] bu sonuç için basit ve kolay bir ispat verdiğinden, (1.9) koşulu genellikle Muckenhoupt koşulu olarak adlandırılır.

G.Tomaselli [18] çalışmasında (1.5) eşitsizliğinin değeri için $(a,b)=(0,\infty)$ ve $p=q$ ile birlikte f pozitif ölçülebilir fonksiyon olmak üzere

$$A_T := \sup_{r>0}\left(\int_0^x v^{1-p'}(t)dt\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\int_0^x u(t)\left(\int_0^t v^{1-p'}(ds)ds\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad (1.10)$$

ve

$$A_{T,f} := \inf_f \sup_{r>0}\frac{1}{f(x)}\int_0^x u(t)\left[f(t)+\left(\int_0^t v^{1-p'}(ds)ds\right)\right]^p < \infty \qquad (1.11)$$

koşullarını türetti.

p ve q, $1\le p,q\le\infty$ olmak üzere, farklı parametrelerinin durumları için ilk araştırmalar 1978 yılında J. S. Bradley tarafından [20] çalışmasında başlamıştır. Bradley bu makalesinde $1\le p,q\le\infty$ iken (1.12) nin (1.5) eşitsizliği için gereklilik koşulu olduğunu ve $1\le p\le q\le\infty$ için yeterlilik koşulu olduğunu gösterdi. Devamında (1.5) eşitsizliği için en iyi sabit C olmak üzere

$1<p\le q\le\infty$ ise $A_M \le C \le A_M p^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}$

$p=0$ veya $q=\infty$ ise $C=A_M$ (1.12)

olarak hesapladı. Benzer çalışmalar V. S. Kokilashvili[21], V. G. Maz'ja[22], K. F. Andersen ve B. Muckenhoupt[23] tarafından yapıldı.

$1<p\le q\le\infty$ durumunda L.E. Persson ve V. D. Steponov [24] tarafından (1.10) koşulunun benzeri

$$A_{PS} := \sup_{x>0}\left(\int_0^x v^{1-p'}(t)dt\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\int_0^x u(t)\left(\int_0^x v^{1-p'}(s)ds\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

olarak verildi.

(1.5) eşitsizliğindeki en iyi C sabiti için,

$A_{PS} \leq C \leq p' A_{PS}$

yazılabilir. $1 < p \leq q \leq \infty$ durumunda(1.5) en iyi C sabiti için (1.11) koşulunun hesabı pek çok araştırmacı tarafından ilerletildi ve değiştirildi.

J. S. Bradley [20], V. S. Kokilashvili [21] ve P. Gurka[27] tarafından elde edilen bir başka metoda göre $A_M \leq C \leq k(p,q) A_M$ olarak (1.11) koşulu tekrar yazılırsa

$k_1(p,q) = p^{\frac{1}{q}} (p')^{\frac{1}{p'}}$

elde edilir. Ayrıca V. G. Maz'ja [22] $k(p,q)$ fonksiyonunu

$k_2(p,q) = q^{\frac{1}{p}} (q')^{\frac{1}{p'}}$

olarak değerlendirdi. 1990 yılında B. Opic [28], $k(p,q)$ değerini

$$k_3(p,q) = \left(1 + \frac{q}{p'}\right)^{\frac{1}{q}} \left(1 + \frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

olarak geliştirdi. $p = q$ durumunda tüm değerlerin birbirine denk olduğu açıktır.

$1 < p < q < \infty$ durumu için gereklilik ve yeterlilik koşulu V. G. Maz'ja ve A. L. Rozin [22] tarafından türetildi. Bu koşul $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ olmak üzere,

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty u(x)dx \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_0^t v^{1-p'}(x)dx \right)^{\frac{r}{q'}} v^{(1-p')}(t)dt \right)^{\frac{1}{r}} < \infty$$

olarak farklı bir formda verildi. Daha sonra, L. E. Persson ve V. D. Stepanov[24] bu koşulu yeniden düzenleyerek $q < p$ olmak üzere,

$$A_{PS} = \int_0^\infty \left(\int_0^t u(x) \left(\int_0^x v^{(1-p')}(s)ds \right)^q dx \right)^{\frac{q}{r}} \left(\int_0^t v^{1-p'}(x)dx \right)^{-\frac{r}{q}} v^{1-p'}(t)dt < \infty$$

olarak ispatladı.

Kalan $0 < q < 1,\ 1 < p$ durumu G. Sinnamon [30] tarafından gösterildi. Ayrıca G. Sinnamon 1987 yılında A_{PS} koşulunun (1.5) eşitsizliği için gerek ve yeter koşul olduğunu gösterdi.

$0 < q < 1,\ p = 1$ durumu ise 1996 yılında G. Sinnamon ve V.D. Stepanov [31] tarafından tanımlandı.

1.2 Tezin Amacı

Diferansiyel denklemlerin kullanımı mühendislik, vb. alanlarda çok yaygındır. Fakat bazı durumlarda verilen problemin çözümünün varlığı kesin olarak elde edilemez. Bu eksikliklerden birini kapatmak amacıyla için bu tez de, değişken üstlü Sobolev uzayında, Hardy operatörü, Varyasyonel yöntem ve Browder-Minty teoremini kullanılarak, sınır değer problemine çözüm bulmak amaçlanmıştır.

1.3 Hipotez

Verilen diferansiyel denklemin ilk olarak varyasyonel metot kullanılarak, probleme karşılık gelen varyasyonel operatör araştırılacaktır. Sonrasında bulunacak olan bu operatör için Browder-Minty Teoreminin koşulları araştırılacaktır. Son olarak elde edilen sonuç ve Hardy operatörü kullanılarak sınır değer probleminin çözümü araştırılacaktır.

BÖLÜM 2

TEMEL İFADELER

2.1 Vektör Uzayları

Tanım 2.1 V boş olmayan bir küme ve $\mathbb{F}$ cismi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olsun.

$+ : V \times V \to V, \quad (x, y) \to x + y,$

$\cdot : \mathbb{F} \times V \to V, \quad (\alpha, x) \to \alpha x,$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım. Her $x, y, z \in V$ ve $a, b \in \mathbb{F}$ için aşağıdaki koşulları sağlasın:

1. $x + y = y + x$
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$
3. $x + 0 = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in V$ vardır.
4. $x + (-x) = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in V$ vardır.
5. $1 \cdot x = x$
6. $a(x + y) = ax + ay$
7. $(a + b)x = ax + bx$
8. $(ab)x = a(bx)$

Bu durumda V'ye $\mathbb{F}$ üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) ve elemanlarına da vektör veya nokta adı verilir. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ alınırsa V 'ye bir Reel vektör uzayı ve $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ alınırsa V 'ye bir Kompleks vektör uzayı denir.

Tanım 2.2 V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı ve $\emptyset \neq W \subset V$ olsun. Eğer W, V vektör uzayının toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı oluyorsa W'ye V'nin alt vektör uzayı denir.

Teorem 2.3 $\emptyset \neq W \subset V$, V'nin bir alt vektör uzayıdır ancak ve ancak $\forall x, y \in W$ ve $\forall a, b \in \mathbb{F}$ için $ax + by \in W$'dir.

Tanım 2.4 V bir vektör uzayı olmak üzere $f: V \to \mathbb{F}$ şeklinde tanımlanmış f fonksiyonuna fonksiyonel denir. Bir f fonksiyoneli

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y)\,, \qquad x, y \in V\,, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

koşulu ile lineerdir.

Tanım 2.5 V vektör uzayı üzerindeki tüm sürekli lineer fonksiyonellerin kümesine V vektör uzayının duali denir ve V'ile gösterilir. Bu uzay $f, g \in V', x \in V, c \in \mathbb{C}$ olmak üzere;

$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$
$(cf)(x) = c\, f(x),$

şeklindeki noktasal toplam ve skaler çarpım altında bir vektör uzayıdır. Bu durumda V' uzayının da duali tanımlanabilir. $(V')' = V''$ lineer vektör uzayına V'nin ikinci duali adı verilir.

Tanım 2.6 Dualinin duali kendisine eşit olan uzaya refleksiv (yansımalı) uzay denir.

2.2 Normlu uzay

Tanım 2.7 V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}_+$
$\quad x \to \|x\|$

dönüşümü $\forall x, y \in V$ ve $\forall a \in \mathbb{F}$ için

(N1)$\|x\| \geq 0,$
(N2)$\|x\| = 0 \iff x = \theta,$
(N3)$\|ax\| = |a|\, \|x\|$
(N4)$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa V üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(V, \|\cdot\|)$ ikilisine normlu vektör uzayı adı verilir. (N1)-(N4) özelliklerine norm aksiyomları denir.

Örnek 2.8 $\mathbb{R}^n$ Öklid vektör uzayı, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için,

$\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}$$

dönüşümü ile bir normlu vektör uzayı belirtir.

Örnek 2.9 l_p, $(1 \leq p < \infty)$ uzayı

$\|\cdot\|_{l_p}: l_p \to \mathbb{R}$

$$\|x\|_{l_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

normu ile bir normlu uzaydır.

Tanım 2.10 Bir $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayı, bir $x_0 \in V$ noktası ve pozitif bir r sayısı verilsin. O zaman

$$S_r(x_0) = \{x \in V : \|x - x_0\| < r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar,

$$\overline{S_r}(x_0) = \{x \in V : \|x - x_0\| \leq r\}$$

kümesine de x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar ve

$$\sigma_r(x_0) = \{x \in V : \|x - x_0\| = r\}$$

kümesine ise x_0 merkezli ve r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

$\overline{S_r}(x_0) = S_r(x_0) \cup \sigma_r(x_0)$ olduğu açıktır.

Tanım 2.11 V' dual uzayının normu, $f \in V'$ için

$$\|f\|_{V'} = \sup_{\substack{x \in V \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.12 Norm fonksiyonu süreklidir.

Tanım 2.13 V vektör uzayı üzerinde tanımlı iki farklı norm, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ olarak verilsin. Her $x \in V$ için

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1$$

olacak şekilde $C_1 > 0$ ve $C_2 > 0$ sayıları varsa $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normlarına denk normlar denir.

Tanım 2.14 V normlu uzayında bir (x_n) dizisi verilsin. Eğer $x_0 \in V$ noktası için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

oluyorsa bu durumda, (x_n) dizisi x_0 noktasına güçlü yakınsıyor denir. Bu yakınsama $x_n \to x_0$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ile gösterilir. Bu ifadeye normdaki yakınsama da denir. Eğer $f \in V'$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|f(x_n)\| = f(x_0)$$

olacak şekilde $x_0 \in V$ varsa bu durumda, (x_n) dizisine V normlu uzayında zayıf yakınsaktır denir ve $x_n \xrightarrow{z} x_0$ veya $x_n \rightharpoonup x_0$ ile gösterilir.

Tanım 2.15 $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $n, m > n_0$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.16 Bir $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsıyorsa $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayına tam uzay veya Banach uzayı denir.

Teorem 2.17 $V = \mathbb{R}^n$ (veya $V = \mathbb{C}^n$) vektör uzayı,

(i) $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

(ii) $\|x\|_p = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$

(iii) $\|x\|_\infty = \max\{|x_k| : k = 1,2, \dots, n\}$

normlarına göre Banach uzaydır.

2.3 Lineer Operatörler

Tanım 2.18 V ve W, aynı $\mathbb{F}$ skaler cismi üzerinde vektör uzayları ve $T : D_T \subset V \to W$ dönüşümü tanımlansın. Eğer T, D_T alt uzayındaki bir x elemanını W uzayındaki bir tek elemana götürüyorsa, bu durumda T 'ye operatör, D_T 'ye ise tanım kümesi denir.

Tanım 2.19 D_T, V 'nin bir alt uzayı olmak üzere, $T : D_T \subset V \to W$ operatörü, her $x, y \in D_T$ ve her $a, b \in \mathbb{F}$ için

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y)$$

koşulunu sağlarsa lineer operatör denir.

Örnek 2.20 $T : D_T \subset V \to W$ bir operatör olmak üzere $\forall x \in D_T$ için $T(x) = 0$ ise T'ye sıfır operatörü denir. $T(x) = x$ ise T'ye birim operatör denir.

Tanım 2.21 $T : D_T \subset V \to W$ operatörü tanımlansın. Her $x \in D_T$ için

$$\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$$

olacak şekilde $M \geq 0$ var ise T operatörüne sınırlı operatör denir.

$\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$ ifadesini $\frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq M$ olarak yazılabilir. Buradan M sabitinin en az, $D_T - \{0\}$ kümesi üzerinde alınan supremum kadar büyük olabileceği anlaşılır. Yani;

$$M = \sup_{x \in D_T(X)} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

dir.

Tanım 2.22 $T : V \to W$ sınırlı lineer operatör olsun. $\forall x \in V$ için;

$$\|T\|_{V \to W} = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_X \neq 0}} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

ifadesine T operatörünün normu denir.

Tanım 2.23 $T : V \to W$ operatörü tanımlasın. $(x_n) \in D_T$ ve $x \in D_T$ için V 'de $x_n \to x$ iken W'da $T(x_n) \to T(x)$ oluyorsa T operatörüne süreklidir denir.

Teorem 2.24 $T : V \to W$ bir lineer operatör olsun. T tek bir noktada sürekli ise her noktada süreklidir[32].

Teorem 2.25 $T : V \to W$ lineer operatörünün $D(T)$ üzerinde sınırlı olması için gerek ve yeter şart $D(T)$ üzerinde sürekli olmasıdır[32].

2.4 Ölçü Kavramı ve Lebesgue İntegrallenebilme

Tanım 2.26 Bir X kümesinin altkümelerinin $\sum$ sınıfı,

i. $X \in \sum$;

ii. $S \in \sum \implies X \backslash S \in \sum$;

iii. $S_n \in \sum , n = 1,2, \dots \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \sum$

özelliklerini sağlıyorsa $\sum$ 'ya bir σ-cebir (veya σ-cisim) denir. Bir $S \in \sum$ kümesine ölçülebilirdir denir. $(X, \sum)$ ikilisine ölçülebilir uzay, $\sum$ 'daki her kümeye ise $\sum$-ölçülebilir küme veya ölçülebilir küme denir.Bu tanımın bir sonucu olarak $\emptyset \in \sum$ 'dır[33].

Örnek 2.27 X bir küme olmak üzere $\sum = \{\emptyset, X\}$ sınıfı, X üzerinde bir σ-cebirdir.

Örnek 2.28 $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1,3,5, \dots ,2n-1, \dots\}, \{2,4,6, \dots ,2n, \dots\}, \mathbb{N}\}$ olsun. $\mathcal{A}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir σ-cebirdir.

Teorem 2.29 $\sum$ sayılabilir kesişim altında kapalıdır[34].

Tanım 2.30 X bir küme ve $\sum$, X 'in altkümelerinin bir σ-cebiri olmak üzere, $\mu : \sum \to \mathbb{R}_+$ tanımlanmış olsun. Eğer μ fonksiyonu,

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $\forall A \in \sum$ için $\mu(A) \geq 0$,

(iii) $S_j \in \sum , j = 1,2, \dots$, ikişer ikişer ayrık kümeler iken

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(S_j)$$

şartlarını sağlıyorsa μ fonksiyonuna bir ölçüm ve $(X, \sum, \mu)$ üçlüsüne bir ölçü uzayı denir. $\forall S \in \sum$ için $\mu(S) < \infty$ ise μ fonksiyonuna sonlu ölçü denir. X kümesi her biri sonlu ölçüye sahip sayılabilir kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa μ ölçüsü σ-sonludur denir[33,34].

Teorem 2.31 $(X, \sum, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $A, B \in \sum$ olsun. Eğer $A \subset B$ ise $\mu(A) < \mu(B)$ 'dir. $\mu(A) < \infty$ ise

$$\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$$

yazılabilir.

Teorem 2.32 $(X, \sum, \mu)$ bir ölçü uzayı ve (S_n), $\sum$ 'ya ait kümelerin herhangi bir dizisi olmak üzere,

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(S_k)$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.33 X bir küme ve $P(X)$, X'in kuvvet kümesi olmak üzere; $\mu^*: P(X) \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ olarak tanımlanan genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu,

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall S \in P(X), \mu^*(S) \geq 0$

(iii) $A \subset B \subset X \Longrightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}, S_n \in P(X) \Longrightarrow \mu^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(S_k)$

şartlarını sağlarsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir dış ölçü denir[35].

Tanımlardan anlaşılacağı gibi ölçünün dış ölçü veya dış ölçünün ölçü olması gerekmez. Bir ölçünün dış ölçü olabilmesi için tanım kümesinin kuvvet kümesi olması gerekmektedir.

Örnek 2.34 X kümesinin $P(X)$ kuvvetler kümesi üzerinde tanımlanan

$$\mu^*(S) = \begin{cases} 0, & S = \emptyset \\ 1, & S \neq \emptyset \end{cases}$$

fonksiyonu bir ölçü olmayıp bir dış ölçüdür.

Tanım 2.35 $A \subset \mathbb{R}$, (I_k) $\mathbb{R}$'nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi ve $\ell(I_k)$, I_k aralığının uzunluğu olmak üzere,

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) : I_k \in A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\}$$

şeklinde tanımlanan λ^* bir dış ölçüdür. Özel olarak Lebesgue dış ölçüsü olarak adlandırılır. Lebesgue ölçüsü $\mathbb{R}$'nin alt aralığına, onun uzunluğunu karşılık getirir. Yani

$$\lambda^*(I) = l(I)$$

dır[35].

Sonuç 2.36 Herhangi bir $A \subset \mathbb{R}$ için $\lambda^*(A) \geq 0$ 'dır.A sayılabilir bir küme ise $\lambda^*(A)$=0 'dır[36].

Tanım 2.37 Eğer $A \in P(\sum)$ kümesi $\forall\, S \in P(\sum)$ için,

$$\lambda^*(S) = \lambda^*(S \cap A) + \lambda^*(S \backslash A)$$

oluyorsa, A kümesine Lebesgue ölçülebilir küme denir[37].

Bir $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinin Lebesgue ölçümünü $|\Omega|$ ile gösterilir ve ölçülebilir küme olarak adlandırılır. Eğer $B \subset \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^n$ ve $|B| = 0$ ise, $A - B$ kümesinin her noktasında sağlanan bir özellik A kümesinde hemen hemen her (h.h.h.) yerde geçerli bir özellik adını alır.

Tanım 2.38 Ölçülebilir bir küme üzerinde tanımlı ve $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ kümesinden değerlerini alan bir f fonksiyonu verilsin. Eğer her $a \in \mathbb{R}$ için

$$\{x : f(x) > a\}$$

kümesi ölçülebilir ise f fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon denir.

Teorem 2.39 $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir[38].

- **(i)** $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\{x \in A : f(x) > \alpha\}$
- **(ii)** $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\{x \in A : f(x) < \alpha\}$
- **(iii)** $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\{x \in A : f(x) \leq \alpha\}$
- **(iv)** $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\{x \in A : f(x) \geq \alpha\}$

Tanım 2.40 Bir A kümesi için;

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

fonksiyonuna A kümesinin karakteristik fonksiyonu denir. A ölçülebilir ise $\chi_A(x)$ ölçülebilir fonksiyondur.

Tanım 2.41 f fonksiyonu ölçülebilir ve reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunu her ikisi de ölçülebilir ve negatif olmayan

$f^+ = \max(f, 0)$

$f^- = -\min(f, 0)$

fonksiyonları cinsinden $f = f^+ - f^-$ şeklinde yazabilir. $\int_\Omega f^+(x)dx$ ve $\int_\Omega f^-(x)dx$ integrallerinden en az biri sonlu olmak üzere

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_\Omega f^+(x)dx - \int_\Omega f^-(x)dx$$

olarak tanımlansın. Eğer her iki integral de sonlu ise, f fonksiyonuna Ω bölgesinde Lebesgue integrallenebilirdir denir. Ω bölgesinde integrallenebilir fonksiyonların sınıfı $L^1(\Omega)$ ile gösterilir.

2.5 Lebesgue Uzayı

Tanım 2.42 $(X, \sum, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $1 \leq p < \infty$ için $\Omega \subset X = \mathbb{R}^n$'de tanımlı ve

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty$$

özelliğine sahip tüm ölçülebilir $f: \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar sınıfına, p.mertebeden Lebesgue-İntegrallenebilir uzayı veya kısaca Lebesgue uzayı denir ve $L^p(\Omega)$ ile gösterilir.

Teorem 2.43 (Young Eşitsizliği)

$1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\forall a, b > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Teorem 2.44 $p \geq 1$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için,

$$|a+b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.45 $p \geq 1$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için,

$$(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b)(a-b) \geq 0$$

olur.

Teorem 2.46 (Hölder Eşitsizliği)

$1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $f \in L_p, g \in L_q$ ise $f \cdot g \in L_1$ olur ve

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.47 (Minkowski Eşitsizliği)

$1 \leq p < \infty$ için $f, g \in L_p$iken $f + g \in L_p$ olur ve

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

eşitsizliği sağlanır.

Eğer Hölder eşitsizliği ve Lebesgue integralinin özellikleri ele alınırsa; $f \in L^p(\Omega)$ ve $c \in \mathbb{C}$ iken $cf \in L^p(\Omega)$ olduğu açıktır. $f, g \in L^p(\Omega)$ için

$$|f(x)+g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

olduğundan $f + g \in L^p(\Omega)$ yazılabilir. Bu işlemlerle birlikte $L^p(\Omega)$ bir vektör uzaydır.

Tanım 2.48 $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $L^p(\Omega)$ uzayı,

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

normu ile tanımlanır. $\|f\|_p$ ifadesine f fonksiyonunun L_p −normu denir.

Tanımdan $\|f\|_p \geq 0$ 'dır.

$\|f\|_p = 0$ ise h.h.h. $f(x) = 0$ 'dır.

$\|af\|_p = |a|\|f\|_p \, , a \in \mathbb{C}$

$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

olduğundan L_p normlu uzaydır.

Teorem 2.49 $L^p(\Omega)$ bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.50 Ω bölgesinde ölçülebilir bir f fonksiyonu için hemen hemen her yerde $|f(x)| \leq K$ olacak şekilde bir K sabiti varsa, f fonksiyonuna h.h.h. yerde sınırlıdır denir. Böyle K sabitlerinin en büyük alt sınırına da $|f|$ 'nin Ω bölgesindeki esas (essential) supremumu denir ve

$$ess \sup_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf\{K : |f(x)| \leq K \ h.h. \ x \in \Omega\}$$

ile gösterilir. Ω bölgesinde h.h.h. yerde sınırlı f fonksiyonlarıyla tanımlanan uzay $L^\infty(\Omega)$ ile gösterilir.

Teorem 2.51 $L^\infty(\Omega)$ uzayı

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.52 (f_n) ve f fonksiyonları L_p uzayının elemanları olmak üzere; $f_n \to f$, p. mertebeden yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall n > n_o$ için $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Bu yakınsaklık çeşidine L_p'de yakınsaklık denir.

2.5.1 Ağırlıklı Lebesgue Uzayı

Tanım 2.53 w fonksiyonu h.h.h $x \in \mathbb{R}^n$ için $w(x) > 0$ olacak şekilde $\mathbb{R}^n$ 'de lokal integrallenebilir olsun. Bu durumda w fonksiyonuna bir ağırlık fonksiyonu denir. Özel olarak $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ için $d(x) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|$ ve a reel bir sayı olmak üzere $w(x) = \big(d(x)\big)^a$ ağırlık fonksiyonuna kuvvet tipli ağırlık fonksiyonu denir.

Tanım 2.54 w bir ağırlık fonksiyonu ve Ω, $\mathbb{R}^n$ 'de açık bir bölge olsun. Bu halde Ω bölgesinde

$$\left(\int_{\Omega} |f(x)|^p w\, dx\right) < \infty$$

olacak şekilde ölçülebilir fonksiyonların kümesine ağırlıklı Lebesgue uzayı denir ve $L_w^p(\Omega)$ ile gösterilir.

Teorem 2.55 Ağırlıklı Lebesgue uzayı

$$\|f\|_{p,w} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p w dx\right)^{1/p} < \infty$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

2.6 Sobolev uzayı

Tanım 2.56 $\Omega, \mathbb{R}^n$ 'de bir bölge ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, Ω bölgesinin her kompakt alt kümesinde p. kuvveti integrallenebilen, ölçülebilir bütün fonksiyonların uzayı $L_{loc}^p(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 2.57 $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ ve a çoklu indisi verilsin. Her $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ için

$$(-1)^{|a|} \int_{\Omega} u\, D^a \varphi\, dx = \int_{\Omega} \varphi v\, dx$$

eşitliği sağlanırsa, $v \in L_{loc}^1(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun a. zayıf türevi denir. Bu durumda v fonksiyonu, u fonksiyonunun genelleşmiş türevi olarak da adlandırılır ve $v = D^a u$ şeklinde yazılır.

Örnek 2.58 $|x|$ fonksiyonun 0 noktasında adi anlamda türevi yoktur, fakat bu noktada zayıf türevi mevcuttur; $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ olmak üzere

$$(-1)\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,\varphi'(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x\,\varphi'(x)dx-\int_{0}^{\infty}x\,\varphi'(x)dx$$

$$=x\varphi(x)|_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}\varphi\,(x)dx-x\varphi(x)|_{0}^{\infty}+\int_{0}^{\infty}\varphi\,(x)dx$$

$$=0-\int_{-\infty}^{0}\varphi\,(x)dx-0+\int_{0}^{\infty}\varphi\,(x)dx$$

Buradan, $v=\begin{cases}1 & , \quad x>0\\ -1 & , \quad x<0\end{cases}$ bulunur.

Tanım 2.59 Ω , $\mathbb{R}^n$ 'de bir bölge, m negatif olmayan herhangi bir tamsayı ve $1\le p\le\infty$ olmak üzere,

$W^{m,p}(\Omega)=\{u\in L^p(\Omega)\colon D^a u\in L^p(\Omega),0\le|a|\le m\}$

şeklinde tanımlanan uzaya Sobolev Uzayı denir. $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{m,p,\Omega}=\|u\|_{m,p}=\left(\sum_{0\le|a|\le m}\|D^a u\|_p^p\right)^{1/p} \quad ;1\le p<\infty$$

$$\|u\|_{m,\infty,\Omega}=\|u\|_{m,\infty}=\max_{0\le|a|\le m}\|D^a u\|_\infty \quad ;1\le p<\infty$$

normları ile bir Banach uzayıdır.

$W^{m,p}(\Omega)$ uzayında, $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ ile gösterilir.

2.6.1 Ağırlıklı Sobolev uzayı

Tanım 2.60 Benzer olarak ağırlıklı Sobolev uzayı, m herhangi bir pozitif tamsayı ve $1\le p\le\infty$ olmak üzere,

$W_w^{m,p}(\Omega)=\{u\in L_w^p(\Omega)\colon D^a u\in L_w^p(\Omega),0\le|a|\le m\}$

şeklinde tanımlanır.

2.7 Önemli Teoremler

Teorem 2.61 (Lebesgue Monoton Yakınsaklık Teoremi)

$(X, \sum, \mu)$ bir ölçü uzayı, $S \in \sum$ ve $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots$ olacak şekilde ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f_n d\mu = \int_S \lim_{n\to\infty} f_n d\mu$$

dır.

Teorem 2.62 (Fatou Lemma)

$(X, \sum, \mu)$ bir ölçü uzayı, $S \in \sum$ ve $\{f_n\}$ negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda

$$\int_S \lim_{n\to\infty} \inf f_n \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_S f_n \, d\mu$$

dır.

Teorem 2.63 (Lebesgue Temel Yakınsaklık Teoremi)

$(X, \sum, \mu)$ bir ölçü uzayı, $S \in \sum$ ve $\{f_n\}$ ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ve $x \in S$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ olsun. $n = 1,2,3, \ldots$ ve $x \in S$ için $|f_n(x)| \leq g(x)$ olacak şekilde S üzerinde $g(x) \in L_1(X)$ fonksiyonu varsa,

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f_n \, d\mu = \int_S f d\mu$$

Teorem 2.64 (Luzin Teoremi)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir bölge ve f fonksiyonu Ω üzerinde h.h.h. yerde tanımlanmış olsun. Bu durumda f'nin Ω 'da ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için f'nin $\Omega - M$'ye kısıtlaması $\Omega - M$'de sürekli olacak şekilde $\mu(M) < \varepsilon$ olan bir $M \subset \Omega$ açık kümesinin bulunmasıdır.

BÖLÜM 3

DEĞİŞKEN ÜSTLÜ LEBESGUE UZAYI VE HARDY OPERATÖRÜ

3.1 Modüler ve Orlicz Uzayı

Tanım 3.1 X bir reel vektör uzayı olmak üzere; $\rho: X \to [0,\infty]$ fonksiyoneli, $\forall\, x, y \in X$ için

(i) $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\rho(x) = \rho(-x)$

(iii) $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ için $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

özelliklerini sağlıyorsa, ρ'ya X üzerinde bir modüler denir.

Eğer (iii) özelliği yerine $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ için

$\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\rho(x) + \beta\rho(y)$

özelliği sağlanıyorsa ρ'ya X üzerinde bir konveks modüler denir.

Örnek 3.2 $X = L_p([a,b])$ alınırsa, $\rho(x) = \int_a^b |x(t)|^p dt$

fonksiyoneli L_p 'de konveks modülerdir.

Tanım 3.3 X bir reel vektör uzayı olmak üzere, ρ fonksiyoneli X üzerinde modüler ise

$X_\rho = \{x \in X: \lim_{\lambda \to 0} \rho(\lambda x) = 0\}$

uzayına modüler uzay denir. X_ρ modüler uzayı X vektör uzayının bir alt vektör uzayıdır.

Tanım 3.4 X bir reel vektör uzay ve ρ fonksiyoneli X üzerinde konveks modüler olsun. X_ρ üzerinde,

$$\|f\|_\rho = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$$

normu tanımlanabilir. Bu norm özel olarak Luxemburg normu olarak adlandırılır.

Tanım 3.5 $\Omega, \mathbb{R}^n$ 'de ölçülebilir bir bölge olsun. Eğer $\varphi: \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

(i) $\forall t \in \Omega$ için $\varphi(t,u)$ azalmayan bir fonksiyon,

(ii) $\varphi(t,0) = 0, u > 0$ için $\varphi(t,u) > 0$ ve $\lim_{u\to\infty} \varphi(t,u) = \infty$,

(iii) $\forall u \geq 0$ için $\varphi(t,u)$ ölçülebilir bir fonksiyon

koşullarını sağlarsa, φ fonksiyona, Φ sınıfına aittir denir.

Tanım 3.6 φ fonksiyonu Φ sınıfına ait ise, $\forall x \in X$ için $\varphi(t,|x(t)|)$ fonksiyonu ölçülebilirdir ve

$$\rho(x) = \int_\Omega \varphi(t,|x(t)|)\, dt$$

ifadesi X 'de ρ modüleri tanımlar. $\varphi(t,u)$ fonksiyonu her $t \in \Omega$ için u 'nun konveks fonksiyonu ise ρ, X 'de konveks modülerdir.

$$X_\rho = \left\{x \in X : \lim_{\lambda\to 0^+} \int_\Omega \varphi(t,\lambda|x(t)|)\, dt = 0\right\}$$

modüler uzayına genelleştirilmiş Orlicz uzayı veya Musielak-Orlicz uzayı denir ve L^φ ile gösterilir.

$$L_0^\varphi = \left\{x \in X : \int_\Omega \varphi(t,\lambda|x(t)|)\, dt < \infty\right\}$$

kümesine genelleştirilmiş Orlicz sınıfı denir.

3.2 Değişken Üstlü Lebesgue Uzayı

Tanım 3.7 Ω, $\mathbb{R}^n$ 'de ölçülebilir bir küme, $|\Omega| > 0$ ve P, Ω 'da tanımlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi olsun. $p \in P$ ve $\forall x \in \Omega$, $s \geq 0$ için,

$\varphi(x,s) = s^{p(x)}$

olarak tanımlanan $\varphi: \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

(i) $\forall x \in \Omega$ için $\varphi(x,\cdot): [0,\infty) \to \mathbb{R}$ azalmayan sürekli bir fonksiyon,

(ii) $\varphi(x,0) = 0$, $s > 0$ için $\varphi(x,s) > 0$ ve $\lim_{s\to\infty} \varphi(x,s) = \infty$,

(iii) $\forall s \geq 0$ için $\varphi(\cdot,s) \in P$

koşullarını sağladığından Φ sınıfına aittir ve $\varphi(x,s)$ fonksiyonu $\forall x \in \Omega$ için konveks fonksiyon olur. Buradan $f \in P$ fonksiyonu için

$\rho: P \to [0,\infty]$

$$\rho(f) = \rho_{p(x)}(f) = \int_{\Omega} \varphi(x,|f|)\, dx = \int_{\Omega} |f(x)|^{\mathrm{p(x)}}\, dx$$

fonksiyonu tanımlansın. ρ fonksiyonu $\forall f,g \in P$ ve $\forall \alpha,\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ için;

(i) $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$

(ii) $\rho(f) = \rho(-f)$

(iii) $\rho(\alpha f + \beta g) \leq \alpha\rho(f) + \beta\rho(g)$

özelliklerini sağladığından P üzerinde konveks modülerdir. $P_\rho = L^{p(x)}(\Omega)$ modüler uzayı

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ f \in P : \lim_{\lambda\to 0^+} \rho(\lambda f) = 0 \right\}$$

genelleştirilmiş Orlicz uzayının bir özel çeşididir ve P kümesinin lineer alt uzayıdır.

Tanım 3.8 Ω, $\mathbb{R}^n$ 'de açık bir bölge olmak üzere; $p(x):\Omega \to [1,\infty)$ ölçülebilir fonksiyon ve

$$p^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p(x)$$
$$p^+ = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p(x)$$

olarak tanımlansın, burada $1 \le p^- \le p^+ < \infty$ 'dur. Bu durumda

$$L^{p(x)}(\Omega) := \left\{ f \in P : \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya Değişken Üstlü Lebesgue Uzayı, $p(\cdot)$ fonksiyonuna ise değişken üst denir. Bu çalışma süresince aksi belirtilmedikçe $1 \le p^- \le p(x) \le p^+ < \infty$ kabul edilecektir.

p'nin sabit olması durumunda değişken üstlü Lebesgue uzayı, klasik Lebesgue uzayına dönüşür.

Tanım 3.9 $L_+^\infty(\Omega)$ uzayı,

$$L_+^\infty(\Omega) = \left\{ f \in L^\infty(\Omega) : \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} f(x) \ge 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

$p \in L_+^\infty(\Omega)$ ise modüler fonksiyonun özelliklerine ek olarak aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $\rho(f+g) \le 2^{p^+}\left(\rho(f)+\rho(g)\right)$

(ii) $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ için eğer $\lambda > 1$ ise,

$$\rho(f) \le \lambda\rho(f) \le \lambda^{p^-}\rho(f) \le \rho(\lambda f) \le \lambda^{p^+}\rho(f)$$

ve eğer $0 < \lambda < 1$ ise,

$$\lambda^{p^+}\rho(f) \le \rho(\lambda f) \le \lambda^{p^-}\rho(f) \le \lambda\rho(f) \le \rho(f)$$

elde edilir.

(iii) Eğer h.h.h. $x \in \Omega$ için $|f(x)| \le |g(x)|$ ve $\rho(f) < \infty$ ise $\rho(f) \le \rho(g)$ ve $|f| \ne |g|$ için kesin eşitsizlik vardır.

(iv) $f \in L^{p(x)}(\Omega)\backslash\{0\}$ için, $\rho(\lambda f)$ fonksiyonu λ'ya göre sürekli, konveks çift fonksiyondur. Ayrıca $\lambda \in [0,\infty)$ için artandır.

ρ modüleri konveks olduğundan $L^{p(x)}(\Omega)$ üzerinde

$\|f\|_{p(\cdot),\Omega} = \|f\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$ Lüksemburg normu tanımlanabilir.

Teorem 3.10 $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayı, $\|f\|_{p(\cdot)}$ normu ile tamdır, yani Banach uzaydır[40].

İspat $\Omega_1 = \{x \in \Omega: p(x) = 1\}$ ve $\Omega_\infty = \{x \in \Omega: p(x) = \infty\}$ ve

$$p'(x) = \begin{cases} \infty, & x \in \Omega_1 \\ 1, & x \in \Omega_\infty \\ \frac{p(x)}{p(x)-1}, & diğer \end{cases} \text{ ve } \rho_p(f) = \int_{\Omega-\Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx + ess\sup|f(x)|$$

olsun. $f_n \in L^{p(.)}(\Omega)$ bir Cauchy dizisi ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda Cauchy dizisinin tanımından $m,n > n_0$ olacak şekilde öyle $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki $\rho_{p'}(g) \leq 1$ olan her g fonksiyonu için

$$\int_\Omega |f_m(x) - f_n(x)||g(x)|dx < \varepsilon \tag{3.1}$$

olur. Ω kümesi sonlu ölçümlü, ikili ayrık G_k altkümelerine parçalansın. $k \in \mathbb{N}$ için;

$$g_k = (1 + |G_k|)^{-1}\chi_{G_k}$$

olacak şekilde g_k fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda

$$\rho_{p'}(g_k) \leq \int_{G_k} (1 + |G_k|)^{-p(x)} dx + (1 + |G_k|)^{-1} \leq 1$$

olur. (3.1) denkleminde g fonksiyonu yerine g_k fonksiyonu yazılırsa, $m,n > n_0$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\int_{G_k} |f_m(x) - f_n(x)|dx \leq \varepsilon(1 + |G_k|)$$

elde edilir. Bu ise (f_n)'nin Cauchy dizisi ve her bir $L^1(G_k)$ için yakınsak olduğu anlamına gelir. Tümevarımla h.h.h. $x \in G_k, k \in \mathbb{N}$ için $f_n^k(x) \to f^k(x)$ olacak şekilde $\left(f_n^k(x)\right)$ alt dizisi ve $f^k(x) \in L^1(G_k)$ fonksiyonları elde edilir. Buradan, h.h.h. $x \in \Omega$ için

$$f_m^{(m)}(x) \to \sum_{k=1}^{\infty} f^k(x)\chi_{G_k}(x)$$

olur. f_m yerine $f_m^{(m)}$ yazılarak ve Fatou teoremi kullanılarak her $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $\rho_{p'}(g) \leq 1$ koşulunu sağlayan her g için

$$\int_{\Omega} |f(x) - f_n(x)||g(x)|dx \leq \sup_m \int_{\Omega} \left|f_m^{(m)}(x) - f_n(x)\right||g(x)|dx \leq \varepsilon$$

elde edilir. Dolayısıyla $\|f - f_n\|_{p(x)} < \varepsilon$ olur.

Teorem 3.11 $f, g \in L^{p(x)}(\Omega)$ ve h.h.h. $|f(x)| \leq |g(x)|$ iken $\|f\|_{p(\cdot)} \leq \|g\|_{p(\cdot)}$ yazılabilir. $\|f\|_{p(\cdot)} \leq \mathrm{C}_1$ olması için gerek ve yeter şart $\rho(f) \leq C_2$ olmasıdır. Burada $\frac{C_1}{C_2}$ alttan ve üstten p'ye bağlı bir sabitle sınırlıdır[40].

Teorem 3.12 $f \in L^{p(x)}(\Omega)\backslash\{0\}$ olsun. $\|f\|_{p(\cdot)} = \alpha$ olması için gerek ve yeter şart $\rho\left(\frac{f}{a}\right) = 1$ olmasıdır[39],[40] .

Teorem 3.13 $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ olmak üzere $\|f\|_{p(\cdot)}$ normuyla $\rho(f)$ modüleri arasındaki ilişki;

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(0,1)}^{p^+} \leq \rho(f) \leq \|f\|_{L^{p(\cdot)}(0,1)}^{p^-}, \qquad \|f\|_{L^{p(\cdot)}(0,1)} \leq 1$$

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(0,1)}^{p^-} \leq \rho(f) \leq \|f\|_{L^{p(\cdot)}(0,1)}^{p^+}, \qquad \|f\|_{L^{p(\cdot)}(0,1)} > 1$$

olarak verilir [39],[40],[41],[42],[43]. Bu eşitsizlikler modüler ve norm arasında geçiş yapılmasına olanak sağlar.

Teorem 3.14 $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ ve $k = 1,2, \ldots$ için $(f_k) \in L^{p(x)}(\Omega)$ olmak üzere;

(i) $\lim_{k\to\infty} \|f_k - k\|_{p(\cdot)} = 0$

(ii) $\lim_{k\to\infty} \rho(f_k - f) = 0$

(iii) (f_k), Ω bölgesinde f fonksiyonuna yakınsar ve

$$\lim_{k\to\infty} \rho(f_k) = \rho(f)$$

yazılabilir[39],[40][42],[43].

Teorem 3.15 Ω bölgesinde tanımlı tüm sınırlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi $\left(L^{p(x)}(\Omega), \|\cdot\|_{p(\cdot)}\right)$ uzayında yoğundur [39],[40].

Teorem 3.16 $p \in P \cap L^{\infty}(\Omega)$ olmak üzere, $C(\Omega) \cap L^{p(x)}(\Omega)$ kümesi $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayında yoğundur. Eğer $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesi açık ise, $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayı $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayında yoğundur[39],[40].

İspat $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Teorem 3.15'den $\|f - g\|_{p(x)} < \varepsilon$ olacak şekilde sınırlı $g \in L^{p(x)}(\Omega)$ fonksiyonu vardır. Luzin teoremi gereği her $x \in \Omega\backslash U$ ve $|U| < \min\left\{1, \left(\frac{\varepsilon}{2\|g\|_{\infty}}\right)\right\}$ için ,

$g(x) = h(x)$ ve $\sup|h(x)| = \sup_{\Omega\backslash U} |g(x)| \leq \|g\|_{\infty}$

olacak şekilde bir $h \in C(\Omega)$ fonksiyonu ve U kümesi vardır. Buradan,

$$\rho_p\left(\frac{g-h}{\varepsilon}\right) \leq \max\left\{1, \left(\frac{2\|g\|_{\infty}}{\varepsilon}\right)^{p^+}\right\}|U| \leq 1,$$

yani $\|g - h\|_{p(x)} \leq \varepsilon$ olur. $\|f - g\|_{p(x)} < \varepsilon$ ile birlikte, $\|f - h\|_{p(x)} \leq 2\varepsilon$ elde edilir.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesi açık olsun. $p \in L^{\infty}(\Omega)$, $C_0^{\infty}(\Omega) \subset L^{\infty}(\Omega)$ ve $\rho_p\left(\frac{h}{e}\right) < \infty$ olduğundan $\rho_p\left(\frac{h\chi_G}{\varepsilon}\right) \leq 1$ olacak şekilde sınırlı açık $G \subset \Omega$ kümesi vardır, yani $\|h - h\chi_G\|_{p(x)} \leq \varepsilon$ olur.

m, $\sup_G|h(x)-m(x)|<\varepsilon\min\{1,|G|^{-1}\}$ koşulunu sağlayan bir polinom olsun. Bu durumda

$$\rho_p\left(\frac{h\chi_G-m\chi_G}{\varepsilon}\right)\leq\min\{1,|G|^{-1}\}\leq 1$$

yani,

$$\|h\chi_G-m\chi_G\|_{p(x)}\leq\varepsilon$$

olur. $\|h\chi_G-m\chi_G\|_{p(x)}\leq\varepsilon$ eşitsizliğinin benzer düşüncesiyle, yeterince küçük pozitif a sayısı için $\left\|m\chi_G-m\chi_{K_a}\right\|_{p(x)}\leq\varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan $K_a=\{x\in G: dist(x,\partial G)\geq a\}$ kompakt kümesi elde edilir. Her $x\in G$ için $0\leq\varphi(x)\leq 1$ ve $x\in K_a$ için $\varphi(x)=1$ olacak şekilde bir $\varphi\in C_0^\infty(G)$ alarak,

$$\|m\chi_G-m\varphi\|_{p(x)}\leq\left\|m\chi_G-m\chi_{K_a}\right\|_{p(x)}\leq\varepsilon$$

elde edilir. Buradan, $\|f-h\|_{p(x)}\leq 2\varepsilon$ ve $\|h\chi_G-m\chi_G\|_{p(x)}\leq\varepsilon$ olduğu göz önünde bulundurulursa $\|f-m\varphi\|_{p(x)}<4\varepsilon$ elde edilir. Dolayısıyla $m\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ olur.

Tanım 3.17 $p(\cdot)$ değişken üst ve $\frac{1}{\infty}=0$ olmak üzere, $p'(\cdot)$ değişken üstü;

$$\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{p'(x)}=1$$

şeklinde tanımlanır. $p'(x)$ 'e $p(x)$ 'in dual değişken üstü denir.

Teorem 3.18 Eğer $p^+<\infty$ ise $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayı ayrılabilirdir. Eğer $1<p^-$ ve $p^+<\infty$ ise o zaman $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayı refleksiv uzay olur[39],[40],[44].

3.3 Değişken Üstlü Sobolev Uzayı

Tanım 3.19 Ω, $\mathbb{R}^n$ 'de bir bölge ve m negatif olmayan herhangi bir tamsayı olsun. $|a| \leq m$ özellikli her $a-$çoklu indisi için Ω bölgesinde tanımlı $D_a u \in L^{p(x)}(\Omega)$ şeklindeki tüm u fonksiyonlarının sınıfına değişken üstlü Sobolev Uzayı denir ve

$$W^{m,p(x)}(\Omega) \coloneqq \left\{ \mathrm{u} \in L^{p(x)}(\Omega) \colon D_a u \in L^{p(x)}(\Omega), |a| \leq m \right\}$$

olarak gösterilir. Bu uzayda tanımlanan norm

$$\|u\|_{W^{m,p(x)}(\Omega)} = \|u\|_{p(x),m,\Omega} = \sum_{|a| \leq m} |D_a u|_{p(x)}$$

şeklinde gösterilir. Bu norm altında $W^{m,p(x)}(\Omega)$ uzayı Banach uzayı olur. $m = 0$ durumunda $W^{0,p(x)}(\Omega) = L^{p(x)}(\Omega)$ olduğu açıktır.

$C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayının, $W^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı ${W_0}^{m,p(x)}(\Omega)$ uzayı olur.

Teorem 3.20 Eğer $1 < p^-$ ve $p^+ < \infty$ ise $W^{m,p(x)}(\Omega)$ ve ${W_0}^{m,p(x)}(\Omega)$ uzayları ayrılabilir ve refleksiv Banach uzaylarıdır [40],[44].

3.4 Hardy Operatörü için Değişken Üstlü Lebesgue Uzaylarında Bazı Sonuçlar

$p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyon olmak üzere;

$$p^+ = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} p(x)$$

$$p^- = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} p(x)$$

olarak tanımlayalım. $\mathbb{R}^n$ 'de $0 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ koşulunu sağlayan $p(x)$ ölçülebilir fonksiyonlarının oluşturduğu küme P ve $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonlar olsun. $I_p(f) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)} dx$ modüler olmak üzere $p(x)$- normu

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = \inf \left\{ \lambda > 0 \colon I_p\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}; \quad p^- \geq 1$$

olarak tanımlayalım.

$v(x)$ ve $w(x)$ağırlık fonksiyonları $\mathbb{R}^n$'de h.h.h. yerde negatif olmayan sonlu değere sahip ölçülebilir fonksiyonlar olsun. Bu ağırlık fonksiyonları için her $a > 0$ iken;

$\sigma = w(x)^{-\frac{1}{p(x)-1}} \in L^1\big(B(0,a)\big)$,

$v(x) \in L^1\big(\mathbb{R}^n \backslash B(0,a)\big)$

kabul edelim.

$$V(x) = \int_{|y|>|x|} v(y)dy$$

$$W(x) = \int_{|y|<|x|} \sigma(y)dy$$

Gösterimlerini tanımlayalım. Burada $V(x)$ ve $W(x)$ sadece $|x|$ 'e bağlıdır. Bu nedenle bu fonksiyonlar için sırasıyla $\tilde{V}(|x|)$, $\tilde{W}(|x|)$ gösterimlerini kullanılacağız. Burada üste konulan $\sim$ sembolü fonksiyonun tek değişkene bağlı olduğunu göstermektedir. Bu fonksiyonlar için

$\tilde{V}(0) = \infty, \qquad \tilde{W}(\infty) = \infty$

olduğunu varsayalım.$0 < m < 1$ için;

$\tilde{W}(m) < 1,\ \tilde{V}(m) > 1$

ve ayrıca $M > 1$ için;

$\tilde{W}(M) > 1,\ \tilde{V}(M) < 1$ olsun.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere;

$$\exists f(0) \in \mathbb{R} : \sup_{|x|<m} |f(x) - f(0)| \ln \frac{1}{\tilde{W}(|x|)} \leq C_1$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfını Λ_0 ile,

$$\exists f(\infty) \in \mathbb{R} : \sup_{|x|>M} |f(x) - f(\infty)| \ln \frac{1}{\tilde{V}(|x|)} \leq C_2$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfını Λ_∞ ile gösterelim.

Bundan sonra kullanılacak olan C pozitif sabitleri ($C, C_3, C_4, C_5, \ldots$ gibi), sadece $n, m, M, p^+, p^-, q^+, q^-, C_1, C_2, \tilde{V}(m), \tilde{V}(M), \tilde{W}(m), \tilde{W}(M)$ sabitlerine bağlı olacaklardır.

Literatür özetinde Hardy eşitsizliği için verilen koşullar, günümüzde A. Gogatishvili, A. Kufner, L. E. Persson ve A. Wedestig tarafından aşağıdaki gibi kapsanmıştır[25].

$1 < p \leq q < \infty$ ve s pozitif olmak üzere v, w ağırlık fonksiyonları ve $\sigma = w^{-\frac{1}{p(.)-1}}$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında lokal integrallenebilir olsun. O halde aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

$$B_1 = \sup_{x\epsilon(0,\infty)} V(x)^{\frac{1}{q}} W(x)^{\frac{1}{p'}}$$

$$B_2 = \sup_{x\epsilon(0,\infty)} \left(\int_x^\infty v(t) W(t)^{\left(\frac{1}{p'}-s\right)q} dt \right)^{\frac{1}{q}} W(x)^s$$

$$B_3 = \sup_{x\epsilon(0,\infty)} \left(\int_0^x \sigma(t) V(t)^{\left(\frac{1}{q}-s\right)p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} V(x)^s$$

$$B_4 = \sup_{x\epsilon(0,\infty)} \left(\int_0^x v(t) W(t)^{\left(\frac{1}{p'}+s\right)q} dt \right)^{\frac{1}{q}} W(x)^{-s}$$

$$B_5 = \sup_{x\epsilon(0,\infty)} \left(\int_x^\infty \sigma(t) V(t)^{\left(\frac{1}{q}+s\right)p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} V(x)^{-s}$$

$C_* f(x) \leq g(x) \leq C^* f(x)$ olacak şekilde C_* ve C^* pozitif sabitleri varsa $f(x) \sim g(x)$ gösterimi kullanılır. Yukarıdaki koşullar için kısaca $B_1 \sim B_2 \sim B_3 \sim B_4 \sim B_5$ olarak yazılabilir[26].

Yardımcı Teorem 3.21

i. $s \in P \cap \Lambda_0$ ve $|x| \leq m$ olsun. O halde;

$$e^{-c_1} W(x)^{s(0)} \leq W(x)^{s(x)} \leq e^{c_1} W(x)^{s(0)}$$

ii. $s \in P \cap \Lambda_\infty$ ve $|x| \geq M$ olsun. O Halde;

$$e^{-c_2} W(x)^{s(\infty)} \leq W(x)^{s(x)} \leq e^{c_2} W(x)^{s(\infty)}$$

eşitsizlileri sağlanır.

Teorem 3.22 $p, q \in \Lambda_0 \cap \Lambda_\infty \cap \mathrm{P}$ olsun. $f(x) \geq 0$ ölçülebilir fonksiyon ve $p^- > 1$, $q(0) \geq p(0)$, $q(\infty) \geq p(\infty)$ olsun. O halde aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

(i) $\left\| v^{\frac{1}{q(x)}} Hf(x) \right\|_{L^{q(.)}(\mathbb{R}^n)} < C \left\| w^{\frac{1}{p(x)}} f(x) \right\|_{L^{p(.)}(\mathbb{R}^n)}$

olacak şekilde C pozitif sabiti vardır.

(ii) Her f için

$$\left(\int_{B(0,m)} \left(\int_{|y|<|x|} f(y)dy \right)^{q(0)} v(x)dx \right)^{\frac{1}{q(0)}} \leq C_5 \left(\int_{B(0,m)} f(x)^{p(0)} \sigma^{1-p(0)} dx \right)^{\frac{1}{p(0)}}$$

ve

$$\left(\int\limits_{|x|>M} \left(\int\limits_{M<|y|<|x|} f(y)dy \right)^{q(0)} v(x)dx \right)^{\frac{1}{q(0)}}$$

$$\leq C_6 \left(\int\limits_{|x|>M} f(x)^{p(0)} \sigma^{1-p(0)} dx \right)^{\frac{1}{p(0)}}$$

olacak şekilde C_5, C_6 pozitif sabitleri vardır.

(i)

$$\sup_{0<t<m} \tilde{V}(t)^{\frac{1}{q(0)}} \cdot \tilde{W}(t)^{\frac{1}{p'(0)}} \leq C_7 < \infty$$

ve

$$\sup_{t>M} \tilde{V}(t)^{\frac{1}{q(\infty)}} \cdot \tilde{W}(t)^{\frac{1}{p'(\infty)}} \leq C_8 < \infty$$

olacak şekilde t değişkeninden bağımsız C_7, C_8 pozitif sabitleri vardır.

(ii)

$$\tilde{V}(x)^{\frac{1}{q(\infty)}} \cdot \tilde{W}(x)^{\frac{1}{p'(\infty)}} \leq C_9 < \infty; \quad x \in \mathbb{R}^n$$

olacak şekilde x'e bağlı olmayan C_9 pozitif sabiti vardır.[45]

Yukarıdaki teoremde; ağırlık fonksiyonlarını özel olarak

$$v(x) = |x|^{q(x)\left(\beta(x) - \frac{n}{p'(x)} - \frac{n}{q(x)}\right)}$$
$$w(x) = |x|^{p(x)\beta(x)}$$

olarak seçilirse $q(0) \geq p(0)$, $q(\infty) \geq p(\infty)$ koşulları yerine $q(x) \geq p(x)$ alınabilir [60].

Teorem 3.23 $-\infty < \beta < \infty$ ve $p: (0,1) \to (1,\infty)$ fonksiyonu $\varepsilon > 0$ olmak üzere $(0,\varepsilon)$ aralığında, azalan ölçülebilir fonksiyon olsun. Ayıca $\beta \sup_{t\in(0,1)} p'(t) < 1$ olsun. O halde

$$\left\|x^{\beta(.)-1} Hf\right\|_{L^{p(.)}(0,1)} \leq C \left\|x^{\beta(.)} f\right\|_{L^{p(.)}(0,1)}$$

eşitsizliği her ölçülebilir pozitif f fonksiyonu için sağlanır[46].

Teorem 3.24 $p: (0,1) \to [1,\infty)$ ve $\beta: (0,1) \to (-\infty,\infty)$ ölçülebilir fonksiyonlar ve $\frac{1}{p'(.)} - \beta(.)$ fonksiyonu $(0,1)$ aralığında pozitif ve artan olsun. O halde aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

(i) Pozitif ölçülebilir her f fonksiyonu için

$$\left\|x^{\beta(.)-1} Hf\right\|_{L^{p(.)}(0,1)} \leq C \left\|x^{\beta(.)} f\right\|_{L^{p(.)}(0,1)}$$

olacak şekilde $C > 0$ sabiti vardır.

(ii) $0 < a < 1$ için;

$$\int_a^1 x^{-\frac{1}{p'(x)}+\beta(x)} \frac{dx}{x} \leq C\ a^{-\frac{1}{p'(a)}+\beta(a)}$$

sağlanır.

(iii) $x^{-\frac{1}{p'(x)}+\beta(x)+\varepsilon}$ fonksiyonu azalan olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır.

(iv) $0 < a < 1$ için

$$\int_a^1 \left[a^{\frac{1}{p'(a)}-\beta(a)} x^{\beta(x)-\frac{1}{p'(x)}}\right]^{p(x)} \frac{dx}{x} \leq C$$

sağlanır.

(iii) $0 < a < 1$ için

$$\left\|x^{\beta(.)-1}\chi_{a,1}(.)\right\|_{L^{p(.)}(0,1)} \leq Ca^{\beta(a)-\frac{1}{p'(a)}}$$

sağlanır[46].

3.5 $L^{p(x)}$ Uzayında Hardy Operatörünün Sınırlılığı ile ilgili Örnekler

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık bölge olmak üzere p fonksiyonu, Ω üzerinde ölçülebilir fonksiyon olsun ve Λ sınıfını; $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ölçülebilir,

- $\exists m \in \left(0, \frac{1}{2}\right),\ \exists f(0) \in \mathbb{R}\ ,\ \sup_{x \in B(0,m)} |f(x) - f(0)| \ln \frac{1}{|x|} < \infty$
- $\exists M > 1,\ \exists f(\infty) \in \mathbb{R}\ ,\ \sup_{x \in \mathbb{R} \setminus B(0,M)} |f(x) - f(\infty)| \ln |x| < \infty$

koşullarını sağlayan fonksiyonlar sınıfı olarak tanımlayalım.

$q(x) \geq p(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonları, Λ sınıfından ölçülebilir fonksiyonlar ve

$$0 < p^- < p(x), \quad q(x) \leq q^- < \infty, \quad -\infty < \beta^- \leq \beta(x) \leq \beta^+ < \infty$$

özelliklerini sağlansınlar. O halde her f pozitif ölçülebilir fonksiyonu için

$$\left\| |x|^{\beta(.)-\frac{n}{p'(.)}-\frac{n}{q(.)}} Hf \right\|_{L^{q(.)}(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\| |x|^{\beta(.)} f \right\|_{L^{p(.)}(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliği sağlanır ancak ve ancak

$$p(0) > 1, \qquad p(\infty) > 1, \qquad \beta(0) < n\left(1 - \frac{1}{p(0)}\right), \qquad \beta(\infty) < n\left(1 - \frac{1}{p(\infty)}\right)$$

dır. Benzer sonuç Hardy operatörünün eşleniği $\bar{H}f = \int_{|y|>|x|} f(y)dy$ içinde verilebilir, Bu durumda gerek ve yeter koşul

$$p(0) > 1, \qquad p(\infty) > 1, \qquad \beta(0) > n\left(1 - \frac{1}{p(0)}\right), \qquad \beta(\infty) > n\left(1 - \frac{1}{p(\infty)}\right)$$

olarak değişir. Eğer alınan fonksiyonlar Λ sınıfının dışından olursa

$$\left\| |x|^{\beta(.)-n} Hf \right\|_{L^{p(.)}(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\| |x|^{\beta(.)} f \right\|_{L^{p(.)}(\mathbb{R}^n)}$$

eşitliğini sağlamayacak f_k dizi ve p, β fonksiyonları vardır[47].

Teorem 3.25 $\beta \in \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $p:(0,l) \to [1,\infty)$ fonksiyonu (0,ε) aralığında artan olsun. Ayrıca , $p^- > 1$ ve $\beta(0) < 1 - \frac{1}{p(0)}$ için $\lim_{x\to 0} p(x) = p(0)$ olsun. O halde $0 < x < \frac{1}{2}$ iken

$$|p(2x) - p(x)| \ln\frac{1}{x} \leq C$$

olacak şekilde bir C sabiti bulanabiliyorsa

$$\left\| |x|^{\beta(.)-1} Hf \right\|_{L^{p(.)}(0,l)} \leq C \left\| |x|^{\beta(.)} f \right\|_{L^{p(.)}(0,l)}$$

eşitsizliği sağlanır[48].

Teorem 3.26 $p \in \mathbb{R}$, ve $\beta:(0,l) \to [-\infty,\infty)$ fonksiyonu (0,ε) aralığında artan olsun. Ayrıca $p^- > 1$ ve $\beta(0) < 1 - \frac{1}{p(0)}$ için $\lim_{x\to 0} \beta(x) = \beta(0)$ olsun. O halde $0 < x < \frac{1}{2}$ iken

$$|\beta(2x) - \beta(x)| \ln\frac{1}{x} \leq C$$

olacak şekilde bir C sabiti bulanabiliyorsa

$$\left\| |x|^{\beta(.)-1} Hf \right\|_{L^{p(.)}(0,l)} \leq C \left\| |x|^{\beta(.)} f \right\|_{L^{p(.)}(0,l)}$$

eşitsizliği sağlanır[48].

Yukarıdaki iki teoremden anlaşılacağı gibi p ve β fonksiyonları için

$$|g(x) - g(0)| \ln \frac{1}{x} \leq C, \quad 0 < x < \frac{1}{2}$$

logaritmik süreklilik koşulu

$$\left\| |x|^{\beta(.)-1} Hf \right\|_{L^{p(.)}(0,l)} \leq C \left\| |x|^{\beta(.)} f \right\|_{L^{p(.)}(0,l)}$$

denkleminin sağlanması için önemlidir.

Teorem 3.27 $\beta \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta_n = 4^{-n}$ olsun. $\beta < 1 - \frac{1}{p(0)}$, $1 < p^-$ koşullarını sağlayan,

$\lim_{n \to \infty} |p(\delta_n) - p(0)| \ln \frac{1}{\delta_n} = \infty$

özelliğinde bir $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi ve $p: (0, l) \to [1, \infty)$ fonksiyonu bulunabilir öyle ki

$\left\| |x|^{\beta(.)-1} Hf \right\|_{L^{p(.)}(0,l)} \leq C \left\| |x|^{\beta(.)} f \right\|_{L^{p(.)}(0,l)}$ eşitsizliği sağlanmaz.

Teorem 3.28 $p > 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta_n = 4^{-n}$ olsun. $\beta < 1 - \frac{1}{p}$ iken

$\lim_{n \to \infty} |\beta(\delta_n) - \beta(0)| \ln \frac{1}{\delta_n} = \infty$

özelliğinde $\beta: (0, l) \to [-\infty, \infty)$ fonksiyonu ve bir $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi vardır öyle ki

$$\left\| |x|^{\beta(.)-1} Hf \right\|_{L^{p(.)}(0,l)} \leq C \left\| |x|^{\beta(.)} f \right\|_{L^{p(.)}(0,l)}$$

eşitliği sağlanmaz[48].

BÖLÜM 4

VARYASYONEL YAKLAŞIM

Bu bölümde tanımlanan her X Banach uzayı, ayrılabilir ve refleksiv Banach uzayıdır.

4.1 Temel İfadeler

Tanım 4.1 X bir Banach uzay ve $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ sınıfında bir fonksiyonel olsun. Her $v \in X$ için;

$$< \Phi'(\mathrm{u}), \mathrm{v} > = 0$$

eşitliğini sağlayan her bir $u \in X$ elemanına Φ'nin kritik noktası denir.

Tanım 4.2 X bir Banach uzay ve $\Phi: \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonel olmak üzere, her $u \in X$ için;

$$\Phi(\mathrm{v}) \leq \Phi(\mathrm{u})$$

olacak şekilde bir $v \in X$ bulunabiliyorsa, bu v fonksiyonuna Φ fonksiyonelinin bir minumumu veya minimize edicisi denir, $\inf_{u \in X} \Phi(\mathrm{u}) = \Phi(\mathrm{v})$ olarak gösterilir.

Tanım 4.3 X bir Banach uzay ve $\Phi: \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonel olsun. Eğer her bir $(u_n) \in X$ dizisi için,

$$\lim_{n \to \infty} \Phi(\mathrm{u_n}) = \inf_{u \in X} \Phi(\mathrm{u})$$

eşitliği sağlanıyorsa bu (u_n) dizisine Φ fonksiyonelinin minimize dizisi denir.

Tanım 4.4 X bir Banach uzay ve $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ sınıfında bir fonksiyonel olmak üzere, $u \in X$ için;

$\|u\| \to \infty$ iken $\Phi(\mathrm{u}) \to \infty$

ise f fonksiyoneli X üzerinde Coercive fonksiyoneldir denir.

Tanım 4.5 $f: X \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonel ve $x_0 \in X$ elemanı için $x_n \to x_0$ olacak şekilde $(x_n) \in X$ dizisi verilsin. Eğer,

$$f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyoneline $x_0 \in X$ noktasında alttan yarı-süreklidir denir. Eğer, $x_n \rightharpoonup x_0$ ise f, alttan zayıf yarı-süreklidir denir.

4.2 Varyasyonel Yaklaşım

Tanım 4.6 X bir Banach uzay ve $T: X \to X'$ bir operatör olsun. Eğer,

$$T(.) = \Phi'(.)$$

olacak şekilde bir $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ fonksiyoneli varsa T operatörüne Varyasyonel operatör denir.

Bir problem $T(.) = 0$ şeklinde bir fonksiyonel denklem olarak yazılabiliyorsa bu probleme varyasyonel problem denir. Bu durumda $T(u) = 0$ denklemini sağlayan u fonksiyonları aynı zamanda $\Phi'(u) = 0$ enerji fonksiyonelini de sağlar. Buradan hareketle, $\Phi(u)$ fonksiyonelini sağlayan u kritik noktaları, $T(u) = 0$ denkleminin de zayıf çözümleri olur. Yani, $\Phi(u)$ fonksiyonelini minimize eden bir minimum bulmak, varyasyonel yaklaşımın temel amacıdır.

X bir Banach uzay, $\Omega \subset \mathbb{R}^n, (n \geq 2)$ sınırlı bir bölge, $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ve $\Phi: \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ olarak tanımlayalım. Varyasyonel yaklaşım, verilen bir $F\big(x, u(x), \nabla u(x)\big) = 0$ diferansiyel denkleminin çözümlerini bulmak için, bu fonksiyonele karşılık gelen ve

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} F\big(x, u(x), \nabla u(x)\big)\, dx$$

olarak tanımlanan $\Phi(u)$ enerji fonksiyonelinin minimumları (veya kritik noktaları) olan $u(x)$ fonksiyonlarını bulmak olarak ifade edilebilir. Çünkü; $\Phi(\mathrm{u})$ fonksiyonelinin minimumları, $F\big(x, u(x), \nabla u(x)\big)$ diferansiyel denkleminin çözümleridir.

$\Phi(\mathrm{u})$ fonksiyonelinin kritik noktalara sahip olması için gerekli koşul $\Phi(\mathrm{u})$ fonksiyoneline karşılık gelen Euler-Lagrange denklemini $\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial(\nabla u)}\right) = 0\right)$ sağlamasıdır.

4.3 Varyasyonel Yaklaşımda Kullanılan Teoremler

Teorem 4.7 X bir Banach uzay ve $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir fonksiyonel olsun.

Eğer Φ fonksiyoneli,

(i) X üzerinde coercive

(ii) X üzerinde alttan zayıf yarı-sürekli

koşullarını sağlarsa $\Phi(\mathrm{u}) = \inf_{u \in X} \Phi(u)$ olacak şekilde bir $u \in X$ minimize fonksiyonu vardır [44].

Tanım 4.8 X bir Banach uzayı ve $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir fonksiyonel olsun. Herhangi bir $(u_n) \in X$ dizisi için;

(i) $|\Phi(\mathrm{u_n})| \leq c\ ,\ c \in \mathbb{R}$

(ii) X' dual uzayında, $n \to \infty$ için $\Phi'(\mathrm{u_n}) \to 0$

oluyorsa, (u_n) dizisine Φ fonksiyonelinin bir Palais-Smale dizisi denir. Palais-Smale dizisi Φ fonksiyonelini minimize eden bir dizidir [42],[49].

Teorem 4.9 X bir Banach uzayı ve $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir fonksiyonel olmak üzere, Φ'nin her Palais-Smale dizisi güçlü yakınsak bir alt diziye sahipse, Φ fonksiyoneli Palais-Smale koşuluna sahiptir denir [44],[50],[51],[52].

Tanım 4.10 X bir Banach uzayı ve $\Phi \in C^1(X,\mathbb{R})$ bir fonksiyonel olsun. Eğer;

(i) $\lim_{n\to\infty} \Phi(\mathrm{u_n}) = c\ ,\ (c \in \mathbb{R})$

(ii) X' dual uzayında, $n \to \infty$ için $\Phi'(\mathrm{u_n}) \to 0$

koşullarını sağlayan bir $(u_n) \in X$ dizisi güçlü yakınsak bir alt diziye sahipse, Φ fonksiyoneli $c \in \mathbb{R}$ seviyesinde $(PS)_c$ koşulunu sağlar denir. Eğer Φ fonksiyoneli (PS) koşulunu sağlarsa, her $c \in \mathbb{R}$ için $(PS)_c$ koşulunu da sağlar.

Φ fonksiyoneli Palais-Smale koşulunu sağlar ve alttan sınırlı olursa, (PS) dizisi Φ fonksiyonelini minimize eder. Ayrıca dizinin güçlü yakınsadığı değer, fonksiyonelin bir kritik noktası ve denkleminde bir çözümü olur. Palais-Smale koşulu ve coercive'lik özelliği, Φ fonksiyonelinin çözümünün X uzayında olduğunun ispatı için yeterli koşullardır.

Teorem 4.11 (Ekeland Varyasyonel Prensibi)

X bir Banach uzayı ve $\Phi: \mathrm{X} \to (-\infty,\infty]$ bir fonksiyonel olsun. Eğer Φ fonksiyoneli,

(i) X üzerinde alttan sınırlı,

(ii) X üzerinde alttan zayıf yarı sürekli,

koşullarını sağlıyorsa, her $\varepsilon > 0$ için;

$$\Phi(\mathrm{u_\varepsilon}) < \inf_{u\in X} \Phi(\mathrm{u}) + \varepsilon$$

$$\Phi(\mathrm{u_\varepsilon}) < \Phi(\mathrm{u}) + \epsilon\|\mathrm{u_\varepsilon} - u\|_X\ , \mathrm{u_\varepsilon} \neq u$$

olacak şekilde bir $(\mathrm{u_\varepsilon}) \in X$ dizisi vardır. Ekeland Varyasyonel yaklaşımı yardımıyla Φ fonksiyoneli için Palais-Smale dizisi elde edilebilir[44],[53].

Teorem 4.12 (Ekeland Varyasyonel Prensibi 2)

X bir Banach uzayı ve $\Phi: \mathrm{X} \to (-\infty,\infty]$ alttan sınırlı bir fonksiyonel olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için;

$\Phi(\mathrm{u_\varepsilon}) < \inf_{u\in X} \Phi(\mathrm{u}) + \varepsilon$ ve X' uzayında $\left|\Phi'^{(\mathrm{u_\varepsilon})}\right| \leq \varepsilon$

olacak şekilde bir $u \in X$ vardır[44].

Teorem 4.13 X bir Banach uzayı ve $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir fonksiyonel olsun. Eğer Φ fonksiyoneli, X üzerinde alttan sınırlı ve (PS) koşulunu sağlarsa

$$\Phi(\mathrm{u}) = \inf_{v \in X} \Phi(v)$$

olacak şekilde bir $u \in X$ minimize fonksiyonu vardır[44].

Teorem 4.14 X bir Banach uzayı ve $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir fonksiyonel olsun. Eğer Φ fonksiyoneli, X üzerinde coercive ve alttan zayıf yarı sürekli ise, X üzerinde alttan sınırlı ve $\Phi(\mathrm{u}) = \inf_{v \in X} \Phi(v)$ olacak şekilde bir $u \in X$ minimize fonksiyonu vardır[44].

MP1 Koşulu: X bir Banach uzay, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ fonksiyonel ve $J(0) = 0$ olsun. $S_r = \{u \in X : \|u\| = r\}$ kümesi tanımlansın. Her $u \in S_r$ için $J(u) \geq \rho$ olacak şekilde $r, \rho > 0$ vardır.

MP2 Koşulu: $\|e\| > r$ olmak üzere $J(e) \leq \rho$ özelliğinde bir $e \in X$ vardır.

$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$ eğrisi tanımlansın. Γ'nın boş küme olmadığı; $\gamma(t) = te \in \Gamma$ olduğundan açıktır.

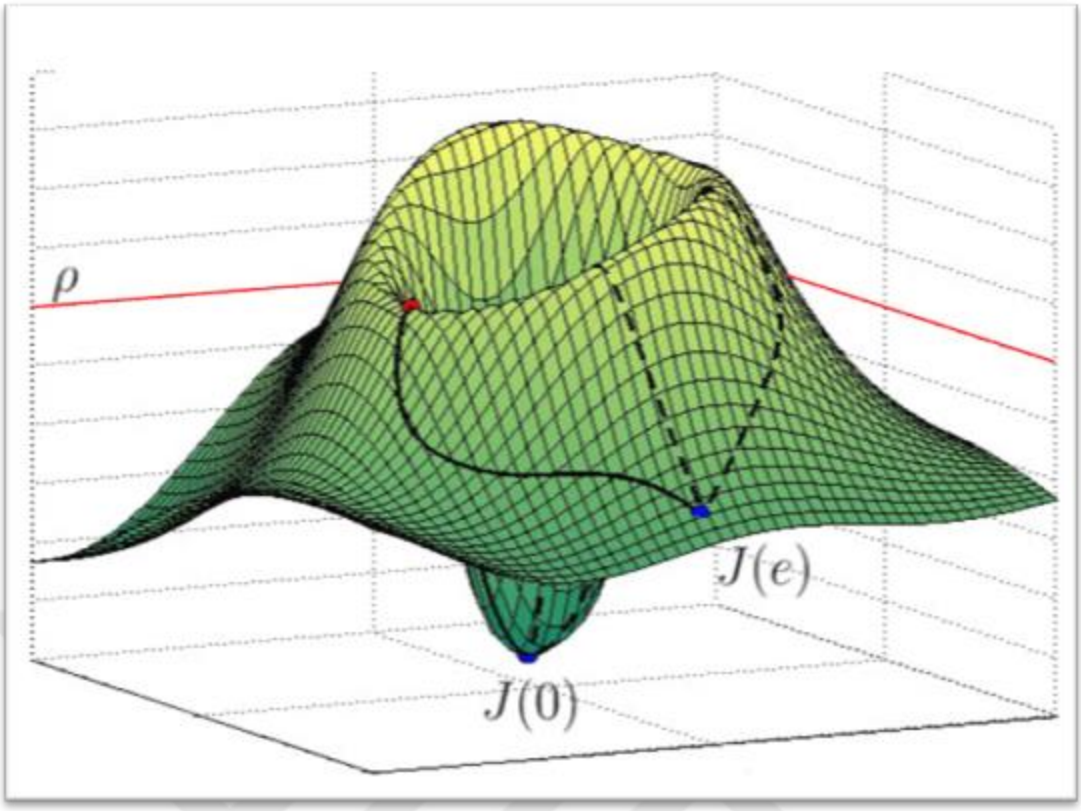
$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J\big(\gamma(t)\big) \qquad (4.1)$$

olsun. Ayrıca, her $J(u) \geq \rho$ olduğundan her $\gamma \in \Gamma$ için $\max_{t \in [0,1]} J\big(\gamma(t)\big) \geq \rho$ yazılabilir. Buradan $c \geq \rho > 0$ elde edilir. (4.1) 'daki infumum değer her zaman Γ'da olmayabilir. Bunun için Palais-Smale koşulu kullanılır.

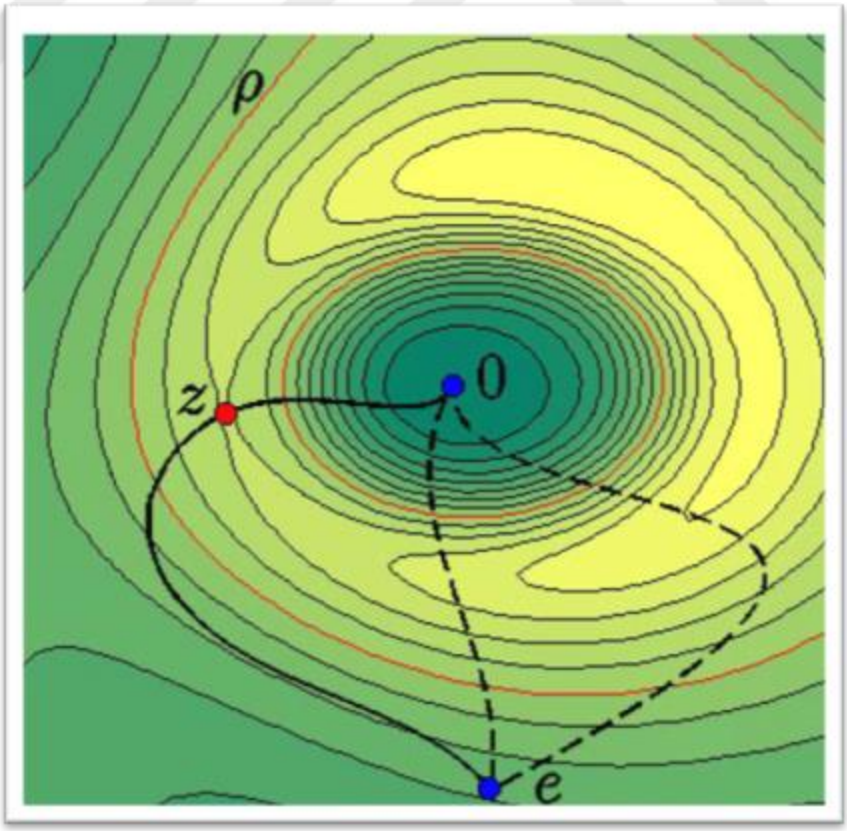
Teorem 4.15 (Dağ Aşırım Teoremi)

X bir Banach uzay, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ fonksiyoneli MP1 ve MP2 koşullarını sağlasın. (4.1)'da tanımlanan c Palais-Smale koşulunu sağlasın. O halde c, J için kritik düzeydedir. Tam olarak, $J(z) = c$ ve $J'(z) = 0$ özelliğinde $z \in X \backslash \{0, e\}$ vardır. Buradaki z'ye bir dağ aşırım kritik noktası ve c'ye bir dağ aşırım kritik seviyesi denir. [54],[55],[56],[57].

Şekil1'de Dağ aşırım teoreminin 3-boyutlu hali, Şekil 2 de ise 2-boyutlu düzleme izdüşümü gösterilmiştir. Tanımlanan Γ eğrileri şekil üzerinde siyah olarak gösterilmiştir.



Şekil 4.1 Dağ aşırım teoreminin 3-boyutlu hali



Şekil 4.2 Dağ aşırım teoreminin 2-boyuta izdüşümü

BÖLÜM 5

MONOTON OPERATÖR TEORİSİ

V, bir reel Banach uzayı ve V' ise V'nin dual uzayı olsun. $A: V \to V'$ operatörü tanımlansın.

Tanım 5.1 A operatörü, V 'deki sınırlı kümeleri V''daki sınırlı kümelere dönüştürüyorsa A'ya sınırlı operatör denir.

Tanım 5.2 $\forall u_1, u_2, v \in V$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$A: V \to V'$

$\lambda \to < A(u_1 + \lambda u_2), v >$

dönüşümü sağlanırsa (λ'ya göre süreklilik sağlanırsa) A'ya hemi-sürekli operatör denir[58].

Tanım 5.3 $u_1, u_2 \in V$ için

$< A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2 > \geq 0$

oluyorsa A operatörüne monoton operatör denir. Özel olarak $u_1 \neq u_2$ iken

$< A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2 > > 0$

oluyorsa A kesin monoton olur[58].

Tanım 5.4 V'de $(u_n) \overset{z}{\to} u$ ve $\lim_{n\to\infty} \sup < A(u_n) - A(u), u_n - u > \leq 0$ iken

$\lim_{n\to\infty} < A(u_n) - A(u), u_n - u > = 0$ ve $\big(A(u_n)\big) \to A(u)$ yakınsaması V''da zayıf ise A operatörüne Pseudo-monoton denir[58].

Önerme 5.5 V refleksiv Banach uzay olsun. A operatörü; sınırlı, hemi-sürekli ve monoton ise A, Pseudo-monoton olur.

Tanım 5.6 V'de $(u_n) \to u$ güçlü yakınsak iken $\big(A(u_n)\big) \to A(u)$, V''da zayıf yakınsak ise A operatörüne Demi-sürekli denir.

Önerme 5.7 A pseudo-monoton ise demi-süreklidir.

Tanım 5.8 Eğer $\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{<A(u),u>}{\|u\|} = +\infty$ ise A coercive'dir[58].

A lineer operatörü, $c > 0$ sabiti için

$< A(u), u > \geq c\|u\|^2$

oluyorsa A pozitiftir. Dolayısıyla A Coercive olur.

Yardımcı Teorem 5.9 $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyon olsun. $\xi \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $|\xi| = \rho$ için;

$< g(\xi), \xi > \geq 0$

olacak şekilde $\rho > 0$ sayısı olsun. O halde $|\xi_0| \leq \rho$ için

$g(\xi_0) = 0$

denklemini sağlayan $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ vardır.

Teorem 5.10 Browder-Minty Teoremi

V, ayrılabilir refleksiv Banach uzayı olsun. $A: V \to V'$ operatörü sınırlı, coercive ve pseudo-monoton olsun. Keyfi $F \in V'$ için $A(u) = F$ eşitliğini sağlayacak bir $u \in V$ çözümü vardır.

İspat V, ayrılabilir uzay olduğundan V'nin lineer bağımsız elemanlarından oluşan $z_1, z_2, \ldots$ sistemi vardır öyle ki, bu sistemin elemanlarının lineer kombinasyonları V'de yoğundur. $z_1, z_2, \ldots, z_m$ 'nin lineer kombinasyonlarının oluşturduğu kümeyi V_m ile gösterelim.

Yardımcı teorem 5.9'dan $\xi \in \mathbb{R}^m, j = 1,2,\ldots,m$ olmak üzere

$g_j(\xi_1, \ldots, \xi_m) = < A(\xi_1 z_1 + \cdots + \xi_m z_m), z_j > - < F, z_j >$

olacak şekilde $g_j(g_1, g_2, \dots, g_m)$ fonksiyonunu tanımlayalım. A sınırlı ve pseudo-monoton olduğundan, Önerme 5.7 gereği A demi-sürekli olur.

$\sum_{j=1}^{m} \xi_j z_j = y$ ve $y \neq 0$ olsun.

$$< g(\xi), \xi > = \sum_{j=1}^{m} g_j(\xi)\xi_j =< A\left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j z_j\right), \sum_{j=1}^{m} \xi_j z_j > - < F, \sum_{j=1}^{m} \xi_j z_j >$$

$$= \left[\frac{< A(y), y >}{\|y\|_V} - \frac{< F, y >}{\|y\|_V}\right] \|y\|_V \geq \left[\frac{< A(y), y >}{\|y\|_V} - \|F\|_{V'}\right] \|y\|_V$$

A operatörü Coercive olduğundan,

$$\lim_{\|y\| \to \infty} \frac{< A(y), y >}{\|y\|_V} = +\infty$$

olur. Böylece $\|y\|_V$ yeteri kadar büyük alındığında (y, ξ'ye bağlı olduğundan $|\xi|$ yeteri kadar büyük alındığında) eşitliğin sağ tarafı pozitif olur. Yardımcı Teorem 5.9 gereği $g(\xi) = 0$ olacak şekilde $\xi \in \mathbb{R}^m$ vardır. V sonlu boyutlu ise ispat biter.

V sonsuz boyutlu olsun.

$$< A(u_m), v > =< F, v >$$

eşitliğini sağlayan bir (u_m) dizisi vardır. A Coercive olduğundan, (u_m) V 'de sınırlı dizidir. Gerçektende;

Tersini kabul edelim, (u_m) sınırlı dizi olmasın. O halde $\lim_{k \to \infty} \|u_{m_k}\|_V = \infty$ olacak şekilde (u_{m_k}) alt dizisi vardır. $< A(u_m), F > =< F, v >$ eşitliğinden

$$0 =< A(u_{m_k}), u_{m_k} > - < F, u_{m_k} > \geq \left[\frac{< A(u_{m_k}), u_{m_k} >}{\|u_{m_k}\|_V} - \|F\|_{V'}\right] \|u_{m_k}\|_V$$

A Coercive olduğundan $k \to \infty$ için sağ taraf $+\infty$ olur. Çelişki. O halde (u_m) sınırlı dizidir. $A: V \to V'$ operatörü sınırlı olduğundan $(A(u_m)), V'$ 'de sınırlıdır. V refleksiv olduğundan,

$$(u_{m_k}) \to u, \qquad (A(u_{m_k}) \to \chi$$

olacak şekilde $u \in V, \chi \in V'$ ve $\left(u_{m_k}\right)$ alt dizisi vardır.

$\chi = F$ olduğunu gösterelim:

$< A(u_m), v > =< F, v >$

eşitliğiyle $z_1, z_2, \ldots$'nin keyfi sabit lineer kombinasyonu v ve yeterli büyüklükteki k'lar için;

$< A\left(u_{m_k}\right), v > =< F, v >$

olur. $k \to \infty$ iken $\left(A\left(u_{m_k}\right)\right) \to \chi$ ve $< A\left(u_{m_k}\right), v > =< F, v >$ 'den;

$< \chi, v > =< F, v >$

elde ederiz. V'de sonlu kombinasyonlar yoğun olduğundan $\chi = F$ elde ederiz. Son olarak, A pseudo-monoton olduğundan $A(u) = \chi = F$'dir. Gerçektende;

$\left(u_{m_k}\right) \to u$ yakınsaması V'de zayıf yakınsak, $< A(u_m), v > =< F, v >$ ve

$< A\left(u_{m_k}\right), v > =< F, v >$ olduğundan,

$< A\left(u_{m_k}\right), u_{m_k} - u > =< A\left(u_{m_k}\right), u_{m_k} > - < A\left(u_{m_k}\right), u >$

$=< F, u_{m_k} > - < A\left(u_{m_k}\right), u > \to < F, u > - < \chi, u > = 0, \qquad k \to \infty.$

BÖLÜM 6

HARDY OPERATÖRÜNÜN DİFERANSİYEL DENKLEMLERE UYGULANMASI

Tanım 6.1 $p:(0,l)\to\mathbb{R}$ olmak üzere, $|y-x|<\frac{x}{2}$ için

$$|p(x)-p(y)|\ln\frac{1}{x}\le C_1$$

olacak şekilde $C_1>1$ sayısı bulanabiliyorsa p, Λ sınıfına aittir denir.

Teorem 6.2 $p:(0,l)\to(1,\infty)$, Λ sınıfına ait ölçülebilir bir fonksiyon ve $1<p^-\le p(x)\le p^+<\infty$ olsun. $u(0)=0$ olmak üzere tüm mutlak sürekli $u(x)$ fonksiyonları için $a\in\left[0,1-\frac{1}{p(0)}\right)$ iken;

$$\left\|\frac{u}{x^{1-a}}\right\|_{L^{p(x)}(0,l)}\le C_2\|u'(x)x^a\|_{L^{p(x)}(0,l)}$$

(6.1)

eşitsizliği sağlanır ancak ve ancak

$$\int_0^l x^{-\frac{1}{p(x)}}\frac{dx}{x}\le C_3 a^{-\frac{1}{p'(a)}}$$

eşitsizliğini sağlayacak C_3 vardır [59].

Bu teoremde $a=0$ seçilirse

$$\left\|\frac{u(x)}{x}\right\|_{p(.)}\le C\|u'(x)\|$$

olacağı aşikârdır.

$(0,l)$ sonlu aralığında

$$-\left(|u'(x)|^{p(x)-2}u'(x)\right) = f(x) \qquad (6.2)$$
$$u(0) = (l) = 0$$

sınır değer problemini çözmek için Browder Minty Teoremine yönelik topolojik metod uygulayacağız. Bunun için, ${W_0}^{1,p(x)}(0,l)$'den onun dualine tanımlı A operatörünü alalım. Anlaşılabilir olması için $V = {W_0}^{1,p(.)}(0,l)$ gösterimini kullanacağız. $A: V \to V'$ ve $u, v \in V$ olmak üzere;

$$\langle A(u), v\rangle = \int_0^l |u'(x)|^{p(x)-2}u'(x)v'(x)dx$$

olarak tanımlayalım. $F(v) \in V'$ olmak üzere,

$$\langle A(u), v\rangle + F(v) = 0$$

eşitliği sağlanırsa her $v \in V$ için $u \in V$ fonksiyonu, varyasyonel yaklaşım gereği (6.2) probleminin zayıf çözümü olur.

$A(u) \in V'$ 'dır:

$$| < A(u), v > | \leq \int_0^l |u'(x)|^{p(x)-1}|v'(x)|dx \,,$$

Hölder eşitsizliğinden;

$$| < A(u), v > | \leq C_0 \left\| |u'|^{p(x)-1} \right\|_{p'(.)} \|v'\|_{p(.)}$$

C_1, $\|u'\|_{p(.)}$ 'ye bağlı pozitif bir sabit olmak üzere $\left\| |u'|^{p(x)-1} \right\|_{p'(.)} \leq C_1\left(\|u'\|_{p(.)}\right)$ yazılabileceğinden,

$$| < A(u), v > | \leq C_0\, C_1\left(\|u'\|_{p(.)}\right) \|v'\|_{p(.)}$$

olur. O halde

$$| < A(u), v > | \leq C_0\, C_1 \|v'\|_{p(.)} \leq C_0 C_1 \|v\|_V$$
$$| < A(u), v > | \leq C_2 \|v\|_V$$

O halde $A(u) \in V'$ 'dir ayrıca A operatörü sınırlıdır.

A operatörü monotondur:

$$< A(u) - A(v), u - v >$$

$$= \int_0^l \left[|u'(x)|^{p(x)-2}u'(x) - |v'(x)|^{p(x)-2}v'(x)\right]\left(u'(x) - v'(x)\right)dx$$

$p \geq 1$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b)(a-b) \geq 0$ eşitsizliği gerçeklendiğinden,

$$< A(u) - A(v), u - v > \geq 0$$

yazılabilir. Bu ise A operatörünün monoton olduğunu gösterir.

A, Coercive'dir:

$$\frac{< A(u), u >}{\|u\|_V} = \frac{\int_0^l |u'(x)|^{p(x)-2}u'(x)u'(x)dx}{\|u\|_{p(.)} + \|u'\|_{p(.)}} = \frac{\int_0^l |u'(x)|^{p(x)}dx}{\|u\|_V}$$

$I_{p(.)}(|f(x)|) = \int_0^l |f(x)|^{p(x)}dx$ bir modülerdir.

$\|u'\|_{p(.)} > 1$ iken $\|u'\|_{p(.)}^{p^-} \leq I_{p(.)}(|u'|) \leq \|u'\|_{p(.)}^{p^+}$

ve

$\|u'\|_{p(.)} \leq 1$ iken $\|u'\|_{p(.)}^{p^+} \leq I_{p(.)}(|u'|) \leq \|u'\|_{p(.)}^{p^-}$

olduğundan

$$I_{p(.)}(|u'|) \geq \min\{\|u'\|_{p(.)}^{p^-} + \|u'\|_{p(.)}^{p^+}\}$$

Teorem 6.2 gereği $\left\|\frac{u}{x}\right\|_{p(.)} \leq C\|u'\|_{p(.)}$ olduğundan;

$$I_{p(.)}(|u'|) \geq \min\left\{\left[\frac{\|u'\|_{p(.)}}{2} + \frac{C_3}{2}\left\|\frac{u}{x}\right\|_{p(.)}\right]^{p^-}, \left[\frac{\|u'\|_{p(.)}}{2} + \frac{C_4}{2}\left\|\frac{u}{x}\right\|_{p(.)}\right]^{p^+}\right\}$$

$$\geq \min\left\{\left[\frac{\|u'\|_{p(.)}}{2} + \frac{C_5(l)}{2}\|u\|_{p(.)}\right]^{p^-}, \left[\frac{\|u'\|_{p(.)}}{2} + \frac{C_6(l)}{2}\|u\|_{p(.)}\right]^{p^+}\right\}$$

$$\geq \frac{1}{2}\min\left\{\left[\|u'\|_{p(.)}+\|u\|_{p(.)}\right]^{p^-},\left[\|u'\|_{p(.)}+\|u\|_{p(.)}\right]^{p^+}\right\}$$

$$\geq \frac{1}{2}\min\left\{\|u\|_V{}^{p^-},\|u\|_V{}^{p^+}\right\}$$

$1 \leq p^- \leq p^+$ olduğundan $\|u\| \to \infty$ iken

$$\frac{< A(u), u >}{\|u\|_V} \to \infty$$

olur. Dolayısıyla A operatörü coercive'dir.

A operatörü hemi-süreklidir:

$\lambda_n \to \lambda$ ve $u_1, u_2, v \in V$ olsun. A operatörü;

$$< A(u_1+\lambda_n u_2), v > = \int_0^l |u_1{}'(x)+\lambda_n u_2'(x)|^{p(x)-2}\left(u_1'(x)+\lambda_n u_2'(x)\right)v'(x)dx$$

olur.

$$\int_0^l |u_1{}'(x)+\lambda_n u_2'(x)|^{p(x)-2}\left(u_1'(x)+\lambda_n u_2'(x)\right)v'(x)dx \leq$$

$$\leq \int_0^l |u_1{}'(x)+\lambda_n u_2'(x)|^{p(x)-2}|u_1{}'(x)+\lambda_n u_2'(x)||v'(x)|dx$$

$$\leq \int_0^l |u_1{}'(x)+\lambda_n u_2'(x)|^{p(x)-1}|v'(x)|dx$$

$$\leq \int_0^l 2^{p(x)-2}\left(|u_1{}'(x)|^{p(x)-1}+|\lambda_n|^{p(x)-1}|u_2'(x)|^{p(x)-1}\right)|v'(x)|dx$$

$p(x) \leq p^+$ olduğundan;

$$\leq \int_0^l 2^{p^+-2}\left(|u_1{}'(x)|^{p(x)-1}+|\lambda_n|^{p^+-1}|u_2'(x)|^{p(x)-1}\right)|v'(x)|dx$$

$$\leq 2^{p^+-2}\int_0^l |u_1{}'(x)|^{p(x)-1}|v'(x)|dx + 2^{p^+-2}\int_0^l |\lambda_n|^{p^+-1}|u_2'(x)|^{p(x)-1}|v'(x)|dx$$

λ_n yakınsak olduğundan sınırlıdır. $|\lambda_n| \leq C_7$ olacak şekilde C_7 pozitif sayısı vardır.

$$\leq C_8\int_0^l |u_1{}'(x)|^{p(x)-1}|v'(x)|dx + C_9\int_0^l |u_2'(x)|^{p(x)-1}|v'(x)|dx = g(x)$$

$|f(x) \leq g(x)$ olacak şekilde $g(x)$ fonksiyonu bulunur. Eşitsizliğin sağ tarafına Hölder Eşitsizliği uygulanırsa;

$$C_8\int_0^l |u_1{}'(x)|^{p(x)-1}|v'(x)|dx + C_9\int_0^l |u_2'(x)|^{p(x)-1}|v'(x)|dx$$

$$\leq C_8\big\||u_1{}'|^{p(x)-1}\big\|_{p'(.)}\|v'\|_{p(.)} + C_9\big\||u_2{}'|^{p(x)-1}\big\|_{p'(.)}\|v'\|_{p(.)}$$

Buradan $g(x) \in L_1(0,l)$ elde edilir. Lebesgue Temel Yakınsaklık Teoreminden;

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^l |u_1{}'(x) + \lambda_n u_2'(x)|^{p(x)-2}\big(u_1'(x) + \lambda_n u_2'(x)\big)v'(x)dx$$

$$= \int_0^l |u_1{}'(x) + \lambda\, u_2'(x)|^{p(x)-2}\big(u_1'(x) + \lambda_n u_2'(x)\big)v'(x)dx$$

elde edilir. O halde A operatörü Hemi-süreklidir. ${W_0}^{1,p(.)}(0,l)$ uzayı ayrılabilir refleksiv Banach uzayıdır. Buradan Browder-Minty Teoremi gereği,

$$< A(u), v >= \int_0^l |u'(x)|^{p(x)-2}u'(x)v'(x)dx = -\int_0^l f(x)v'(x)dx = F(v)$$

denkleminin $F(v) \in V'$ için $u \in V$ çözümü vardır.

BÖLÜM 7

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, varyasyonel yaklaşım, Hardy eşitsizliği, monoton operatör teorisinin bazı özellikleri verilmiş olup, sınır değer problemini çözmek için varyasyonel yaklaşım kullanılarak, uygun operatör saptanmış, daha sonra monoton operatör teorisinin temel teoremlerinden Browder Minty teoreminin sağlandığı gösterilmiştir. Bu süreçte geçiş işlemlerinin sağlandığını göstermek için Hardy operatörünün özellikleri kullanılmıştır. Farklı bir çalışma olarak sınır değer problemi yerine, nümerik analizin farklı problemlerine çözüm aranabilir, sınır değer problemi için farklı bir varyasyonel operatör elde edilip bu sayede farklı çözüm yolları bulunabilir.

KAYNAKLAR

[1] Hardy, G.H., (1920). “Notes on a Theorem of Hilbert”, Marth. Z., 314-317.

[2] Hardy, G.H., (1925). “Notes on a Theorem of Hilbert Concerning Series of Positive Terms”, Proc. London Soc., 23: 45-46.

[3] Hardy, G.H., Littlewood, J.E. ve Polya, G., (1952). Inequalities, 2. Baskı, Cambridge Univ. Press.,

[4] Opic, B. ve Kufner, A., (1990). Hardy-Type Inequalities, Pitman research Notes in Mathematics Series, Longman Scientific and Technical, Harlow.

[5] Levinson, N., (1964). “Generalizations of an inequality of Hardy”, Duke Math. J., 31: 389-394.

[6] Boas, R.P., (1970). “Some Integral Inequalities Releated to Hardy’s Inaquality”, J. Analysc Math. 23:53-56.

[7] Lee, K.C. ve Yang, G.S., (1986). “A Generalization of Hardy’s Inequality”, Conf. Sem. Math., 17:109-119.

[8] Pachpatte, B.G., (1987). “On Hardy Type Integral Inequalty”, Tamkang J. Math., 18:27-41.

[9] Chisholm, R.S. ve Everitt, W.N., (1971). ”On Bounded Integral Operators in The Space of Integrable-Square Functions”, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect., 69:199-204.

[10] Edmunds, D.E. ve Evans, W.d., (1984). Spectral Theory and Differantial Operators, Clarendon Press, Oxford.

[11] Beesack, P.R., (1961). “Hardy’s Inequality and its Extensions”, Pacific J. Math., 11:39-61.

[12] Beesack, P.R., (1971). “Integral Inequality Involving a Function and its Derivatives”, Amer. Math. Monhly, 78:705-741.

[13] Shum, D.T., (1975). “On a Class of New Inequalities”, Trans. Amer. Marth. Soc., 204:299-341.

[14] Kadlec, J. ve Kufner, A., (1967). “Characterization of Functions with Zero Traces by Integrals with Weight Functions II”, Casops Pest. Mat., 92:16-28.

[15] Talenti, G., (1966). “Una Diseguaglianza Integrale”, Boll. Un. Math. Ital. 21(3):25-34.

[16] Talenti, G., (1967). “Sopra Una Diseguaglianza Integrale”, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 21:167-188.

[17] Talenti, G., (1969). “Osservazioni Sopra Una Classe di Diseguaglianze”, Rendo Sem. Math. Fis. Milano, 39:171-185.

[18] Tomaselli, G., (1969). “A Class of Inequalities”, Boll. Un. Mat. Ital., 2:622-631.

[19] Muckenhoupt, B., (1972). “Hardy’s Inequality with Weights”, Studia Math., 44:31-38.

[20] Bradley, J.S., (1978). “Hardy Inequalities with Mixed Norms”, Canad. Math. Bull., 21:405-408.

[21] Kokilashvili, V.M., (1979). “On Hardy’s Inequality in Weighted Spaces”, Soobschc. Akad. Nauk Gruzin. SSR, 96(1):37-40.

[22] Maz’ja, V.G., (1985). Sobolev Spaces, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.

[23] Andersen, K. ve Muckenhoupt, B. (1982). “Weighted Weak Type Hardy Inequalityies with Applications to Hilbert Transforms and Maximal Functions”, Studia Math., 72(1):9-26.

[24] Persson, L.E. ve Stepanov, V.D., (2002). “Weighted Integral Inequalities with the Geometric Mean Operator”, J. Inequal. Appl., 7(5):727-746.

[25] Gogatishvili, A., Kufner, A., Persson, L.-E. ve Wedestig, A. (2004). “An Equivalence Theorem for Integral Conditions Related to Hardy’s Inequality, Real Analysis Exchange, 2:1–14.

[26] Okpoti. C. A., Persson. L.E. ve Sinnamon. G., (2007). “An Equivalance Theorem for Some Integral Conditions with General Measures Related to Hardy’s Inequality”, J. Math. Anal. Appl., 326:398-413.

[27] Gurka,P., (1984). “Generalized Hardy’s Inequality”, Casopis Pest. Mat., 109:194-203.

[28] Opic, B. ve Kufner, A., (1990). Hardy-Type Inequalities, Pitman Research Notes in Mathematics 219, Longman Scientific & Technical, Harlow.

[29] Manakov, V.M., (1992). “ On The Best Constant in Weighted Inequlities of The Riemann-Liouville Integrals, Bull. London Math. Soc., 24:442-448.

[30] Sinnamon, G., (1987). “Operators on Lebesgue Spaces with General Measures”, PhD Thesis, McMaster University, Hamilton.

[31] Sinnamon, G., ve Stepanov, V.D., (1996). “The Weighted Hardy Inequality, New Proofs and The Case p=1”, J.Math. Soc. 54(2):89-101.

[32] Musayev, B. ve Alp, M., (2000), Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Kütahya.

[33] Bartle, R. G. (2014). The Elements of Integration and Lebesgue Measure. John Wiley & Sons, New York.

[34] Soykan, Y., (2008). Fonksiyonel Analiz, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

[35] Halmos, P. R. (2013). Measure Theory,18, Springer, New York.

[36] Mısırlıoğlu, T., (2011). Reel Analiz, Örgün Öğretimde Uzaktan Öğretim Desteği, İstanbul.

[37] De Barra, G. (1974). Introduction to Measure Theory. Van Nostrand Reinhold, New Delhi.

[38] Bartle, R. G. (2014). The Elements of Integration and Lebesgue Measure. John Wiley & Sons, New York.

[39] Fan, X.L. ve Zhao, D., (2001). "On The Spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$", J. Math. Anal. Appl., 263:424-446.

[40] Kovacık, O., ve Rakosnik, J., (1991). "On Spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{k,p(x)}(\Omega)$", Czechoslovak Math. J., 41(4):592-618.

[41] Mamedov, F. ve Zeren, Y., (2014). "A Necessary and Sufficient Condition for Hardy's Operator in the Variable Lebesgue Space", Hindawi Publishing Corporation, 2014:1-7.

[42] Fan, X.L. ve Han, X., (2004). "Existence and Multiplicity of Solutions for p(x)-Laplacian Equations in $\mathbb{R}^n$", Nonlinear Anal., 59:173-188.

[43] Fan, X.L. (2005). "Solutions for p(x)-Laplacian Dirichlet Problems with Singular Coenfficients", J. Math. Anal. Appl., 312:464-477.

[44] Willem, M.,(1996). Minimax Theorems, Birkhauser, Boston.

[45] Mamedov. F. ve Zeren. Y., (2012). "On Equivalent Conditions for the General Weighted Hardy Type Inequality in Spaces Lp(.)", Zeitschrift für Analysis and ihre Anwendungen Journal for Analysis and its Applications, 31:55-74.

[46] Mamedov. F. ve Mammedova. F.M., (2014). "A Necessary and Sufficient Condition for Hardy's Operator in Lp(.)", Math. Narchr.,287(5-6):666-676.

[47] Harman. A. ve Mamedov. F., (2010). "On Boundedness of Weighted Hardy Operator in Lp(.) and Regularity Condition", Journal of Inequalities and Applications, 2010:1-14.

[48] Harman, A., (2012). "On Necessary Condition for Variable Exponent Hardy Inequality", Journal of Function Spaces and Applications, 2012: 1-6.

[49] Winslow, W. M., (1949). "Induced Fibration of Suspensions", J. Appl. Physics, 20:1137-1140.

[50] Fan, X. L. ve Zhang, Q. H.,(2003). "Existence of Solutions for p(x)-Laplacian Dirichlet problems", Nonlinear Anal., 52:1843-1852.

[51] Mihailescu, M., (2008). "On a Class of Nonlinear Problems Involving a p(x)-Laplace type opartor",Czechoslovak Math., 58(133):155-172.

[52] Sharapudinov, I. I., (1978). "On the Topology of the Space $L^{p(t)}([0,1])$" ,Math. Notes, 26(3-4):796-806.

[53] Mihailescu, M., (2006). "Existence and Multiplicity of Solutiouns for an Elliptic Equation with p(x)-growth Conditions", Glasgow Math. J., 48:411-418.

[54] Ambrosetti, A. ve Rabinowitz, P.H., (1973). “Dual Variational Methods in Critical Point Theory ve Applications”, J. Funct. Anal., 14:349-381.

[55] Duc, D. M., (1989). “Nonlinear Singular Elliptic Equations”, J. London Math. Soc., 40(2):420-440.

[56] Mihailescu, M. ve Radulescu, V., (2006). “A Multiplicity Result for a Nonlinear Degenerate Problem Arising in the Theory of Electrological Fluids” , Proceedings of the Royal Society A., 462:2625-2641.

[57] Toan, H. Q. ve Ngo, Q. A., (2009). “Multiplicity of Weak Solutions for a Class of Nonuniformly Elliptic Equations of p-Laplacian Type”, Nonlinear Anal., 70(4):1536-1546.

[58] Laszlo, S., (2013). Applications of Monotone Type Operators to PDE, Eötvös Lorand University, Budapest.

[59] Diening, L., (2004). “Maximal Function on Generalized Lebesgue Spaces Lp(.) ” , Math. Inegual. Appl., 7(2):245-253.

[60] Mamedov, F. ve Harman, A., (2009). “On Weighted Inequality of Hardy type in L^p(x) ”, J. Math. Anal. Appl., 353(2):521-530.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :Kader ŞİMŞİR

Doğum Tarihi ve Yeri :24.06.1992 Osmangazi

Yabancı Dili :İngilizce

E-posta :kadersimsir@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2017
Lisans	Matematik	Uludağ üniversitesi	2014
Lise	Sayısal	Orhangazi Öğretmen Eyüp Topçu Anadolu Lisesi	2010

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2015-2017	Yıldız Teknik Üniversitesi	Kısmi Zamanlı Asistan Öğrenci
2014-2015	Çınar Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni

YAYINLARI

Bildiri

1. Şimşir, K., Zeren, Y. ve Mamedov, F. (2017). “A Variable Exponent Hardy's Inequality for Some Nonlinear Equation and its Application”, International Conference on Mathematics and Engineering, 10-12 Mayıs 2017, İstanbul.