3. TÜREVLENEBİLİR FONKSİYONLARA LİNEER POZİTİF İNTEGRAL OPERATÖRLER AİLELERİYLE YAKLAŞIM

Şimdi n kez türevlenebilen fonksiyonlara

$$L_\lambda(f,x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)K_\lambda(t)dt \tag{17}$$

integral operatörler ailesiyle yaklaşımı inceleyelim.

Bu operatörün çekirdeği

i. $K_\lambda(t) > 0 \quad , \quad \lambda \geq 0$

ii. $K_\lambda(-t) = K_\lambda(t)$

iii. $\int_{-\infty}^{\infty} K_\lambda(t)dt = 1$

koşullarını sağlasın.

$L_\lambda(f,x_0) - f(x_0)$ farkını araştıralım:

$K_\lambda(t)$, çift fonksiyon olduğundan

$$L_\lambda(f,x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)K_\lambda(t)dt = \int_{-\infty}^{0} [f(x+t)K_\lambda(t)dt + \int_{0}^{\infty} [f(x+t)K_\lambda(t)dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} [f(x+t) + f(x-t)]K_\lambda(t)dt \tag{18}$$

dir. Ayrıca çekirdeğin sağladığı koşullardan

$$2\int_{0}^{\infty} K_\lambda(t)dt = 1$$

dir ve bu eşitliğin her iki tarafını $f(x)$ ile çarparsak,

$$f(x) = 2f(x)\int_{0}^{\infty} K_\lambda(t)dt$$

bulunur. Bu son eşitliği

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} 2f(x)K_\lambda(t)dt$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan (18) formülündeki eşitliği de kullanarak

$L_\lambda(f,x)$ ile $f(x)$ farkı için

$$L_\lambda(f,x)-f(x_0)=\int_{-\infty}^{\infty}B(t)K_\lambda(t)dt \tag{19}$$

eşitliğini elde ederiz, burada

$$B(t)=[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)] \tag{20}$$

dir.

Taylor teoreminde,

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{(n-1)}$$

$$+\frac{f^{n}(x_0)+\alpha(t)}{n!}(x-x_0)^n \tag{21}$$

$t\to 0$ iken $\alpha\ (t)\to 0$ dır.

(Rudin, 64)

$x=x_0+t$ yazarsak, $n=2k$ için

$$f(x_0+t)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}t+\frac{f''(x_0)}{2!}t^2+\ldots+\frac{f^{(2k-1)}(x_0)}{(2k-1)!}t^{(2k-1)}+$$

$$+\frac{f^{2k}(x_0)+\alpha_1(t)}{(2k)!}t^{2k} \tag{22}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $t\to 0$ iken $\alpha_1(t)\to 0$ dır. (21) eşitliğinde $x=x_0-t$ yazarsak,

$$f(x_0-t)=f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1!}t+\frac{f''(x_0)}{2!}t^2-\ldots+\frac{f^{(2k-1)}(x_0)}{(2k-1)!}t^{(2k-1)}$$

$$-\frac{f^{2k}(x_0)+\alpha_2(t)}{(2k)!}t^{2k} \tag{23}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $t\to 0$ iken $\alpha_2(t)\to 0$ dır. (22) ve (23) eşitliklerini (20) de yerine yazarsak,

$$B(t)=2\left(\frac{f''(x_0)}{2!}t^2+\frac{f^{iv}(x_0)}{4!}t^4+\ldots+\frac{f^{(2k-2)}(x_0)}{(2k-2)!}t^{(2k-2)}\right)+\frac{f^{2k}(x_0)}{(2k)!}t^{2k}$$

$$+\frac{\alpha_2(t)}{(2k)!}t^{2k} \tag{24}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $\alpha(t)=\alpha_1(t)+\alpha_2(t)$ dir ve $t\to 0$ iken $\alpha(t)\to 0$ dır. Şimdi, (24) eşitliğini (19) de yerine yazarsak,

$$L_\lambda(f,x_0)-f(x_0)=2\sum_{k=1}^{n/2}\frac{f^{(2k-2)}(x_0)}{(2k-2)!}\cdot\int_0^\infty t^{2k-2}\cdot K_\lambda(t)dt+\frac{1}{n!}\int_0^\infty \alpha(t)t^n\cdot K_\lambda(t)dt$$
$$+\frac{f^{2k}(x_0)}{(2k)!}\int_0^\infty t^{2k}.K_\lambda(t)dt$$

eşitliği çıkar.

$n=2k-1$ için,

$$f(x_0+t)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}t+\frac{f''(x_0)}{2!}t^2+...+\frac{f^{(2k-2)}(x_0)}{(2k-2)!}t^{(2k-2)}+$$
$$+\frac{f^{(2k-1)}(x_0)+\alpha_2(t)}{(2k-1)!}t^{(2k-1)} \qquad (25)$$

eşitliğini buluruz. Burada $t\to 0$ iken $\alpha_1(t)\to 0$ dır. (21) eşitliğinde $x=x_0-t$ yazarsak,

$$f(x_0-t)=f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1!}t+\frac{f''(x_0)}{2!}t^2-...+\frac{f^{(2k-2)}(x_0)}{(2k-2)!}t^{(2k-2)}$$
$$-\frac{f^{(2k-1)}(x_0)+\alpha_2(t)}{(2k-1)!}t^{(2k-1)} \qquad (26)$$

eşitliği çıkar, burada $t\to 0$ iken $\alpha_2(t)\to 0$ dır. (25) ve (26) eşitliklerini (20) de yerine yazarsak,

$$B(t)=2\left(\frac{f''(x_0)}{2!}t^2+\frac{f^{iv}(x_0)}{4!}t^4+...+\frac{f^{(2k-2)}(x_0)}{(2k-2)!}t^{(2k-2)}\right)+\frac{\alpha(t)}{(2k-1)!}t^{(2k-1)} \qquad (27)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $\alpha(t)=\alpha_1(t)-\alpha_2(t)$ dir ve $t\to 0$ iken $\alpha(t)\to 0$ dır. (27) eşitliğini (19) da yerine yazarsak

$$L_\lambda(f,x_0)-f(x_0)=2\sum_{k=1}^{(n-1)/2}\frac{f^{(2k-1)}(x_0)}{(2k-1)!}\cdot\int_0^\infty t^{2k-1}\cdot K_\lambda(t)dt+\frac{1}{(2k-1)!}\int_0^\infty \alpha(t)t^n\cdot K_\lambda(t)dt$$

eşitliğini elde ederiz. Görüldüğü gibi bu eşitliğin sağ tarafının sıfıra gitmesi için

$$\int_0^\infty t^2 K_\lambda(t)dt, \int_0^\infty t^4 K_\lambda(t)dt, ..., \int_0^\infty t^{2k-2} K_\lambda(t)dt$$

ve

$$\int_0^\infty \alpha(t) t^{2k} K_\lambda(t)dt \qquad ,n=2k\text{-}1 \text{ ve } \quad k=1,2,...\frac{n-1}{2}$$

integrallerinin $\lambda \to \infty$ iken limitleri sıfır olmalıdır. Fakat bu kadar zor koşulların konulması çekirdeklerin sınıfı çok küçülmektedir. Yani, bu tür koşulların konmasıyla yaklaşım teoremi çok küçük operatörler sınıfında geçerli olabilmektedir. Bu da başka bir yöntem bulmanın gerekli olduğunu göstermektedir. Yani, yukarıdaki zor koşulları koymadan yaklaşım teoremini ispatlamak gerekir.

Bunun için şöyle bir yol seçebiliriz:

$$\int_0^\infty t^{2k-1} K_\lambda(t)dt = A_{k,\lambda} < \infty \qquad ,n=2k\text{-}1 \text{ olmak üzere } k=1,2,...,\frac{n-1}{2}$$

diyelim ve

$$\widetilde{L}_\lambda(f,x_0) = L_\lambda(f,x_0) - 2\sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{f^{(2k-1)}(x_0)}{(2k-1)!} A_{\lambda,k} \tag{28}$$

olacak şeklide yeni bir operatörler ailesi tanımlayalım. Bu durumda

$$\widetilde{L}_\lambda(f,x_0) - f(x_0) = \frac{1}{n!}\int_0^\infty \alpha(t)\cdot t^n \cdot K_\lambda(t)dt \tag{29}$$

eşitliğinde farkın sıfıra gitmesi için sağ taraftaki integralin $\lambda \to \infty$ iken limitinin sıfıra gitmesi gerekir. Bu durumda (28) de tanımlanmış $\widetilde{L}_\lambda(f,x_0)$ ailesinin $f(x_0)$ değerine yakınsadığını göstermiş oluruz. Bu ise önceden ele aldığımız $L_\lambda(f,x_0)$ ailesinin $f(x_0)$ değerine yakınsadığı anlamına gelmez.

Görüldüğü gibi $\widetilde{L}_\lambda$ ifadesinde, L_λ den farklı olarak f fonksiyonunun $k=1,2,...,\frac{n-1}{2}$ olmak üzere tüm $f^{2k}(x_0)$ türevleri mevcuttur.

Bu türevleri ortadan kaldırmak için bu konuyla ilgili olarak Gadjiev, A.D., Djafarov, A.S., Labsker, L.G. (1962) makalelerinde bazı özellikleri sağlayan $P_{k,\lambda}$, $\alpha_{k,\lambda}$ sayılarını kullanarak bazı koşulları kaldırmışlar ve yeni operatörler ailesi tanımlayıp bunun bir noktada n.mertebeden türevlenebilen f fonksiyonuna yaklaşımını ve asimptotik değerini bulmuşlardır. Bu operatörler ailesi,

$$L_\lambda(f,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}.f(x+\alpha_{k,\lambda}t)\right]K_\lambda(t)dt \tag{30}$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Bu integral operatör ailesinde $P_{k,\lambda}$, $\alpha_{k,\lambda}$ aşağıdaki özellikleri sağlayan sayılardır.

1. $\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}\le M<\infty$ M sabit λ ya göre düzgün;

$\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}=1,$ $\lambda\ge 0$, $k=1,2,...$ için,

$\sup_{k,\lambda}\{\alpha_{k,\lambda}\}=\alpha^*<\infty$

$R_{n,\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}\alpha_{k,\lambda}^{n}$ $s\neq 0$, $s<n$ ve s çift ise $R_{s,\lambda}=0$ dır.

$$\left|R_{n,\lambda}\right|\ge\mu>0 \tag{31}$$

herbir n için μ sabit ve λ ya göre düzgündür.

2. $\lim_{t\to+0}\frac{\Phi(t)}{t^n}=1$ sağlayacak biçimde, $[0,\infty]$ aralığında azalmayan bir $\Phi(t)$ fonksiyonu alalım.

$$\Delta_\lambda=\int_0^{\infty}\Phi(t)K_\lambda(t)dt<\infty \tag{32}$$

Biçiminde sonlu integrali Δ_λ ile gösterelim.

f fonksiyonu öyle olmalıdır ki, herbir $t\in(-\infty,\infty)$ için $\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}f(x+\alpha_{k,\lambda}t)$ toplamı yakınsak olmalıdır.

Teorem 3.1 (Gadjiev, A.D., Djafarov, A.S., Labsker, L.G.)

1. f fonksiyonu ölçülebilir ve x_0 noktasının komşuluğunda (n-1). mertebeden türevlenebilir, x_0 noktasında ise n. mertebeden sağ ve sol $f_+^{(n)}(x_0), f_-^{(n)}(x_0)$ türevleri mevcut olsun.

$x \in (-\infty, \infty)$ için $1 \le \varphi(x) < \infty$ olmak üzere

$$|f(x)| \le \varphi(x)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde φ mevcut olsun ve $K_\lambda(t)$ çekirdeği negatif olmayan, çift fonksiyon olsun ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_\lambda(t)dt = 1$$

eşitliği sağlansın.

2. Eğer $\forall \delta > 0$ için $\mu(t) = \sup_{\substack{-\infty<x<\infty \\ |y|<t}} \frac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)} < \infty$

olmak üzere $\lambda \to \infty$ iken

$$\int_{\delta}^{\infty} \mu(\alpha^* t)\Phi(t)K_\lambda(t)dt = o(\Delta_\lambda) \tag{33}$$

sağlanıyorsa, bu takdirde

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{L_\lambda(f;x_0) - f(x_0)}{R_{n,\lambda} \cdot \Delta_\lambda} = \frac{f_+^{(n)}(x_0) \pm f_-^{(n)}(x_0)}{n!} \tag{34}$$

eşitliği sağlanır. Burada $\pm$ işareti n nin tek ve çift olması durumuna göre değişir.

Bu teoremde (31) koşulunda görüldüğü gibi $P_{k,\lambda}$ ve $\alpha_{k,\lambda}$ sayıları aslında yaklaşım hızını etkileyemez, çünkü teoremde yer alan $R_{n,\lambda}$ dizisi aşağıdan sınırlı olduğu için sıfıra gidemez. (31) koşulu bu sayıların yaklaşım hızına etkisine imkan vermez. Bu nedenle bu koşulu kaldırarak yeni bir yaklaşım teoremi vereceğiz. Bu yeni teorem, Teorem 3.1 den daha genel ve ispatı benzer biçimde olduğu için ispatını vermeyeceğiz.

Not: $R_{n,\lambda} = \infty$ olabilir mi?

$$|R_{n,\lambda}| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda}\alpha_{k,\lambda}^{n}\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}|P_{k,\lambda}||\alpha_{k,\lambda}|^{n} \le \alpha^{*}.\sum_{k=1}^{\infty}|P_{k,\lambda}| \le \alpha^{*}.\mu < \infty$$

olduğundan $R_{n,\lambda} = \infty$ olamaz.

Teorem 3.2

Teorem 3.1 deki (31) hariç diğer tüm özellikler sağlansın, ek olarak her n için

$$\lim_{\lambda\to\infty} R_{n,\lambda} = 0$$

ve

$$\widetilde{\Delta}_{\lambda} = R_{n,\lambda}\cdot\Delta_{\lambda} = R_{n,\lambda}\int_{0}^{\infty}\Phi(t)K_{\lambda}(t)dt \tag{35}$$

olduğunu kabul edelim. Eğer $\forall\delta > 0$ için, $\mu(t) = \sup\limits_{\substack{-\infty<x<\infty \\ |y|<t}} \dfrac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)} < \infty$

olmak üzere $\lambda \to \infty$ iken

$$\int_{\delta}^{\infty}\mu(\alpha^{*}t)\Phi(t)K_{\lambda}(t)dt = o(\widetilde{\Delta}_{\lambda}), \tag{36}$$

sağlanıyorsa, bu durumda

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{L_{\lambda}(f;x_0)-f(x_0)}{\widetilde{\Delta}_{\lambda}} = \frac{f_{+}^{(n)}(x_0)\pm f_{-}^{(n)}(x_0)}{n!} \tag{37}$$

dır. Burada $\pm$ işareti n nin tek ve çift olması durumuna göre değişir.

İspat:

$L_{\lambda}(f,x_0)-f(x_0)$ farkını araştıralım:

$$L_{\lambda}(f,x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}.f(x+\alpha_{k,\lambda}t)\right]K_{\lambda}(t)dt = \int_{-\infty}^{0}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}.f(x+\alpha_{k,\lambda}t)\right]K_{\lambda}(t)dt$$

$$+\int_{0}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}.f(x+\alpha_{k,\lambda}t)\right]K_{\lambda}(t)dt = \int_{0}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}.\left[f(x+\alpha_{k,\lambda}t)+f(x-\alpha_{k,\lambda}t)\right]\right]K_{\lambda}(t)dt \tag{38}$$

dır. Ayrıca çekirdeğin sağladığı koşullardan

$$2\int_{0}^{\infty}K_{\lambda}(t)dt = 1$$

dir ve bu eşitliğin her iki tarafını $f(x)$ ile çarparsak,

$$f(x)=\int_0^{\infty}2f(x)K_\lambda(t)dt$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca $\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}=1$ olduğundan

$$f(x)=\int_0^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}.2f(x)\right]K_\lambda(t)dt \tag{39}$$

şeklinde yazabiliriz. (38) formülündeki eşitlikle farkını alırsak,

$$L_\lambda(f,x_0)-f(x_0)=\int_0^{\infty}B_\lambda(t)\cdot K_\lambda(t)dt \tag{40}$$

eşitliğini elde ederiz, burada

$$B_\lambda(t)=\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}[f(x_0+\alpha_{k,\lambda}t)+f(x_0-\alpha_{k,\lambda}t)-2f(x_0)] \tag{41}$$

biçimindedir.

$n=2k-1$ için (21) eşitliğinde $x=x_0+\alpha_{k,\lambda}t$ yazarsak

$$f(x_0+\alpha_{k,\lambda}t)=f(x_0)+\frac{f^{1}(x_0)}{1!}\alpha_{k,\lambda}t+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\alpha_{k,\lambda}^{n-1}t^{n-1}+$$
$$+\frac{f_+^{(n)}(x_0)+\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t)}{n!}\alpha_{k,\lambda}^{n}t^{n} \tag{42}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $t\to+0$ iken k ve λ göre düzgün olmak üzere $\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t)\to 0$ dır.

(21) eşitliğinde $x=x_0-\alpha_{k,\lambda}t$ yazarsak

$$f(x_0-\alpha_{k,\lambda}t)=f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1!}\alpha_{k,\lambda}t+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\alpha_{k,\lambda}^{n-1}t^{n-1}-$$
$$-\frac{f_-^{(n)}(x_0)+\beta_2(\alpha_{k,\lambda}t)}{n!}\alpha_{k,\lambda}^{n}t^{n} \tag{43}$$

eşitliğini buluruz. Burada $t\to+0$ iken k ve λ ya göre düzgün olmak üzere $\beta_2(\alpha_{k,\lambda}t)\to 0$ dır.

(42) ve (43) eşitliklerini (41) de yerine koyarsak,

$$B_\lambda(t)=\frac{f_+^{(n)}(x_0)-f_-^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot R_{n,\lambda}t^{n}+\gamma_\lambda(t)\cdot t^{n} \tag{44}$$

eşitliğini buluruz. Burada $\gamma_\lambda(t)$,

$$\gamma_\lambda(t)=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}p_{k,\lambda}\alpha_{k,\lambda}^{n}\left[\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t)-\beta_2(\alpha_{k,\lambda}t)\right]\to 0\ ,\quad (t\to 0\quad \text{iken})$$

dir. Çünkü , koşulumuza gore k ve λ ya göre düzgün olarak

$$\lim_{t\to+0}\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t)=\lim_{t\to+0}\beta_2(\alpha_{k,\lambda}t)=0 \text{ dır.}$$

Yani, keyfi $\varepsilon>0$ için k ve λ dan bağımsız bir $\delta>0$ var, öyle ki,

$|t|<\delta$ olduğunda $|\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t)|<\varepsilon$ sağlanır.

Buna göre yine de verilen pozitif ε a göre aynı δ sayısını bularak şunları yazabiliriz.

$$|\gamma_\lambda(t)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}\alpha^{n}{}_{k,\lambda}\left[\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t)-\beta_2(\alpha_{k,\lambda}t)\right]\right|$$

$$\leq\sum_{k=1}^{\infty}|P_{k,\lambda}|\cdot\alpha^{n}{}_{k,\lambda}\left[|\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t)|+|\beta_2(\alpha_{k,\lambda}t)|\right]\leq 2\varepsilon(\alpha^{*})^{n}M\leq C\varepsilon\ \ (C \text{ sabit})$$

Dolayısıyla gösterdik ki eğer $|t|<\delta$ ise keyfi $\varepsilon>0$ verildiğinde k ve λ dan bağımsız öyle bir $\delta>0$ bulabiliriz ki, $|t|\leq\delta$ iken

$$|\gamma_\lambda(t)|<C\varepsilon \tag{45}$$

olur. Bu da gösterir ki, λ ya göre düzgün olmak üzere $t\to 0$ iken $\gamma_\lambda(t)$ nin limiti sıfırdır.

$$\sigma_\lambda(t)=\frac{B_\lambda(t)}{\Phi(t)}-R_{n,\lambda}\frac{f_{+}^{(n)}(x_0)-f_{-}^{(n)}(x_0)}{n!} \tag{46}$$

biçiminde σ_λ fonksiyonu ele alalım.

$$C_0=(\alpha^{*})^{n}\cdot M\frac{f_{+}^{(n)}(x_0)-f_{-}^{(n)}(x_0)}{n!}$$

olmak üzere (46) eşitliğinin mutlak değerini alıp C_0 yerine yazarsak

$$|\sigma_\lambda(t)|\leq\frac{|B_\lambda(t)|}{\Phi(t)}+C_0$$

olur ve (41) eşitliğini bu eşitsizlikte yerine yazıp $\varphi(x_0)$ ile çarpıp bölersek,

$$|\sigma_\lambda(t)|\leq\frac{\varphi(x_0)}{\Phi(t)}\sum_{k=1}^{\infty}|p_{k,\lambda}|\left\{\frac{|f(x_0+\alpha_{k,\lambda}t)|}{\varphi(x_0+\alpha_{k,\lambda}t)}\cdot\frac{\varphi(x_0+\alpha_{k,\lambda}t)}{\varphi(x_0)}\right.$$

$$+\frac{|f(x_0-\alpha_{k,\lambda}t)|}{\varphi(x_0-\alpha_{k,\lambda}t)}\cdot\frac{\varphi(x_0-\alpha_{k,\lambda}t)}{\varphi(x_0)}+2\frac{|f(x_0)|}{\varphi(x_0)}\Bigg\}+C_0$$

eşitsizliğini elde ederiz. Hipotezde,

$$\mu(t)=\sup_{\substack{-\infty<x<\infty\\ |y|<t}}\frac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)}<\infty$$

idi, tanımdan görüldüğü gibi μ $[0,\infty)$da azalmayandır, çünkü t arttıkça tanım bölgesi büyür, bu nedenle bölge üzerinde supremum azalmaz. Buradan

$$|\sigma_\lambda(t)|\le\frac{\varphi(x_0)}{\Phi(t)}\sum_{k=1}^{\infty}|p_{k,\lambda}|[2\mu(\alpha_{k,\lambda}t)+2]+C_0$$

olur. Buradan

$$|\sigma_\lambda(t)|\le\frac{4\varphi(x_0)}{\Phi(t)}\mu(\alpha^*t)\cdot M+C_0 \tag{47}$$

elde ederiz. (44) eşitliğini (46) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\lim_{t\to+0}\sigma_\lambda(t)=\lim_{t\to+0}\gamma_\lambda(t)=0$$

olur, limit tanımından

$$\forall\varepsilon>0 \text{ için öyle } \delta>0 \text{ vardır ki } 0\le t\le\delta,\quad \lambda\ge0 \tag{48}$$

$$|\sigma_\lambda(t)|<\varepsilon$$

kalır. $t>\delta$ iken

$$|\sigma_\lambda(t)|\le\frac{4\varphi(x_0)}{\Phi(\delta)}\mu(\alpha^*t)M+C_0\le C\mu(\alpha^*t) \tag{49}$$

olur. Burada C herhangi bir sabit sayıdır.

$B_\lambda(t)$ yi (46) dan çekip (40) de yerine koyarsak

$$L_\lambda(f,x_0)-f(x_0)=\frac{f_+^{(n)}(x_0)-f_-^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot\widetilde{\Delta}_\lambda+\int_0^{\infty}\sigma_\lambda(t)\Phi(t)K_\lambda(t)dt \tag{50}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliğin sağındaki integrali göz önüne alalım,

$$I(\lambda)=\int_0^{\infty}\sigma_\lambda(t)\Phi(t)K_\lambda(t)dt$$

$\delta>0$ için integrali 0 dan δ ya , δ dan da ∞ a iki integralin toplamı biçiminde yazıp (48) ve (49) eşitsizliğini kullanırsak

$$|I(\lambda)| \leq \int_0^{\delta} |\sigma_\lambda(t)| \Phi(t) K_\lambda(t) dt + \int_{\delta}^{\infty} |\sigma_\lambda(t)| \Phi(t) K_\lambda(t) dt$$

$$< \varepsilon \cdot \int_0^{\delta} \Phi(t) K_\lambda(t) dt + C \cdot \int_{\delta}^{\infty} \mu(\alpha^*(t)) \Phi(t) K_\lambda(t) dt$$

elde edilir. (35) ve (36) dan

$$|I(\lambda)| \leq \varepsilon \cdot \Delta_\lambda + o(\Delta_\lambda)$$

yazabiliriz. Bu son eşitsizliği (50) de yerine koyarsak ispat tamamlanmış olur.

Şimdi de $K_\lambda(t)$ çekirdeğinin somut şekli verildiğinde $P_{k,\lambda}$, $\alpha_{k,\lambda}$ sayılarının yaklaşım hızını nasıl etkilediğini gösterelim. Bunun için Teorem 3.1 e örnek verip daha sonra aynı örneği Teorem 3.2 de uygulayarak aralarındaki farkı göstermeye çalışalım.

Örnek 3.1.

$$L_\lambda(f,x) = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda} f(x + \alpha_{k,\lambda} t) \right] \frac{dt}{1+\lambda^2 t^2}$$

biçiminde Abel-Poisson çekirdekli singüler integral operatörler ailesini ele alalım. $\lambda \geq 1$ olmak üzere $P_{k,\lambda}$, $\alpha_{k,\lambda}$, Teorem 3.1 deki özellikleri sağlasın, ek olarak

$$\Phi(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

biçiminde bir Φ fonksiyonu tanımlayalım. (32) eşitliğindeki Δ_λ tanımını kullanarak

$$\Delta_\lambda = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Phi(t)}{1+\lambda^2 t^2} dt < \infty$$

bu son integralde Φ fonksiyonunu yerine koyup integrali 0 dan 1 e, 1 den sonsuza, iki integralin toplamı şeklinde yazarsak

$$\frac{\lambda}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Phi(t)}{1+\lambda^2 t^2} dt = \frac{\lambda}{\pi} \left(\int_0^{1} \frac{t dt}{1+\lambda^2 t^2} + \int_1^{\infty} \frac{dt}{1+\lambda^2 t^2} \right)$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan,

$$\Delta_\lambda = \frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{1}{2\lambda^2} \left(\ln(1+\lambda^2 t^2) \Big|_0^1 + \arctan \lambda t \Big|_1^{\infty} \right) = \frac{1}{2\pi\lambda} \cdot \ln(1+\lambda^2) + \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \lambda \right)$$

elde ederiz, burada

$\lim\limits_{\lambda \to \infty} \dfrac{\ln(1+\lambda^2)}{\ln \lambda^2} = 1$ olduğundan $\ln(1+\lambda^2) \approx \ln \lambda^2$ dır. Bunu yerine koyarsak

$$\Delta_\lambda \approx \frac{1}{2\pi\lambda} \cdot \ln \lambda^2 = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\ln \lambda}{\lambda}$$

elde ederiz. Bu son eşitlikten de

$$\Delta_\lambda = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{1+\lambda^2 t^2} dt \approx \frac{\ln \lambda}{\pi \cdot \lambda}$$

eşitliği bulunur.

Teorem 3.3

Farzedelim ki, f fonksiyonu R de ölçülebilir, sınırlı, x_0 noktasında birinci mertebeden sağ ve sol, $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ türevleri var ve sonludur. Bu durumda

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\lambda}{\ln \lambda} \cdot \frac{L_\lambda(f, x_0) - f(x_0)}{R_{1,\lambda}} = \frac{1}{\pi}\left[f'_+(x_0) - f'_-(x_0)\right]$$

dır.

İspat:

Teorem 3.1 in (33) koşulu sağlanırsa ispat tamamlanmış olur. Bunun için;

$$\frac{\lambda}{\pi} \int_\delta^\infty \frac{\Phi(t)}{1+\lambda^2 t^2} dt = o(\Delta_\lambda)$$

eşitliğinin sağlandığını göstermeliyiz.

$$\frac{\lambda}{\Delta_\lambda} \int_\delta^\infty \frac{\Phi(t)}{1+\lambda^2 t^2} dt = \frac{\lambda}{\frac{\ln \lambda}{\lambda}} \left(\int_\delta^1 \frac{t\,dt}{1+\lambda^2 t^2} + \int_1^\infty \frac{dt}{1+\lambda^2 t^2} \right)$$

$$= \frac{\lambda^2}{\ln \lambda} \left(\frac{1}{2\lambda^2} \ln(1+\lambda^2 t^2) \Big|_\delta^1 + \frac{1}{2\lambda^2} \arctan \lambda t \Big|_1^\infty \right) \approx \frac{(-\ln \delta)}{\ln \lambda} = o(1)$$

dir ve bu son eşitlik ispatı tamamlar.

Örnek 3.2

Şimdi Teorem 3.2 ye örnek verebiliriz. Örnek 3.1 deki koşullara ek olarak

$$P_{k,\lambda}=\begin{cases}(-1)^{k+1}C_n^k & k=1\\ 0 & k=2,3,\ldots\end{cases}\qquad \alpha_{k,\lambda}=\begin{cases}\dfrac{k}{\sqrt{\ln\lambda}} & k=1\\ 0 & k=2,3,\ldots\end{cases}$$

alalım. Buna göre,

$$R_{1,\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}\alpha_{k,\lambda}=\frac{1}{\sqrt{\ln\lambda}} \text{ olduğundan } \lim_{\lambda\to\infty}R_{1,\lambda}=0 \text{ dır.}$$

Buradan

$$\widetilde{\Delta}_\lambda=R_{1,\lambda}\Delta_\lambda\approx\frac{1}{\sqrt{\ln\lambda}}\cdot\frac{\ln\lambda}{\pi\lambda}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\ln\lambda}}{\lambda}$$

olur.

Teorem 3.4

Farzedelim ki, f fonksiyonu R de ölçülebilir, sınırlı, x_0 noktasında birinci mertebeden sağ ve sol, $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ türevleri var ve sonludur. Bu takdirde

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda}{\sqrt{\ln\lambda}}\cdot\left[L_\lambda(f,x_0)-f(x_0)\right]=\frac{1}{\pi}\left[f'_+(x_0)-f'_-(x_0)\right]$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$\Phi(t)=\begin{cases}t, & 0\le t\le 1\\ 1, & t\ge 1\end{cases}$$

biçiminde bir Φ fonksiyonu tanımlayalım.

(36) eşitliği sağlanırsa ispat tamamlanır. Yani,

$$\frac{\lambda}{\widetilde{\Delta}_\lambda}\int_{\delta}^{\infty}\frac{\Phi(t)}{1+\lambda^2t^2}dt\to 0$$

olduğunu göstermeliyiz. Örnek 3.1 de bulduğumuz sonuçlardan

$$\frac{\lambda}{\widetilde{\Delta}_\lambda}\int_\delta^\infty \frac{\Phi(t)}{1+\lambda^2t^2}dt = \frac{\lambda}{\frac{\sqrt{\ln\lambda}}{\lambda}}\left(\int_\delta^1 \frac{tdt}{1+\lambda^2t^2}+\int_1^\infty \frac{dt}{1+\lambda^2t^2}\right) = \frac{(-\ln\delta)}{\sqrt{\ln\lambda}} = o(1)$$

eşitliklerini yazabiliriz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Bu iki örnekten görüldüğü gibi Teorem 3.2 nin bir uygulaması olan Örnek 3.2 deki hız, Teorem 3.1 in uygulaması olan Örnek 3.1 dekinden daha hızlıdır. Yani,

$\frac{\sqrt{\ln\lambda}}{\lambda}$, $\frac{\ln\lambda}{\lambda}$ ya göre daha hızlı sıfıra yaklaşır.

Yaklaşım hızının artmasıyla daha iyi yaklaşım sonucu elde etmiş oluruz.

Örnek 3.3

$$L_\lambda(f,x) = \lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda} f(x+\alpha_{k,\lambda}t)\right]F(t)dt$$

operatöründe $\lambda \geq 1$ olmak üzere, $P_{k,\lambda}$, $\alpha_{k,\lambda}$ Teorem 3.1 deki şartları sağlasın. $F(t)$ negatif olmayan çift bir fonksiyon olsun ve,

$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt = 1$ sağlansın.

$\chi_n = \int_0^\infty t^n F(t)dt < \infty$ olsun.

Teorem 3.1 de $K_\lambda(t) = \lambda F(\lambda t)$, $\Phi(t) = t^n$ yazarsak

$$\Delta_\lambda = \lambda\int_0^\infty t^n F(\lambda t)dt = \frac{1}{\lambda^n}\int_0^\infty t^n F(t)dt = \frac{\chi_n}{\lambda^n}$$

dir. Ayrıca, $\mu(t) = \sup\limits_{\substack{-\infty<x<\infty \\ |y|<t}} \frac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)} < \infty$ fonksiyonu için

$$\int_0^\infty \mu(\alpha^* t)\cdot t^n \cdot F(t)dt$$

integrali var ve sonludur. Buradan

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda^n}{R_{n,\lambda}}\left[L_\lambda(f,x_0) - f(x_0)\right] = \chi_n \frac{f_+^{(n)}(x_0) \pm f_-^{(n)}(x_0)}{n!}$$

olur, burada $\pm$, n in çift ve tek olma durumuna göre değişir.

İspat:

Teorem 3.1 e göre,

$\forall \delta > 0$ için, $\lambda \to \infty$ iken $\dfrac{\lambda}{\Delta_\lambda} \int\limits_\delta^\infty \mu(\alpha^* t) \cdot t^n \cdot F(\lambda t) dt \to 0$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\frac{\lambda}{\Delta_\lambda} \int\limits_\delta^\infty \mu(\alpha^* t) \cdot t^n \cdot F(\lambda t) dt = \frac{1}{\Delta_\lambda \lambda^n} \int\limits_{\lambda\delta}^\infty \mu\left(\alpha^* \frac{t}{\lambda}\right) \cdot t^n \cdot F(t) dt \le \frac{1}{\chi_n} \int\limits_{\lambda\delta}^\infty \mu(\alpha^* t) \cdot t^n \cdot F(t) dt$$

ifadenin sağ tarafındaki integral $\lambda \to \infty$ iken sıfıra gider ve bu da ispatı tamamlar.

Örnek 3.4

Fejer tipli çekirdekli

$$L_\lambda(f,x) = \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda} f(x + \alpha_{k,\lambda} t) \right] F(t) dt$$

integral operatörler ailesini ele alalım.

$\lambda > 1$ ve $N > 0$ olmak üzere $P_{k,\lambda}$ ve $\alpha_{k,\lambda}$ ları

$$P_{k,\lambda} = \begin{cases} (-1)^{k+1} C_n^k & k = 1...n \\ 0 & k = n+1... \end{cases} \qquad \alpha_{k,\lambda} = \begin{cases} \dfrac{k}{\lambda^{N\backslash n}} & k = 1...n \\ 0 & k = n+1... \end{cases}$$

biçiminde seçelim. Buradan

$$R_{n,\lambda} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{\lambda^N} \text{ olduğundan } \lim_{\lambda \to \infty} R_{n,\lambda} = 0 \text{ dır.}$$

$(-1)^n \cdot n! = c$ diyelim. $\widetilde{\chi}_n$ fonksiyonu

$$\widetilde{\chi}_n = c \int\limits_0^\infty t^n F(t) dt < \infty$$

olsun.

Teorem 3.2 de $K_\lambda(t) = \lambda F(\lambda t)$, $\Phi(t) = t^n$ yazarsak

$$\widetilde{\Delta}_\lambda = R_{n,\lambda} \cdot \Delta_\lambda = \frac{c}{\lambda^N} \cdot \lambda \int\limits_0^\infty t^n F(\lambda t) dt$$

olur. $\lambda t = u \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot dt = du$ dönüşümünü yaparsak

$$\widetilde{\Delta}_\lambda = \frac{c}{\lambda^{N+n}} \cdot \int_0^\infty t^n F(t)dt = \frac{\widetilde{\chi}_n}{\lambda^{N+n}}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.5

Teorem 3.2 in şartları sağlansın, ek olarak φ fonksiyonunu için

$$\mu(t) = \sup_{\substack{-\infty<x<\infty \\ |y|<t}} \frac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)} < \infty$$

olmak üzere, eğer $\lambda \to \infty$ iken

$$\int_{\lambda\delta}^{\infty} \mu(\alpha^* t) \cdot t^n \cdot F(t)dt = o\left(\frac{1}{\lambda^N}\right)$$

oluyorsa, bu durumda

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{N+n}\left[L_\lambda(f, x_0) - f(x_0)\right] = \widetilde{\chi}_n \frac{f_+^{(n)}(x_0) \pm f_-^{(n)}(x_0)}{n!}$$

eşitliği doğrudur.

İspat:

Teorem 3.2 ye göre

$$\lambda \int_{\delta}^{\infty} \mu(\alpha^* t) \cdot t^n \cdot F(\lambda t)dt = o(\widetilde{\Delta}_\lambda)$$

sağlandığını gösterirsek ispat tamamlanmış olur.

$$\frac{1}{\widetilde{\Delta}_\lambda} \cdot \lambda \int_{\delta}^{\infty} \mu(\alpha^* t) \cdot t^n \cdot F(\lambda t)dt \le \frac{\lambda^{N+n}}{\widetilde{\chi}_n \lambda^n} \cdot \int_{\lambda\delta}^{\infty} \mu(\alpha^* t) \cdot t^n \cdot F(t)dt \le \frac{\lambda^N}{\widetilde{\chi}_n} \cdot \int_{\lambda\delta}^{\infty} \mu(\alpha^* t) \cdot t^n \cdot F(t)dt$$

bu son integral hipotezden dolayı $\lambda \to \infty$ iken sıfıra eşittir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Weierstrass çekirdekli

$$L_\lambda(f, x) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda} f(x + \alpha_{k,\lambda} t)\right] e^{-\lambda^2 t^2} dt$$

integral operatörler ailesini ele alalım.

$\lambda > 1$ ve $N > 0$ olmak üzere $P_{k,\lambda}$ ve $\alpha_{k,\lambda}$ ları

$$P_{k,\lambda} = \begin{cases} (-1)^k C_n^k & k = 1...n \\ 0 & dy \end{cases} \qquad \alpha_{k,\lambda} = \begin{cases} \dfrac{k}{\lambda^{N\backslash n}} & k = 1...n \\ 0 & dy \end{cases}$$

biçiminde seçelim. Buradan

$$R_{n,\lambda} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{\lambda^N} \text{ olduğundan } \lim_{\lambda\to\infty} R_{n,\lambda} = 0 \text{ dır.}$$

$(-1)^n \cdot n! = c$ diyelim. $\widetilde{\chi}_n$ yı

$$\widetilde{\chi}_n = \frac{c}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^n \cdot e^{-t^2} dt$$

biçiminde tanımlayalım.

Teorem 3.2 de $K_\lambda(t) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\lambda^2 t^2}$, $\Phi(t) = t^n$ yazarsak

$$\widetilde{\Delta}_\lambda = R_{n,\lambda} \cdot \Delta_\lambda = \frac{c}{\lambda^N} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^n \cdot e^{-\lambda^2 t^2} dt$$

olur. $\lambda t = u \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot dt = du$ dönüşümünü yaparsak

$$\widetilde{\Delta}_\lambda = \frac{c}{\sqrt{\pi} \cdot \lambda^{N+n}} \cdot \int_0^\infty t^n \cdot e^{-t^2} dt = \frac{\widetilde{\chi}_n}{\lambda^{N+n}}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.6

Teorem 3.2 deki koşullara ek olarak $s \geq 1$ olmak üzere $\varphi(t) = 1 + |t|^s$ olsun. Bu durumda

$$\mu(t) = \frac{\varphi(x+t)}{\varphi(x)} = \frac{1 + |x+t|^s}{1 + |x|^s} \leq \frac{1 + 2^s \left|\, |x|^s + |t|^s \right|}{1 + |x|^s} \leq 2^s \frac{\left(1 + |x|^s\right)}{1 + |x|^s} + 2^s \frac{|t|^s}{1 + |x|^s} \leq 2^s \left(1 + |t|^s\right)$$

olur. Buradan

$$\mu(t) = 2^s \left(1 + |t|^s\right)$$

alabiliriz. Eğer

$$\int_{\lambda\delta}^{\infty} \mu\left(\alpha^{\bullet} t\right) \cdot t^{n} \cdot e^{-t^{2}} dt = o\left(\frac{1}{\lambda^{N}}\right)$$

sağlanıyorsa

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{N+n}\left[L_{\lambda}(f, x_{0}) - f(x_{0})\right] = \widetilde{\chi}_{n} \frac{f_{+}^{(n)}(x_{0}) \pm f_{-}^{(n)}(x_{0})}{n!}$$

eşitliği sağlanır.

4. PEANO ANLAMINDA TÜREVLENEBİLİR FONKSİYONLARA LİNEER POZİTİF İNTEGRAL OPERATÖRLER AİLELERİYLE YAKLAŞIMIN ASİMPTOTİK DEĞERİ

Tanım 4.1 Bir x_0 noktasının komşuluğunda tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu

$\lim\limits_{t\to+\infty} \alpha(t)=0$ olmak üzere

$$f(x_0+t)=a_0+\frac{a_1}{1!}t+\frac{a_2}{2!}t^2+\ldots+\frac{a_r+\alpha(t)}{r!}t^r$$

biçiminde gösterilebiliyorsa, $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında r. Peano türevi vardır denir ve bu türev a_r dir. Peano türevini $f_p^{(r)}$ ile gösterelim, yani

$$f_p^{(r)}(x_0)=a_r$$

dir.

Taylor formülünden görülüyor ki, adi türev varsa Peano türevi de var fakat karşıtı doğru değildir.

Şimdi Bölüm 3 deki Teorem 3.2 yi daha genel sınıf olan Peano anlamda türevlenebilen fonksiyonlar sınıfına taşıyacak olan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.1

$f(x)$ fonksiyonu ölçülebilir ve bir x_0 noktasının komşuluğunda (n-1). kez Peano anlamda türevlenebilir, x_0 noktasında ise sağdan ve soldan a_n^+, a_n^- Peano türevleri mevcut olsun.

Teorem 3.1 deki (31) ve (32) hariç diğer tüm özellikleri sağlansın, ek olarak

$\lim\limits_{\lambda\to\infty} R_{n,\lambda}=0$ ve

$$\widetilde{\Delta}_\lambda=R_{n,\lambda}\cdot\Delta_\lambda=R_{n,\lambda}\int_0^\infty \Phi(t)K_\lambda(t)dt \tag{51}$$

olsun. Eğer $\forall\delta>0$ için $\mu(t)=\sup\limits_{\substack{-\infty<x<\infty\\ |y|<t}} \dfrac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)}<\infty$

$$\int_{\delta}^{\infty}\mu(\alpha^{*}t)\Phi(t)K_{\lambda}(t)dt=o(\widetilde{\Delta}_{\lambda}), \tag{52}$$

sağlanıyorsa, bu takdirde

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{L_{\lambda}(f;x_0)-f(x_0)}{\widetilde{\Delta}_{\lambda}}=\frac{a_n^{+}\pm a_n^{-}}{n!} \tag{53}$$

dır. Burada $\pm$ işareti n nin tek ve çift olması durumuna göre değişir.

İspat:

$L_{\lambda}(f,x_0)-f(x_0)$ farkına bakalım.

$$L_{\lambda}(f,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}.f(x+\alpha_{k,\lambda}t)\right]K_{\lambda}(t)dt=\int_{-\infty}^{0}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}.f(x+\alpha_{k,\lambda}t)\right]K_{\lambda}(t)dt+$$

$$+\int_{0}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}.f(x+\alpha_{k,\lambda}t)\right]K_{\lambda}(t)dt=\int_{0}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}.\left[f(x+\alpha_{k,\lambda}t)+f(x-\alpha_{k,\lambda}t)\right]\right]K_{\lambda}(t)dt \tag{54}$$

dır. Ayrıca çekirdeğin özelliğinden

$$2\int_{0}^{\infty}K_{\lambda}(t)dt=1$$

dir ve bu eşitliğin her iki tarafını $f(x)$ ile çarparsak,

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}2f(x)K_{\lambda}(t)dt$$

elde ederiz. Ayrıca $\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}=1$ olduğundan

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}.2f(x)\right]K_{\lambda}(t)dt \tag{55}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan,

$$L_{\lambda}(f,x)-f(x)=\int_{0}^{\infty}B_{\lambda}(t)\cdot K_{\lambda}(t)dt \tag{56}$$

eşitliğini elde ederiz, burada

$$B_{\lambda}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}[f(x_0+\alpha_{k,\lambda}t)+f(x_0-\alpha_{k,\lambda}t)-2f(x_0)] \tag{57}$$

biçimindedir.

$n=2k-1$ için Tanım 4.1 deki

$$f(x_0+t)=a_0+\frac{a_1}{1!}t+\frac{a_2}{2!}t^2+\ldots+\frac{a_r+\alpha(t)}{r!}t^r$$

eşitliğinde t yerine $\alpha_{k,\lambda}t$ yazarsak,

$$f\left(x_0+\alpha_{k,\lambda}t\right)=a_0+\frac{a_1}{1!}\alpha_{k,\lambda}t+\ldots+\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\alpha_{k,\lambda}^{n-1}t^{n-1}+\frac{a_n^{+}+\beta_1\left(\alpha_{k,\lambda}t\right)}{n!}\alpha_{k,\lambda}^{n}t^{n} \tag{58}$$

eşitliğini elde ederiz, burada $t\to+0$ iken k ve λ göre düzgün olmak üzere $\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t)\to 0$ dır.

Yine Tanım 4.1 deki açılımda t yerine $-\alpha_{k,\lambda}t$ yazarsak,

$$f\left(x_0-\alpha_{k,\lambda}t\right)=a_0-\frac{a_1}{1!}\alpha_{k,\lambda}t+\ldots+\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\alpha_{k,\lambda}^{n-1}t^{n-1}-\frac{a_n^{-}+\beta_2\left(\alpha_{k,\lambda}t\right)}{n!}\alpha_{k,\lambda}^{n}t^{n} \tag{59}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $t\to+0$ iken k ve λ ya göre düzgün olmak üzere $\beta_2(\alpha_{k,\lambda}t)\to 0$ dır.

(58) ve (59) eşitliklerini (57) de yerine koyarsak,

$$B_\lambda(t)=\frac{a_n^{+}-a_n^{-}}{n!}\cdot R_{n,\lambda}t^n+\gamma_\lambda(t)\cdot t^n \tag{60}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $\gamma_\lambda(t)$,

$$\gamma_\lambda(t)=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{\infty}p_{k,\lambda}\alpha_{k,\lambda}^{n}\left[\beta_1\left(\alpha_{k,\lambda}t\right)-\beta_2\left(\alpha_{k,\lambda}t\right)\right]\to 0\,, \quad (t\to 0 \text{ iken})$$

dir. Çünkü, hipotezden k ve λ ya göre düzgün olarak

$$\lim_{t\to+0}\beta_1\left(\alpha_{k,\lambda}t\right)=\lim_{t\to+0}\beta_2\left(\alpha_{k,\lambda}t\right)=0$$

olur. Yani keyfi $\varepsilon>0$ için k ve λ dan bağımsız öyle bir $\delta>0$ var, öyle ki $|t|<\delta$ olduğunda $\left|\beta_1\left(\alpha_{k,\lambda}t\right)\right|<\varepsilon$ kalır.

Buna göre.

$$|\gamma_\lambda(t)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}\alpha_{k,\lambda}\left[\beta_1(\alpha_{k,\lambda}t)-\beta_2(\alpha_{k,\lambda}t)\right]\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} |P_{k,\lambda}| \cdot \alpha_{k,\lambda} \left[|\beta_1(\alpha_{k,\lambda} t)| + |\beta_2(\alpha_{k,\lambda} t)| \right] \leq 2\varepsilon\alpha^* \mu \leq c\varepsilon \qquad \text{(c sabit)}$$

elde ederiz. Eğer $|t| < \delta$ ise keyfi $\varepsilon > 0$ verildiğinde k ve λ dan bağımsız öyle bir $\delta > 0$ bulabiliriz ki, $|t| \leq \delta$ iken

$$|\gamma_\lambda(t)| < c\varepsilon \tag{61}$$

olur. Bu ise λ ya göre düzgün olmak üzere $t \to 0$ iken $\gamma_\lambda(t)$ nin limiti sıfır olduğunu gösterir

$$\sigma_\lambda(t) = \frac{B(t)}{\Phi(t)} - R_{n,\lambda} \frac{a_n^+ - a_n^-}{n!} \tag{62}$$

biçiminde $\sigma_\lambda(t)$ fonksiyonu ele alalım. Burada

$$C_0 = (\alpha^*)^n \cdot M \frac{a_n^+ - a_n^-}{n!}$$

olmak üzere (62) eşitliğinin mutlak değerini alırsak,

$$|\sigma_\lambda(t)| \leq \frac{|B_\lambda(t)|}{\Phi(t)} + C_0$$

elde ederiz. (57) eşitliğini bu eşitsizlikte yerine yazıp $\varphi(x_0)$ ile çarpıp bölersek,

$$|\sigma_\lambda(t)| \leq \frac{\varphi(x_0)}{\Phi(t)} \sum_{k=1}^{\infty} |p_{k,\lambda}| \left\{ \frac{|f(x_0 + \alpha_{k,\lambda} t)|}{\varphi(x_0 + \alpha_{k,\lambda} t)} \cdot \frac{\varphi(x_0 + \alpha_{k,\lambda} t)}{\varphi(x_0)} \right.$$
$$\left. + \frac{|f(x_0 - \alpha_{k,\lambda} t)|}{\varphi(x_0 - \alpha_{k,\lambda} t)} \cdot \frac{\varphi(x_0 - \alpha_{k,\lambda} t)}{\varphi(x_0)} + 2\frac{|f(x_0)|}{\varphi(x_0)} \right\} + C_0$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$$\mu(t) = \sup_{\substack{-\infty < x < \infty \\ |y| < t}} \frac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)} < \infty$$

olduğundan μ fonksiyonu $[0,\infty)$da azalmayandır çünkü t arttıkça tanım bölgesi büyür, bu nedenle bölge üzerinde supremum azalmaz. Dolayısıyla

$$|\sigma_\lambda(t)| \leq \frac{\varphi(x_0)}{\Phi(t)} \sum_{k=1}^{\infty} |p_{k,\lambda}| [2\mu(\alpha_{k,\lambda} t) + 2] + C_0$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Buradan,

$$|\sigma_\lambda(t)| \le \frac{4\varphi(x_0)}{\Phi(t)} \mu(\alpha^* t) \cdot M + C_0 \tag{63}$$

buluruz.

$$\lim_{t \to +0} \sigma_\lambda(t) = \lim_{t \to +0} \gamma_\lambda(t) = 0$$

limit tanımından

$\forall \varepsilon > 0$ için öyle $\delta > 0$ var, öyle ki, $0 \le t \le \delta$, $\lambda \ge 0$

$$|\sigma_\lambda(t)| < \varepsilon \tag{64}$$

kalır. $t > \delta$ iken

$$|\sigma_\lambda(t)| \le \frac{4\varphi(x_0)}{\Phi(\delta)} \mu(\alpha^* t) M + C_0 \le C\mu(\alpha^* t) \tag{65}$$

olur. Burada C , t ve λ ya bağlı sabit sayıdır.

$B_\lambda(t)$ yi (62) den çekip (56) da yerine koyarsak,

$$L_\lambda(f, x_0) - f(x_0) = \frac{a_n^+ - a_n^-}{n!} \cdot \widetilde{\Delta}_\lambda + \int_0^\infty \sigma_\lambda(t)\Phi(t)K_\lambda(t)dt \tag{66}$$

eşitliğini buluruz. Şimdi bu eşitliğin sağındaki integrali çözelim,

$$I(\lambda) = \int_0^\infty \sigma_\lambda(t)\Phi(t)K_\lambda(t)dt$$

$\delta > 0$ için integrali 0 dan δ ya , δ dan da ∞ a iki integralin toplamı biçiminde yazıp (64) ve (65) eşitsizliğini kulanırsak

$$|I(\lambda)| \le \int_0^\delta |\sigma_\lambda(t)|\Phi(t)K_\lambda(t)dt + \int_\delta^\infty |\sigma_\lambda(t)|\Phi(t)K_\lambda(t)dt$$

$$< \varepsilon \cdot \int_0^\delta \Phi(t)K_\lambda(t)dt + C \cdot \int_\delta^\infty \mu(\alpha^*(t))\Phi(t)K_\lambda(t)dt$$

elde ederiz. (32) ve (33) den

$$|I(\lambda)| \le \varepsilon \cdot \Delta_\lambda + o(\Delta_\lambda)$$

yazabiliriz. Bu son eşitsizliği (66) da yerine koyarsak ispat tamamlanmış olur.

Şimdi Peano türevi için bazı sonuçlar verelim:

1. Fejer çekirdekli

$$L_\lambda(f,x)=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}f(x+\alpha_{k,\lambda}t)\right]F(t)dt$$

integral operatörler ailesini ele alalım. Örnek 3.4 deki koşullar sağlandığında,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{N+n}\left[L_\lambda(f,x_0)-f(x_0)\right]=\widetilde{\chi}_n\,\frac{a_n^+\pm a_n^-}{n!}$$

olur.

2. Weierstrass çekirdekli

$$L_\lambda(f,x)=\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}P_{k,\lambda}f(x+\alpha_{k,\lambda}t)\right]e^{-\lambda^2t^2}dt$$

integral operatörler ailesini ele alalım. Örnek 3.5deki koşullar sağlansın. Ek olarak

$\varphi(x)=1+|x|^s$ $s\geq 1$, olsun. $x\in(-\infty,\infty)$ olmak üzere,

$$\mu(t)=2^s\left(1+|t|^s\right)<\infty$$

olur. $\lambda\to\infty$ iken

$$\int_{\lambda\delta}^{\infty}\mu\left(\alpha^* t\right)\cdot t^n\cdot e^{-t^2}dt=o\left(\frac{1}{\lambda^N}\right)$$

ise, bu durumda

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{N+n}\left[L_\lambda(f,x_0)-f(x_0)\right]=\widetilde{\chi}_n\,\frac{a_n^+\pm a_n^-}{n!}$$

dir.