T. C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZ DÜZLEMİNDE 2-PARAMETRELİ HAREKETLER VE KUTUP EKSEN YOĞUNLUĞU

Gülsüm Yeliz ŞENTÜRK

DOKTORA TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Prof. Dr. Salim YÜCE

Haziran, 2019

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZ DÜZLEMİNDE 2-PARAMETRELİ HAREKETLER VE KUTUP EKSEN YOĞUNLUĞU

Gülsüm Yeliz ŞENTÜRK tarafından hazırlanan tez çalışması 14.06.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Salim YÜCE
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Salim YÜCE, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Nurten GÜRSES, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU, Üye
İstanbul Gelişim Üniversitesi

Prof. Dr. Fatma ÖZDEMİR, Üye
İstanbul Teknik Üniversitesi

Danışmanım Prof. Dr. Salim YÜCE sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Lorentz Düzleminde 2-Parametreli Hareketler ve Kutup Eksen Yoğunluğu başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Gülsüm Yeliz ŞENTÜRK

İmza

Bu doktora tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon birimince desteklenmiştir. Proje Numarası: FDK-2018-3320.

G. Y. Şentürk Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından 2228-B Yüksek Lisans Öğrencileri için Doktora Burs Programı ile desteklenmiştir.

TEŞEKKÜR

Kinematik, fiziğin bir dalı ve mekaniğin kuvvet ve kütle kavramlarının hiç rol oynamadığı bir alt bölümü olarak, bir maddesel noktanın/nokta sisteminin zamana veya zamandan farklı parametreye/parametrelere bağlı meydana getirdiği yer değiştirmeleri geometrik olarak sebeplerini veya nedenlerini dikkate almadan inceleyen bir bilim dalıdır. Kinematik, matematikçiler için, geometri, fizik ve mekaniği birbirine bağlayan bir köprüdür, yani kinematik için "herhangi maddesel noktanın/nokta sisteminin herhangi bir hareketinin geometrisidir." denilebilir. Bir veya iki parametreli maddesel nokta/nokta sistemlerinin hareketinin geometrisi fizik, geometrik tasarım ve robotik hareketlerin yörüngelerinde çok sayıda uygulamaya sahiptir. Bu tez çalışmasında, Lorentz düzleminde nokta ve non-null doğru kümelerinin yoğunlukları ile ilgili özel durumlar, Lorentz düzleminde 2-parametreli hareketin kinematik olarak geometrisi ve bu hareket altında nokta ve non-null doğru kümelerinin yoğunlukları incelenmektedir.

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgi, tecrübe ve desteğini benden esirgemeyerek bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle elinden geleni yapan ve her adımda bana büyük bir özenle yol gösteren saygıdeğer ve kıymetli hocam Prof. Dr. Salim YÜCE'ye en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bunun yanında doktora sürem boyunca 2228-B Yüksek Lisans Öğrencileri için Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumuna (TÜBİTAK) Bilim İnsani Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkür ederim.

Gülsüm Yeliz ŞENTÜRK

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ viii

ŞEKİL LİSTESİ ix

ÖZET x

ABSTRACT xii

1 Giriş 1

1.1 Literatür Özeti 1

1.2 Tezin Amacı 6

1.3 Bulgular 7

2 Temel Kavramlar 9

2.1 Öklid Düzleminde Nokta ve Doğru Kümelerinin Yoğunluğu 9

2.2 Lorentz Düzleminde Nokta ve Doğru Kümelerinin Yoğunluğu 13

2.2.1 Lorentz Düzleminde Nokta Çiftlerinin Yoğunluğu 14

2.2.2 Lorentz Düzleminde Kesişen Non-Null Doğru Çiftlerinin Yoğunluğu 16

2.3 Öklid Düzleminde 2-Parametreli Hareket 18

2.3.1 2-Parametreli Hareket ve 2-Parametreli Hareketten Elde Edilen 1-Parametreli Hareketler 20

2.3.2 Hareketli Koordinat Sistemi 21

2.3.3 Kutup Ekseni 24

3 Öklid Düzleminde 2-Parametreli Hareket Altında Kutup Ekseninin Yoğunluğu 28

3.1 Kutup Eksen Dönüşümünün Yoğunluk Değişmezliği 28

3.1.1 Kapalı Özel 2-Parametreli Düzlemsel Hareketin Kutup Eksen Dönüşümünün Yoğunluk Değişmezliği 28

3.1.2 Hareketli Koordinat Sistemi ile Kutup Eksen Dönüşümünün Yoğunluk Değişmezliği 32

3.2 Kutup Eksen Yoğunluğu Sıfır Olan Hareketler 34

3.3 Değme Dönüşümü 36
3.4 Belirlenmiş Kutup Ekseninin Tanımladığı Hareket 38
3.5 Hareketli Koordinat Sistemi ile Hareketlerin Kutup Eksenine Göre Belirlenmesi 39
3.6 Eğri Elementi Çizen Noktalar 42
3.7 Destek Fonksiyonu 45
3.8 Yoğunluğu Sıfır Olan Kutup Eksenlerinin Destek Fonksiyonu ile Zarf Eğrileri 50
3.9 Esas-B_I Hareketi ve Kanonik İzafe Sistemi 52
3.9.1 Esas-B_I Hareketi 52
3.9.2 Kanonik İzafe Sistemi 53
3.10 Destek Fonksiyonu ile M ve N İnvaryantlarının Geometrik Anlamı . . . 57
3.10.1 M ve N İnvaryantlarının Destek Fonksiyonu ile Yeniden Elde Edilmesi 59
3.11 $\widehat{B}_{II}$ Karşıt (Dual) Hareketi 60
3.12 Basitleştirilmiş Temel Denklemler 62
3.13 B_{II} Hareketinden Elde Edilen B_I Hareketleri 65
3.14 Sınır çizgisi 69
3.15 Büküm Noktası ve Büküm Polü 72
3.16 Özel B_{II} hareketi 74

4 Lorentz Düzleminde 2-Parametreli Hareket 76
4.1 Lorentz Düzleminde 2-Parametreli Hareket 78
4.2 Hareketli Koordinat Sistemi 80
4.3 Hareketin Non-Null Kutup Ekseni 83
4.3.1 Özel Lorentzian Düzlemsel Hareketin Hiperbolik İfadesi ile Non-Null Kutup Ekseni 83
4.3.2 Hareketli Koordinat Sistemi ile Non-Null Kutup Ekseni 85
4.4 Non-Null Kutup Eksen Dönüşümünün Yoğunluk Değişmezliği 87
4.4.1 Özel Lorentzian Hareketinde Non-Null Kutup Eksen Dönüşümünün Yoğunluk Değişmezliği 87
4.4.2 Hareketli Koordinat Sistemi ile Non-Null Kutup Eksen Dönüşümünün Yoğunluk Değişmezliği 90
4.5 Hareketin Eğri Elementi Çizen Noktaları 94
4.6 Kutup Eksen Yoğunluğu Sıfır Olan Hareketler 98
4.7 Belirlenmiş $g = g'$ Non-Null Kutup Ekseninin Tanımladığı Hareket . . . 101
4.8 Hareketin Destek Fonksiyonu 107

5 Lorentz Düzleminde Nokta ve Non-Null Doğru Kümelerinin Yoğunlukları 115
5.1 İki Nokta Kümesinin Yoğunlukları Arasındaki İlişki 115

5.2 Doğrudaş Üç Nokta Kümesinin Yoğunlukları Arasındaki İlişki 116
5.3 Doğrudaş Olmayan Üç Nokta Kümesinin Yoğunlukları Arasındaki İlişki 117
5.4 Kesişen İki Doğru Kümesinin Yoğunlukları Arasındaki İlişki 119

6 Lorentz Düzleminde 2-Parametreli Hareket Altında Nokta ve Doğru Kümelerinin Yoğunlukları 121
6.1 Hareket Altında Nokta Kümesinin Yoğunluğu 121
6.2 Hareket Altında İki Nokta Kümesinin Yoğunlukları Arasındaki İlişki . . 122
6.3 Hareket Altında Doğrudaş Üç Nokta Kümesinin Yoğunlukları Arasındaki İlişki 124
6.4 Hareket Altında Doğrudaş Olmayan Nokta Kümelerinin Yoğunlukları Arasındaki İlişki 125
6.5 Hareket Altında Non-Null Doğru Kümesinin Yoğunluğu 126
6.6 Hareket Altında Kesişen Non-Null Doğru Çiftlerinin Yoğunlukları Arasındaki ilişki 127
6.7 Hareket Altında Non-Null Doğru Çiftlerinin Yoğunluğu 129
6.8 Hareket Altında Nokta Çiftlerinin Yoğunluğu 130

7 Sonuç ve Öneriler 131

Referanslar 132

Tezden Üretilmiş Yayınlar 135

SİMGE LİSTESİ

$\wedge$	Alterne çarpım (dış çarpım) fonksiyonu
d	Diferansiyel operatör
l	Doğru
X	Hareketli düzlemde temsili bir nokta
L	Hareketli Lorentz düzlemi
E	Hareketli Öklid düzlemi
dl	l doğrusunun yoğunluğu
L^2	Lorentz düzlemi
H_I	Lorentz düzleminde 1-parametreli hareket
SH_I	Lorentz düzleminde 1-parametreli özel hareket
H_{II}	Lorentz düzleminde 2-parametreli hareket
SH_{II}	Lorentz düzleminde 2-parametreli özel hareket
$\langle , \rangle_L$	Lorentz iç çarpım fonksiyonu
$\|\|, \|\|_L$	Lorentz norm fonksiyonu
E^2	Öklid düzlemi
B_I	Öklid düzleminde 1-parametreli hareket
SB_I	Öklid düzleminde 1-parametreli özel hareket
B_{II}	Öklid düzleminde 2-parametreli hareket
SB_{II}	Öklid düzleminde 2-parametreli özel hareket
$L^{'}$	Sabit Lorentz düzlemi
$E^{'}$	Sabit Öklid düzlemi
l_s	Spacelike doğru
l_t	Timelike doğru
dX	X noktasının yoğunluğu

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Lorentz düzleminde kesişen non-null doğru kümeleri 16
Şekil 2.2 Öklid düzleminde hareket 19
Şekil 3.1 B_{II} hareketinin $g \in L$ kutup ekseni 30
Şekil 3.2 B_{II} hareketinin $g \in L$ kutup ekseni ve hareketli koordinat sistemi . . 32
Şekil 3.3 g ve g' kutup eksenlerinin zarf eğrileri ve evolütü 35
Şekil 3.4 g doğru ailesinin evolventi 38
Şekil 3.5 $g' \in E'$ düzleminde hareketli koordinatlı sistemi 40
Şekil 3.6 B_{II} hareketinin destek fonksiyonu 46
Şekil 3.7 Vektörlerin dönmesi ile destek fonksiyonun değişimi 48
Şekil 3.8 Kanonik izafe sistemi ile g kutup ekseninin zarf eğrisi 57
Şekil 3.9 Kanonik izafe sisteminde Q Esas-polü 59
Şekil 3.10 Büküm dairesi ve büküm polü 73
Şekil 4.1 Lorentz düzleminde hareket 77
Şekil 4.2 H_{II} hareketi ve H_{II} hareketinden elde edilen H_I hareketleri 79
Şekil 4.3 L hareketli düzleminde non-null kutup ekseni ve pol eğrisi 89
Şekil 4.4 $g \in L$ timelike kutup ekseni ve hareketli koordinat sistemi 91
Şekil 4.5 $g \in L$ spacelike kutup ekseni ve hareketli koordinat sistemi 93
Şekil 4.6 $g \in L$ ve $g' \in L'$ non-null kutup eksenlerinin zarf eğrileri ve evolütleri 99
Şekil 4.7 $g' \in L'$ timelike kutup ekseni ve hareketli koordinat sistemi 102
Şekil 4.8 $g' \in L'$ spacelike kutup ekseni ve hareketli koordinat sistemi 105
Şekil 4.9 g timelike kutup ekseni için hareketin destek fonksiyonu 108
Şekil 4.10 g spacelike kutup ekseni için hareketin destek fonksiyonu 109
Şekil 4.11 g timelike kutup ekseni için vektörlerin dönmesi ile destek fonksiyonun değişimi 111
Şekil 4.12 g spacelike kutup ekseni için vektörlerin dönmesi ile destek fonksiyonun değişimi 113
Şekil 5.1 Doğrudaş olmayan nokta Kümeleri 118
Şekil 6.1 Hareket altında X ve Y noktaları ve non-null l doğrusu 123
Şekil 6.2 Hareket altında doğru kümeleri 127

ÖZET

Lorentz Düzleminde 2-Parametreli Hareketler ve Kutup Eksen Yoğunluğu

Gülsüm Yeliz ŞENTÜRK

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Salim YÜCE

Bu tez 7 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, tezin giriş kısmına ayrılmış olup bu bölümde literatür özeti, tezin amacı ve bulgular verilmiştir. İkinci bölümde, ilk olarak tezin bütünü için temel kavram olan Öklid ve Lorentz düzlemlerinde nokta ve doğru kümelerinin yoğunluğu tanımlanmıştır. Öklid düzleminde 2-parametreli hareketler tanımlanarak kutup ekseni ve hareketli koordinat sistemleri verilmiştir. Üçüncü bölümde ise hareketin kutup ekseni ve kutup eksen yoğunluk değişmezliği esas alınarak W. Blaschke and H. R. Müller'in [1, 2] bakış açısı ile Öklid düzleminde 2-parametreli hareketler geometrik olarak ayrıntılı incelenmiştir. Böylece, Öklid düzleminde 2-parametreli hareketler ile ilgili W. Blaschke ve H. R. Müller'in [1] Almanca kitabında olup H. R. Müller'in [2] kitabında olmayan konular ortak bir notasyon ve anlatım tarzı ile incelenmiştir.

Dördüncü ve daha sonraki temel bölümler tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır.

Dördüncü bölümde, W. Blaschke and H. R. Müller'in [1, 2] Öklid düzlemindeki bakış açısı ile Lorentz düzleminde 2-parametreli hareket incelendi. İlk olarak, Lorentz düzlemindeki 1-parametreli hareketin hiperbolik ifadesi yardımı ile 2-parametreli Lorentzian hareketi tanımlandı. Sonrasında, 2-parametreli Lorentzian hareketler altında hareketli koordinat sistemleri, hareketin non-null kutup ekseni, non-null kutup eksen dönüşümünün yoğunluk değişmezliği, sıfır yoğunluklu non-null kutup eksen dönüşümü, eğri elementi çizen noktaları ve hareketin destek fonksiyonu araştırıldı.

Beşinci bölümde, Lorentz düzleminde nokta ve non-null doğru kümelerinin yoğunlukları ile ilgili özel durumlar incelendi.

Altıncı bölümde, Lorentz düzleminde 2-parametreli hareket altında nokta ve non-null doğru kümelerinin yoğunlukları tanımlandı; nokta ve non-null doğru kümelerinin yoğunlukları ile ilgili özel durumlar verildi.

Yedinci bölüm olan son bölümde, orijinal bölümlerde elde edilen sonuçlardan bahsedildi ve gelecek çalışmalar için önerilerde bulunuldu.

Anahtar Kelimeler: kutup ekseni, nokta yoğunluğu, doğru yoğunluğu, 2- parametreli hareket, Lorentz düzlemi, destek fonksiyonu

ABSTRACT

2-Parameter Motions in Lorentzian Plane and the Polar Axis Density

Gülsüm Yeliz ŞENTÜRK

Department of Mathematics
Doctor of Philosophy Thesis

Advisor: Prof. Dr. Salim YÜCE

This thesis consists of seven chapters.

The first chapter is devoted to the introduction part that includes literature review, objective of the thesis and hypothesis. In the second chapter, firstly, the densities of the set of points and lines are defined in Euclidean and Lorentzian planes as the basic concepts for the whole thesis. The polar axis and the moving coordinate systems are given by defining 2-parameter planar motions in Euclidean plane. In the third chapter, 2-parameter motions in Euclidean plane are examined geometrically by taking into account W. Blaschke and H. R. Müller [1, 2] viewpoint using the polar axes of the motion and the density invariance of the polar axes. Thus, the topics related to 2-parameter motions in the Euclidean plane in W. Blaschke and H. R. Müller's German book [1] but not in H. R. Müller's [2] book are investigated by using common notations and expressions.

The original parts of this thesis are composed of the fourth chapter and the following chapters.

In the fourth chapter, 2-parameter Lorentzian motions are investigated by using the viewpoint of W. Blaschke and H. R. Müller [1, 2] in the Euclidean plane. Firstly, 2-parameter planar Lorentzian motions are defined by using the hyperbolic expression of 1-parameter motion in the Lorentzian plane. And then, during 2-parameter planar Lorentzian motions the moving coordinate systems, non-null polar axes, the density invariance of non-null polar axis transformation, zero-density of non-null polar axes,

the curve plotter points and the support function of the motion are examined.

In the fifth chapter, special cases of the densities of sets points and non-null lines in the Lorentzian plane are investigated.

In the sixth chapter, the density formulas of sets of points and non-null lines are defined; special cases of the densities of sets points and non-null lines are given under 2-parameter planar Lorentzian motion.

In the seventh chapter, which is the last chapter of thesis, the original obtained results are mentioned and some suggestions are made for future studies.

Keywords: polar axis, point density, line density, 2-parameter motion, Lorentzian plane, support function

1
Giriş

Mekanik kuvvet altındaki cisimlerin hareketini inceleyen bir bilim dalıdır. Dolayısıyla mekaniğin kapsamını anlayabilmek için önce hareketi tanımlamalıyız. Hareket bir cismin konumunun zamana bağlı değişimi olarak tanımlanabilir.

Mekanik, cisimlerin hareketini incelediğine göre bunun özel bir halini yani cisimlerin durması halini de kapsar. Cisimlerin üzerine etkiyen kuvvetler altında durması, yani dengede kalması koşullarını inceleyen mekanik dalına statik denir. Yalnız hareketle uğraşan mekanik dalına da dinamik adı verilir. Dinamik de iki ana bölüme ayrılır. Kinematik denilen bölümde cismin hareketinin belli olduğu kabul edilir ve hareketle ilgili bazı büyüklüklerin, örneğin hızın ve ivmenin bulunmasına çalışılır. Dinamiğin cismin üzerine etkiyen kuvvetler altında yapacağı hareketi belirlemeyi amaçlayan bölümü de kinetik adını alır.

Mekanik, hareketini incelediği cisimlerin yapısı bakımından ikiye ayrılır; rijit (katı) cisimlerin mekaniği ve şekil değiştiren cisimlerin mekaniği. Rijit cisimler mekaniği adından anlaşıldığı üzere yalnız rijit cisimleri, yani her türlü etki altında herhangi iki noktası arasındaki uzaklık değişmeyen cisimleri göz önüne alır, [3].

Düzlemde serbestlik derecesi iki olacak şekilde hareket etmeye programlanmış bir rijit cisim 2-parametreli düzlemsel hareket yapar. Bu tez çalışmasında, genel olarak Lorentz düzleminde 2-parametreli düzlemsel kinematik ele alınmıştır.

1.1 Literatür Özeti

Öklid düzleminde 2-parametreli hareketler 1956 yılında W. Blaschke ve H. R. Müller [1] tarafından 1-parametreli hareketin

$$\begin{cases} x_1{}' = (x_1\cos\theta - x_2\sin\theta) + (-u_1\cos\theta + u_2\sin\theta), \\ x_2{}' = (x_1\sin\theta + x_2\cos\theta) + (-u_1\sin\theta - u_2\cos\theta), \end{cases}$$

ile verilen kartezyen denklemlerinde $\mathbf{x} = x_1 + ix_2$, $x' = {x_1}' + i{x_2}'$ ve $\mathbf{u} = u_1 + iu_2$ yazılması ile elde edilen

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{x} - \mathbf{u})e^{i\theta}$$

kompleks ifadesi yardımıyla tanımlandı. Kartezyen denklemlerdeki u_1, u_2 ve θ yani $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ve θ fonksiyonları $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ zaman parametresinin sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonları ise meydana gelen hareket 1-parametrelidir. Kompleks ifadede $\mathbf{u}$ kompleks büyüklüğü ile θ dönme açısı, t_1 ve t_2 gibi bağımsız iki reel parametreye bağlı olması durumunda elde edilen

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t_1, t_2) \text{ ve } \theta = \theta(t_1, t_2)$$

fonksiyonlarının uygun diferansiyellenebilme şartı ile elde edilen harekete 2-parametreli hareket adı verilir. Eğer $\frac{d\mathbf{u}}{d\theta} \neq 0$ ise parametrelerden biri θ dönme açısı olarak seçilebilir. Yani, bu şart altında elde edilen

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\theta, t)$$

fonksiyonunun uygun diferensiyellenebilme şartı ile tanımlanan 2-parametreli düzlemsel harekette de parametrelerden biri açı olur. Hareketin parametrelerinden birinin diğerinin bir fonksiyonu olması durumunda 2-parametreli düzlemsel hareketten 1-parametreli hareketler elde edilebilir. 1-parametreli hareketler ile 2-parametreli hareketlerden elde edilen 1-parametreli hareketleri karşılaştırdığımız zaman temel benzerlik: 1-parametreli hareketler için verilen pol noktalarına karşılık, 2-parametreli hareketlerden elde edilen 1-parametreli hareketler için her konumda pol noktalarının oluşturduğu pol doğrularının olmasıdır. Bu pol doğrusu kutup ekseni olarak adlandırılmıştır. W. Blaschke ve H. R. Müller ilk olarak doğru yoğunluğunun tanımını kullanarak kutup ekseninin yoğunluğunun hareket altında değişmediğini ispatlamıştır. Sonrasında ise 2-parametreli hareketi kutup ekseni ve kutup ekseninin yoğunluğunu baz alarak Öklid düzleminde aşağıdaki başlıklar altında incelemişlerdir:

- Hareketli koordinat sistemleri,
- Kutup eksen yoğunluğu sıfır olan hareketler,
- Belirlenen bir kutup ekseninin tanımladığı hareket,
- Değme dönüşümü,
- Hareket altında nokta yoğunluğu sıfır olan noktaların araştırılması (eğri çizen noktalar),
- Destek fonksiyonu,

- Kanonik izafe sistemi
- Hareketin dual hareketi,
- 2-parametreli hareketlerden özel 1-parametreli hareketler,
- Hareketin sınır çizgisi
- Büküm dairesi ve büküm polü.

1963 yılında W. Blaschke ve H. R. Müller'in[1] "Ebene Kinematik" kitabının Türkçe çevirisi Ankara Üniversitesi tarafından ders kitabı olarak yapılmıştır, [2]. Ancak, bu kitapta Almanca kitaptaki tüm başlıklar Türkçeye çevrilmemiştir. 1992 yılında F. Özer [4] tarafından W. Blaschke ve H.R. Müller'in Türkçe kitabından derleme ile yüksek lisans tezi yapılmıştır. 2000 yılında M. Kale [5] tarafından W. Blaschke ve H. R. Müller'in Türkçe kitabında verilen başlıklar için hareketin Lorentz düzlemindeki karşılıkları yüksek lisans tezi olarak çalışılmıştır. 2011 yılında ise F. Yeşiltaş [6] tarafından, W. Blaschke ve H. R. Müller' in [1] Almanca kitabında olup Türkçe kitapta [2] yer almayan bazı konular Türkçe literatüre kazandırılmıştır.

Öklid düzleminde W. Blaschke ve H. R. Müller'den sonra, 1979 yılında O. Bottema ve B. Roth [7] tarafından

$$\begin{cases} y_1 = x\cos\lambda - y\sin\lambda + l\mu \\ y_2 = x\sin\lambda + y\cos\lambda + b(\lambda,\mu) \end{cases}$$

kartezyen denklemleri ile "özel 2-parametreli düzlemsel hareketler" ve 1986 yılında M. M. Stanisic ve G. R. Pennock [8] tarafından

$$\begin{cases} y_1 = x\cos\theta(\lambda,\mu) - y\sin\theta(\lambda,\mu) + a(\lambda,\mu) \\ y_2 = x\sin\theta(\lambda,\mu) + y\cos\theta(\lambda,\mu) + b(\lambda,\mu) \end{cases}$$

kartezyen denklemleri ile "genel 2-parametreli düzlemsel hareketler" tanımlanmıştır. Eğer genel 2-parametreli düzlemsel hareketlerde $\theta(\lambda,\mu) = \lambda$ ve $a(\lambda,\mu) = l\mu$ alınırsa, özel 2-parametreli düzlemsel hareket elde edildiği kolaylıkla görülmektedir. Bu 2-parametreli düzlemsel hareketler genel olarak M_{II} ile gösterilmiştir. Eğer λ ve μ, t zaman parametresi olmak üzere, t parametresinin diferansiyellenebilir fonksiyonları olarak alınırsa, 2-parametreli hareketten 1-parametreli düzlemsel M_I hareketi elde edilmektedir.

2004 yılında O. Bottema ve B. Roth' a ait [7] kitabı ve M. M. Stanisic ve G. R. Pennock'ın [8] makalesi temel alınarak M. K. Karacan [9] tarafından doktora tezinde 2-parametreli genel ve özel hareketler Öklid ve Lorentz düzlemlerinde incelenmiştir.

Bu doktora tez çalışmasında, [9] Öklid düzleminde M_{II} hareketinden elde edilen M_I hareketleri için bahsedilen başlıca ifadeler aşağıda verilmiştir:

- Hareketli düzlemdeki $P=(x_P, y_P)$ pol noktalarının koordinatları

$$\begin{cases} x_P = \dfrac{\sin\theta(\lambda,\mu)\left(a_\lambda\dot{\lambda}+a_\mu\dot{\mu}\right)-\cos\theta(\lambda,\mu)\left(b_\lambda\dot{\lambda}+b_\mu\dot{\mu}\right)}{\left(\theta_\lambda\dot{\lambda}+\theta_\mu\dot{\mu}\right)}, \\ y_P = \dfrac{\cos\theta(\lambda,\mu)\left(a_\lambda\dot{\lambda}+a_\mu\dot{\mu}\right)+\sin\theta(\lambda,\mu)\left(b_\lambda\dot{\lambda}+b_\mu\dot{\mu}\right)}{\left(\theta_\lambda\dot{\lambda}+\theta_\mu\dot{\mu}\right)}, \end{cases}$$

  şeklindedir.

- Hareketli düzlemdeki $P=(x_P, y_P)$ pol noktaları $\forall(\lambda,\mu)$ konumunda

$$\begin{aligned} &\left[\cos\theta(\lambda,\mu)\,a_\mu\theta_\lambda+\sin\theta(\lambda,\mu)\,b_\mu\theta_\lambda-\cos\theta(\lambda,\mu)\,a_\lambda\theta_\mu-\sin\theta(\lambda,\mu)\,b_\lambda\theta_\mu\right]x_P \\ &\quad+\left[\sin\theta(\lambda,\mu)\,a_\lambda\theta_\mu-\cos\theta(\lambda,\mu)\,b_{_\lambda}\theta_\mu-\sin\theta(\lambda,\mu)\,a_\mu\theta_\lambda+\cos\theta(\lambda,\mu)\,b_\mu\theta_\lambda\right]y_P \\ &=a_\lambda b_\mu-a_\mu b_\lambda \end{aligned}$$

  doğrusu üzerinde ve $(\lambda,\mu)=(0,0)$ başlangıç konumunda

$$\left(a_\mu\theta_\lambda-a_\lambda\theta_\mu\right)x_P+\left(b_\mu\theta_\lambda-b_{_\lambda}\theta_\mu\right)y_P=a_\lambda b_\mu-a_\mu b_\lambda$$

  doğrusu üzerinde bulunurlar.

- Sabit düzlemdeki $P'=(x_P{}', y_P{}')$ pol noktalarının koordinatları

$$\begin{cases} x_P{}' = -\dfrac{b_\lambda\dot{\lambda}+b_\mu\dot{\mu}}{\theta_\lambda\dot{\lambda}+\theta_\mu\dot{\mu}}+a(\lambda,\mu), \\ y_P{}' = \dfrac{a_\lambda\dot{\lambda}+a_\mu\dot{\mu}}{\theta_\lambda\dot{\lambda}+\theta_\mu\dot{\mu}}+b(\lambda,\mu), \end{cases}$$

  şeklindedir.

- Sabit düzlemdeki $P'=(x_P{}', y_P{}')$ pol noktaları $\forall(\lambda,\mu)$ konumunda

$$\begin{aligned} \left(a_\mu\theta_\lambda-a_\lambda\theta_\mu\right)x_P{}'+\left(b_\mu\theta_\lambda-b_{_\lambda}\theta_\mu\right)y_P{}' &= b(\lambda,\mu)\left(-b_\mu\theta_\lambda-b_\lambda\theta_\mu\right)+a(\lambda,\mu)\left(a_\mu\theta_\lambda+a_\lambda\theta_\mu\right) \\ &\quad+a_\lambda b_\mu-a_\mu b_\lambda \end{aligned}$$

  doğrusu üzerinde ve $(\lambda,\mu)=(0,0)$ başlangıç konumunda

$$\left(a_\mu\theta_\lambda-a_\lambda\theta_\mu\right)x_P{}'+\left(b_\mu\theta_\lambda-b_{_\lambda}\theta_\mu\right)y_P{}'=a_\lambda b_\mu-a_\mu b_\lambda$$

doğrusu üzerinde bulunurlar.

- Sabit ve hareketli düzlemlerdeki pol doğruları $(\lambda,\mu) = (0,0)$ başlangıç konumunda çakışıktır.

- $(\lambda,\mu) = (0,0)$ başlangıç konumunda ve pol doğrusunun hareketli düzlemdeki y ekseni olması durumunda $\left(b_\lambda = b_\mu = 0\right)$, P pol noktasının koordinatları

$$\begin{cases} x_P = 0, \\ y_P = \dfrac{a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu}}{\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}} \end{cases}$$

ve hareketli düzlemdeki herhangi bir $B(x,y)$ noktasının $\mathbf{V_f} = \left(\dot{y}_1, \dot{y}_2\right)$ sürüklenme hız vektörü

$$\mathbf{V_f} = \left(\dot{y}_1, \dot{y}_2\right) = \left(-\left(\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}\right) y + a_\lambda \dot{\lambda} + a_\mu \dot{\mu}, \left(\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}\right) x\right)$$

şeklindedir.

- $(\lambda,\mu) = (0,0)$ başlangıç konumunda ve y ekseninin pol ekseni olması durumunda $\left(b_\lambda = b_\mu = 0\right)$, P pol noktasından B noktasına giden pol ışını, B noktasının $\mathbf{V_f}$ sürüklenme hız vektörüne diktir.

- $\mathbf{V_f}$ sürüklenme hız vektörlerinin boyları $\forall\,(\lambda,\mu)$ konumunda

$$\begin{aligned} \|\mathbf{V_f}\| &= \left|\theta_\lambda \dot{\lambda} + \theta_\mu \dot{\mu}\right| \|\mathbf{PB}\| \\ &= \left|\dot{\theta}\right| \|\mathbf{PB}\| \end{aligned}$$

şeklindedir.

- P pol noktasından noktasından B noktasına giden pol ışını ile $\overrightarrow{V_f}$ sürüklenme hız vektörü arasındaki açı ψ olmak üzere, $\forall\,(\lambda,\mu)$ konumunda $\psi(\lambda,\mu) = \frac{\pi}{2} + \theta(\lambda,\mu)$ bağıntısı vardır. Bu iki vektörün dik olması için $\theta(\lambda,\mu) = 2k\pi\,(k = 0,1,2,...)$ olmalıdır.

- Herhangi bir (x,y) noktasının, $\dot{\lambda}^2 + \dot{\mu}^2 = 1$ özel seçimi için $(\lambda,\mu) = (0,0)$ başlangıç konumunda ve pol doğrusunun y ekseni olması $\left(b_\lambda = b_\mu = 0\right)$ durumundaki hodografı bir elipstir ve hodografın oluşturduğu elipsin alanı sıfırdır.

- x ekseni üzerinde bulunan simetrik iki noktanın, $\dot{\lambda}^2 + \dot{\mu}^2 = 1$ özel seçimi için $(\lambda,\mu) = (0,0)$ başlangıç konumunda ve pol doğrusunun y ekseni olması $\left(b_\lambda = b_\mu = 0\right)$ durumundaki hodografları aynı bir elipstir.

- Hareketli düzlemdeki $Q=(x_{iP},y_{iP})$ ivme pol noktalarının koordinatları

$$\begin{cases} x_{iP}=\dfrac{\left(\ddot{a}\left(\ddot{\theta}\,\sin\theta(\lambda,\mu)+\dot{\theta}^{\,2}\cos\theta(\lambda,\mu)\right)+\ddot{b}\left(-\ddot{\theta}\,\cos\theta(\lambda,\mu)+\dot{\theta}^{\,2}\sin\theta(\lambda,\mu)\right)\right)}{\dot{\theta}^{\,4}+\ddot{\theta}^{\,2}}, \\ y_{iP}=\dfrac{\left(\ddot{a}\left(\ddot{\theta}\,\cos\theta(\lambda,\mu)-\dot{\theta}^{\,2}\sin\theta(\lambda,\mu)\right)+\ddot{b}\left(\ddot{\theta}\,\sin\theta(\lambda,\mu)+\dot{\theta}^{\,2}\cos\theta(\lambda,\mu)\right)\right)}{\dot{\theta}^{\,4}+\ddot{\theta}^{\,2}}, \end{cases}$$

  şeklindedir.

- İvme polleri, $(\lambda,\mu)=(0,0)$ başlangıç konumunda ve $\dot{\lambda}=\dot{\mu}=0$ olması halinde, sabit ve hareketli düzlemin pol doğrusu ile çakışıktır.

Aynı zamanda bu tezden M. K. Karacan ve danışmanı Y. Yaylı tarafından [10–13] makaleleri üretilmiştir. M. K. Karacan ve L. Kula tarafından [14] makalesi yayınlanmıştır. 2013 yılında M. Çelik [15] tarafından, M. K. Karacan [9] tezi esas alınarak Öklid düzleminde 2-parametreli düzlemsel hareketlerin homotetik karşılıkları verilmiştir. 2013 yılında D. Ünal, M. Çelik ve M. A. Güngör [16] tarafından kompleks düzlemde 2-parametreli hareket, D. Ünal, M. Çelik ve M. A. Güngör [17] tarafından kompleks düzlemde 2-parametreli homotetik hareket ve M. Çelik ve M. A. Güngör [18] tarafından hiperbolik 2-parametreli düzlemsel hareket verilmiştir. 2014 yılında M. Çelik, D. Ünal ve M. A. Güngör [19] tarafından Lorentz düzleminde 2-parametreli homotetik hareket, M. Çelik ve M. A. Güngör [20] tarafından hiperbolik 2-parametreli homotetik hareket ve M. Çelik ve M. A. Güngör [21] tarafından Galile düzleminde 2-parametreli hareket verilmiştir. [7, 21] çalışmalarının hiçbiri W. Blaschke ve H. R. Müller'in [1] bakış açısı ile incelenmemiştir. Bu çalışmalardan farklı olarak, bu tezde Lorentz düzleminde W. Blaschke ve H. R. Müller'in [1] bakış açısı temel alınmıştır.

1.2 Tezin Amacı

Literatür özeti incelendiğinde 2-parametreli düzlemsel hareket W. Blaschke ve H. R. Müller [1] tarafından, O. Bottema ve B. Roth [7] tarafından ve M. M. Stanisic ve G. R. Pennock [8] tarafından tanımlanmıştır. M. M. Stanisic ve G. R. Pennock'in [8] makalesinde tanımlanan hareket O. Bottema ve B. Roth'un [7] kitabında verilen hareketin genel halidir. Bu nedenle 2-parametreli düzlemsel hareketin aslında iki farklı bakış açısıyla incelendiğini söylenebilir:

W. Blaschke ve H. R. Müller [1] kitabında; W. Blaschke [22] tarafından verilen Öklid düzleminde nokta ve doğru yoğunluğu kavramından faydalanarak 2-parametreli hareketi, 2-parametreli hareketten elde edilen 1-parametreli hareketler, kutup eksenleri, eğri çizici noktalar, nokta yoğunluğu, doğru yoğunluğu, yoğunluk

değişmezliği, doğru dönüşümü, destek fonksiyonları ve esas 1-parametreli hareketi ile incelemiştir. Bu kavramların geometrik yorumlarından ve bu kavramlardaki değişmelerin hareketi nasıl etkilediğinden bahsedilmiştir.

O. Bottema ve B. Roth [7] tarafından ve M. M. Stanisic ve G. R. Pennock [8] tarafından ise hareket; 2-parametreli hareketlerden elde edilen 1-parametreli hareketlerin sürüklenme hızı, pol doğrusu, hodograph eğrisi ve ivme polü ile incelenmiştir.

Ayrıca yine literatür özeti incelendiğinde W. Blaschke ve H. R. Müller'in [1] kitabı esas alınarak Lorentz düzleminde 2-parametreli hareketler **M. Kale [5] tarafından verilmiştir. Fakat bu tez çalışmasında Lorentz düzlemindeki konum vektörü hiperbolik bir büyüklük ile verilmesi gerekirken kompleks bir büyüklük ile ifade edilmiş, kutup ekseninin Hesse formu denklemi için timelike veya spacelike olma durumu ihmal edilmiş, kullanılan kutup ekseni spacelike olmasına rağmen teğet doğrultusu timelike olarak alınmış ve Lorentz düzleminde diklik açısı Öklid düzleminde olduğu gibi $\frac{\pi}{2}$ olarak alınmıştır.**

Bu tez çalışmasının amacı, G. S. Birman [23] tarafından tanımlanan Lorentz düzleminde nokta ve doğru yoğunluğu kavramlarını kullanarak W. Blaschke ve H. R. Müller'in [1] kitabında verilen Öklid düzleminde 2-parametreli düzlemsel hareketlerin Lorentz düzlemindeki karşılıklarını; hareketten elde edilen 1-parametreli Lorentz hareketleri, non-null kutup eksenleri, eğri çizici noktalar, nokta yoğunluğu, doğru yoğunluğu, yoğunluk değişmezliği, doğru dönüşümü, destek fonksiyonları ve esas 1-parametreli hareketi yardımıyla incelemek ve bu kavramların düzlemsel hareketi nasıl etkilediğini geometrik olarak açıklamaktır. Böylelikle, Lorentz düzleminde 2-parametreli düzlemsel hareketlerin incelenmesi literatüre kazandırılacak hatta bu konudaki M. Kale'in [5] çalışmasındaki bilgiler revize edilecektir. Tezin bir diğer amacı, G. S. Birman'ın [23] çalışmasını temel alarak Lorentz düzleminde nokta ve doğru kümelerinin yoğunlukları ile ilgili yeni özel durumları incelemek ve Lorentz düzleminde 2-parametreli hareket altında nokta ve doğru kümelerinin yoğunluğunu tanımlayarak ve nokta ve doğru kümelerinin yoğunlukları ile ilgili özel durumları vermektir.

1.3 Bulgular

Lorentz düzleminde 2-parametreli hareketin hareketli koordinat sistemi, non-null kutup ekseni, non-null kutup eksen dönüşümünün yoğunluk değişmezliği, eğri elementi çizen noktaları, non-null kutup eksen yoğunluğu sıfır olan hareketler, destek fonksiyonu kavramları verilerek geometrik olarak incelenmesi tezin literatüre kazandırdığı orijinal katkıdır. Ayrıca, M. Kale [5] tarafından literatüre kazandırılan

bilgiler revize edilmiştir.

Lorentz düzleminde nokta ve doğru kümelerinin yoğunlukları ile ilgili yeni özel durumlar verilmiş ve Lorentz düzleminde 2-parametreli hareket altında nokta ve doğru kümelerinin yoğunlukları tanımlanarak ve nokta ve doğru kümelerinin yoğunlukları ile ilgili özel durumlar incelenmiştir.

2
Temel Kavramlar

Bu bölümde ilk olarak Öklid ve Lorentz düzlemlerinde nokta ve doğru kümelerinin yoğunlukları tanımlanacaktır, [22–24]. Sonrasında, Öklid düzleminde 2-parametreli hareket tanımlanarak ve bu hareketin hareketli koordinat sistemleri ve kutup ekseni elde edilecektir, [1, 2].

2.1 Öklid Düzleminde Nokta ve Doğru Kümelerinin Yoğunluğu

Tanım 2.1. Öklid düzleminde $X = (x, y)$ ile verilen bir nokta kümesinin yoğunluğu

$$dX = dx \wedge dy \tag{2.1}$$

ile tanımlanır, [22].

Tanım 2.2. Öklid düzleminde hareketli bir l doğrusu; üzerindeki herhangi bir $X = (x, y)$ noktası ve kendisine dik olan $n = (\nu_1, \nu_2) = (\cos\psi, \sin\psi)$ birim normal vektörü ile verilsin. Bu doğru kümesinin ***Hesse formu***

$$x\cos\psi + y\sin\psi = h \tag{2.2}$$

olmak üzere ***Öklid düzlemindeki yoğunluğu***

$$dl = (dx\cos\psi + dy\sin\psi) \wedge d\psi$$

alterne çarpımı ile tanımlanır, [22].

Teorem 2.1. *Öklid düzlemindeki bir doğru kümesinin yoğunluğu, üzerindeki nokta seçiminden bağımsızdır, [22].*

İspat. l hareketli doğrusu üzerinde $X = (x_1, x_2)$ noktasından farklı bir $\overline{X} = (\overline{x_1}, \overline{x_2})$ noktasını ele alalım. Doğru kümesinin normal vektörü $n = (\nu_1, \nu_2) = (\cos\psi, \sin\psi)$ olduğundan doğrultman vektörü de $u = (-\sin\psi, \cos\psi) = (-\nu_2, \nu_1)$ şeklindedir.

Dolayısıyla bu iki nokta arasındaki uzaklık λ olmak üzere $\overline{X} = (\overline{x_1}, \overline{x_2})$ noktasının koordinatları

$$\begin{cases} \overline{x_1} = x_1 - \lambda v_2, \\ \overline{x_2} = x_2 + \lambda v_1 \end{cases}$$

olarak bulunur ve bu denklemlerin diferansiyeli alınarak

$$\begin{cases} d\overline{x_1} = dx_1 - d\lambda v_2 - \lambda dv_2, \\ d\overline{x_2} = dx_2 + d\lambda v_1 + \lambda dv_1 \end{cases}$$

elde edilir. Aynı doğru üzerindeki noktaların normal vektörleri aynı olduğundan

$$\begin{aligned} d\overline{x_1}v_1 + d\overline{x_2}v_2 &= (dx_1 - d\lambda v_2 - \lambda dv_2)\, v_1 + (dx_2 + d\lambda v_1 + \lambda dv_1)\, v_2 \\ &= dx_1 v_1 + dx_2 v_2 - \lambda\,(v_1 dv_2 - v_2 dv_1) \end{aligned}$$

yazılır. Bu son eşitlikte $(v_1 dv_2 - v_2 dv_1)$ ifadesinde v_1, v_2, dv_1 ve dv_2 değerlerinin eşitleri yerine yazılırsa

$$v_1 dv_2 - v_2 dv_1 = d\psi \left(\cos^2\psi + \sin^2\psi\right) = d\psi$$

elde edilir. Böylece

$$d\overline{x_1}v_1 + d\overline{x_2}v_2 = dx_1 v_1 + dx_2 v_2 - \lambda d\psi$$

denklemi kullanılarak $\overline{X} = (\overline{x_1}, \overline{x_2})$ noktası için doğrunun yoğunluğu

$$\begin{aligned} dl &= (d\overline{x_1}v_1 + d\overline{x_2}v_2) \wedge d\psi = (dx_1 v_1 + dx_2 v_2 - \lambda d\psi) \wedge d\psi = (dx_1 v_1 + dx_2 v_2) \wedge d\psi \\ &= (dx_1 \cos\psi + dx_2 \sin\psi) \wedge d\psi \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla doğru kümesinin yoğunluğu doğru üzerindeki noktanın seçiminden bağımsızdır. ■

Yorum (İrdeleme). Bir doğru kümesinin yoğunluğunu farklı şekillerde ifade edebiliriz:

i. l doğru kümesinin orijine uzaklık fonksiyonu h ve orijinden doğruya inilen dikme ayağı $H = (h_1, h_2)$ olsun. Bu durumunda l doğru kümesinin Hesse formundaki denkleminden diferansiyelinin alınması ile elde edilen

$$dx_1 \cos\psi + dx_2 \sin\psi + (-x_1 \sin\psi + x_2 \cos\psi)\, d\psi = dh$$

denklemi kullanılarak l doğru kümesinin yoğunluğu

$$dl = dh \wedge d\psi$$

olarak elde edilir, [22].

ii. Orijinden l doğru kümesine inilen dikme ayağının koordinatları $H=(h_1,h_2)=(hv_1,hv_2)$ olmak üzere H noktasının yoğunluğunu

$$\begin{cases} dh_1 = dhv_1 + hdv_1, \\ dh_2 = dhv_2 + hdv_2 \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} dv_1 = -\sin\psi d\psi, \\ dv_2 = \cos\psi d\psi \end{cases}$$

olmak üzere $dv_1 \wedge dv_2 = 0$ olduğundan

$$dH = dh_1 \wedge dh_2 = hdh(v_1 dv_2 - v_2 dv_1) = h(dh \wedge d\psi)$$

şeklindedir. H noktasının yoğunluğu yardımıyla, l doğru kümesinin yoğunluğu

$$dl = \frac{dH}{h}$$

olarak elde edilir, [24].

iii. $xv_1 + yv_2 = h$ denklemi ile verilen l doğru kümesinin eksenleri kestiği noktaların koordinatları $A=(a_1,0)=\left(\frac{h}{v_1},0\right)$ ve $B=(0,a_2)=\left(0,\frac{h}{v_2}\right)$ olmak üzere doğru üzerindeki noktaların seçimine göre doğru yoğunluğu değişmediğinden

$$dl = da_1 \wedge dv_2 = -da_2 \wedge dv_1$$

elde edilir, [22].

iv. $x\cos\psi + y\sin\psi = h$ denklemi ile verilen l doğru kümesinin eksenleri kestiği noktaların koordinatları $A=(x,0)=\left(\frac{h}{\cos\psi},0\right)$ ve $B=(0,y)=\left(0,\frac{h}{\sin\psi}\right)$ olmak üzere $h = xy\left(x^2+y^2\right)^{-(1/2)}$ ve $\psi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ yazılabilir. Buradan

$$dh = \frac{(x+y)}{(x^2+y^2)^{1/2}} - \frac{xy(x+y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

ve

$$d\psi = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$$

olmak üzere

$$dl = dh \wedge d\psi = \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} dx \wedge dy$$

elde edilir, [24].

v. $ux + vy + 1 = 0$ denklemi ile verilen l doğru kümesinin eksenleri kestiği noktaların koordinatları $A = (x, 0) = \left(-\frac{1}{u}, 0\right)$ ve $B = (0, y) = \left(0, -\frac{1}{v}\right)$ olmak üzere iv özelliği kullanılarak

$$dl = \frac{du \wedge dv}{\left(u^2 + v^2\right)^{3/2}}$$

elde edilir, [24].

vi. l doğru kümesi üzerinde birbirinden λ uzaklıkta iki nokta $X = (x_1, x_2)$ ve $\overline{X} = (\overline{x_1}, \overline{x_2})$ için koordinatları arasındaki ilişki

$$\begin{cases} \overline{x_1} = x_1 - \lambda \sin\psi, \\ \overline{x_2} = x_2 + \lambda \cos\psi \end{cases}$$

şeklindedir. Bu ifadenin diferansiyeli

$$\begin{cases} d\overline{x_1} = dx_1 - d\lambda \sin\psi - \lambda \cos\psi d\psi, \\ d\overline{x_2} = dx_2 + d\lambda \cos\psi - \lambda \sin\psi d\psi \end{cases}$$

olmak üzere

$$d\overline{x_1} \cos\psi + d\overline{x_2} \sin\psi = dx_1 \cos\psi + dx_2 \sin\psi - \lambda d\psi$$

eşitliğini her iki tarafını soldan $(dx_1 \cos\psi + dx_2 \sin\psi)$ ile alterne çarparsak l doğru kümesinin yoğunluğu

$$dl = \frac{(dx_1 \cos\psi + dx_2 \sin\psi) \wedge (d\overline{x_1} \cos\psi + d\overline{x_2} \sin\psi)}{\lambda}$$

olarak elde edilir, [22].

vii. C diferansiyellenebilir bir eğri olsun ve s eğrinin yay parametresi olmak üzere eğrinin denklemi

$$x_1 = x_1(s), \;\; x_2 = x_2(s)$$

ile verilsin. l doğru kümesi de C eğrisini bir (x_1, x_2) noktasında kesen ve eğrinin teğeti ile θ açısı yapan bir doğru kümesi olsun. Bu durumda l doğru kümesini; s ve θ ile ifade edilebilir. Bu nedenle l doğru kümesinin dl yoğunluğunu bu değişkenler cinsinden elde edebiliriz. l doğru kümesinin x ekseni ile yaptığı açı ϕ olmak üzere $\psi = (\theta + \phi) - \frac{\pi}{2}$ yazılabilir. $h = x_1 \cos\psi + x_2 \sin\psi$ için

$$dh = \cos\psi dx_1 + \sin\psi dx_2 + (-x_1 \sin\psi + x_2 \cos\psi)\, d\psi$$

yazılır.

Doğru ve eğrinin kesişim noktası için $dx_1 = \cos\phi ds$ ve $dx_2 = \sin\phi ds$ yazılabileceğinden $dh = \cos(\psi-\phi)ds + (-x_1\sin\psi + x_2\cos\psi)d\psi$ ifadesi kullanılarak

$$dl = dh \wedge d\psi = \cos(\psi-\phi)ds \wedge d\psi$$

elde edilir. $\psi = (\theta+\phi) - \frac{\pi}{2}$ ifadesinin diferansiyeli alınırsa $d\psi = d\theta + \phi' ds$ bulunur ve bu ifade dl eşitliğinde yerine yazılırsa

$$dl = |\sin\theta|\, ds \wedge d\theta$$

elde edilir, [22].

2.2 Lorentz Düzleminde Nokta ve Doğru Kümelerinin Yoğunluğu

Tanım 2.3. Lorentz düzleminde[1] $X = (x, y)$ ile verilen hareketli bir noktanın ***nokta yoğunluğu***

$$dX = dx \wedge dy \tag{2.3}$$

ile tanımlanır, [23].

Tanım 2.4. $x\cosh\Psi - y\sinh\Psi = p$ denklemi ile verilen l_t timelike[2] doğru kümesinin yoğunluğu

$$dl_t = dp \wedge d\Psi = (dx\cosh\Psi - dy\sinh\Psi) \wedge d\Psi$$

ve $x\sinh\psi - y\cosh\psi = p$ denklemi ile verilen l_s spacelike doğru kümesinin yoğunluğu

$$dl_s = dp \wedge d\Psi = (dx\sinh\Psi - dy\cosh\Psi) \wedge d\Psi$$

ile tanımlanır, böylece Lorentz düzleminde non-null bir ***doğru kümesinin yoğunluğu***

$$dl = dp \wedge d\Psi$$

şeklinde elde edilir, [23].

Yorum (İrdeleme). Lorentz düzlemindeki de doğru kümesinin yoğunluğunu farklı şekillerde ifade edebiliriz, [23]:

l_t timelike doğru kümesi x eksenini a noktasında ve y eksenini b noktasında

[1] $\mathbb{R}^2$ düzlemine $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}$ için $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_L = x_1y_1 - x_2y_2 \in \mathbb{R}$ iç çarpım fonksiyonu ile birlikte **Lorentz düzlemi** adı verilir ve genellikle $\mathbb{R}^2_1$ veya $\mathbb{L}^2$ ile gösterilir, [25].

[2] Lorentz düzleminde doğrultman vektörü timelike/spacelike olan doğruya **timelike/spacelike doğru** denir. Yani, doğrunun doğrultman vektörü $\mathbf{u}$ olmak üzere $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_L < 0$ ise timelike doğru, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_L \geq 0$ ise spacelike doğru adı verilir, [23].

keserse, l_t doğru kümesinin $x\cosh\Psi - y\sinh\Psi = p$ Hesse formundaki denkleminden $a = \frac{p}{\cosh\Psi}$, $b = -\frac{p}{\sinh\Psi}$ elde edilir. Buradan $p = -\frac{ab}{(b^2-a^2)^{1/2}}$ ve $\Psi = -\text{arctanh}\,\frac{a}{b}$ olmak üzere $dp = \frac{b^3da - a^3db}{(b^2-a^2)^{3/2}}$ ve $d\Psi = \frac{bda-adb}{(b^2-a^2)}$ yazılabileceğinden

$$dl_t = \frac{a\,b\,da\,db}{(b^2-a^2)^{3/2}}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde l_s spacelike doğru kümesi x eksenini a noktasında ve y eksenini b noktasında kessin. Bu durumda l_s doğru kümesinin yoğunluğu

$$dl_s = \frac{a\,b\,da\,db}{(b^2-a^2)^{3/2}}$$

şeklindedir. Böylece non-null doğru kümelerinin yoğunluğu eksenleri kestiği noktalar cinsinden

$$dl = \frac{a\,b\,da\,db}{(b^2-a^2)^{3/2}}$$

olarak verilebilir. Bu ifadeye bakılarak $|a| < |b|$ ise doğru ***timelike*** veya $|a| > |b|$ ise doğru ***spacelike***dır denir.

2.2.1 Lorentz Düzleminde Nokta Çiftlerinin Yoğunluğu

Tanım 2.5. L düzleminde $X = (x_1, y_1)$ ve $Y = (x_2, y_2)$ nokta kümelerinden geçen l doğru kümesi için X ve Y nokta çiftlerinin yoğunluğu

$$dX \wedge dY = dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2 \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır.

Lorentz düzleminde nokta çiftlerinin yoğunlğu, noktaların bulunduğu non-null doğru kümesinin timelike veya spacelike olma durumuna göre ayrı ayrı incelenirse:

i. Nokta kümelerinin bulunduğu doğru kümesi timelike ise

Kabul edelim ki, $l = l_t$, yani doğru kümesi timelike olsun. Orijinden doğru kümesine inilen dikmenin doğru kümesini kestiği nokta kümesi H olmak üzere X ve Y noktalarının H noktasından uzaklıkları, sırasıyla, λ_1 ve λ_2 olsun. l_t timelike doğru kümesinin birim doğrultman vektörü $\mathbf{u} = (\sinh\psi, \cosh\psi)$ olmak üzere X ve Y noktalarının koordinatları için

$$x_i = p\cosh\Psi + \lambda_i\sinh\Psi\ , y_i = p\sinh\Psi + \lambda_i\cosh\Psi \quad (i = 1,2) \tag{2.5}$$

yazılabilir. (2.5) eşitliklerinden diferansiyel alındığında

$$\begin{cases} dx_i = \cosh\Psi dp + (p\sinh\Psi + \lambda_i\cosh\Psi)\,d\Psi + \sinh\Psi d\lambda_i \\ dy_i = \sinh\Psi dp + (p\cosh\Psi + \lambda_i\sinh\Psi)\,d\Psi + \cosh\Psi d\lambda_i \end{cases} \tag{2.6}$$

elde edilir. (2.6) eşitliklerinden X ve Y nokta kümelerinin yoğunlukları, sırasıyla

$$\begin{cases} dX = dx_1 \wedge dy_1 = p\,dp \wedge d\Psi + dp \wedge d\lambda_1 + \lambda_1 d\Psi \wedge d\lambda_1 \\ dY = dx_2 \wedge dy_2 = p\,dp \wedge d\Psi + dp \wedge d\lambda_2 + \lambda_2 d\Psi \wedge d\lambda_2 \end{cases} \tag{2.7}$$

olmak üzere

$$dX \wedge dY = (\lambda_1 - \lambda_2)\,dp \wedge d\Psi \wedge d\lambda_1 \wedge d\lambda_2 \tag{2.8}$$

bulunur. l_t timelike doğru kümesinin yoğunluğu $dp \wedge d\Psi = dl_t$ olduğundan (2.8) eşitliği için

$$dX \wedge dY = |\lambda_1 - \lambda_2|\,dl_t \wedge d\lambda_1 \wedge d\lambda_2 \tag{2.9}$$

elde edilir. Tüm yoğunluklar pozitif kabul edildiğinden $\lambda_1 - \lambda_2$ ifadesinin mutlak değeri alınmıştır, [23].

ii. Nokta kümelerinin bulunduğu doğru kümesi spacelike ise

Kabul edelim ki, l_{lS}, yani doğru kümesi spacelike olsun. Orijinden doğru kümesine inilen dikmenin doğru kümesini kestiği nokta kümesi H olmak üzere X ve Y nokta kümelerinin H noktasından uzaklıkları, sırasıyla, λ_1 ve λ_2 olmak üzere durum i. olduğu gibi benzer mantıkla X ve Y nokta kümesi çiftlerinin yoğunluğu için

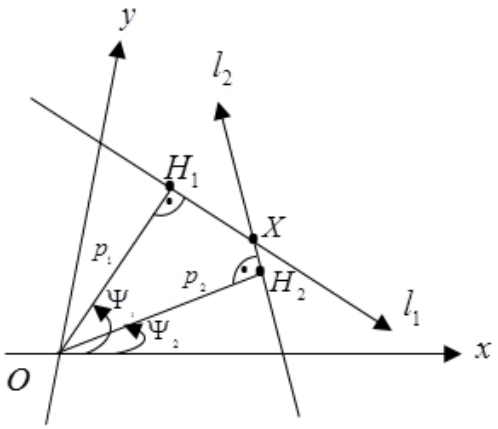
$$dX \wedge dY = |\lambda_1 - \lambda_2|\,dl_s \wedge d\lambda_1 \wedge d\lambda_2 \tag{2.10}$$

elde edilir. Tüm yoğunluklar pozitif kabul edildiğinden $\lambda_1 - \lambda_2$ ifadesinin mutlak değeri alınmıştır, [23].

Yorum. Lorentz düzlemindeki, (2.9) ve (2.10) denklemleri Öklid düzlemindeki nokta kümelerinin yoğunluğu denklemiyle aynıdır. Fakat ölçüleri farklıdır, [23].

2.2.2 Lorentz Düzleminde Kesişen Non-Null Doğru Çiftlerinin Yoğunluğu

Burada, L Lorentz düzleminde kesişen non-null doğru kümesi çiftlerinin, Şekil 2.1, yoğunluklarının alterne çarpımı ifade edilecektir.



Şekil 2.1 Lorentz düzleminde kesişen non-null doğru kümeleri

i. Kesişen doğru kümeleri timelike ise

Lorentz düzleminde kesişen iki timelike doğru kümesi l_{t_1} ve l_{t_2} olmak üzere bu doğru kümeleri, sırasıyla,

$$\begin{cases} x\cosh\Psi_1 - y\sinh\Psi_1 = p_1, \\ x\cosh\Psi_2 - y\sinh\Psi_2 = p_2 \end{cases} \tag{2.11}$$

Hesse formunda verilsin. l_{t_1} ve l_{t_2} doğru kümelerinin x ekseni ile yaptığı açılar, sırasıyla, Φ_1 ve Φ_2 olmak üzere

$$\Phi_1 + a = \Psi_1, \quad \Phi_2 + a = \Psi_2, \quad a \in \mathbb{R} \tag{2.12}$$

yazılabilir. Bu durumda l_{t_1} ve l_{t_2} doğru kümelerinin yoğunluklarının alterne çarpımının

$$dl_{t_1} \wedge dl_{t_2} = dp_1 \wedge d\Psi_1 \wedge dp_2 \wedge d\Psi_2 \tag{2.13}$$

ifadesi Φ_1 ve Φ_2 açıları yardımıyla da ifade edilebilir. (2.12) eşitliklerinden diferansiyel alınırsa

$$d\Phi_1 = d\Psi_1, \ d\Phi_2 = d\Psi_2 \tag{2.14}$$

olmak üzere (2.11) denklemlerinde (2.12) eşitliklerini kullanılırsa,

$$\begin{cases} x\cosh(\Phi_1 - a) - y\sinh(\Phi_1 - a) = p_1, \\ x\cosh(\Phi_2 - a) - y\sinh(\Phi_2 - a) = p_2 \end{cases} \tag{2.15}$$

elde edilir. Buradan l_{t_1} ve l_{t_2} doğru kümelerinin yoğunlukları için, sırasıyla,

$$\begin{cases} dl_{t_1} = dp_1 \wedge d\Psi_1 = dp_1 \wedge d\Phi_1 = (\cosh(\Phi_1 - a)\,dx - \sinh(\Phi_1 - a)\,dy) \wedge d\Phi_1, \\ dl_{t_2} = dp_2 \wedge d\Psi_2 = dp_2 \wedge d\Phi_2 = (\cosh(\Phi_2 - a)\,dx - \sinh(\Phi_2 - a)\,dy) \wedge d\Phi_2 \end{cases} \tag{2.16}$$

bulunur. (2.16) eşitliklerinden dl_{t_1} ve dl_{t_2} yoğunlukları ve (2.14) eşitlikleri (2.13) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$dl_{t_1} \wedge dl_{t_2} = |\sinh(\Phi_2 - \Phi_1)|\,dx \wedge dy \wedge d\Phi_1 \wedge d\Phi_2 = |\sinh(\Phi_2 - \Phi_1)|\,dX \wedge d\Phi_1 \wedge d\Phi_2 \tag{2.17}$$

elde edilir. Burada $X = (x, y)$, doğru kümelerinin kesişme noktasıdır. $\Phi_2 - \Phi_1 = \omega$ ise kesişen iki doğru kümesi arasındaki açıdır, [23].

ii. Kesişen doğru kümeleri spacelike ise

Lorentz düzleminde birbirini kesen iki spacelike doğru kümesi l_{s_1} ve l_{s_2} olmak üzere bu doğru kümeleri, sırasıyla,

$$\begin{cases} x \sinh\Psi_1 - y \cosh\Psi_1 = p_1, \\ x \sinh\Psi_2 - y \cosh\Psi_2 = p_2 \end{cases} \tag{2.18}$$

Hesse formunda verilsin. l_{s_1} ve l_{s_2} doğru kümelerinin x ekseni ile yaptığı açılar, sırasıyla, Φ_1 ve Φ_2 olmak üzere

$$\Phi_1 + a = \Psi_1, \quad \Phi_2 + a = \Psi_2, \quad a \in \mathbb{R} \tag{2.19}$$

yazılabilir. Bu durumda l_{s_1} ve l_{s_2} doğru kümelerinin yoğunluklarının alterne çarpımı için

$$dl_{s_1} \wedge dl_{s_2} = dp_1 \wedge d\Psi_1 \wedge dp_2 \wedge d\Psi_2 \tag{2.20}$$

veya benzer şekilde

$$dl_{s_1} \wedge dl_{s_2} = |\sinh(\Phi_1 - \Phi_2)|\,dX \wedge d\Phi_1 \wedge d\Phi_2 \tag{2.21}$$

elde edilir. Burada $X = (x, y)$ noktası, doğru kümelerinin kesişme noktasıdır. $\Phi_1 - \Phi_2 = \omega$ ise kesişen iki doğru kümesi arasındaki açıdır, [23].

iii. Kesişen doğru kümelerinin biri timelike diğeri spacelike ise

Lorentz düzleminde birbirini kesen iki doğru kümesinden biri timelike l_t diğeri spacelike l_s olmak üzere bu doğrular, sırasıyla,

$$\begin{cases} x \cosh\Psi_1 - y \sinh\Psi_1 = p_1, \\ x \sinh\Psi_2 - y \cosh\Psi_2 = p_2 \end{cases} \tag{2.22}$$

Hesse formunda verilsin. l_t ve l_s doğru kümelerinin x ekseni ile yaptığı açılar, sırasıyla, Φ_1 ve Φ_2 olmak üzere

$$\Phi_1 + a = \Psi_1, \quad \Phi_2 + a = \Psi_2, \quad a \in \mathbb{R} \tag{2.23}$$

yazılabilir. Bu durumda l_t ve l_s doğru kümelerinin yoğunluklarının

$$dl_t \wedge dl_s = dp_1 \wedge d\Psi_1 \wedge dp_2 \wedge d\Psi_2 \tag{2.24}$$

alterne çarpımı Φ_1 ve Φ_2 açıları yardımıyla ifade edilebilir.

(2.23) eşitliklerinden diferansiyel alırsak,

$$d\Phi_1 = d\Psi_1, \ d\Phi_2 = d\Psi_2 \tag{2.25}$$

olmak üzere (2.22) denklemlerinde (2.23) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{cases} x\cosh(\Phi_1 - a) - y\sinh(\Phi_1 - a) = p_1, \\ x\sinh(\Phi_2 - a) - y\cosh(\Phi_2 - a) = p_2 \end{cases} \tag{2.26}$$

yazılabilir. Buradan l_t ve l_s doğru kümelerinin yoğunlukları için

$$\begin{cases} dl_t = dp_1 \wedge d\Psi_1 = dp_1 \wedge d\Phi_1 = (\cosh(\Phi_1 - a)\,dx - \sinh(\Phi_1 - a)\,dy) \wedge d\Phi_1, \\ dl_s = dp_2 \wedge d\Psi_2 = dp_2 \wedge d\Phi_2 = (\sinh(\Phi_2 - a)\,dx - \cosh(\Phi_2 - a)\,dy) \wedge d\Phi_2 \end{cases} \tag{2.27}$$

bulunur. (2.27) eşitliklerinden dl_t ve dl_s değerleri ve (2.25) eşitlikleri (2.24) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$dl_t \wedge dl_s = \cosh(\Phi_1 - \Phi_2)\,dX \wedge d\Phi_1 \wedge d\Phi_2 \tag{2.28}$$

elde edilir. Burada $X = (x, y)$, doğru kümelerinin kesişme noktasıdır. $\Phi_1 - \Phi_2 = \omega$ ise kesişen iki doğru kümesi arasındaki açıdır.

2.3 Öklid Düzleminde 2-Parametreli Hareket

Burada Öklid düzleminde 1-parametreli hareketin kompleks ifadesinden yola çıkılarak 2-parametreli hareket tanımlanacaktır, [1, 2]:

Hatırlatma

$E = E' = E^2$ Öklid düzlemlerinde, sırasıyla $\{O; \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ ve $\left\{O'; \mathbf{e_1'}, \mathbf{e_2'}\right\}$ dik koordinat

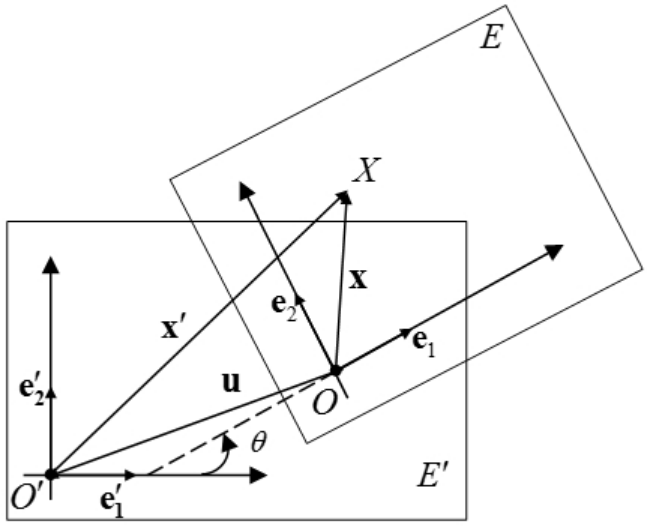
sistemlerini tespit edelim. Eğer $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$ için, $\mathbf{e_1} = \mathbf{e_1}(t)$ ve $\mathbf{e_2} = \mathbf{e_2}(t)$ sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar ise $\{O; \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ koordinat sisteminin, $\left\{O'; \mathbf{e_1'}, \mathbf{e_2'}\right\}$ koordinat sistemine göre hareket ettiği kabul edilir. Bundan dolayı $\{O; \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ koordinat sisteminin bağlı olduğu E düzlemi, $\left\{O'; \mathbf{e_1'}, \mathbf{e_2'}\right\}$ koordinat siteminin bağlı olduğu E' düzlemi üzerinde hareket eder. $\mathbf{e_1}$ ile $\mathbf{e_1'}$ arasındaki açıya ***dönme açısı*** denir ve θ ile gösterilir. Hareketin $\mathbf{OO'} = \mathbf{u}$ öteleme vektörü $\{O; \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ dik çatısına göre $\mathbf{OO'} = \mathbf{u} = u_1\mathbf{e_1} + u_2\mathbf{e_2}$ şeklinde yazılabilir. Eğer,

$$u_1 = u_1(t),\ u_2 = u_2(t),\ \theta = \theta(t)$$

fonksiyonları $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$ parametresinin sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonları ise, E ***düzleminin*** E' ***düzlemine göre hareketine 1-parametreli düzlemsel hareket*** denir ve $B = E/E'$ ile gösterilir. E düzlemine ***hareketli düzlem*** , $\{O; \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ çatısına ***hareketli çatı***, E' düzlemine ***sabit düzlem*** ve $\left\{O'; \mathbf{e_1'}, \mathbf{e_2'}\right\}$ çatısına da ***sabit çatı*** denir. Buradaki "t" parametresi genel olarak 'zaman' parametresi olarak alınır. 1-parametreli düzlemsel hareketinin kartezyen denklemleri

$$\begin{cases} x' = (x\cos\theta - y\sin\theta) + (-u_1\cos\theta + u_2\sin\theta), \\ y' = (x\sin\theta + y\cos\theta) + (-u_1\sin\theta - u_2\cos\theta) \end{cases} \tag{2.29}$$

şeklindedir. 1-parametreli düzlemsel hareket matris formunda $X' = AX + C$ şeklinde de yazılabilir, Şekil 2.1, [2].



Şekil 2.2 Öklid düzleminde hareket

$\mathbf{OO'} = \mathbf{u}$ öteleme vektörünün $\mathbf{u} = u_1 + iu_2$ kompleks ifadesi ile E hareketli düzleminin bir X noktası $\mathbf{x} = x + iy$, ve E' sabit düzleminin bu noktaya karşılık gelen bir X' noktası

$\mathbf{x}' = x' + iy'$ olmak üzere 1-parametreli düzlemsel $B_I = E/E'$ hareketi

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{x} - \mathbf{u})e^{i\theta} \tag{2.30}$$

kompleks ifade ile de ifade edilebilir. (2.30) denkleminden sabit bir X noktasının E' düzlemine göre değişimi

$$d\mathbf{x}' = \{-d\mathbf{u} + i(\mathbf{x} - \mathbf{u})d\theta\}\, e^{i\theta} \tag{2.31}$$

veya

$$d\mathbf{x}' = -d\mathbf{u}e^{i\theta} + i\mathbf{x}'d\theta \tag{2.32}$$

olarak bulunur. Hareketin ***dönme polü*** , yani her iki düzlemde de sabit olan nokta, $d\mathbf{x}' = 0$ ile karakterize edildiğinden (2.31) denkleminin çözümü ile E hareketli düzlemine göre P dönme polü için

$$\mathbf{p} = \mathbf{u} - i\frac{d\mathbf{u}}{d\theta} \tag{2.33}$$

elde edilir. Benzer şekilde, (2.32) denkleminin çözümü ile E' sabit düzleminin sahip olduğu dönme polü için de

$$\mathbf{p}' = -ie^{i\theta}\frac{d\mathbf{u}}{d\theta} \tag{2.34}$$

bulunur.

2.3.1 2-Parametreli Hareket ve 2-Parametreli Hareketten Elde Edilen 1-Parametreli Hareketler

Tanım 2.6. Öklid düzleminde hareketin kompleks ifadesindeki, yani (2.30) denklemindeki, u_1 ve u_2 yani $\mathbf{u}$ kompleks büyüklüğü ile θ dönme açısı bağımsız iki reel parametre olan t_1 ve t_2 ye bağlı olmak üzere

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t_1, t_2) \quad \text{ve} \quad \theta = \theta(t_1, t_2)$$

fonksiyonlarının uygun diferansiyellenebilme şartı ile tanımlanan harekete ***2-parametreli hareket*** denir ve B_{II} ile gösterilir. Bu hareket esnasında E düzleminde seçilen bir X noktası E' düzleminde bir düzlem parçası (yüzey parçası) çizmektedir. Bu nedenle, B_{II} hareketine ***yüzey çizen hareket*** adı da verilebilir. Özel olarak $\frac{d\mathbf{u}}{d\theta} \neq 0$ ise B_{II} hareketinin parametrelerden biri θ açısı olarak seçilebileceğinden

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\theta, t)$$

fonksiyonunun uygun diferensiyellenebilme şartı ile elde edilen harekete ise ***özel 2-parametreli hareket*** denir ve SB_{II} ile gösterilir, [1, 2].

Yorum. B_{II} hareketinin herhangi bir (t_1, t_2) konumundaki B_I hareketleri nasıl elde edilir?

- $t_1 =$ sabit ise $\forall t_1 \in \mathbb{R}$ için t_2 parametresine bağlı sonsuz B_I hareketi elde edilebilir.
- $t_2 =$ sabit ise $\forall t_2 \in \mathbb{R}$ için t_1 parametresine bağlı sonsuz B_I hareketi elde edilebilir.
- $t_2 = t_2(t_1)$ fonksiyonu ise t_1 parametresine bağlı B_I hareketi elde edilebilir.
- $t_1 = t_1(t_2)$ fonksiyonu ise t_2 parametresine bağlı B_I hareketi elde edilebilir.
- $t_1 = t_1(t), t_2 = t_2(t)$ şeklinde fonksiyonlar ise t zaman parametresine bağlı B_I hareketi elde edilebilir.
- $t_1 = \theta,\ t_2 = t$ zaman parametresi ve $t = t(\theta)$ fonksiyonu ise θ parametresine bağlı elde edilen B_I hareketine ***özel 1-parametreli hareket*** denir ve SB_I ile gösterilir.

B_{II} hareketinin (t_1, t_2) konumundaki B_I hareketi esnasında E düzleminde seçilen bir X noktası E' düzleminde düzlem parçası üzerinde bir eğri çizer.

2.3.2 Hareketli Koordinat Sistemi

Burada E düzleminin $\{O; \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ *ve* E' *düzleminin* $\left\{O'; \mathbf{e_1}', \mathbf{e_2}'\right\}$ *koordinat sistemlerinden farklı olacak şekilde hareketli koordinat sistemleri ele alınarak 2-parametreli hareketler için hareketli koordinat sisteminin genel hali tanımlanacak,* B_{II} *hareketinin türev denklemleri, Pfaff formları ve integrallenebilme şartları verilecektir, [1, 2]:*

E düzleminde $\{B; \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}\}$ ve E' düzleminde $\left\{B'; \mathbf{a_1}', \mathbf{a_2}'\right\}$ yeni hareketli koordinat sistemlerini ele alalım. $\{B; \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}\}$ koordinat sistemi A düzlemini ve $\left\{B'; \mathbf{a_1}', \mathbf{a_2}'\right\}$ koordinat sistemi A' düzlemini temsil etsin. A/E düzlemsel hareketinin E düzlemine göre türev denklemleri

$$\begin{cases} d\mathbf{a_1} = \mathbf{a_2}\tau, \\ d\mathbf{a_2} = -\mathbf{a_1}\tau, \\ d\mathbf{b} = \mathbf{a_1}\sigma_1 + \mathbf{a_2}\sigma_2 \end{cases} \tag{2.35}$$

ve A'/E' düzlemsel hareketinin E' düzlemine göre türev denklemleri

$$\begin{cases} d\mathbf{a_1}' = \mathbf{a_2}'\tau', \\ d\mathbf{a_2}' = -\mathbf{a_1}'\tau', \\ d\mathbf{b}' = \mathbf{a_1}'\sigma_1' + \mathbf{a_2}'\sigma_2' \end{cases} \tag{2.36}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{b} = \mathbf{BO}$ ve $\mathbf{b}' = \mathbf{B'O'}$ konum vektörleri, φ ve φ', sırasıyla, $\mathbf{e_1}$ ile $\mathbf{a_1}$ vektörleri arasındaki açı ve $\mathbf{e_1}'$ ile $\mathbf{a_1}'$ vektörleri arasındaki açı olmak üzere (2.35) ve (2.36) türev denklemlerinde kullanılan 1-formlar

$$\begin{aligned} &\tau = d\varphi, \quad \sigma_1 = db_1 - b_2\tau, \quad \sigma_2 = db_2 + b_1\tau \\ &\tau' = d\varphi', \quad \sigma_1' = db_1' - b_2'\tau', \quad \sigma_2' = db_2' + b_1'\tau' \end{aligned}$$

şeklindedir. B_{II} hareketinde σ_1, σ_2, σ_1', σ_2', τ ve τ' 1-formları t_1 ve t_2 gibi bağımsız iki değişkene bağlı Pfaff formlardır. Yani, genel olarak bu Pfaff-formlar

$$\sigma_1 = A(t_1, t_2)dt_1 + B(t_1, t_2)dt_2$$

şeklindedir. A/E hareketi için $\{B; \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}\}$ hareketli koordinat sistemine göre bir X noktasının E düzlemine göre konum vektörü için

$$\mathbf{x} = \mathbf{OX} = \mathbf{OB} + \mathbf{BX}$$

veya

$$\mathbf{x} = -\mathbf{b} + \mathbf{a_1}x + \mathbf{a_2}y \tag{2.37}$$

yazılır. Bu eşitlikten X noktasının E düzlemine göre değişimi için

$$d\mathbf{x} = -d\mathbf{b} + \mathbf{a_1}dx + d\mathbf{a_1}x + \mathbf{a_2}dy + d\mathbf{a_2}y$$

yazılıp (2.35) türev denklemlerinin eşitlikleri kullanılırsa

$$d\mathbf{x} = \mathbf{a_1}(dx - \sigma_1 - y\tau) + \mathbf{a_2}(dy - \sigma_2 + x\tau)$$

şeklinde bulunur. Böylece, bir X noktasının E düzleminde sabit olma koşulları için

$$\begin{cases} dx = \sigma_1 + y\tau, \\ dy = \sigma_2 - x\tau \end{cases} \tag{2.38}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, A'/E' hareketi için $\left\{B'; \mathbf{a_1}', \mathbf{a_2}'\right\}$ hareketli koordinat sistemine göre bir

X' noktasının E' düzlemine göre konum vektörü için

$$\mathbf{x}' = \mathbf{O}'\mathbf{X}' = \mathbf{O}'\mathbf{B}' + \mathbf{B}'\mathbf{X}'$$

veya

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{b}' + \mathbf{a}_1' x' + \mathbf{a}_2' y' \tag{2.39}$$

yazılarak X' noktasının E' düzleminde sabit olma koşulları için de

$$\begin{cases} dx' = \sigma_1' + y'\tau', \\ dy' = \sigma_2' - x'\tau' \end{cases} \tag{2.40}$$

elde edilir.

B_{II} hareketi; tüm t_1 ve t_2 parametrelerine bağlı olarak A düzleminin $\{B; \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}\}$ çatısının E düzlemi üzerindeki ve A' düzleminin $\left\{B'; \mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2'\right\}$ çatısının E' düzlemi üzerindeki hareketleri ile kullanılarak açıklanır.

B_{II} hareketinin $\sigma_i, \sigma_i', \tau$ ve τ' Pfaff formları keyfi kabul edilemezler, çok defa integrallenebilme şartlarını sağlamak zorundadırlar. Bu şartlar için (2.35) ve (2.36) türev denklemlerinin dış türevleri incelenir:

Tam diferansiyelin dış türevi sıfır olacağından

$$d(d\mathbf{b}) = 0$$

veya

$$d(\mathbf{a_1}\sigma_1 + \mathbf{a_2}\sigma_2) = d\mathbf{a_1} \wedge \sigma_1 + \mathbf{a_1} d\sigma_1 + d\mathbf{a_2} \wedge \sigma_2 + \mathbf{a_2} d\sigma_2 = 0$$

bulunur. Son denklemde (2.35) türev denklemleri yerine yazılırsa

$$\mathbf{a_1} d\sigma_1 + \mathbf{a_2} d\sigma_2 = \mathbf{a_1}\tau \wedge \sigma_2 - \mathbf{a_2}\tau \wedge \sigma_1$$

bulunur. Böylece

$$\begin{cases} d\sigma_1 = -\sigma_2 \wedge \tau \\ d\sigma_2 = \ \sigma_1 \wedge \tau \end{cases} \tag{2.41}$$

elde edilir. Benzer şekilde, E' düzleminde türev denklemleri yardımıyla

$$\begin{cases} d\sigma_1' = -\sigma_2' \wedge \tau' \\ d\sigma_2' = \ \sigma_1' \wedge \tau' \end{cases} \tag{2.42}$$

şeklinde benzer eşitlikler elde edilir.

Benzer düşünceyle,

$$d(d\mathbf{a_j}) = 0, \quad j = 1,2$$

ve

$$d(d\mathbf{a_j}^{'}) = 0, \quad j = 1,2$$

yazılabilir. Buradan $d(d\mathbf{a_1}) = d(\mathbf{a_2}\tau) = 0$ olmak üzere

$$-\mathbf{a_1}\tau \wedge \tau + \mathbf{a_2}d\tau = 0$$

veya $\tau \wedge \tau = 0$ olduğundan

$$d\tau = 0 \tag{2.43}$$

elde edilir. (2.43); φ dönme açısının değişimi olan τ büyüklüğünün bir tam diferansiyel olduğunu ifade eder. Benzer şekilde,

$$d\tau' = 0 \tag{2.44}$$

olduğundan τ' Pfaff formu da bir tam diferansiyeldir.

Sonuç olarak, B_{II} hareketine ait Pfaff formları (2.41) ve (2.42) integrallenebilme şartlarını sağlamak mecburiyetindedirler ve τ ve τ' tam diferansiyeldir.

2.3.3 Kutup Ekseni

2.3.3.1 Düzlemsel Hareketin Kompleks İfadesi Yardımıyla Kutup Ekseni

Burada, SB_{II} hareketinden elde edilen bütün SB_I hareketlerinin P dönme pollerinden yararlanılarak kutup ekseni incelenecektir, [1, 2]:

SB_{II} hareketinden elde edilen SB_I hareketletinde $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\theta, t)$ ve $t = t(\theta)$ olmak üzere

$$d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\frac{dt}{d\theta}d\theta$$

veya

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\theta} = \mathbf{u}_\theta + \mathbf{u}_t\frac{dt}{d\theta} \tag{2.45}$$

yazılabilir.(2.45) eşitliği P ve P' pol noktalarının (2.33) ve (2.34) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$\mathbf{p} = \mathbf{u} - i\mathbf{u}_\theta - i\mathbf{u}_t\frac{dt}{d\theta} \tag{2.46}$$

ve

$$\mathbf{p}' = -ie^{i\theta}\mathbf{u}_\theta - ie^{i\theta}\mathbf{u}_t\frac{dt}{d\theta} \tag{2.47}$$

elde edilir.

Belirlenen bir (θ, t) konumu ile θ ve t parametrelerinin tespit edildiğini ve sadece $\frac{dt}{d\theta} = \mu$ değiştiğini kabul edelim. Bu durumda, SB_{II} hareketinden elde edilen bütün SB_I hareketleri için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.2. *SB_{II} hareketinin bir (θ, t) konumunda elde edilen bütün SB_I hareketlerinin P dönme polleri E hareketli düzleminde bir g doğrusunu ve E' sabit düzleminde bir g' doğrusunu oluşturur. Bu doğrulara hareketin **kutup eksenleri** adı verilir, [1, 2].*

İspat. (2.46) eşitliğinden E düzlemindeki g doğrusunun [3]

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{u} - i\mathbf{u}_\theta$$

noktasından geçtiği ve

$$\mathbf{v} = -i\mathbf{u}_t$$

doğrultusuna sahip olduğu görülür. Benzer şekilde, (2.47) eşitliğinden E' düzlemindeki g' doğrusu

$$\mathbf{p'}_0 = -ie^{i\theta}\mathbf{u}_\theta$$

noktasından geçer ve

$$\mathbf{v'} = -ie^{i\theta}\mathbf{u}_t = \mathbf{v}e^{i\theta} \tag{2.48}$$

doğrultusuna sahiptir. ■

Teorem 2.3. *SB_{II} hareketinin bir (θ, t) konumunda meydana gelen g ve g' kutup eksenleri hızları değişmeyecek şekilde birbirlerine dönüşürler, [1, 2].*

İspat. SB_{II} hareketinin bir (θ, t) konumunda meydana gelen g ve g' kutup eksenlerinin $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{v}'$ doğrultularının uzunlukları

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle -i\mathbf{u}_t, -i\mathbf{u}_t \rangle} = \sqrt{-i.\overline{(-i)}\,\langle \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t \rangle} = |\mathbf{u}_t|$$

ve

$$\left\|\mathbf{v}'\right\| = \sqrt{\langle -ie^{i\theta}\mathbf{u}_t, -ie^{i\theta}\mathbf{u}_t \rangle} = \sqrt{(-ie^{i\theta})\,\overline{(-ie^{i\theta})}\,\langle \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t \rangle} = |\mathbf{u}_t|$$

olduğundan

$$\|\mathbf{v}\| = \left\|\mathbf{v}'\right\| = |\mathbf{u}_t| \tag{2.49}$$

elde edilir. ■

Sonuç olarak, aşağıdaki teorem ispatsız olarak verilebilir:

[3] Kompleks sayı düzleminde bir doğrunun parametrik denklemi: x doğru üzerinde herhangi bir nokta olmak üzere a ve b kompleks sabit sayılar, μ reel parametresi için $x = a + b\mu$ ile tanımlanır.

Teorem 2.4. *SB_{II} hareketinin $(\theta, t) \to (\theta + d\theta, t + dt)$ gibi sonsuz küçük dönmelerine ait dönme pollerinin geometrik yeri, θ ve t sabit değişkenleri ve $\frac{dt}{d\theta}$ değişim oranı ile E ve E' düzlemlerinde, sırasıyla, g ve g' doğrularıdır. Kutup eksenleri, sadece (θ, t) konumuna bağlıdır. Böylece, SB_{II} hareketi ile kutup eksenlerinin bir $g(\theta, t) \to g'(\theta, t)$ doğru dönüşümü vardır, [1, 2].*

2.3.3.2 Hareketli Koordinat Sistemi ile Kutup Ekseni

B_{II} hareketini hareketli koordinat sistemi ile açıklamak için E ve E' düzlemlerinde tek bir hareketli koordinat sistemini ele alarak E hareketli düzlemi ile E' sabit düzlemi arasında bir ilişki kurulmalıdır. Yani, E ve E' düzlemlerinde her iki (t_1, t_2) konumu $B = B'$, $\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j^{'}$, $j = 1, 2$ olmasına karşılık gelir. Burada, ilk olarak X noktasının E düzleminde sabit olması ile E' düzleminde oluşturduğu $\overrightarrow{d_f \mathbf{x}}$ sürüklenme hız vektörünü yeni hareketli koordinat sistemine göre hesap edilip, hareketin pol noktaları araştırılacaktır, [1, 2]:

X noktasının E' düzlemine göre değişimi (2.39) denklemi ile

$$d\mathbf{x} = -d\mathbf{b}' + \mathbf{a}_1^{'} dx + d\mathbf{a}_1^{'} x + \mathbf{a}_2^{'} dy + d\mathbf{a}_2^{'} y$$

veya (2.36) türev denklemleri kullanılarak

$$d\mathbf{x} = \mathbf{a}_1^{'}(dx - \sigma_1^{'} - y\tau') + \mathbf{a}_2^{'}(dy - \sigma_2^{'} + x\tau')$$

bulunur. X noktası E düzleminde sabit alındığından (2.38) sabit kalma şartları altında sürüklenme hız vektörü ise

$$\overrightarrow{d_f \mathbf{x}} = \mathbf{a_1}\left\{(\sigma_1 - \sigma_1^{'}) - y(\tau' - \tau)\right\} + \mathbf{a}_2\left\{(\sigma_2 - \sigma_2^{'}) + x(\tau' - \tau)\right\} \tag{2.50}$$

şeklinde elde edilir. (2.50) eşitliğinde

$$\begin{cases} \eta_1 = (\sigma_1 - \sigma_1^{'}) - y(\tau' - \tau) \\ \eta_2 = (\sigma_2 - \sigma_2^{'}) + x(\tau' - \tau) \end{cases} \tag{2.51}$$

olarak kabul edilirse $\overrightarrow{d_f \mathbf{x}}$ sürüklenme hız vektörü için

$$\overrightarrow{d_f \mathbf{x}} = \mathbf{a_1}\eta_1 + \mathbf{a_2}\eta_2 \tag{2.52}$$

yazılabilir. $\overrightarrow{d_f \mathbf{x}}$ sürüklenme hız vektörü, bileşenleri 2 değişkene bağlı 1-form olan bir vektördür.

B_{II} hareketinden elde edilen herhangi bir B_I hareketinin P dönme polünün

koordinatları için (2.50) denkleminde $\overrightarrow{d_f \mathbf{x}} = 0$ eşitliğinden

$$\begin{cases} x_1 = p_1 = \dfrac{\sigma_2^{'} - \sigma_2}{\tau' - \tau}, \\ x_2 = p_2 = -\dfrac{\sigma_1^{'} - \sigma_1}{\tau' - \tau} \end{cases} \tag{2.53}$$

elde edilir. Burada σ_1, σ_2, $\sigma_1^{'}$, $\sigma_2^{'}$, τ ve τ' Pfaff formları t_1 ve t_2 değişkenlerine bağlı 1-form oldukları için genel olarak (2.53) eşitliklerinde

$$p_1 = \frac{A(t_1, t_2)dt_1 + B(t_1, t_2)dt_2}{C(t_1, t_2)dt_1 + D(t_1, t_2)dt_2}$$

şeklinde yazılabilir. B_I hareketi için t_1 ve t_2 tespit ve $\frac{dt_2}{dt_1} = \mu$ değişken kabul edildiğinden son eşitlik

$$p_1 = \frac{A + B\mu}{C + D\mu}$$

şeklinde düzenlenebilir. Benzer şekilde, p_2 koordinatı için de

$$p_2 = \frac{E + F\mu}{C + D\mu}$$

olmak üzere P pol noktası genel olarak

$$P = (p_1, p_2) = (K, M) + \frac{1}{\mu}(L, N)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadeden (K, M) doğru üzerinde herhangi bir nokta ve (L, N) doğrultman vektörü için P polünün E ve E' düzlemlerinde birer doğrunun, yani kutup eksenlerinin üzerinde bulunduğu görülür. Yani, Teorem 2.2 yeniden elde edilmiştir.

Genelliği bozmayacağından hareketli koordinat sisteminin kutup ekseni üzerinde seçilmesi durumunda pol noktaları için $p_2 = 0$ olmak üzere $\sigma_1 = \sigma_1^{'}$ olduğundan sabit bir X noktasının sürüklenme hız vektörü

$$dx = \overrightarrow{d_f \mathbf{x}} = \mathbf{a}_1 \left\{ -y\left(\tau' - \tau\right) \right\} + \mathbf{a}_2 \left\{ \left(\sigma_2 - \sigma_2{}'\right) + x\left(\tau' - \tau\right) \right\} \tag{2.54}$$

olarak elde edilir.

3
Öklid Düzleminde 2-Parametreli Hareket Altında Kutup Ekseninin Yoğunluğu

Bu bölümde, Öklid düzleminde 2-parametreli hareketin ilk olarak kutup ekseninin yoğunluğunun değişmediği gösterilecek ve sonrasında ise kutup ekseni ve yoğunluğundan faydalanılarak hareketin geometri yönü ele alınacaktır, [1, 2].

3.1 Kutup Eksen Dönüşümünün Yoğunluk Değişmezliği

Bu bölümde, B_{II} hareketi altında kutup eksenlerinin yoğunluğunun değişmediği gösterilecektir, [1, 2]:

3.1.1 Kapalı Özel 2-Parametreli Düzlemsel Hareketin Kutup Eksen Dönüşümünün Yoğunluk Değişmezliği

İki parametreli hareketlere ait, esas itibariyle 1913 yılında R. Bricard tarafından ifade edilmiş teoremi elde edelim:

Teorem 3.1. *SB_{II} hareketi esnasında E düzlemindeki g kutup ekseninin doğru yoğunluğu E' düzlemindeki g' kutup ekseninin doğru yoğunluğuna eşittir, [1].*

İspat. SB_{II} hareketinden elde edilen herhangi bir SB_I hareketinin P ve P' pol noktalarının $d\mathbf{p}, d\mathbf{p}'$ değişimleri (2.33) ve (2.34) eşitliklerinden

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\theta} = \frac{d\mathbf{u}}{d\theta} - i\frac{d^2\mathbf{u}}{d\theta^2} \tag{3.1}$$

ve

$$\frac{d\mathbf{p}'}{d\theta} = e^{i\theta}\left(\frac{d\mathbf{u}}{d\theta} - i\frac{d^2\mathbf{u}}{d\theta^2}\right) = e^{i\theta}\frac{d\mathbf{p}}{d\theta} \tag{3.2}$$

şeklinde bulunur. (3.1) denkleminde

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\theta} = \mathbf{u}_\theta + \mathbf{u}_t\frac{dt}{d\theta}$$

ve

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\theta^2} = \mathbf{u}_{\theta\theta} + 2\mathbf{u}_{\theta t}\frac{dt}{d\theta} + \mathbf{u}_{tt}\left(\frac{dt}{d\theta}\right)^2 + \mathbf{u}_t\frac{d^2t}{d\theta^2}$$

değerleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{p}}{d\theta} &= \left(\mathbf{u}_\theta + \mathbf{u}_t\frac{dt}{d\theta}\right) - i\left(\mathbf{u}_{\theta\theta} + 2\mathbf{u}_{\theta t}\frac{dt}{d\theta} + \mathbf{u}_{tt}\left(\frac{dt}{d\theta}\right)^2 + \mathbf{u}_t\frac{d^2t}{d\theta^2}\right)\\ &= \mathbf{u}_t\left(\frac{\mathbf{u}_\theta}{\mathbf{u}_t} + \frac{dt}{d\theta}\right) - i\mathbf{u}_t\left(\frac{\mathbf{u}_{\theta\theta}}{\mathbf{u}_t} + 2\frac{\mathbf{u}_{\theta t}}{\mathbf{u}_t}\frac{dt}{d\theta} + \frac{\mathbf{u}_{tt}}{\mathbf{u}_t}\left(\frac{dt}{d\theta}\right)^2 + \frac{d^2t}{d\theta^2}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Herhangi bir r sabiti için

$$\frac{\mathbf{u}_\theta}{\mathbf{u}_t} + \frac{dt}{d\theta} = r\sin\alpha$$

ve

$$\frac{\mathbf{u}_{\theta\theta}}{\mathbf{u}_t} + 2\frac{\mathbf{u}_{\theta t}}{\mathbf{u}_t}\frac{dt}{d\theta} + \frac{\mathbf{u}_{tt}}{\mathbf{u}_t}\left(\frac{dt}{d\theta}\right)^2 + \frac{d^2t}{d\theta^2} = r\cos\alpha$$

şeklinde alınırsa genel olarak

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\theta} = -i\mathbf{u}_t r e^{i\alpha}$$

bulunur. $\mathbf{v} = -i\mathbf{u}_t$ olmak üzere

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\theta} = \mathbf{v}\, r\, e^{i\alpha} \tag{3.3}$$

ve (3.2), (2.48) eşitliklerinden

$$\frac{d\mathbf{p}'}{d\theta} = \mathbf{v}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} r\, e^{i\alpha} = \mathbf{v}'\, r\, e^{i\alpha} \tag{3.4}$$

yazılır. SB_{II} hareketinden elde edilen SB_I hareketinin her anında P ve P' pol noktaları (P) ve (P') pol yörüngelerini çizeceğinden

$$s = \int_a^b \left\|\frac{d\mathbf{p}}{d\theta}\right\| d\theta = \int_a^b \left\|\mathbf{v}\, r\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right\| d\theta$$

veya

$$\frac{ds}{d\theta} = \left\|\mathbf{v}re^{i\alpha}\right\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}re^{i\alpha}, vre^{i\alpha}\rangle} = \sqrt{e^{i\alpha}e^{-i\alpha}\langle \mathbf{v}r, \mathbf{v}r\rangle} = |r|\,\|\mathbf{v}\| = |r|\,\|\mathbf{v}\|$$

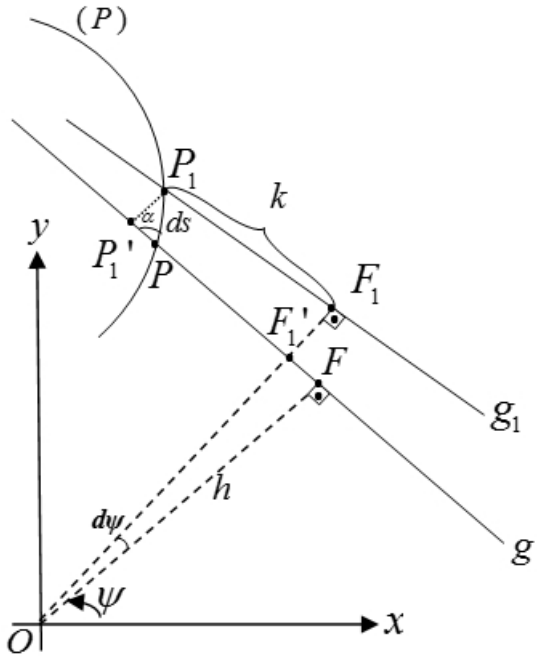
ve

$$s' = \int_a^b \left\|\frac{d\mathbf{p}'}{d\theta}\right\| d\theta = \int_a^b \left\|\mathbf{v}'r\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right\| d\theta$$

veya

$$\frac{ds'}{d\theta} = \left\|\mathbf{v}' r e^{i\alpha}\right\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}' r e^{i\alpha}, v' r e^{i\alpha}\rangle} = \sqrt{e^{i\alpha} e^{-i\alpha} \langle \mathbf{v}' r, \mathbf{v}' r\rangle} = |r| \left\|\mathbf{v}'\right\| = |r| \|\mathbf{v}\|$$

olmak üzere $d\mathbf{p}$ ve $d\mathbf{p}'$ vektörel yörünge elementleri için (P) ve (P') pol yörüngelerinin ds ve ds' yay uzunluklarının eşit ve $e^{i\alpha}$ geometrik yorumundan g ve g' kutup eksenleri ile yaptıkları açının aynı olduğu elde edilir.



Şekil 3.1 B_{II} hareketinin $g \in L$ kutup ekseni

SB_{II} hareketi herhangi bir konumda E hareketli düzlemde g kutup eksenine ve farklı bir konumda ise g_1 kutup eksenine sahip olmak üzere hareketin sonsuz yakın iki konumunu düşünecek olursak, g ve g_1 kutup eksenleri birbirleriyle çakışacak kadar yakın olurlar. Buradan, Şekil 3.1'e göre

$$\overline{F_1 P_1} = \overline{F_1' P_1'}$$

yazılabilir. g doğrusunda F dikme ayağı ile P pol noktası arasındaki uzaklık k fonksiyonu ile gösterilsin. Ayrıca Öklid düzlemindeki bir g kutup ekseninin Hesse formu için

$$x \cos\psi + y \sin\psi = h \tag{3.5}$$

yazılabilir.

O merkezli h yarıçaplı çemberde $d\psi$ açısının gördüğü yay uzunluğundan $\overline{FF_1'} = h d\psi$ ve $P_1 P P_1{}'$ dik üçgeninden $\overline{PP_1'} = ds \cos\alpha$ olmak üzere dikme ayakları ile pol noktaları

arasındaki değişim olan

$$dk = \overline{PP_1}' - \overline{FF_1}'$$

için

$$dk = ds\cos\alpha - hd\psi \tag{3.6}$$

yazılabilir.

Benzer şekilde, E' sabit düzleminde tespit edilen g' ve g_1' doğruları için de

$$dk' = ds'\cos\alpha' - h'd\psi' \tag{3.7}$$

bulunur.

SB_{II} hareketinden elde edilen kapalı SB_I hareketi için bir $[0,T]$ anında $\oint dk = 0$ ve $\oint dk' = 0$ yazılabilir. Buradan (3.6) ve (3.7) eşitliklerinden

$$\begin{cases} \oint ds\ \cos\alpha\ = \oint h\ d\psi, \\ \oint ds'\cos\alpha' = \oint h'd\psi' \end{cases}$$

ve $ds = ds'$ ve $\alpha = \alpha'$ olduğundan

$$\oint h\ d\psi = \oint h'd\psi' \tag{3.8}$$

elde edilir. (3.8) eşitliğinden SB_{II} hareketi esnasında her konumda meydana gelen kutup eksenlerinin yoğunluğu için

$$dg = dh \wedge d\psi = dh' \wedge d\psi' = dg' \tag{3.9}$$

elde edilir. Bu durumda, SB_{II} hareketi altında E ve E' düzlemleri bu yoğunluğu değiştirmeyen doğruların dönüşümü ile birbirlerine dönüşürler.

Sonuç 3.1 Cauchy-çevre formülü $L = \oint hd\psi$ olduğundan (3.8) eşitliği; E ve E' düzlemlerinde, sırasıyla, g ve g' kutup eksenlerinin zarf eğrilerinin çevre uzunluklarının aynı olduğunu verir. (3.8) koşulu bütün kapalı SB_I hareketleri için geçerlidir. ■

3.1.2 Hareketli Koordinat Sistemi ile Kutup Eksen Dönüşümünün Yoğunluk Değişmezliği

Burada, B_{II} hareketi esnasında kutup eksenlerinin yoğunluk değişmezliği özel olarak hareketli koordinat sistemi yardımı ile verilecektir [1, 2]:

Keyfi alınan $\{B; \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}\}$ hareketli koordinat sistemi $\{B, \mathbf{a_1}\}$ ekseni daima kutup ekseni üzerinde bulunacak, yani $y = 0$, olacak şekilde seçilsin. Bu durumda, (2.53) eşitliklerinden $p_2 = 0$ olacağından

$$\sigma_1 = \sigma_1' = \sigma \tag{3.10}$$

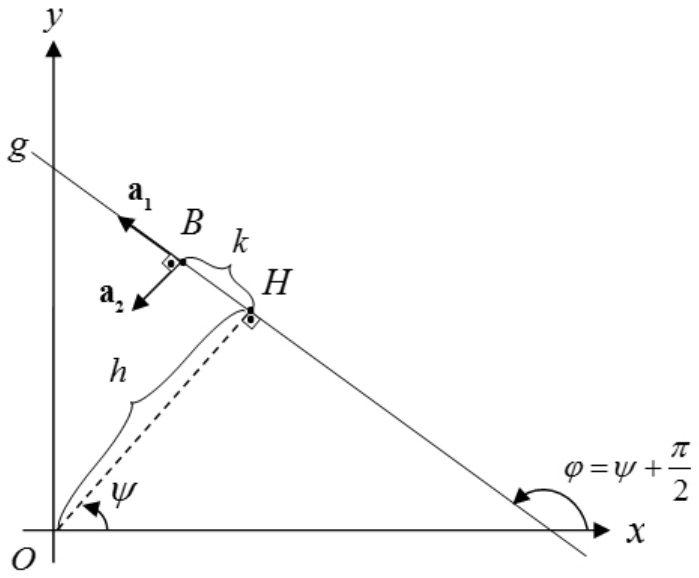
elde edilir. Buradan

$$d\sigma_1 = d\sigma_1' \tag{3.11}$$

olduğundan (2.41) ve (2.42) integrallenebilme şartları göz önüne alınırsa

$$\sigma_2 \wedge \tau = \sigma_2' \wedge \tau' \tag{3.12}$$

bulunur.



Şekil 3.2 B_{II} hareketinin $g \in L$ kutup ekseni ve hareketli koordinat sistemi

g kutup ekseninin E düzlemindeki $\{O; \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ koordinat sistemine göre Hesse formu

$$x \cos\psi + y \sin\psi = h$$

olarak yazılabilir. Şekil 3.2'den kutup ekseni üzerindeki bir **B** noktası için

$$\mathbf{b} = \mathbf{BO} = \mathbf{BH} - \mathbf{OH}$$

veya

$$\mathbf{b} = -\mathbf{a_1}k + \mathbf{a_2}h \tag{3.13}$$

yazılabilir. (3.13) eşitliğinin değişimi için (2.35) türev denklemlerinden

$$d\mathbf{b} = \mathbf{a_1}\sigma_1 + \mathbf{a_2}\sigma_2 = \mathbf{a_1}(-dk - h\tau) + \mathbf{a_2}(dh - k\tau) \tag{3.14}$$

bulunur ve buradan

$$\begin{cases} \sigma_1 = -dk - h\tau, \\ \sigma_2 = \ dh - k\tau \end{cases} \tag{3.15}$$

elde edilir.

Burada, $\varphi = \psi + \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $\mathbf{e_1}$ ile $\mathbf{a_1}$ arasındaki φ açısının değişimi de τ olduğundan

$$d\varphi = \tau = d\psi \tag{3.16}$$

bulunur.

Bir doğrunun yoğunluğu $dg = dh \wedge d\psi$ olmak üzere (3.15) eşitliklerinden $dh = \sigma_2 + k\tau$ kullanılırsa

$$dg = (\sigma_2 + k\tau) \wedge \tau$$

veya $\tau \wedge \tau = 0$ olduğundan

$$dg = \sigma_2 \wedge \tau \tag{3.17}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, E' düzlemindeki g' kutup ekseninin yoğunluğu için $dg' = dh' \wedge d\psi'$ yazılabilir ve benzer işlemler ile

$$dg' = \sigma_2^{'} \wedge \tau' \tag{3.18}$$

olduğu elde edilir.

(3.17) ve (3.18) bağıntıları (3.12) eşitliği ile karşılaştırılırsa

$$dg = dg' \tag{3.19}$$

olduğu görülür. Yani, Teorem 3.1 hareketli yardımıyla sadece özel kapalı hareketler için değil tüm hareketler için ispat edilmiştir.

3.2 Kutup Eksen Yoğunluğu Sıfır Olan Hareketler

B_{II} hareketinde genel olarak $dg = dg'$ yoğunluklarının daima sıfırdan farklı olduğu $g \in E$ ve $g' \in E'$ kutup eksenleri üzerinde çalışılmıştır, [1, 2].

i. *Burada, g ve g' kutup eksenlerinin yoğunluklarının sıfır olması durumunda B_{II} hareketi incelenecektir:*

B_{II} hareketinde $g \in E$ ve $g \in E'$ kutup eksenlerinin yoğunlukları, sırasıyla,

$$dg = dh \wedge d\psi = 0$$

ve

$$dg' = dh' \wedge d\psi' = 0$$

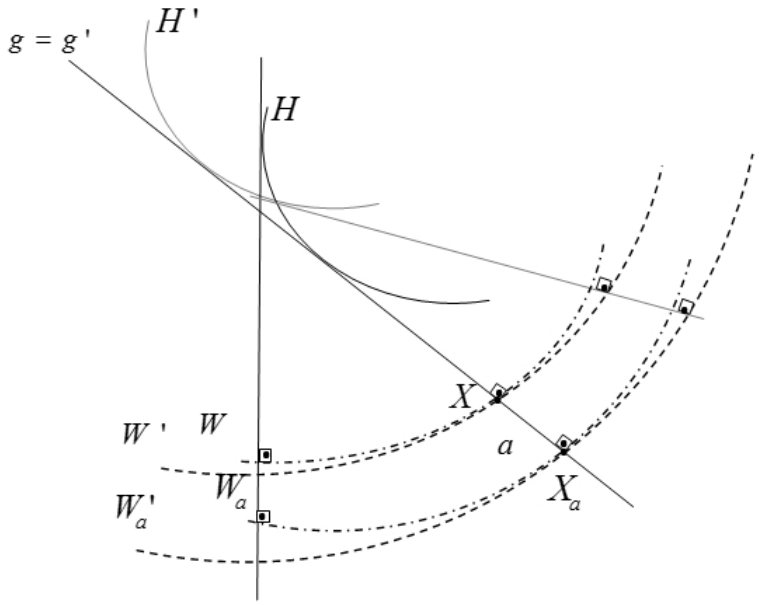
olsun. Buradan, dh ve $d\psi$ ile dh' ve $d\psi'$ diferansiyelleri lineer bağımlı ve

$$f(\psi, h)\, dh + g(\psi, h)\, d\psi = 0$$

yazılabileceğinden h, ψ açısının bu diferansiyel denklemi sağlayan bir fonksiyonu olarak $h = h(\psi)$ şeklinde ve benzer şeklinde $h' = h'(\psi')$ seçilebilir.

Böylece, $h(\psi)$ ve $h'(\psi')$ fonksiyonları ile, sırasıyla, E ve E' düzlemlerinde g ve g' doğrularının birer 1-parametreli ailesi tarif edilir. Çünkü, $h(\psi)$ fonksiyonu her ψ açısı için E düzleminde bir doğru belirtecektir. Aynı durum $h'(\psi')$ fonksiyonu için de geçerlidir. Bu doğruların zarfları H ve H' ile gösterilsin. Yani, H zarf eğrisi, $h(\psi)$ ailesindeki her doğruya teğet olsun. E düzlemindeki $h(\psi)$ doğru ailesine ortogonal bir eğri de W olsun. Yani, W eğrisinin teğeti de $h(\psi)$ ailesindeki her doğruya diktir. Dolayısıyla, W eğrisinin teğeti H eğrisinin teğetine de dik olacağından, W eğrisine Huygens tarafından H eğrisinin ***evolütü*** denir. W eğrisinin g kutup ekseni ile kesim noktası X olsun, Şekil 3.3. Burada, B_{II} hareketinden 1-parametreli bir B_I hareketi seçilsin. B_I hareketinin P dönme polü g kutup ekseni üzerinde bulunur. Ayrıca, B_I hareketi altında E düzleminde bulunan W eğrisi, E' düzleminde bir W' zarfına sahiptir. P polünden W eğrisine çizilen normal (yani g kutup ekseni), W ve W' eğrilerinin ani değme noktasından, yani X noktasından, geçer.

E' sabit düzlemini ele alırsak, $g = g'$ olduğundan g' kutup ekseni W' zarf eğrisini dik keser. Çünkü, W ve W' eğrilerinin teğetleri ortaktır ve g kutup ekseni W zarf eğrisini dik kesmektedir. Yani, W' eğrisi de E düzleminde g' kutup eksen ailesine ortogonal bir eğridir. W' eğrisinin teğeti ile H' eğrisinin teğeti birbirine dik olduğundan, W' zarfı H' eğrisinin bir evolütüdür. Bu durumda W' zarf eğrisi B_{II} hareketinden elde edilen B_I hareketine bağlı değildir. Çünkü



Şekil 3.3 g ve g' kutup eksenlerinin zarf eğrileri ve evolütü

B_{II}hareketinden ilk seçilen 1-parametreli B_I hareketinden farklı olacak şekilde seçeceğimiz 1-parametreli hareketin pol noktası da aynı an için yine aynı $g = g'$ kutup ekseni üzerinde olacaktır. Bu durumda yine aynı zarf ve evolüt eğriden bahsedilebilir.

Buradan aşağıdaki teorem ispatsız verilebilir:

Teorem 3.2. *Kutup eksen yoğunluğu sıfır olan bir B_{II} hareketi, E düzleminin bir W eğrisinin daima her konumda E' düzleminin bir W' zarf eğrisine değmesi ile meydana gelir, [1, 2].*

ii. *Şimdi tersine, önceden verilmiş $h(\psi)$, $h'(\psi')$ fonksiyonlarının tanımladığı hareketin 2-parametreli hareket olduğunu ve bu B_{II} hareketinin her konumunda elde edilen kutup eksen yoğunluğunun sıfır olduğunu gösterilecektir:*

$h(\psi)$ ve $h'(\psi')$ fonksiyonları ile, sırasıyla, E ve E' düzlemlerinde bir parametreli birer doğru ailesi elde edilir. Bu doğru aileleri genel olarak H ve H' zarflarına sahip olsun. Bu eğrilerin herhangi iki W ve W' evolütünü, yani bu iki doğru ailesinin herhangi iki ortogonal yörüngesini ele alalım. W eğrisinin bulunduğu E düzlemi, W daima E' düzleminin W' eğrisine değecek şekilde hareket ettirilsin. Bu şekilde W ve W' eğrilerinin noktaları birbirine tekabül etmeyip, sadece her iki eğrinin değme noktası W ve W' eğrilerinin herhangi birer noktasıdır. Elde edilen bu hareket, ψ ve ψ' parametreli 2-parametreli harekettir. $h = h(\psi)$ ve $h' = h'(\psi')$ olduğundan dolayı

$$dh = \dot{h}d\psi \quad \text{ve} \quad dh' = \dot{h}'d\psi'$$

yazılabilir. Buradan dh ve $d\psi$ ile dh' ve $d\psi'$ lineer bağımlıdır. Bu durumda

$$dg = dh \wedge d\psi = 0 \quad \text{ve} \quad dg' = dh' \wedge d\psi' = 0$$

elde edilir. Bu şekilde elde edilen B_{II} hareketi için ***yoğunluğu sıfır olan önceden verilen*** $g \to g'$ ***eksen dönüşümüne sahiptir*** denir.

Ayrıca W, W' eğrileri yerine H, H' zarf eğrilerinin W ve W' eğrilerinden a uzaklığında olan W_a ve ${W_a}'$ gibi farklı evolütleri alınırsa, yine aynı B_{II} hareketi elde edilir. Çünkü hareket tanımlanırken bu uzaklık kullanılmamış olup uzaklığın bir önemi yoktur.

Eğer H zarfının bir W evolütünü belirlersek, H' zarfının W' evolüt eğrisi 1-parametreye bağlıdır. H zarfının bir W evolütü H' zarfının sonsuz tane farklı W' evolütü ile birlikte her defa B_{II} hareketi belirttiği için, B_{II} hareketinin 1-parametreli bir ailesi elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem ispatsız verilebilir:

Teorem 3.3. *E ve E' düzlemlerinde bir parametreli iki doğru ailesi önceden verilmişse, bu aileler B_{II} hareketinin 1-parametreli bir ailesine aittir. Bu B_{II} hareketleri, E düzleminin doğru ailesinin ortogonal yörüngelerinin E' düzleminin doğru ailesinin ortogonal yörüngelerine değmesiyle karakterize edilir, [1, 2].*

Ayrıca B_{II} hareketi şu şekilde de açıklanabilir:

E hareketli düzleminde bir H eğrisi, $g = g'$ kutup ekseni üzerinde kaymaksızın yuvarlanır. Çünkü H eğrisinin $g = g'$ kutup ekseni üzerinde aldığı yol ile H eğrisinin yay uzunluğu eşittir ve H eğrisi ile $g = g'$ kutup ekseninin her andaki hızları aynıdır. Benzer şekilde, E' sabit düzleminde de bir H' eğrisi, $g = g'$ kutup ekseni üzerinde kaymaksızın yuvarlanır. Bu şekilde birbirinden bağımsız iki yuvarlanma hareketi görülür. B_{II} hareketinin böyle iki harekete parçalanabilmesinden "parçalanabilen" B_{II} hareketinden bahsedilebilir.

Dolayısıyla aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.4. *Kutup eksen yoğunluğu sıfır olan bir B_{II} hareketi birbirinden bağımsız, 1-parametreli iki harekete parçalanabilir. Bu esnada hareketin $g = g'$ kutup ekseni bir taraftan E düzlemindeki H zarfı, diğer taraftan E' düzlemindeki H' zarfı üzerinde kaymaksızın yuvarlanır, [1, 2].*

3.3 Değme Dönüşümü

Burada bir değme dönüşümünün iki-parametreli B_{II} hareketine bağlı olduğu gösterilecektir, [1, 2]:

B_{II} hareketi t_1, t_2 gibi iki genel bağımsız parametreye bağlı olsun. Bu durumda, E ve E' düzlemlerinin kutup eksenleri, sırasıyla, g ve g' olmak üzere bu düzlemler yoğunluğu değiştirmeyen $g(t_1, t_2) \rightarrow g'(t_1, t_2)$ doğru dönüşümü ile birbirlerine dönüşürler. Ortak kutup eksenleri yoğunluğunun sıfır olmadığı, yani $dg = dg' \neq 0$ kabul edilsin.

E düzleminde g doğrusu üzerinde bir nokta X olsun. B_{II} hareketinin (t_1, t_2) konumunda, bu noktaya E' düzlemindeki g' doğrusu üzerinde, X' noktası karşılık gelsin. E düzlemindeki bir X noktası, X noktasında g eksenine dik olan doğru ile birlikte (X, g) ile gösterilen bir ***doğru elementi*** oluşturur. Benzer şekilde, E' düzleminde (X', g') doğru elementi tanımlanır. Böylece, B_{II} hareketinin her (t_1, t_2) konumunda doğru elementleri $(X, g) \rightarrow (X', g')$ şeklinde birbirine dönüşür.

Bu $(X, g) \rightarrow (X', g')$ dönüşümü bir değme dönüşümüdür. X, Q doğrusu (eğrisi) üzerinde herhangi bir nokta olmak üzere (X, g) element ailesi aynı Q doğrusunu (eğrisini) bir uçtan diğer uca kat ettiğinde, benzer durum karşılık gelen (X', g') doğru elementi içinde geçerlidir. Yani, bu element B_{II} hareketinden elde edilen B_I hareketinde bir Bölüm 3.2'e göre Q doğrusunun Q' zarfının element ailesine aittir ve Q doğrusunun g normallerinin $g(t_1, t_2)$ ailesine karşılık gelir.

$(X, g) \rightarrow (X', g')$ değme dönüşümü ile paralel (X_1, g), (X_2, g) doğru elementleri yine paralel $({X_1}', g')$, $({X_2}', g')$ doğru elementlerine dönüşürler. Bu paralel doğru elementleri, sırasıyla, g ve g' ortak normallerine sahiptir ve $\overline{X_1X_2} = \overline{{X_1}'{X_2}'}$ dür. Tersine, E düzleminden E' düzlemine her değme dönüşümü bir iki parametreli hareket sürecidir.

E düzleminin herhangi bir (X_1, g) doğru elementinin paralel (X_2, g) doğru elementi ile ortak g normali üzerinde ayırdıkları $\overline{X_1X_2} = a$ uzaklığını değiştiren değme dönüşümü E düzlemindeki ***uzama*** adlandırılır. Bir B_{II} hareketine bağlı olan değme dönüşümünde paralel doğru elementlerinin uzaklığı değişmediği için, özet olarak şu teoremi ifade edilebilir:

Teorem 3.5. *$g \in E$ ortak normalli (kutup ekseni) paralel (X_1, g), (X_2, g) doğru elementlerini yine $g' \in E'$ ortak normalli (kutup ekseni) iki paralel $({X_1}', g')$, $({X_2}', g')$ doğru elementlerine dönüştüren bir değme dönüşümü iki-parametreli bir B_{II} hareketine bağlıdır. Bu esnada $\overline{X_1X_2} = \overline{{X_1}'{X_2}'}$ dir ve B_{II} hareketinin (t_1, t_2) durumuna ait hareketinde X_i, ${X_i}'$ noktaları birbirine karşılık gelir. $T(B_{II})$ değme dönüşümü, yani bir doğru elementini ortak normalli sabit uzaklıktaki paralel bir doğru elementine dönüştüren dönüşüm, bütün uzamalarla değişebilir, [1, 2].*

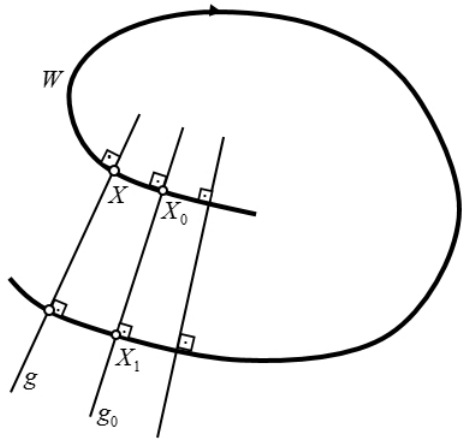
B_{II} hareketine bağlı olan değme dönüşümü, B_I hareketine bağlı olan değme dönüşümünden farklıdır. Ancak, eğer SB_I hareketi SB_{II} hareketinden elde ediliyorsa,

$g = g(\theta, t(\theta))$, $g' = g'(\theta, t(\theta))$ olmak üzere sonsuz tane $\{X, g\} \to \{X', g'\}$ element çifti vardır.

3.4 Belirlenmiş Kutup Ekseninin Tanımladığı Hareket

Burada genel olarak her konumda yoğunluğu sıfır olmayan E düzlemindeki g doğrusunun, E' düzlemindeki g' doğrusuna dönüşümü göz önüne alınacaktır. Önceden belirlenmiş yoğunluğu koruyan kutup eksen dönüşümü ile B_{II} iki parametreli düzlemsel hareketlerin ailesinin bir üyesi olduğu gösterilecektir, [1, 2]:

E düzleminde bir g_0 doğrusu ve üzerinde bir X_0 noktasını ve bunlara karşılık gelen E' düzleminde $g_0^{'}$ doğrusunu ve üzerindeki $X_0^{'}$ noktasını belirleyelim. $X_0 \to X_0^{'}$ nokta dönüşümünü, g_0 doğrusuna komşu g doğrusu üzerindeki bir X noktasının görüntüsü de $g_0^{'}$ doğrusuna komşu g' doğrusundaki X' noktası olacak şekilde genişletelim. Böylece, g_0 doğrusu $g(\psi)$ ailesinin $g(\psi_0) = g_0$ ile bir üyesi olarak seçilmiş olur. Bu durumda, $g_0^{'}$ doğrusu da $g'(\psi')$ ailesinin $g'\left({\psi_0}'\right) = {g_0}'$ ile bir üyesidir. $X_0 \to X_0^{'}$ noktalarından başlayan ve bu noktalardaki doğruların ailesini dik kesen $W \to W'$ evolüt eğrileri $g \to g'$ doğrularını $X \to X'$ noktasında kessin. Şimdi özellikle kapalı $g(\psi)$, $g'(\psi')$ ailelerini $g(\psi_1) = g(\psi_0) = g_0$ ve $g'({\psi'}_1) = g'({\psi'}_0) = {g_0}'$ ile seçelim ve doğruların $W \to W'$ evolütlerindeki yeni kesim noktaları X_1 ve ${X_1}'$ olsun, Şekil 3.4.



Şekil 3.4 g doğru ailesinin evolventi

Bu sıra modeline göre evolventin kesim noktaları arasındaki E düzlemindeki $\overline{X_0X_1}$ ve E' düzlemindeki $\overline{{X_0}'{X_1}'}$ uzunlukları ile ilgili kapalı zarf eğrisinin çevre uzunluğu, kutup eksen yoğunluklarının aynı olması ve Cauchy-çevre formülü (3.8) yardımıyla

$$\overline{X_0X_1} = \int_{\psi_0}^{\psi_1} h\,d\psi = \int_{{\psi_0}'}^{{\psi_1}'} h'\,d\psi' = \overline{{X_0}'{X_1}'}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten dönüşümün uzaklığı koruduğu görülür ve dolayısıyla bu dönüşüm bir harekettir.

Özetle;

g_0 doğrusunu $g_0^{'}$ doğrusuna ve X_0 noktasını $X_0^{'}$ noktasına resmeden (θ_0, t_0) hareketi esnasında, X_1 noktasının resmi de $X_1{}'$ noktasıdır. g doğrusunu g' doğrusuna ve X noktasını X' noktasına resmeden (θ, t) hareketi, $g(\psi)$ ve $g'(\psi')$ ailelerinin seçimine (nasıl seçildiğine) bağlı değildir ve böylece θ ve t parametreleriyle tanımlanan B_{II} hareketi aslında önceden belirlenmiş eksen dönüşümüne sahiptir. Her sonsuz küçük $(\theta_0, t_0) \to (\theta_0 + d\theta, t_0 + dt)$ hareketinde X noktası g_0 doğrusu üzerindeki X_0 noktası için dik bir yol tarif eder. Dolayısıyla, ilgili dönme pol noktalarının g_0 üzerinde bulunması gerekir.

Bu nedenle, önceden belirlenmiş yoğunluğu koruyan kutup eksen dönüşümü; 2-parametreli düzlemsel hareketlerin bir ailesine aittir. Bu aileden seçilen $g \to g'$ ortak eksen dönüşümlü iki B_{II} hareketi birbirine ***özdeş***tir denir.

3.5 Hareketli Koordinat Sistemi ile Hareketlerin Kutup Eksenine Göre Belirlenmesi

B_{II} hareketi ile kutup eksenleri $g \in E \to g' \in E'$ gibi yoğunlukları değiştirmeyen bir doğru dönüşümüne bağlıdır. Yani, E ve E' düzlemleri bu yoğunluğu değiştirmeyen doğrular dönüşümü ile birbirine dönüşürler. Şimdi tersine, hareketli koordinat sistemi yardımıyla E ve E' düzlemleri arasında böyle yoğunluğu değiştirmeyen doğrular dönüşümü kabulü altında B_{II} 2-parametreli hareketi incelenecektir, [1, 2]:

E düzleminde $\{O; \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ koordinat sistemi ile g doğrusunun denklemi

$$x \cos\psi + y \sin\psi = h$$

olmak üzere buna karşılık gelen E' düzleminde $\left\{O'; \mathbf{e_1}^{'}, \mathbf{e_2}^{'}\right\}$ koordinat sistemi ile g' doğrusunun denklemi için

$$x' \cos\psi' + y' \sin\psi' = h'$$

yazılabilir.

Bölüm 2.1'de, doğru yoğunlukları $\psi(t_1, t_2)$, $h(t_1, t_2)$; $\psi'(t_1, t_2)$, $h'(t_1, t_2)$ fonksiyonları için

$$dg = dh \wedge d\psi = dh' \wedge d\psi' = dg' \tag{3.20}$$

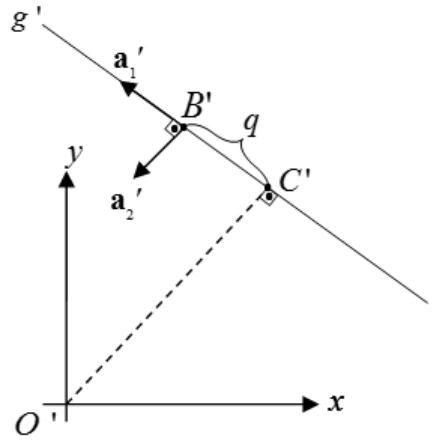
şeklinde tanımlanmıştır.

Şimdi, E ve E' düzlemlerinde, sırasıyla, $\{B;\mathbf{a_1},\mathbf{a_2}\}$ ve $\left\{B';\mathbf{a_1}',\mathbf{a_2}'\right\}$ hareketli koordinat sistemleri $\{B,\mathbf{a_1}\}$ ekseni g doğrusu üzerinde ve $\left\{B',\mathbf{a_1}'\right\}$ ekseni g' doğrusu üzerinde olacak şekilde ele alınacaktır.

(2.35), (2.36) türev denklemleri ve (2.41), (2.42) integrallenebilme şartları geçerli olduğundan ortak $dg = dg'$ yoğunluğu için (3.12) bağıntısı veya

$$d\sigma_1 = d\sigma_1' \tag{3.21}$$

yazılabilir.



Şekil 3.5 $g' \in E'$ düzleminde hareketli koordinatlı sistemi

E' düzleminde g' doğrusu üzerinde $\left\{B';\mathbf{a_1}',\mathbf{a_2}'\right\}$ koordinat sisteminin hareket etmesiyle O' noktasından doğruya indirilen dikmenin kesim noktası C' noktasına ulaştığını kabul edilirse bu noktada $\left\{C';\mathbf{a_1}',\mathbf{a_2}'\right\}$ sistemini ele alınabilir. Şekil 3.5 'e göre

$$\mathbf{c}' = \mathbf{C}'\mathbf{O}' = \mathbf{B}'\mathbf{O}' + \mathbf{C}'\mathbf{B}'$$

veya

$$\mathbf{c}' = \mathbf{b}' + \mathbf{a_1}'q \tag{3.22}$$

yazılabilir.

g ve g' kutup eksenleri ile tanımlanan E düzleminin E' düzlemine göre 2-parametreli hareketi Bölüm 2.3.2 de belirtilen hareketli koordinat sistemi ile açıklanır. Yani, E düzleminin E' düzlemine göre hareketi, her defasında $\{B = C;\mathbf{a_1},\mathbf{a_2}\}$ ve $\left\{C';\mathbf{a_1}',\mathbf{a_2}'\right\}$ eksen sistemlerinin $C = C',\ \mathbf{a_j} = \mathbf{a_j}'$ olmasıyla meydana gelir.

(2.36) türev denklemlerine benzer olarak C' noktasının E' düzlemine göre değişimi

genel olarak

$$d\mathbf{c}' = \mathbf{a}_1' w_1' + \mathbf{a}_2' w_2' \tag{3.23}$$

olmak üzere (3.22) eşitliğinden C' noktasının değişimi için

$$d\mathbf{c}' = d\mathbf{b}' + \mathbf{a}_1' dq + d\mathbf{a}_1' q \tag{3.24}$$

bulunur. Bu eşitlikte (2.36) türev denklemleri kullanılırsa

$$d\mathbf{c}' = \mathbf{a}_1'(\sigma_1' + dq) + \mathbf{a}_2'(\sigma_2' + q\tau') \tag{3.25}$$

bulunur. (3.23) ve (3.25) eşitlikleri karşılaştırılırsa

$$\mathbf{a}_1' w_1' + \mathbf{a}_2' w_2' = \mathbf{a}_1'(\sigma_1' + dq) + \mathbf{a}_2'(\sigma_2' + q\tau')$$

veya

$$\begin{cases} w_1' = \sigma_1' + dq, \\ w_2' = \sigma_2' + q\tau' \end{cases} \tag{3.26}$$

elde edilir.

B_{II} hareketinde $g = \{B, \mathbf{a}_1\}$ ve $g' = \left\{C', \mathbf{a}_1'\right\}$ olduğundan (3.10) eşitliğine göre

$$\sigma_1 = w_1'$$

elde edilir. Bu eşitlikten (3.26) eşitliklerinden ilki için

$$dq = \sigma_1 - \sigma_1' \tag{3.27}$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklemde q doğru parçasının (kayma rotasının) belirlenebilmesi, integrallenebilme şartları sağlandığı için daima mümkündür. (3.27) denkleminden tekrar diferansiyel alınırsa

$$d(dq) = d\sigma_1 - d\sigma_1'$$

olmak üzere (3.21) eşitliğinden

$$d(dq) = 0 \tag{3.28}$$

olur. Yani, dq bir tam diferansiyeldir ve q integrasyonla bulunabilir: (3.27) denkleminden

$$q = \int (\sigma_1 - \sigma_1') \tag{3.29}$$

yazılabilir. σ_1 ve $\sigma_1{}'$ iki değişkenli Pfaff form olduğundan genel olarak ikisinin farkı

$$\sigma_1 - \sigma_1^{'} = A(t_1, t_2)dt_1 + B(t_1, t_2)dt_2$$

olmak üzere bu eşitlik (3.12) denkleminde yerine yazılırsa dq tam diferansiyeli

$$dq = A(t_1, t_2)dt_1 + B(t_1, t_2)dt_2$$

veya

$$\frac{\partial q}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial q}{\partial t_2}dt_2 = A(t_1, t_2)dt_1 + B(t_1, t_2)dt_2$$

yazılabilir. Yani,

$$\frac{\partial q(t_1, t_2)}{\partial t_1} = A(t_1, t_2)$$

ve

$$\frac{\partial q(t_1, t_2)}{\partial t_2} = B(t_1, t_2)$$

elde edilir. Birinci eşitlikte t_2 sabit tutulup t_1 değişkenine göre integral alınırsa

$$q = \int A(t_1, t_2)dt_1 + c(t_2)$$

bulunur. $c(t_2)$ integral sabiti olmak üzere q doğru parçasının belirlenmesi daima keyfi bir parametre ile mümkündür.

Bu durumda E ve E' düzlemlerinin yoğunluğu değiştirmeyen sonsuz tane (her konum için farklı bir kutup ekseni mevcut olacağından) $g \rightarrow g'$ doğru dönüşümü Bölüm 4.4 te anlatılan özdeş 2-parametreli hareketlerdir. Bu özdeş hareketler ortak eksen dönüşümlü ($g = g'$) dür.

Buradan aşağıdaki teoremin ispatı elde edilmiş olur:

Teorem 3.6. *E ve E′ düzlemlerinin yoğunluğu değiştirmeyen bir g → g′ doğru dönüşümü ile: E düzleminin E′ düzlemine göre (ve tersi) 2-parametreli hareketlerinin 1-parametreli bir ailesi belirtilir, [1, 2].*

Tanım 3.1. Ortak eksen dönüşümlü iki hareket birbirine ***paraleldir*** denir, [1, 2].

3.6 Eğri Elementi Çizen Noktalar

B_{II} hareketi altında bir noktanın nokta yoğunluğu ve nokta yoğunluğunun sıfır olması durumu verilecektir, [1, 2]:

Bir X noktasının E düzleminde sabit olması ile E' düzlemindeki hız vektörü, yani

sürüklenme hız vektörü genel olarak $\overrightarrow{d_f \mathbf{x}} = \mathbf{a_1}\eta_1 + \mathbf{a_2}\eta_2$ olmak üzere X noktasının E' düzlemindeki yüzey elementi veya nokta yoğunluğu

$$d_f x = \eta_1 \wedge \eta_2$$

alterne çarpımı ile ifade edilebilir. Burada η_1 ve η_2 birer t_1 ve t_2 reel bağımsız değişkenlerine bağlı 1-form olduklarından $d_f x$ yüzey elementi bir 2-formdur. Alterne çarpımın kullanılması, nokta yoğunluğunun bir ön işaret almasını, yani $d_f x$ yüzey elementinin $-d_f x$ yüzey elementinden farklı olduğunu gösterir.

X noktasının E' düzlemindeki nokta yoğunluğu, (2.51) eşitlikleri kullanılarak

$$\eta_1 \wedge \eta_2 = \left[-(\sigma_1^{'} - \sigma_1) - y(\tau' - \tau)\right] \wedge \left[-(\sigma_2^{'} - \sigma_2) + x(\tau' - \tau)\right]$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\eta_1 \wedge \eta_2 = &-x(\sigma_1^{'} - \sigma_1) \wedge (\tau' - \tau) + y(\tau' - \tau) \wedge (\sigma_2^{'} - \sigma_2) + (\sigma_1^{'} - \sigma_1) \wedge (\sigma_2^{'} - \sigma_2) \\ &- xy(\tau' - \tau) \wedge (\tau' - \tau)\end{aligned}$$

veya alterne çarpımın özelliğinden son eşitlik

$$\eta_1 \wedge \eta_2 = -x(\sigma_1^{'} - \sigma_1) \wedge (\tau' - \tau) - y(\sigma_2^{'} - \sigma_2) \wedge (\tau' - \tau) + (\sigma_1^{'} - \sigma_1) \wedge (\sigma_2^{'} - \sigma_2) \quad (3.30)$$

şeklinde düzenlenebilir.

Pol noktalarının (2.53) denklemi göz önüne alınırsa

$$\left(\sigma_2^{'} - \sigma_2\right) = p_1\left(\tau' - \tau\right), \quad \left(\sigma_1^{'} - \sigma_1\right) = -p_2\left(\tau' - \tau\right)$$

yazılabilir ve bu değerler (3.30) de yerine yazılırsa $\eta_1 \wedge \ \eta_2 = 0$ elde edilir. Böylece pol noktalarının nokta yoğunluğunun sıfır olduğu görülür.

Ayrıca E' düzleminde nokta yoğunluğu sıfır olan X noktaları için $\eta_1 \wedge \ \eta_2 = 0$ olmak üzere

$$-x(\sigma_1^{'} - \sigma_1) \wedge (\tau' - \tau) - y(\sigma_2^{'} - \sigma_2) \wedge (\tau' - \tau) + (\sigma_1^{'} - \sigma_1) \wedge (\sigma_2^{'} - \sigma_2) = 0 \quad (3.31)$$

yazılabilir. Bu eşitliğin sağlanabilmesi için tüm terimlerin kendi içinde sıfır olması, yani $(\sigma_1^{'} - \sigma_1)$, $(\sigma_2^{'} - \sigma_2)$, $(\tau' - \tau)$ Pfaff formlarının lineer bağımlı veya $(\tau' - \tau) = 0$ olması gerekir. $(\sigma_1^{'} - \sigma_1)$, $(\sigma_2^{'} - \sigma_2)$, $(\tau' - \tau)$ Pfaff formları lineer bağımlı ise alterne çarpımın özeeliğinden (3.31) eşitliği sağlanır. $\tau' = \tau$ için ise hareketin her konumunda

pol noktası mevcut olacağından A/E hareketinde $Q=(q_1,q_2)$ pol noktalarının

$$q_1=x_1=\frac{\sigma_2}{\tau},\quad q_2=x_2=-\frac{\sigma_1}{\tau}$$

ve A'/E hareketinde $Q'=(q_1{}',q_2{}')$ pol noktalarının

$$q_1{}'=x_1{}'=\frac{\sigma_2{}'}{\tau},\quad q_2{}'=x_2{}'=-\frac{\sigma_1{}'}{\tau}$$

denklemleri göz önüne alınırsa $\sigma_1{}'-\sigma_1=-\tau\,(x_2{}'-x_2)$ ve $\sigma_2{}'-\sigma_2=\tau\,(x_1{}'-x_1)$ yazılabileceğinden $\eta_1\wedge\eta_2=0$ elde edilir.

Sonuç olarak:

i. $(\sigma_1^{'}-\sigma_1)$, $(\sigma_2^{'}-\sigma_2)$, $(\tau'-\tau)$ Pfaff formları lineer bağımlı ise (2.53) eşitliklerine göre aynı sabit $P=(p_1,p_2)$ polü B_{II} hareketinin (t_1,t_2) konumlu bütün B_I hareketlerine aittir. Yani, bir kutup ekseni oluşmamaktadır.

$$p_1=\frac{\sigma_2^{'}-\sigma_2}{\tau'-\tau}=\text{sabit},\qquad p_2=-\frac{\sigma_1^{'}-\sigma_1}{\tau'-\tau}=\text{sabit}$$

ii. $(\tau'-\tau)=0$ ise, $\dot{\theta}=\frac{\tau'-\tau}{dt}=0\Rightarrow\theta=$ sabit olduğundan hareket sadece ötelemeden oluşur ve (2.53) eşitliklerinden genel olarak sonsuz uzak poller bulunur. Bu durumda, B_{II} hareketinden elde edilen B_I hareketinin pol eğrilerinin yuvarlanması ile meydana gelmesi mümkün değildir.

Bu iki durum gösteriyor ki (3.31) denklemi (t_1,t_2) konumu için B_{II} hareketinin kutup eksenleri ile ilişkilidir.

Özel Durum 3.1 *Burada* $\{B,\mathbf{a_1},\mathbf{a_2}\}$ *hareketli koordinat sistemini özel olarak* $\{B,\mathbf{a_1}\}$ *ekseni kutup ekseni üzerinde olacak şekilde seçerek bir noktanın* E' *düzlemindeki nokta yoğunluğunu incelenecektir, [2]:*

$\{B,\mathbf{a_1}\}$ ekseni kutup ekseni üzerinde olduğundan (2.53) eşitliklerinden $p_2=0$ olacağından

$$\sigma_1=\sigma_1^{'}=\sigma \tag{3.32}$$

elde edilir. Bu ifade (2.50) denkleminde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{d_f\mathbf{x}}=\mathbf{a_1}\left\{-y(\tau'-\tau)\right\}+\mathbf{a_2}\left\{(\sigma_2-\sigma_2^{'})+x(\tau'-\tau)\right\} \tag{3.33}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} \eta_1 = -y\ (\tau' - \tau), \\ \eta_2 = (\sigma_2 - \sigma_2^{'}) + x(\tau' - \tau) \end{cases} \tag{3.34}$$

olduğundan X noktasının E' düzlemindeki nokta yoğunluğu için

$$d_f x = \eta_1 \wedge \eta_2 = -y\ (\sigma_2^{'} - \sigma_2) \wedge (\tau' - \tau) \tag{3.35}$$

elde edilir. Eğer $(\sigma_2^{'} - \sigma_2) \wedge (\tau' - \tau) \neq 0$ ise $d_f x$ yüzey elementi yalnız $x_2 = 0$ olan X noktaları için sıfırdır. Bu noktalar B_{II} hareketinin kutup ekseni üzerinde bulunurlar.

Eğer $(\sigma_2^{'} - \sigma_2) \wedge (\tau' - \tau) = 0$ ise şu iki durum ortaya çıkar:

i. $(\sigma_2^{'} - \sigma_2)$ ve $(\tau' - \tau)$ diferansiyel formları lineer bağımlı ise (2.53) eşitliklerine göre aynı sabit $P = (p_1, 0)$ polü B_{II} hareketinin (t_1, t_2) konumlu bütün B_I hareketlerine aittir.

ii. $(\tau' - \tau) = 0$ ise, $\dot{\theta} = \frac{\tau' - \tau}{dt} = 0 \Rightarrow \theta =$ sabit bağıntısından hareket sadece ötelemeden oluşur ve (2.53) eşitliklerinden genel olarak sonsuz uzak poller bulunur. Bu durumda hareketin pol eğrilerinin yuvarlanması ile hareketin meydana gelmesi mümkün değildir.

Böylece, aşağıdaki teorem ispatsız verilebilir:

Teorem 3.7. *Bir B_{II} hareketinde genel olarak hareketli E düzleminin (t_1, t_2) konumunda yüzey elementi değil, bir eğri elementi çizen noktalar kutup ekseni üzerinde bulunurlar. Yani, g kutup ekseni E düzleminde eğri çizen noktalarının geometrik yeridir, [1, 2].*

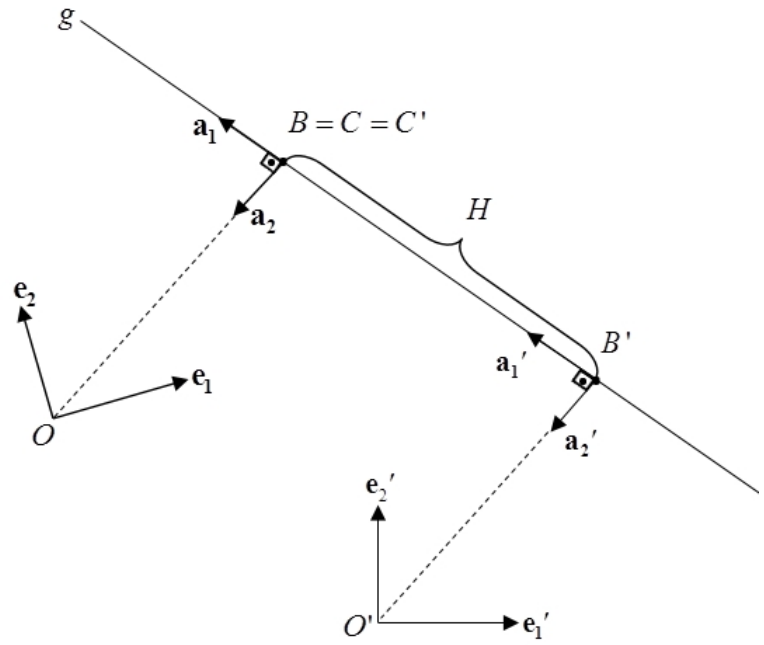
Sonuç 3.1

- 2-parametreli B_{II} hareketi esnasında nokta yoğunluğu "0" olan tüm noktalar E düzleminde kutup ekseni üzerinde bulunurlar.
- B_{II} hareketinden elde edilen bütün B_I hareketlerinde nokta yoğunluğu "0" olduğundan B_{II} hareketi esnasında B_I ile hareket eden noktalar E düzleminde sadece kutup ekseni üzerinde bulunurlar. Kutup ekseni üzerindeki noktalar dışındaki noktalar ise B_{II} hareketi ile hareket ederler. Nokta yoğunluğu "0" olan noktalar 1- parametreli hareketlerdeki gibi hareket ederler.

3.7 Destek Fonksiyonu

Hareketli koordinat sistemi yardımıyla bir B_{II} hareketinin destek fonksiyonu tanımlanacaktır, [1, 2]:

E düzleminde, O başlangıç noktasından $g = g'$ doğrusuna çizilen dikme ayağı $B = C$ ve benzer şekilde, E' düzleminde, O' başlangıç noktasından $g = g'$ doğrusuna çizilen dikme ayağı B' noktası olsun, Şekil 3.6.



Şekil 3.6 B_{II} hareketinin destek fonksiyonu

Şekil 3.2'ye göre $k = 0$ olduğundan (3.13) denklemi

$$\mathbf{b} = \mathbf{BO} = \mathbf{a_2}h \tag{3.36}$$

olacağından (3.15) sistemi yerine de

$$\begin{cases} \sigma_1 = -h\tau, \\ \sigma_2 = \ dh \end{cases} \tag{3.37}$$

elde edilir. Benzer şekilde, E' düzlemi için de

$$\begin{cases} \sigma_1^{'} = -h'\tau', \\ \sigma_2^{'} = \ dh' \end{cases} \tag{3.38}$$

elde edilir.

Burada Bölüm 3.5'de tanımlanan q kayma rotasının özel bir durumu verilir. Bunun için $\left\{B'; \mathbf{a}_1^{'}, \mathbf{a}_2^{'}\right\}$ eksen sistemi benzer şekilde $\left\{C'; \mathbf{a}_1^{'}, \mathbf{a}_2^{'}\right\}$ sistemine kaydırılır. $|\mathbf{BB}'| = H$

olmak üzere (3.29) eşitliğinde (3.37) ve (3.38) değerleri yerlerine yazılırsa

$$H = \int (-h\tau + h'\tau') = \int (-hd\varphi + h'd\varphi') \tag{3.39}$$

elde edilir.

Buradan itibaren

$$\tau \wedge \tau' \neq 0 \tag{3.40}$$

alınarak harekete bir sınırlama getirilir. Bu durumda $\tau = d\varphi$ ve $\tau' = d\varphi'$ lineer bağımsızdır. Böylece, t_1 ve t_2 değişkenleri yerine φ ve φ' açıları bağımsız değişkenler olarak seçilebilir. O halde, eksen düzlemimiz her iki $h(\varphi, \varphi')$ ve $h'(\varphi, \varphi')$ fonksiyonları ile gösterilebilir. Burada, 1-parametreli $g \in L$ doğru ailesinin $h(\varphi, \varphi')$ dayanak fonksiyonu $\varphi' =$ sabit alınmasıyla ve benzer şekilde 1-parametreli $g' \in L'$ doğru ailesinin $h'(\varphi, \varphi')$ dayanak fonksiyonu da $\varphi =$ sabit alınmasıyla elde edilir.

(3.39) denkleminde H fonksiyonu φ ve φ' değişkenlerine göre türetilirse

$$dH = -hd\varphi + h'd\varphi' = H_\varphi d\varphi + H_{\varphi'} d\varphi' \tag{3.41}$$

olmak üzere

$$\begin{cases} H_\varphi = -h, \\ H_{\varphi'} = h' \end{cases} \tag{3.42}$$

elde edilir.

Tanım 3.2. $H(\varphi, \varphi')$ fonksiyonu B_{II} hareketinin ***destek fonksiyonu*** olarak isimlendirilir, [1, 2].

B_{II} hareketinin $H(\varphi, \varphi')$ fonksiyonu yardımıyla $\mathbf{c}$ konum vektörü Şekil 3.6'ya göre $\mathbf{BO} = \mathbf{CO} = \mathbf{c}$ olmak üzere

$$\mathbf{c} = \mathbf{a_2} h \tag{3.43}$$

yazılabilir. $\mathbf{c}$ vektörünün E düzlemine göre değişimi

$$d\mathbf{c} = \mathbf{a_2} dh + d\mathbf{a_2} h$$

veya (3.42) ve (2.35) türev denklemleri yardımıyla

$$d\mathbf{c} = \mathbf{a_1}(H_\varphi \tau) - \mathbf{a_2} dH_\varphi \tag{3.44}$$

şeklindedir.

Benzer şekilde, $\mathbf{c}' = \mathbf{C}'\mathbf{O}' = \mathbf{C}'\mathbf{B}' + \mathbf{B}'\mathbf{O}'$ olmak üzere

$$\mathbf{c}' = -\mathbf{a}_1' H + \mathbf{a}_2' h' \tag{3.45}$$

yazılabilir. $\mathbf{c}'$ vektörünün E' düzlemine göre değişimi ise

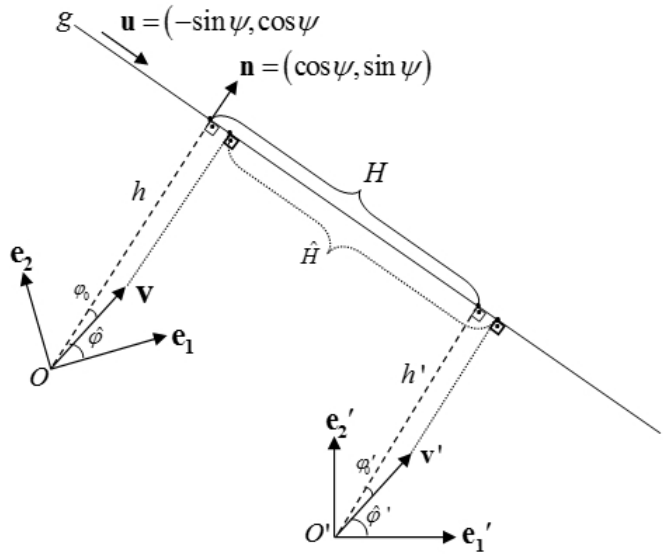
$$d\mathbf{c}' = -\mathbf{a}_1' dH - d\mathbf{a}_1' H + \mathbf{a}_2' dh' + d\mathbf{a}_2' h'$$

bulunur. (3.39), (3.42) eşitlikleri ve (2.36) türev denklemleri yardımıyla son eşitlikten

$$d\mathbf{c}' = -\mathbf{a}_1' (H_\varphi \tau + 2H_{\varphi'} \tau') - \mathbf{a}_2' (H\tau' - dH_{\varphi'}) \tag{3.46}$$

elde edilir.

Şimdi, E ve E′ düzlemlerinin, sırasıyla, $\{O; \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ ve $\{O'; \mathbf{e_1}', \mathbf{e_2}'\}$ koordinat sistemlerinde alınan $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e_1} + v_2\mathbf{e_2}$ ve $\mathbf{v}' = v_1'\mathbf{e_1}' + v_2'\mathbf{e_2}'$ vektörleri φ_0 ve φ_0' açısı kadar döndürülsün. Bu durumda H destek fonksiyonunun değişimi incelenecektir:



Şekil 3.7 Vektörlerin dönmesi ile destek fonksiyonun değişimi

Yeni $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{v}'$ başlangıç noktaları için H destek fonksiyonunun kutup ekseninde ne kadar kaydığını bulmak için $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{v}'$ vektörlerinin doğru üzerindeki izdüşümlerini hesap edelim:

$\mathbf{v}$ vektörünün g ekseni üzerindeki izdüşüm vektörünün boyu

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle (v_1, v_2), (-\sin\psi, \cos\psi) \rangle = -v_1 \sin\psi + v_2 \cos\psi \tag{3.47}$$

ve benzer şekilde $\mathbf{v}'$ vektörünün eksen üzerindeki izdüşüm vektörünün boyu

$$\left\langle \mathbf{v}', \mathbf{u}' \right\rangle = \left\langle \left(v_1^{'}, v_2^{'}\right), \left(-\sin\psi', \cos'\right) \right\rangle = -v_1' \sin\psi' + v_2' \cos\psi' \tag{3.48}$$

şeklindedir. Bu durumda, $\hat{H}$ kayma rotası için Şekil 3.7'ye ve (3.47), (3.48) eşitliklerine göre

$$\hat{H} = H - (-v_1 \sin\psi + v_2 \cos\psi) + \left(-v_1^{'} \sin\psi' + v_2^{'} \cos\psi'\right) \tag{3.49}$$

yazılabilir. Son eşitlikten $d\hat{H}$ değişimi için

$$d\hat{H} = dH + v_1 \cos\psi \; d\psi + v_2 \sin\psi \; d\psi - v_1' \cos\psi' d\psi' - v_2' \sin\psi' d\psi' \tag{3.50}$$

elde edilir. (3.39) denklemine göre

$$dH = -h d\varphi + h' d\varphi'$$

ve $d\psi = d\varphi$ olmak üzere (3.50) denklemini için

$$d\hat{H} = -(h - v_1 \cos\psi - v_2 \sin\psi)\, d\varphi + \left(h' - v_1^{'} \cos\psi' - v_2^{'} \sin\psi'\right) d\varphi'$$

bulunur. Burada ($\hat{h}$ fonksiyonu $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ noktasının g kutup eksenine uzaklığıdır)

$$\hat{h} = h - v_1 \cos\psi - v_2 \sin\psi \tag{3.51}$$

ve ($\hat{h}'$ fonksiyonu $\mathbf{v}' = (v_1{}', v_2{}')$ noktasının g' kutup eksenine uzaklığıdır)

$$\hat{h}' = h' - v_1' \cos\psi' - v_2' \sin\psi' \tag{3.52}$$

alınırsa

$$d\hat{H} = -\hat{h} d\varphi + \hat{h}' d\varphi' \tag{3.53}$$

elde edilir. Buradan

$$\hat{H} = \int \left(-\hat{h} d\varphi + \hat{h}' d\varphi'\right) \tag{3.54}$$

yazılabilir.

Ayrıca (3.51) ve (3.52) eşitliklerinden $\hat{h}$ ve $\hat{h}'$, sırasıyla, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ ve $\mathbf{v}' = \left(v_1^{'}, v_2^{'}\right)$ noktalarının g ve g' doğrularına uzaklık fonksiyonlarıdır. Aynı zamanda hareketli ve sabit sistemlerdeki dönme

$$\hat{\varphi} = \psi - \varphi_0, \quad \text{ve} \quad \hat{\varphi}' = \psi' - \varphi_0' \tag{3.55}$$

açısı kadardır.

Yani, E ve E' düzlemlerinde vektörlerin döndürülmesi ile B_{II} hareketinin tekrar $H(\varphi,\varphi')$ destek fonksiyonu belirlenmiş oldu.

3.8 Yoğunluğu Sıfır Olan Kutup Eksenlerinin Destek Fonksiyonu ile Zarf Eğrileri

Bölüm 3.2'de kutup ekseni yoğunluğu sıfır olan bir B_{II} hareketi birbirinden bağımsız 1-parametreli iki harekete parçalanabildiği verilmiştir. Burada Bölüm 3.7'de ifade edilen $H(\varphi,\varphi')$ destek fonksiyonu ile g ve g' kutup eksenlerinin yoğunluklarının sıfır olması durumunda B_{II} hareketi tekrar ele alınacaktır, [1, 2]:

(3.44) ve (3.46) denklemlerinden

$$d\mathbf{c} = \mathbf{a_1}(H_\varphi \tau) - \mathbf{a_2} dH_\varphi$$

ve

$$d\mathbf{c}' = -\mathbf{a_1}'(H_\varphi \tau + 2H_{\varphi'}\tau') - \mathbf{a_2}'(H\tau' - dH_{\varphi'})$$

olmak üzere $\mathbf{c}$ ve $\mathbf{c}'$ konum vektörlerinin değişimi için genel olarak

$$d\mathbf{c} = \mathbf{a_1}\sigma_1 + \mathbf{a_2}\sigma_2$$

ve

$$d\mathbf{c}' = \mathbf{a_1}'\sigma_1' + \mathbf{a_2}'\sigma_2'$$

yazılabilir. Bu durumda, $d\mathbf{c}$ ve $d\mathbf{c}'$ eşitliklerinden

$$\begin{cases} \sigma_1 = H_\varphi \tau, \\ \sigma_2 = -dH_\varphi = -(H_{\varphi\varphi}\tau + H_{\varphi\varphi'}\tau') \end{cases} \tag{3.56}$$

ve

$$\begin{cases} \sigma_1' = -H_\varphi \tau - 2H_{\varphi'}\tau', \\ \sigma_2' = -H\tau' + dH_{\varphi'} = -H\tau' + H_{\varphi\varphi'}\tau + H_{\varphi'\varphi'}\tau' \end{cases} \tag{3.57}$$

elde edilir.

(3.56) ve (3.57) eşitlikleri kullanılarak hareketli koordinat sistemi yardımıyla kutup eksenlerinin yoğunlukları için (3.17) ve (3.18) bağıntılarından

$$dg = \sigma_2 \wedge \tau = H_{\varphi\varphi'}\tau \wedge \tau'$$

ve

$$dg' = \sigma_2^{'} \wedge \tau' = H_{\varphi\varphi'}\tau \wedge \tau'$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 3.1'de ifade edildiği gibi ortak yoğunluk için

$$dg = dg' = H_{\varphi\varphi'}\tau \wedge \tau' \tag{3.58}$$

olduğu görülür.

Buradan,

$$\tau \wedge \tau' \neq 0 \tag{3.59}$$

ile harekete bir sınırlama getirildiğinden, eksen yoğunluğu sıfır olan B_{II} hareketi için

$$dg = H_{\varphi\varphi'}\tau \wedge \tau' = 0$$

olmak üzere

$$H_{\varphi\varphi'} = 0 \tag{3.60}$$

elde edilir. Bu durumda, H destek fonksiyonu için genel olarak (3.41) eşitliği yardımıyla

$$H = -F(\varphi) + G(\varphi') \tag{3.61}$$

yazılabilir.

E düzlemindeki kutup eksenin Hesse formunda denklemi

$$x\cos\psi + y\sin\psi = h$$

veya

$$x\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + y\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = h$$

olmak üzere

$$x\sin\varphi - y\cos\varphi = h \tag{3.62}$$

ve benzer olarak E' düzlemindeki bir kutup eksenin Hesse formunda denklemi

$$x'\cos\psi' + y'\sin\psi' = h'$$

veya

$$x'\cos\left(\varphi' - \frac{\pi}{2}\right) + y'\sin\left(\varphi' - \frac{\pi}{2}\right) = h'$$

olmak üzere

$$x'\sin\varphi' - y'\cos\varphi' = h' \tag{3.63}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan (3.42) ve (3.61) eşitliklerine göre

$$\begin{cases} x\sin\varphi - y\cos\varphi = -H_{\varphi} = \dfrac{dF(\varphi)}{d\varphi} \\ x'\sin\varphi' - y'\cos\varphi' = H_{\varphi'} = \dfrac{dG(\varphi')}{d\varphi'} \end{cases} \tag{3.64}$$

elde edilir. Bu eşitlikler yardımıyla H destek fonksiyonunun E ve E' düzlemlerinde ait olduğu eksenler kesin olarak belirlenir. Buradan parçalanabilen B_{II} hareketi şu şekilde açıklanır:

(3.64) bağıntılarında her iki tarafın integrali alınması ile

$$\begin{cases} -x\cos\varphi - y\sin\varphi = F(\varphi), \\ -x'\cos\varphi' - y'\sin\varphi' = G(\varphi') \end{cases} \tag{3.65}$$

elde edilir. Burada $F(\varphi)$ ve $G(\varphi')$, sırasıyla, g ve g' doğru ailelerinin zarf eğrileridir. Buradan (3.61) eşitliğinden F ve G fonksiyonları yerine, $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $F + c$ ve $G + c$ alınabilir.

Ayrıca, $F(\varphi)$ ve $G(\varphi')$ eğrileri, sırasıyla, g ve g' kutup eksenleri üzerinde kaymaksızın yuvarlanırlar. B_{II} hareketinde iki yuvarlanma hareketi görülür, Teorem 3.4.

3.9 Esas-B_I Hareketi ve Kanonik İzafe Sistemi

Burada ilk olarak B_{II} hareketinden elde edilen Esas-B_I hareketi, Esas-B_I hareketinin pol noktası olan Esas-dönme polü ve kanonik izafe sistemi tanımlanacaktır, [1, 2]:

3.9.1 Esas-B_I Hareketi

B_{II} hareketinden elde edilen B_I hareketleri için P dönme polü Bölüm 2.3.3.2'de (2.53) denklemleri ile

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\sigma_2^{'} - \sigma_2}{\tau' - \tau} \\ p_2 = -\dfrac{\sigma_1^{'} - \sigma_1}{\tau' - \tau} \end{cases}$$

olarak verilmişti.

Tanım 3.3. B_{II} hareketinin herhangi bir konumunda ***Esas-B_I hareketi***: hareketli (P) pol eğrisinin simetriği olan sabit (P') pol eğrisi üzerinde $\varphi = -\varphi'$ şartları altında, yani simetrik yuvarlanması ile tanımlanır. Hareketli (P) pol eğrisinin kotengenz açısı τ ve

sabit (P') pol eğrisinin kotengenz açısı τ' olmak üzere simetrik yuvarlanma için bu açılar eşit ve ters işarette olacağından hareket

$$\tau + \tau' = 0 \tag{3.66}$$

eşitliği ile karakterize edilir.

Tanım 3.4. B_{II} hareketinden elde edilen Esas-B_I hareketi esnasında meydana gelen dönme polüne B_{II} hareketinin ***Esas-polü*** denir ve Q ile gösterilir. Buradan,

$$\tau \wedge \tau' \neq 0 \tag{3.67}$$

kabulü altında (2.53) eşitliğinden Q Esas-dönme polünün koordinatları

$$\begin{cases} q_1 = p_1|_{\tau+\tau'=0} = \dfrac{\left(\sigma_2^{'} - \sigma_2\right) \wedge (\tau + \tau')}{(\tau' - \tau) \wedge (\tau + \tau')}, \\ \\ q_2 = p_2|_{\tau+\tau'=0} = -\dfrac{\left(\sigma_1^{'} - \sigma_1\right) \wedge (\tau + \tau')}{(\tau' - \tau) \wedge (\tau + \tau')} \end{cases}$$

veya

$$\begin{cases} q_1 = -\dfrac{\left(\sigma_2^{'} - \sigma_2\right) \wedge (\tau + \tau')}{2(\tau \wedge \tau')} \\ \\ q_2 = \dfrac{\left(\sigma_1^{'} - \sigma_1\right) \wedge (\tau + \tau')}{2(\tau \wedge \tau')} \end{cases} \tag{3.68}$$

şeklindedir.

3.9.2 Kanonik İzafe Sistemi

Tanım 3.5. ***Kanonik izafe sistemi*** (3.66) kabulü altında $\{B; \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}\}$ ve $\left\{B'; \mathbf{a_1}^{'}, \mathbf{a_2}^{'}\right\}$ hareketli koordinat sistemlerinde aşağıdaki şartlar ile tanımlanmaktadır:

- B ve B' başlangıçları Esas-pol olmak üzere
- $\{B, \mathbf{a_1}\}$ ve $\left\{B', \mathbf{a_1}^{'}\right\}$ eksenleri B_{II} hareketinin g ve g' kutup eksenleri üzerinde bulunacak şekilde seçilerek, [1, 2].

Buradan, $\tau' + \tau = 0$ olduğundan (3.68) eşitliklerinden

$$q_1 = q_2 = 0$$

yazılabilir. Böylece (3.10) bağıntısından $q_2 = 0$ için

$$\sigma_1 = \sigma_1^{'} = \sigma \tag{3.69}$$

elde edilir. (3.68) eşitliğinden $q_1 = 0$ için

$$\left(\sigma_2^{'} - \sigma_2\right) \wedge \left(\tau + \tau'\right) = 0$$

olmalıdır. Alterne çarpım hesaplanırsa

$$\sigma_2^{'} \wedge \tau + \sigma_2^{'} \wedge \tau' - \sigma_2 \wedge \tau - \sigma_2 \wedge \tau' = 0$$

elde edilir. Kutup ekseninin yoğunluk değişmezliğinin

$$\sigma_2 \wedge \tau = \sigma_2^{'} \wedge \tau' \tag{3.70}$$

bağıntısı ile son eşitlikten

$$\sigma_2 \wedge \tau' = \sigma_2^{'} \wedge \tau \tag{3.71}$$

elde edilir.

Burada σ, σ_2 ve $\sigma_2^{'}$ diferansiyel formlarının genel olarak t_1 ve t_2 bağımsız değişkenleri için

$$\sigma_j = A(t_1, t_2)dt_1 + B(t_1, t_2)dt_2 \tag{3.72}$$

şeklinde yazılabildiğinden (3.67) kabulü ile φ, φ' bağımsız değişkenler olarak seçilebileceğinden σ, σ_2 ve $\sigma_2^{'}$ diferansiyel formları için (3.72) ifadesi yerine

$$\begin{cases} \sigma &= A\tau - B\tau', \\ \sigma_2 &= M\tau - N\tau', \\ \sigma_2^{'} &= M'\tau - N'\tau' \end{cases} \tag{3.73}$$

yazılabilir. Bu eşitlikleri (3.70) ve (3.71) eşitliklerinde yerine yazılırsa, sırasıyla,

$$(M\tau - N\tau') \wedge \tau = (M'\tau - N'\tau') \wedge \tau'$$

ve

$$(M\tau - N\tau') \wedge \tau' = (M'\tau - N'\tau') \wedge \tau$$

olmak üzere

$$M' = N \ , \ M = N' \tag{3.74}$$

elde edilir.

$$\sigma = A\tau - B\tau'$$

için

$$d\sigma = d(A\tau) - d(B\tau')$$

bulunur. Buradan

$$d\sigma = \mathrm{d}A \wedge \tau + Ad\tau - dB \wedge \tau' - Bd\tau' \tag{3.75}$$

elde edilir. $A(\varphi, \varphi')$ ve $B(\varphi, \varphi')$ fonksiyonları için

$$dA = A_{\varphi}\tau + A_{\varphi'}\tau' \text{ ve } dB = B_{\varphi}\tau + B_{\varphi'}\tau'$$

olduğundan (3.75) eşitliğinden (2.43) ve (2.44) ifadeleri de esas alınarak

$$d\sigma = -(A_{\varphi'} + B_{\varphi})(\tau \wedge \tau') \tag{3.76}$$

olarak elde edilir. (2.41) ifadesinden σ diferansiyel formunun integrallenebilme şartı

$$d\sigma = -\sigma_2 \wedge \tau$$

olduğundan, bu eşitlikte

$$\sigma_2 = M\tau - N\tau'$$

değeri yerine yazılırsa

$$d\sigma = -N(\tau \wedge \tau') \tag{3.77}$$

elde edilir. Buradan (3.76) ve (3.77) eşitlikleri karşılaştırılırsa

$$N = A_{\varphi'} + B_{\varphi} \tag{3.78}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, $\sigma_2 = M\tau - N\tau'$ için

$$d\sigma_2 = -(M_{\varphi'} + N_{\varphi})(\tau \wedge \tau')$$

ve (3.74) ifadeleri dikkate alınarak $\sigma_2^{'} = N\tau - M\tau'$ için

$$d\sigma_2^{'} = -(M_{\varphi} + N_{\varphi'})(\tau \wedge \tau')$$

elde edilir. Bu eşitlikler ile (2.41), (2.42) integrallenebilme şartlarının (3.73)

bağıntılarına göre değerleri mukayese edilirse

$$B = -M_{\varphi'} - N_{\varphi} \tag{3.79}$$

ve

$$A = -M_{\varphi} - N_{\varphi'} \tag{3.80}$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki teoremleri ispatsız olarak verilebilir:

Teorem 3.8. *Bir B_{II} hareketinin her (t_1, t_2) konumunda, ayna resimli pol eğrilerinin simetrik yuvarlanmasıyla meydana gelen bir Esas-B_I hareketinin Q dönme polü B_{II} hareketinin incelenen durumdaki Esas-polüdür, [2].*

Teorem 3.9. *Bir B_{II} hareketinde $\{Q; \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}\}$ kanonik izafe sistemi, Q Esas-polünde bir başlangıç noktasına sahiptir. Dolayısıyla B_{II} hareketinde $\{Q; \mathbf{a_1}\}$ ekseni $g = g'$ kutup eksenidir, [2].*

Bu kanonik izafe sistemi için (2.35) ve (2.36) denklemlerine göre

$$\begin{cases} d\mathbf{a_1} = \mathbf{a_2}\tau \ , \ d\mathbf{a_2} = -\mathbf{a_1}\tau \ ; \ \mathrm{d}\mathbf{q} = \mathbf{a_1}\sigma + \mathbf{a_2}\sigma_2 \\ d\mathbf{a_1}' = \mathbf{a_2}'\tau' \ , \ d\mathbf{a_2}' = -\mathbf{a_1}'\tau \ ; \ \mathrm{d}\mathbf{q}' = \mathbf{a_1}'\sigma + \mathbf{a_2}'\sigma_2' \end{cases} \tag{3.81}$$

türev denklemleri mevcuttur.

Ayrıca $\sigma = A\tau - B\tau'$ eşitliğinde (3.79) ve (3.80) bağıntıları yerine yazılırsa

$$\sigma = -(M_{\varphi} + N_{\varphi'})\tau + (M_{\varphi'} + N_{\varphi})\tau' \tag{3.82}$$

olacağından

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= M\tau - N\tau', \\ \sigma_2' &= N\tau - M\tau' \end{aligned} \tag{3.83}$$

elde edilir.

M ve N fonksiyonları için (3.79) ve (3.80) eşitliklerine göre (3.78) denkleminden

$$N + 2M_{\varphi\varphi'} + N_{\varphi\varphi} + N_{\varphi'\varphi'} = 0 \tag{3.84}$$

bulunur. M ve N fonksiyonları (3.74) integrallenebilme şartını sağlamak zorundadır.

3.10 Destek Fonksiyonu ile M ve N İnvaryantlarının Geometrik Anlamı

Bu bölümde kanonik izafe sisteminde kullanılan M ve N invaryantlarının H destek fonksiyonu ile yeniden ifadesi ve geometrik anlamları verilecektir, [1, 2]:

Kanonik izafe sistemi ile E ve E' düzlemlerinin, sırasıyla, g ve g' kutup eksenlerinin üzerinde $\{Q;\mathbf{a_1}\}$, $\left\{Q;\mathbf{a_1}'\right\}$ eksenlerini ele alarak kutup eksenlerinin ortak yoğunluğu için (3.17) ve (3.18) eşitliklerine göre

$$dg = dg' = \sigma_2 \wedge \tau = \sigma_2' \wedge \tau'$$

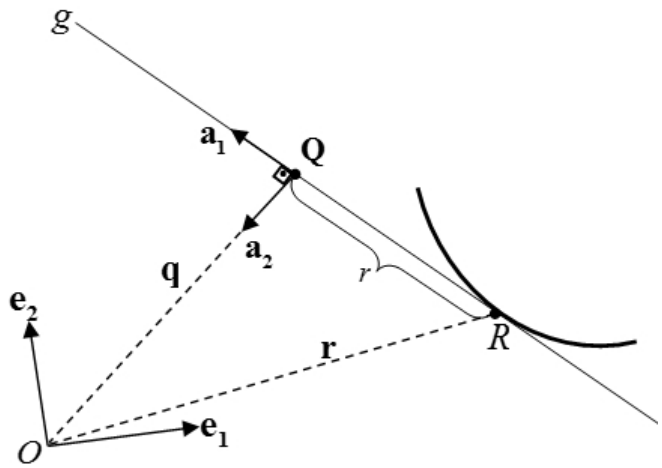
yazılabilir. Bu eşitlikte (3.82) eşitlikleri kullanılarak

$$dg = dg' = N(\tau \wedge \tau') = N(d\varphi \wedge d\varphi') \tag{3.85}$$

elde edilir.

Bu bağıntı ile aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.10. *B_{II} hareketi esnasında elde edilen Esas-B_I hareketinin N invaryantı E ve E' Öklid düzlemlerindeki g ve g' kutup eksenlerinin ortak yoğunluğudur, [2].*



Şekil 3.8 Kanonik izafe sistemi ile g kutup ekseninin zarf eğrisi

$\varphi' =$ sabit doğru ailesindeki g kutup ekseninin zarf eğrisi ile R teğet noktası ve $\varphi =$ sabit ailesindeki g' kutup ekseninin zarf eğrisi ile R' teğet noktası için Şekil 3.8'e göre

$$\mathbf{OR} = \mathbf{r} = -(\mathbf{q} + \mathbf{a_1} r) \tag{3.86}$$

ve benzer şekilde

$$\mathbf{O'R'} = \mathbf{r'} = -\left(\mathbf{q'} + \mathbf{a_1}' r'\right) \tag{3.87}$$

yazılabilir.

Bu eşitliklerden diferansiyel alırsak

$$d\mathbf{r} = -d\mathbf{q} - \mathbf{a_1}dr - d\mathbf{a_1}r \;\text{ ve }\; d\mathbf{r}' = -d\mathbf{q}' - \mathbf{a}_1^{'}dr' - d\mathbf{a}_1^{'}r'$$

olmak üzere (3.81) türev denklemleri yardımıyla

$$d\mathbf{r} = -\mathbf{a_1}(\sigma + dr) - \mathbf{a}_2(\sigma_2 + r\tau) \tag{3.88}$$

ve

$$d\mathbf{r}' = -\mathbf{a}_1^{'}(\sigma + dr') - \mathbf{a}_2^{'}(\sigma_2^{'} + r'\tau') \tag{3.89}$$

elde edilir.

$d\mathbf{r}$ vektörü g ekseni üzerinde bulunduğu için (3.88) eşitliğinde $\mathbf{a_2}$ vektörünün katsayısı için

$$\sigma_2 + r\tau = 0 \tag{3.90}$$

yazılabilir. $\varphi' =$ sabit olduğundan $\tau' = d\varphi' = 0$ olur ve son eşitlik $\sigma_2 = M\tau - N\tau'$ değeri için

$$M\tau + r\tau = 0$$

olup

$$r = -M \tag{3.91}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, $d\mathbf{r}'$ vektörü için $\tau = 0$ olmak üzere

$$\sigma_2^{'} + r'\tau' = 0 \tag{3.92}$$

yazılabileceğinden (3.83) bağıntısında $\sigma_2^{'}$ değeri yerine yazılırsa

$$r' = M \tag{3.93}$$

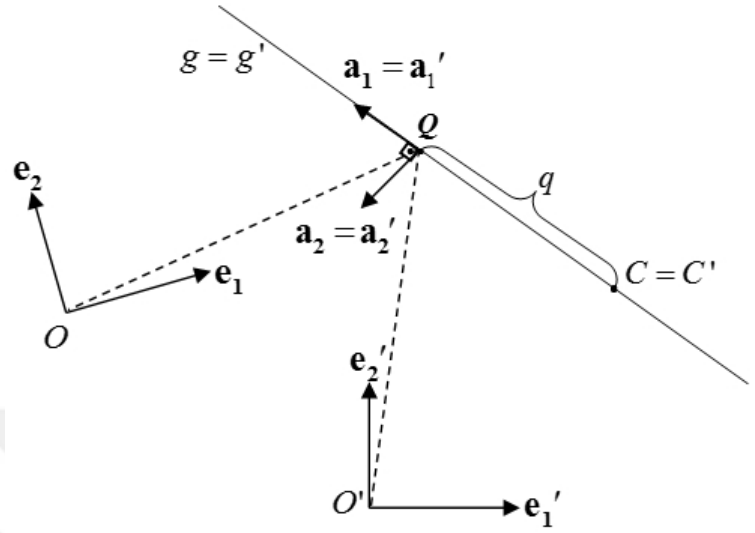
elde edilir.

Böylece, aşağıdaki teorem ispatsız verilebilir:

Teorem 3.11. *B_{II} hareketi esnasında elde edilen Esas-B_I hareketinin M invaryantı kanonik izafe sisteminde Q Esas-polünün kutup eksenlerinin zarf eğrilerinin R ve R′ teğet noktalarına uzaklığıdır, [1, 2].*

3.10.1 M ve N İnvaryantlarının Destek Fonksiyonu ile Yeniden Elde Edilmesi

Bu bölümde kanonik koordinat sistemi yardımıyla Q Esas-polü ve M ve N invaryantları destek fonksiyonu kullanılarak tekrar elde edilecektir, [1, 2]:



Şekil 3.9 Kanonik izafe sisteminde Q Esas-polü

$\mathbf{q} = \mathbf{QO}$, $\mathbf{c} = \mathbf{CO}$ ve $\mathbf{c}' = \mathbf{C}'\mathbf{O}'$, $\mathbf{q}' = \mathbf{QO}'$ olmak üzere

$$\mathbf{q} = \mathbf{c} - \mathbf{a}_1 q \tag{3.94}$$

ve

$$\mathbf{q}' = \mathbf{c}' - \mathbf{a}_1' q \tag{3.95}$$

yazılabilir, Şekil 3.9. (3.94) eşitliğinden diferansiyel alırsak ve (3.44) eşitliğini kullanırsak

$$d\mathbf{q} = \mathbf{a}_1(H_\varphi \tau - dq) + \mathbf{a}_2(-q\tau - dH_\varphi) \tag{3.96}$$

elde edilir. Son eşitlik (3.81) eşitliklerindeki

$$\mathrm{d}\mathbf{q} = \mathbf{a}_1\sigma + \mathbf{a}_2\sigma_2$$

ile karşılaştırılırsa

$$\sigma_2 = -q\tau - dH_\varphi = -(q + H_{\varphi\varphi})\tau - H_{\varphi'\varphi}\tau' \tag{3.97}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, (3.95) eşitliğinden diferansiyel alırsak ve (3.46) eşitliğini kullanırsak

$$d\mathbf{q}' = \mathbf{a}_1'(-H_\varphi \tau - 2H_{\varphi'}\tau' - dq) + \mathbf{a}_2'(-q\tau' - H\tau' + dH_{\varphi'}) \tag{3.98}$$

bulunur. Bu eşitlik (3.81) eşitliklerinde

$$\mathrm{d}\mathbf{q}' = \mathbf{a}_{\mathbf{1}}^{'}\sigma + \mathbf{a}_{\mathbf{2}}^{'}\sigma_{2}^{'}$$

olduğundan (3.98) denkleminden

$$\mathbf{a}_{\mathbf{1}}^{'}\sigma + \mathbf{a}_{\mathbf{2}}^{'}\sigma_{2}^{'} = \mathbf{a}_{\mathbf{1}}^{'}(-H_{\varphi}\tau - 2H_{\varphi'}\tau' - dq) + \mathbf{a}_{\mathbf{2}}^{'}(-q\tau' - H\tau' + dH_{\varphi'}) \tag{3.99}$$

yazılabilir. Son eşitlikten

$$\sigma_{2}^{'} = -q\tau' - H\tau' + dH_{\varphi'} = H_{\varphi\varphi'}\tau - (q + H - H_{\varphi'\varphi'})\tau' \tag{3.100}$$

elde edilir.

(3.97) ve (3.100) eşitlikleri (3.83) ifadeleri ile karşılaştırıldığında

$$M = -\left(q + H_{\varphi\varphi}\right) = q + H - H_{\varphi'\varphi'} \tag{3.101}$$

ve

$$N = H_{\varphi'\varphi} = H_{\varphi\varphi'} \tag{3.102}$$

bulunur.

Buradan (3.101) eşitliğine göre

$$q = -\frac{1}{2}(H + H_{\varphi\varphi} - H_{\varphi'\varphi'}) \tag{3.103}$$

olmak üzere (3.101) denkleminden

$$\begin{cases} M = \dfrac{1}{2}(H - H_{\varphi\varphi} - H_{\varphi'\varphi'}) \\ N = H_{\varphi\varphi'} \end{cases} \tag{3.104}$$

bulunur.

3.11 $\widehat{B}_{II}$ Karşıt (Dual) Hareketi

Burada B_{II} hareketinin $\widehat{B}_{II}$ dual hareketi tanımlanacaktır, [1]:

B_{II} hareketinde hareketli koordinat sistemi yardımıyla E' düzleminde bir sabit bir X noktasının $g = g'$ pol eksenine göre yansıma yaptığı, yani $dx_1 = \sigma + x_2\tau$, $dx_2 = \sigma_2 - x_1\tau$ koşullarını sağlayan, $\widehat{X} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ noktanın koordinatları için $\hat{x}_1 = x_1$,

$\hat{x}_2 = -x_2$ olmak üzere $d\hat{x}_1 = dx_1$ ve $d\hat{x}_2 = -dx_2$ olacağından

$$d\hat{x}_1 = \sigma - \hat{x}_2\tau, \quad d\hat{x}_2 = -\sigma_2 + \hat{x}_1\tau \tag{3.105}$$

elde edilir.

E' düzlemindeki X' noktasının (2.40) denklemlerinde verilen $dx_1{}' = \sigma + x_2{}'\tau', \ \ dx_2{}' = \sigma_2{}' - x_1{}'\tau'$ sabit olma şartları göz önüne alınarak $\hat{X}' = (\hat{x_1}', \hat{x_2}')$ noktasının sabit kalma koşulları

$$d\hat{x}_1' = \sigma + \hat{x}_2'\tau', \ \ d\hat{x}_2' = \sigma_2{}' - \hat{x}_1'\tau' \tag{3.106}$$

şeklinde elde edilir.

Ayrıca, Bölüm 2.3.2'de verilen hareketli koordinat sistemine göre $A/\hat{E}$ hareketi için $\left\{\hat{B}; \hat{a}_1, \hat{a}_2\right\}$ koordinat sisteminde bir $\hat{X}$ noktasının sabit kalma koşulları için

$$d\hat{x}_1 = \hat{\sigma} + \hat{x}_2\hat{\tau}, \ d\hat{x}_2 = \hat{\sigma}_2 - \hat{x}_1\hat{\tau}$$

ve benzer şekilde $A/\hat{E}'$ hareketi $\hat{X}'$ noktasının E' düzlemindeki sabit kalma koşulları

$$d\hat{x}_1' = \hat{\sigma}' + \hat{x}_2'\hat{\tau}', \ d\hat{x}_2' = \hat{\sigma}_2' - \hat{x}_1'\hat{\tau}'$$

elde edilir. $\widehat{X}$ noktasının sabit kalma şartları olan (3.105) ve (3.106) denklemleri ile X noktasının sabit kalma şartları olan (2.38) ve (2.40) denklemleri ile kıyaslandığında

$$\widehat{\tau} = -\tau, \quad \widehat{\tau}' = \tau', \quad \widehat{\sigma} = \sigma, \quad \widehat{\sigma}_2 = -\sigma_2, \quad \widehat{\sigma}_2' = \sigma_2{}' \tag{3.107}$$

elde edilir.

Bu durumda, E hareketli düzleminin bütün noktaları, kutup eksenine göre yansıma dönüşümü ile $\widehat{E}$ düzleminin noktalarına dönüşür. Bu dönüşüm B_{II} hareketindeki bu yeni tanımlanan $\widehat{B}_{II}$ yüzey hareketine bağlıdır.

Tanım 3.6. E hareketli düzleminin $g = g'$ kutup eksenine göre $\widehat{E}$ yansıma düzleminin E' düzlemine göre belirttiği $\widehat{B}_{II}$ hareketine B_{II} hareketinin ***"dual"***, ***"ters"*** veya ***"karşıt" hareketi*** denir.

Tersine, ayrıca B_{II} hareketinin kutup ekseni E düzleminin yansıması ile meydana gelmiş $\widehat{E}$ düzlemini ile ifade edilebilir.

Her durumda B_{II} ve $\widehat{B}_{II}$ hareketlerinin kanonik izafe sistemleri, sırasıyla, $\{Q'; \mathbf{a}_1{}', \mathbf{a}_2{}'\}$ ve $\left\{\widehat{Q}'; \widehat{\mathbf{a}}_1', \widehat{\mathbf{a}}_2'\right\}$ olmak üzere (3.107) eşitlikleri yardımıyla (3.70) ve (3.71) denklemlerine özdeş olarak $\hat{\sigma}_2 \wedge \hat{\tau} = \hat{\sigma}_2' \wedge \hat{\tau}', \ \hat{\sigma}_2 \wedge \hat{\tau}' = \hat{\sigma}_2' \wedge \hat{\tau}$ yazılabileceğinden

örtüşürler. $g \to g'$ kutup eksen dönüşümü, $E \to \widehat{E}$ dönüşümü ile elde edilen $\hat{g} \to \hat{g}'$ kutup eksen dönüşümünden farklıdır. B_{II} ve $\widehat{B}_{II}$ hareketlerinin invariant fonksiyonları arasındaki ilişki ise, (3.83) ve (3.107) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_2 &= \hat{M}\hat{\tau} - \hat{N}\hat{\tau}' = -M\tau + N\tau' = -\sigma_2 \\ &= \hat{M}(-\tau) - \hat{N}(\tau')\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_2' &= \hat{N}\hat{\tau} - \hat{M}\hat{\tau}' = N\tau - M\tau' = {\sigma_2}' \\ &= \hat{N}(-\tau) - \hat{M}(\tau')\end{aligned}$$

olmak üzere $\widehat{M} = +M$, $\widehat{N} = -N$ elde edilir.

3.12 Basitleştirilmiş Temel Denklemler

Bazen φ ve φ' yerine

$$\varphi' + \varphi = \psi \quad \text{ve} \quad \varphi' - \varphi = \omega \tag{3.108}$$

büyüklüklerini kullanmak kolaylık sağlamaktadır, [1, 2]. Bu eşitliklerden diferansiyel alınmasıyla elde edilen

$$d\varphi' + d\varphi = \tau + \tau' = d\psi, \quad d\varphi' - d\varphi = \tau' - \tau = d\omega \tag{3.109}$$

bağıntıları (3.82), (3.83) denklemlerinde kullanılırsa

$$\begin{cases} \sigma = 2\left(U_\omega d\psi + V_\psi d\omega\right), \\ \sigma_2 = U d\psi - V d\omega, \\ {\sigma_2}' = -U d\psi - V d\omega \end{cases} \tag{3.110}$$

elde edilir, burada

$$2U = M - N, \quad 2V = M + N \tag{3.111}$$

şeklindedir. Gerçekten aşağıdaki gibi ara işlemler yardımıyla

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= U d\psi - V d\omega \\ &= \left(\tfrac{M-N}{2}\right)(\tau + \tau') - \left(\tfrac{M+N}{2}\right)(\tau' - \tau) \\ &= M\tau - N\tau'\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}{\sigma_2}' &= -U d\psi - V d\omega \\ &= -\left(\tfrac{M-N}{2}\right)(\tau + \tau') - \left(\tfrac{M+N}{2}\right)(\tau' - \tau) \\ &= N\tau - M\tau'\end{aligned}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

Şimdi σ fonksiyonunu hesaplamak için U_ω ve V_ψ kısmi türevlerini hesaplayalım:

$$\begin{cases} 2U(\psi,\omega) = M\left(\varphi,\varphi'\right) - N\left(\varphi,\varphi'\right) \\ 2V(\psi,\omega) = M\left(\varphi,\varphi'\right) + N\left(\varphi,\varphi'\right) \end{cases}$$

veya

$$\begin{cases} 2U(\psi,\omega) = M\left(\dfrac{\psi-\omega}{2},\dfrac{\psi+\omega}{2}\right) - N\left(\dfrac{\psi-\omega}{2},\dfrac{\psi+\omega}{2}\right), \\ 2V(\psi,\omega) = M\left(\dfrac{\psi-\omega}{2},\dfrac{\psi+\omega}{2}\right) + N\left(\dfrac{\psi-\omega}{2},\dfrac{\psi+\omega}{2}\right) \end{cases}$$

olmak üzere buradan kısmi türev yardımıyla

$$\begin{cases} U_\omega = \dfrac{\partial U}{\partial \omega} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial M}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \omega} + \dfrac{\partial M}{\partial \varphi'}\dfrac{\partial \varphi'}{\partial \omega} - \dfrac{\partial N}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \omega} - \dfrac{\partial N}{\partial \varphi'}\dfrac{\partial \varphi'}{\partial \omega}\right] \\ U_\omega = \dfrac{1}{4}\left[-\dfrac{\partial M}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial M}{\partial \varphi'} + \dfrac{\partial N}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial N}{\partial \varphi'}\right] \\ U_\omega d\psi = \dfrac{1}{4}\left[-\dfrac{\partial M}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial M}{\partial \varphi'} + \dfrac{\partial N}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial N}{\partial \varphi'}\right](\tau+\tau') \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} V_\psi = \dfrac{\partial V}{\partial \psi} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial M}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \dfrac{\partial M}{\partial \varphi'}\dfrac{\partial \varphi'}{\partial \psi} - \dfrac{\partial N}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \psi} - \dfrac{\partial N}{\partial \varphi'}\dfrac{\partial \varphi'}{\partial \psi}\right] \\ V_\psi = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{\partial M}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial M}{\partial \varphi'} + \dfrac{\partial N}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial N}{\partial \varphi'}\right] \\ V_\psi d\omega = \dfrac{1}{4}\left[-\dfrac{\partial M}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial M}{\partial \varphi'} + \dfrac{\partial N}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial N}{\partial \varphi'}\right](\tau'-\tau) \end{cases}$$

olarak elde edilen $U_\omega d\psi$ ve $V_\psi d\omega$ eşitlikleri kullanılarak

$$\sigma = 2\left(U_\omega d\psi + V_\psi d\omega\right) = -\left(M_\varphi + N_{\varphi'}\right)\tau + \left(M_{\varphi'} + N_\varphi\right)\tau'$$

ifadesi elde edilebilir.

Burada, U ve V fonksiyonları arasında

$$\begin{cases} U_\omega = \dfrac{\partial U}{\partial \omega} = \dfrac{1}{4}\left[-M_\varphi + M_{\varphi'} + N_\varphi - N_{\varphi'}\right], \\ U_{\omega\omega} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial \omega^2} = \dfrac{1}{4}\left[-M_{\varphi\varphi}\dfrac{d\varphi}{d\omega} - M_{\varphi\varphi'}\dfrac{d\varphi'}{d\omega} + M_{\varphi'\varphi}\dfrac{d\varphi}{d\omega} + M_{\varphi'\varphi'}\dfrac{d\varphi'}{d\omega}\right. \\ \qquad\qquad \left. + N_{\varphi\varphi}\dfrac{d\varphi}{d\omega} + N_{\varphi\varphi'}\dfrac{d\varphi'}{d\omega} - N_{\varphi'\varphi}\dfrac{d\varphi}{d\omega} - N_{\varphi'\varphi'}\dfrac{d\varphi'}{d\omega}\right], \\ U_{\omega\omega} = \dfrac{1}{8}\left[M_{\varphi\varphi} - 2M_{\varphi\varphi'} + M_{\varphi'\varphi'} - N_{\varphi\varphi} + 2N_{\varphi\varphi'} - N_{\varphi'\varphi'}\right], \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} V_{\psi} = \dfrac{\partial V}{\partial \psi} = \dfrac{1}{4}\left[M_{\varphi} + M_{\varphi'} + N_{\varphi} + N_{\varphi'}\right], \\ V_{\psi\psi} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} = \dfrac{1}{4}\Bigg[M_{\varphi\varphi}\dfrac{d\varphi}{d\psi} + M_{\varphi\varphi'}\dfrac{d\varphi'}{d\psi} + M_{\varphi'\varphi}\dfrac{d\varphi}{d\psi} + M_{\varphi'\varphi'}\dfrac{d\varphi'}{d\psi} \\ \qquad\quad + N_{\varphi\varphi}\dfrac{d\varphi}{d\psi} + N_{\varphi\varphi'}\dfrac{d\varphi'}{d\psi} + N_{\varphi'\varphi}\dfrac{d\varphi}{d\psi} + N_{\varphi'\varphi'}\dfrac{d\varphi'}{d\psi}\Bigg], \\ V_{\psi\psi} = \dfrac{1}{8}\left[M_{\varphi\varphi} + 2M_{\varphi\varphi'} + M_{\varphi'\varphi'} + N_{\varphi\varphi} + 2N_{\varphi\varphi'} + N_{\varphi'\varphi'}\right], \end{cases}$$

olmak üzere $U + 4U_{\omega\omega} = V + 4V_{\psi\psi}$ integrallenebilme koşulu mevcuttur.

$H(\varphi, \varphi') = H\left(\frac{\psi-\omega}{2}, \frac{\psi+\omega}{2}\right) = -4K(\psi, \omega)$ ile tanımlanan K fonksiyonu yardımıyla (3.111) ve (3.104) denklemleri kullanılarak U ve V fonksiyonlarının nasıl ifade edilebileceğini bulalım:

$K(\psi, \omega) = -\frac{1}{4}H\left(\frac{\psi-\omega}{2}, \frac{\psi+\omega}{2}\right)$ olmak üzere

$$\begin{cases} K_{\omega} = \dfrac{\partial K}{\partial \omega} = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial H}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \omega} + \dfrac{\partial H}{\partial \varphi'}\dfrac{\partial \varphi'}{\partial \omega}\right) = \dfrac{1}{8}\left(H_{\varphi} - H_{\varphi'}\right) \\ K_{\omega\omega} = \dfrac{\partial^2 K}{\partial \omega^2} = \dfrac{1}{8}\left(H_{\varphi\varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \omega} + H_{\varphi\varphi'}\dfrac{\partial \varphi'}{\partial \omega} - H_{\varphi'\varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \omega} - H_{\varphi'\varphi'}\dfrac{\partial \varphi'}{\partial \omega}\right) \\ K_{\omega\omega} = \dfrac{\partial^2 K}{\partial \omega^2} = \dfrac{1}{16}\left(-H_{\varphi\varphi} + 2H_{\varphi\varphi'} - H_{\varphi'\varphi'}\right) \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} K_{\psi} = \dfrac{\partial K}{\partial \psi} = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial H}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \psi} + \dfrac{\partial H}{\partial \varphi'}\dfrac{\partial \varphi'}{\partial \psi}\right) = -\dfrac{1}{8}\left(H_{\varphi} + H_{\varphi'}\right) \\ K_{\psi\psi} = \dfrac{\partial^2 K}{\partial \psi^2} = -\dfrac{1}{8}\left(H_{\varphi\varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \psi} + H_{\varphi\varphi'}\dfrac{\partial \varphi'}{\partial \psi} + H_{\varphi'\varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \psi} + H_{\varphi'\varphi'}\dfrac{\partial \varphi'}{\partial \psi}\right) \\ K_{\omega\omega} = \dfrac{\partial^2 K}{\partial \omega^2} = -\dfrac{1}{16}\left(H_{\varphi\varphi} + 2H_{\varphi\varphi'} + H_{\varphi'\varphi'}\right) \end{cases}$$

kısmi türevleri yardımıyla

$$\begin{cases} V = \dfrac{M+N}{2} = \dfrac{1}{4}\left(H - H_{\varphi\varphi} - H_{\varphi'\varphi'} + 2H_{\varphi\varphi'}\right) = -K + 4K_{\omega\omega} \\ U = \dfrac{M-N}{2} = \dfrac{1}{4}\left(H - H_{\varphi\varphi} - H_{\varphi'\varphi'} - 2H_{\varphi\varphi'}\right) = -K + 4K_{\psi\psi} \end{cases}$$

$\psi = \psi(\omega)$ seçimi yaparak B_{II} hareketinden elde edilen bir B_I hareketini belirlemiş oluruz. Bu hareketin P pol noktasının, sırasıyla, E ve E' düzlemlerindeki yer vektörleri

$$\begin{cases} \mathbf{OP} = \mathbf{OQ} + \mathbf{QP}, & \mathbf{p} = -\mathbf{q} + \mathbf{a}_1 p_1 + \mathbf{a}_2 p_2 \\ \mathbf{O'P'} = \mathbf{O'Q'} + \mathbf{Q'P'}, & \mathbf{p'} = -\mathbf{q'} + \mathbf{a}_1{}' p_1{}' + \mathbf{a}_2{}' p_2{}' \end{cases} \tag{3.112}$$

olmak üzere (2.53) denklemlerinde (3.83) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{{\sigma_2}' - \sigma_2}{\tau' - \tau} = \frac{N\tau - M\tau' - M\tau + N\tau'}{\tau' - \tau} \\ &= \frac{N(\tau' + \tau) - M(\tau' + \tau)}{(\tau' - \tau)} = -(M - N)\frac{\tau' + \tau}{\tau' - \tau} \\ &= -2U\frac{d\psi}{d\omega}, \\ p_2 &= -\frac{{\sigma_1}' - \sigma_1}{\tau' - \tau} = -\frac{\sigma - \sigma}{\tau' - \tau} = 0 \end{aligned} \tag{3.113}$$

elde edilir. B_{II} hareketinden elde edilen B_I pol eğrisinin teğet vektörü (3.110) ve (3.81) denklemlerinden

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OQ} + \mathbf{QP} = \mathbf{p} = -\mathbf{q} + \mathbf{a}_1 p_1$$

veya

$$\mathbf{p} = -\mathbf{q} - 2\mathbf{a}_1 U\dot{\psi}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} d\mathbf{p} &= -d\mathbf{p} - 2\mathbf{a}_1\dot{U}\dot{\psi} - 2d\mathbf{a}_1 U\dot{\psi} - 2\mathbf{a}_1 U\ddot{\psi} \\ &= -\mathbf{a}_1\sigma - \mathbf{a}_2\sigma_2 - 2\mathbf{a}_1 U_\psi\dot{\psi}^2 - 2\mathbf{a}_1 U_\omega\dot{\psi} - 2\mathbf{a}_1 U\ddot{\psi} - 2\mathbf{a}_2 U\dot{\psi}\tau \\ &= \mathbf{a}_1\left(-\sigma - 2U_\psi\dot{\psi}^2 - 2U_\omega\dot{\psi} - 2U\ddot{\psi}\right) + \mathbf{a}_2\left(-\sigma_2 - 2U\dot{\psi}\tau\right) \\ &= \mathbf{a}_1\left(-2\left(U_\omega\dot{\psi} + V_\psi\right) - 2U_\psi\dot{\psi}^2 - 2U_\omega\dot{\psi} - 2U\ddot{\psi}\right) + \mathbf{a}_2\left(-U\dot{\psi} + V - U\dot{\psi}\left(\dot{\psi} - 1\right)\right) \\ &= 2\mathbf{a}_1\left(-2U_\omega\dot{\psi} - V_\psi - U_\psi\dot{\psi}^2 - U\ddot{\psi}\right) + 2\mathbf{a}_2\left(\frac{1}{2}\left(V - U\dot{\psi}^2\right)\right) \end{aligned}$$

veya

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\omega} = \frac{d\mathbf{p}'}{d\omega} = 2\mathbf{a}_1 G + 2\mathbf{a}_2 S \tag{3.114}$$

olarak elde edilir. Burada

$$\begin{cases} G = -\left(2U_\omega\dot{\psi} + V_\psi + U_\psi\dot{\psi}^2 + U\ddot{\psi}\right) \\ \\ S = \frac{1}{2}\left(V - U\dot{\psi}^2\right) \end{cases} \tag{3.115}$$

şeklinde olup $\frac{d\psi}{d\omega} = \dot{\psi}$, $\frac{d^2\psi}{d\omega^2} = \ddot{\psi}$ ile gösterilmiştir.

3.13 B_{II} Hareketinden Elde Edilen B_I Hareketleri

Burada B_{II} ve $\widehat{B}_{II}$ hareketlerinden elde edilen özel 1-parametreli hareketler incelenecektir, [1, 2]:

- **Kayma-S_I Hareketi**:

  Tanım 3.7. B_{II} hareketinde $\varphi = \text{sabit}, \varphi' = \text{sabit}$ şartı ile elde edilen B_I hareketine ***Kayma-S_I hareketi*** adı verilir.

  $\{B; \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}\}$ hareketli koordinat sistemi $\{B; \mathbf{a_1}\}$ ekseni g daima kutup ekseni üzerinde bulunacak, yani y olacak şekilde seçelim. Böylece E hareketli düzlemindeki herhangi bir X noktasının sürüklenme hızı (2.54) denkleminden

  $$dx = \overrightarrow{d_f \mathbf{x}} = \mathbf{a}_2 \left(\sigma_2 - \sigma_2{}'\right) \tag{3.116}$$

  şeklinde olacaktır. Böylece, ani kayma yönünün her defasında kutup eksenine dik olduğu görülür.

  X noktasının yörünge eğrisinin komşu noktaları (3.116) denkleminden $(\sigma_2 - \sigma_2{}')$ uzaklığındadır. Kayma doğrultusundaki değişim "$\tau = \tau'$" şeklindedir. Bu durumda $\tau = \tau'$ kotengenz açısı, yani X noktasının komşu teğetlerinin arasındaki açıdır. Kayma-S_I hareketinin yörüngesinin ρ eğrilik yarıçapı için

  $$\rho = \frac{\sigma_2 - \sigma_2{}'}{\tau}$$

  veya (3.83) eşitliklerinden

  $$\rho = \frac{\sigma_2 - \sigma_2{}'}{\tau} = \frac{M\tau - N\tau - N\tau + M\tau}{\tau} = 2(M - N)$$

  elde edilir.

- **Oskülatör-B_I Hareketi**:

  Tanım 3.8. B_{II} hareketinden elde edilen pol yörüngeleri her defasında kutup eksenine değen 1-parametreli harekete ***Oskülatör-B_I hareketi*** adı verilir.

  Bu hareketin P dönme polü için $\{B; \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}\}$ hareketli koordinat sistemi kullanılarak

  $$\begin{cases} \mathbf{OP} = \mathbf{OQ} + \mathbf{QP} = \mathbf{p} = -\mathbf{q} + \mathbf{a}_1 p_1 \\ \mathbf{O'P} = \mathbf{O'Q} + \mathbf{QP} = \mathbf{p'} = -\mathbf{q'} + \mathbf{a}_1 p_1 \end{cases}$$

  elde edilir. Burada

  $$p_1 = \frac{\sigma_2{}' - \sigma_2}{\tau' - \tau} = \frac{N(\tau' + \tau) - M(\tau' + \tau)}{(\tau' - \tau)} = -(M - N)\frac{\tau' + \tau}{\tau' - \tau}$$

  şeklinde yazılabilir. Pol yörüngelerinin her defasında kutup eksenine değmesi

için (3.81) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{cases} d\mathbf{OP} = -d\mathbf{q} + d\mathbf{a}_1 p_1 + \mathbf{a}_1 dp_1 = \mathbf{a}_1(-\sigma + dp_1) + \mathbf{a}_2(-\sigma_2 + \tau p_1), \\ d\mathbf{O'P} = -d\mathbf{q}' + d\mathbf{a}_1 p_1 + \mathbf{a}_1 dp_1 = \mathbf{a}_1(-\sigma + dp_1) + \mathbf{a}_2\left(-\sigma_2^{'} + \tau' p_1\right) \end{cases} \tag{3.117}$$

değişimlerinde

$$-\sigma_2 + \tau p_1 = 0,\ -\sigma^{'}{}_2 + \tau' p_1 = 0 \tag{3.118}$$

olmalıdır. p_1 koordinatı iki Pfaff formun oranı olduğundan, Oskülatör-B_I hareketi için (3.118) şartlarını sağlamak zorundadır. Dolayısıyla,

$$p_1 = -(M-N)\frac{(\tau'+\tau)\wedge(-\sigma_2+\tau p_1)}{(\tau'-\tau)\wedge(-\sigma_2+\tau p_1)} = -(M-N)\frac{(\tau'+\tau)\wedge\left(-\sigma^{'}{}_2+\tau' p_1\right)}{(\tau'-\tau)\wedge(-\sigma^{'}{}_2+\tau' p_1)}$$

yazılabilir. Burada σ_2 ve $\sigma^{'}{}_2$ Pfaff formlarının (3.73) eşitliklerindeki değerleri kullanılırsa

$$p_1 = -(M-N)\frac{(M-p_1+N)}{(M-p_1-N)}p_1$$

veya

$$p_1{}^2 = M^2 - N^2$$

elde edilir.

Tanım 3.9. Oskülatör-B_I hareketinin pol noktasına ***Oskülatör-pol*** adı verilir. Bu pol noktasının koordinatı $p_1{}^2 = M^2 - N^2$ denklemini sağlar.

Teorem 3.12. *Oskülatör-B_I hareketinin $p_1{}^2 = M^2 - N^2$ eşitliğinden Oskülatör poller $M^2 > N^2$ için reel ve $M^2 < N^2$ için eşlenik sanaldır. Q esas polü ise her iki Oskülatör polün orta noktasıdır.*

(3.118) eşitliklerinde iki denklemin arasındaki ortak p_1 büyüklüğü yok edilirse, ***Oskülatör-B_I hareketinin denklemi***

$$M(d\varphi)^2 - N\left(d\varphi^{'}\right)^2 = 0$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi aynı hareketi basitleştirilmiş temel denklemler yardımıyla tekrar ele alalım:

Tanım 3.10. B_{II} hareketinde

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\omega} = \frac{d\mathbf{p}'}{d\omega}$$

olmak üzere (3.115) eşitliklerinde

$$S = \frac{1}{2}\left(V - U\dot{\psi}^2\right) = 0 \tag{3.119}$$

şartı ile elde edilen B_I hareketine ***Oskülatör-B_I hareketi*** adı verilir.

Böylece, (3.114) denkleminden pol yörüngeleri her defasında kutup eksenine değmektedir.

Tanım 3.11. Oskülatör-B_I hareketinin pol noktasına ***Oskülatör-pol*** adı verilir. Bu pol noktasının $\mathbf{p} = -\mathbf{q} + \mathbf{a}_1 p_1$ eşitliğinin (3.113) ifadesinde (3.119) şartı kullanılırsa $M(d\varphi)^2 - N\left(d\varphi'\right)^2 = 0$ için "${p_1}^2 = 4UV$" denklemini sağladığı görülür.

Teorem 3.13. *Oskülatör-B_I hareketinin ${p_1}^2 = 4UV$ eşitliğinden Oskülatör poller $UV > 0$ için reel ve $UV < 0$ için eşlenik sanaldır. Q esas polü ise her iki Oskülatör polün orta noktasıdır.*

Oskülatör-poller şu şekilde de karakterize edilebilir:

(3.119) diferensiyel denkleminden ***Oskülatör-B_I hareketinin denklemi***

$$U(d\psi)^2 - V(d\omega)^2 = 0$$

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 3.14. *Bir pol noktası, yani B_{II} hareketinden elde edilen B_I hareketine ait pol noktası etrafında bir dönme B_{II} ile iki komşu duruma sahiptir. Fakat, Oskülatör-polü etrafındaki bir dönme B_{II} ile ortak üç komşu duruma sahiptir.*

- **Geodezik-B_I Hareketi**:

Tanım 3.12. B_{II} hareketinden elde edilen 1-parametreli harekette pol eğrileri kendilerine karşılık gelen kutup eksenlerine dik oluyorsa bu harekete ***Geodezik-B_I hareketi*** adı verilir.

Bu durumda (3.117) denklemlerindeki $\mathbf{a}_1$ doğrultusu her defasında sıfır olmalıdır. Yani,

$$-\sigma + dp_1 = 0$$

şartı elde edilir.

Şimdi aynı hareketi basitleştirilmiş temel denklemler yardımıyla tekrar tanımlayalım:

Tanım 3.13. B_{II} hareketinde

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\omega} = \frac{d\mathbf{p}'}{d\omega}$$

olmak üzere (3.115) eşitliklerinde

$$G = -\left(2U_\omega \dot{\psi} + V_\psi + U_\psi \dot{\psi}^2 + U\ddot{\psi}\right) = 0 \tag{3.120}$$

şartı ile elde edilen B_I hareketine ***Geodezik-B_I hareketi*** adı verilir.

Bu hareket altında pol eğrileri karşılık gelen kutup eksenlerine diktir.

Geodezik-B_I hareketinin denklemi

$$U\frac{d^2\psi}{d\omega^2} + U_\psi\left(\frac{d\psi}{d\omega}\right)^2 + 2U_\omega\frac{d\psi}{d\omega} + V_\psi = 0$$

şeklindedir.

Burada hareketlere karşılık gelen dual hareketler incelenecektir:

$\tau' \mp \tau = 0$ şartları ile elde edilen Kayma-S_I ve Esas-B_I hareketleri ise (3.107) eşitlikleri kullanılarak $\hat{\tau}' \pm \hat{\tau} = 0$ şartları altında $\hat{B}_{II}$ hareketinin Kayma-$\hat{S}_I$ ve Esas-$\hat{B}_I$ hareketlerine dönüşür. Buna rağmen σ veya $\sigma_2 = 0$ ve $\sigma_2' = 0$ ile verilen 1-parametreli hareketler korunur.

Oskülatör-B_I hareketinde ise

$$\begin{cases} d\psi = \tau + \tau' = -\hat{\tau} + \hat{\tau}' = d\hat{\sigma} \\ d\omega = \tau' - \tau = \hat{\tau}' + \hat{\tau} = d\hat{\psi} \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} \hat{U} = \dfrac{\hat{M} - \hat{N}}{2} = \dfrac{M+N}{2} = V \\ \hat{V} = \dfrac{\hat{M} + \hat{N}}{2} = \dfrac{M-N}{2} = U \end{cases}$$

eşitliklerinden $p_1^2 = 4\hat{U}\hat{V} = UV$ olduğundan duallik sabit kalır.

3.14 Sınır çizgisi

Genel olarak, E hareketli düzleminde tespit edilen bir X noktası B_{II} hareketi altında E' sabit düzleminin her noktasına ulaşamaz ve hareket ettiği bölge sınırlı olabilir. Bu bölümde, B_{II} hareketinde E hareketli düzleminde tespit edilen X noktası daima kutup ekseni üzerinde bulunacak şekilde elde edilen bir parametreli B_I hareketi araştırılacaktır ve noktaların hareket altındaki sınır çizgisi incelenecektir, [1, 2]:

B_{II} hareketi altındaki bir X noktasının E' sabit düzleminde hareket ettiği bölge sınırlı olabilir. Bu sınır üzerindeki X noktasının yoğunluğu kesinlikle sıfırdır. Çünkü, eğri

elementi çizen noktaların yoğunluğu sıfırdır ve Bölüm 4.6'ya göre bu noktalar kutup ekseni üzerinde bulunur.

Tanım 3.14. B_{II} hareketinde E hareketli düzleminde tespit edilen X noktası daima kutup ekseni üzerinde bulunacak şekilde elde edilen 1-parametreli B_I hareketinin X noktasının hareket esnasında E' sabit düzleminde çizdiği yörüngeye B_{II} hareketinin ***sınır çizgisi*** adı verilir.

Kutup ekseni üzerine alınan $\{B;\mathbf{a_1},\mathbf{a_2}\}$ hareketli koordinat sistemine göre X noktasının (X noktası daima kutup ekseni üzerinde bulunacağından aynı zamanda pol noktası) koordinatları için $(x_1,x_2)=(x,0)$ yazılabilir. Bu durumda, X noktasının E düzleminde sabit kalma şartları için (2.38) denklemlerinden

$$dx=\sigma,\ \sigma_2-x\tau=0 \tag{3.121}$$

elde edilir.

Bölüm 3.12'de tanımlanan U ve V fonksiyonları yardımıyla (3.110) ve (3.111) eşitlikleri kullanılarak (3.121) eşitlikleri

$$dx-2\left(U_\omega d\psi+V_\psi d\omega\right)=0 \tag{3.122}$$

$$(2U-x)\,d\psi+(x-2V)\,d\omega=0 \tag{3.123}$$

olarak yeniden yazılabilir. Böylece aranılan B_I hareketi ve X noktası genel olarak belirlenmiş olur.

X noktasının E' düzlemindeki $dx=\overrightarrow{d_f\mathbf{x}}$ sürüklenme vektörü (2.54) eşitliğinde (3.121) eşitlikleri kullanılarak

$$dx=\mathbf{a}_2\left\{x\left(\tau'-\tau\right)+\sigma_2-{\sigma_2}'\right\}=\mathbf{a}_2\left\{-{\sigma_2}'+x\tau'\right\}$$

veya (3.110) ve (3.111) basitleştirilmiş temel denklemleri kullanılarak

$$dx=\frac{1}{2}\mathbf{a}_2\left\{(x+2U)\,d\psi+(x+2V)\,d\omega\right\} \tag{3.124}$$

şeklinde elde edilir.

Sınır çizgisinin komşu iki noktası arasındaki uzaklığı $-{\sigma_2}'+x\tau'$ ve $\mathbf{a}_2$ vektörünün sonsuz küçük dönme açısı τ' kotengenz açısı olduğundan bu çizginin eğrilik yarıçapı

(3.110) ve (3.111) eşitlikleri kullanılarak

$$r = \frac{-{\sigma_2}' + x\tau'}{\tau'} = \frac{(x+2U)\,d\psi + (x+2V)\,d\omega}{d\psi + d\omega}, \tag{3.125}$$

olarak elde edilir. (3.123) şartları kullanılarak eğrilik yarıçapı

$$r = \frac{((x+2U)\,d\psi + (x+2V)\,d\omega) \wedge ((2U-x)\,d\psi + (x-2V)\,d\omega)}{(d\psi + d\omega) \wedge ((2U-x)\,d\psi + (x-2V)\,d\omega)}$$

veya

$$r = \frac{x^2 - 4UV}{x - V - U} \tag{3.126}$$

olarak yeniden elde edilir.

(3.124) denklemine göre, sınır çizgileri $\mathbf{a}_1$ kutup eksenine dik olduğundan, X noktasının yörüngesinin (sınır çizgisinin) Y' eğrilik merkezi

$$\mathbf{O'Y'} = \mathbf{O'Q'} + \mathbf{Q'Y'}$$

veya

$$\mathbf{y}' = \mathbf{q}' + {\mathbf{a}_1}'(x - r) = \mathbf{q}' + {\mathbf{a}_1}' y \tag{3.127}$$

olarak bulunur. Burada (3.126) eşitliği kullanılarak

$$y = x - r = \frac{x\,(U-V) + 4UV}{x - U - V} \tag{3.128}$$

şeklindedir. (3.128) denklemi

$$xy + (U+V)(x-y) - 4UV = 0 \tag{3.129}$$

veya (3.111) eşitlikleri kullanılarak

$$xy + M\,(x-y) - \left(M^2 - N^2\right) = 0 \tag{3.130}$$

olur. Buradan aşağıdaki teorem ortaya çıkar:

Teorem 3.15. *Kutup ekseni üzerinde bir sınır çizgisi çizen X noktaları ile bunların E' düzlemindeki Y' eğrilik merkezleri arasındaki ilişki bir projektivitedir.*

$U = V$ alınması durumunda, yani $N = 0$ ise (3.130) denklemi

$$xy + M\,(x-y) - M^2 = (x-M)(y+M) = 0$$

olarak yazılabilir ve $x - U - V = x - M \neq 0$ olduğundan dolayı $y = -M$ elde edilir.

Bu özel durumda, B_{II} hareketinin kutup eksen yoğunluğu $N = U - V = 0$ olduğundan hareket parçalanabilen harekettir. Böylece aşağıdaki teorem ispatsız olarak verilebilir.

Teorem 3.16. *Parçalanabilen B_{II} hareketlerinde, sınır çizgileri ortak eğrilik merkezine sahiptirler, yani paralel eğrilerdir.*

3.15 Büküm Noktası ve Büküm Polü

Burada B_{II} hareketinden elde edilen B_I hareketlerinin büküm noktaları ve büküm polleri incelenecektir, [1, 2]:

B_I hareketi esnasında, E hareketli düzleminin E' düzlemindeki yörüngelerinin büküm noktaları büküm dairesi üzerinde bulunurlar. Bu durumda, büküm noktalarındaki yörünge teğetleri W büküm polünden geçer, W büküm polünün çapı B_I hareketinin P dönme polü ile sınırlıdır. (Yörünge teğetleri daima ait oldukları pol ışınlarına dik olduklarından bütün büküm teğetleri bu W noktasından geçer.) 1-parametreli hareketlerden biliniyor ki, büküm polünün koordinatları $d\mathbf{p} : d\theta$ vektörünün P pol noktasında $-\pi/2$ açısı kadar döndürülmesiyle elde edilir.

Bu durumda B_{II} hareketinden elde edilen bir B_I hareketinin W büküm polü, $d\theta = d\omega = \tau' - \tau$ kullanılarak (3.114) denkleminden

$$\mathbf{OW} = \mathbf{w} = \mathbf{p} + 2\mathbf{a}_1 S - 2\mathbf{a}_2 G \tag{3.131}$$

olarak elde edilir.

(3.112) ve (3.113) denklemleri kullanılarak

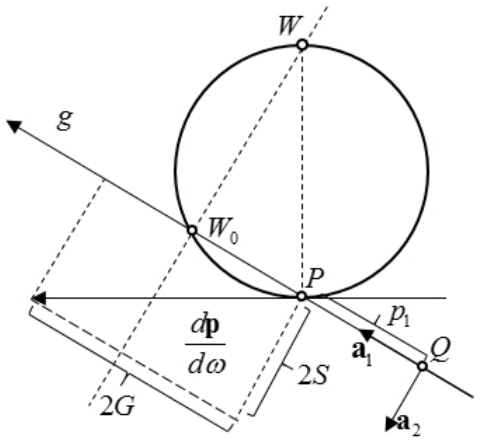
$$\mathbf{p} = -\mathbf{q} - 2\mathbf{a}_1 U \frac{d\psi}{d\omega}$$

yazılabilir. (3.131) eşitliğinde kullanılan $\mathbf{p}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ve S fonksiyonları sadece ψ, ω değişkenleri ve $d\psi : d\omega$ türevine, G fonksiyonu ise (3.115) ifadesine göre 2. dereceden $d\psi^2 : d^2\omega$ türevine de bağlıdır.

B_{II} hareketinden elde edilen tüm B_I hareketlerinin büküm polleri aynı $\psi, \omega, \dot{\psi}$ değerlerine bağlıdırlar. Yani, aynı P dönme polüne sahip tüm B_I hareketlerinin büküm polleri g pol eksenine dik bir doğru üzerinde bulunurlar ve bu doğru g doğrusunu W_0 noktasında

$$\omega_0 = p + 2\mathbf{a}_1 S \tag{3.132}$$

koordinatları ile keser. Bu B_I hareketlerine ait büküm çemberleri (yani PW çaplı çemberler) pol eksenini P noktasından farklı W_0 noktasında keser. Kutup ekseninin



Şekil 3.10 Büküm dairesi ve büküm polü

W_0 noktası B_{II} hareketinden elde edilen P dönme polüne Geodezik -B_I hareketinin büküm polüdür, Şekil 3.10.

P dönme polünün kanonik izafe sistemine göre koordinatları (3.113) denkleminde verilmiştir. Buna göre ilgili geodezik hareketinin W_0 büküm polü (3.132) ve (3.115) denklemlerine göre koordinatları

$$\omega_{01} = -U\dot{\psi}^2 - 2U\dot{\psi} + V, \quad \omega_{02} = 0 \tag{3.133}$$

şeklindedir.

$\dot{\psi} = \pm 1$ veya $d\psi = \pm d\omega$ yani $\tau = 0$ veya $\tau' = 0$ alınarak, B_{II} hareketi B_I ve ${B_I}'$ hareketlerine ayrılabilir, bu hareketlerin, sırasıyla, E ve E' düzlemlerindeki kutup eksenleri sabittir. Bu özel B_I hareketlerinin

- $d\psi = d\omega$ olması durumunda P_1 dönme polünün koordinatları $p_{11} = -2U$ ve $p_{12} = 0$; W_1 geodezik büküm polünün koordinatları ise $\omega_{11} = -3U + V$, $\omega_{12} = 0$ şeklindedir.
- $d\psi = -d\omega$ olması durumunda P_2 dönme polünün koordinatları $p_{21} = 2U$ ve $p_{22} = 0$; W_2 geodezik büküm polünün koordinatları ise $\omega_{21} = U + V$, $\omega_{22} = 0$ şeklindedir.

Bu poller ve geodezik büküm polleri kullanılarak $P \to W_0$ için

$$\|\mathbf{W_0W_2}\| \, \|\mathbf{P_1P_2}\| = \|\mathbf{PP_2}\|^2$$

karakteristik eşitliği elde edilir. P noktası kullanılarak W_0 noktasının belirlenmesi Şekil 3.10 üzerinden kolaylıkla görülebilir.

3.16 Özel B_{II} hareketi

Bu bölüme kadar verilen hareketlerde B_{II} hareketinin t_1, t_2 bağımsız değişkenlerinin tüm olası değerleri için

$$2\left(\tau \wedge \tau'\right) = d\psi \wedge d\omega = 0 \tag{3.134}$$

göz ardı edilmiştir. Şimdi, bu "özel B_{II} hareketi"nin doğrusal sürüklenme, Kayma-S_I hareketi içerdiği gösterilecektir, [2]:

(3.134) kabülünden t_1, t_2 bağımsız değişkenleri ile tanımlanan B_{II} hareketinin $g(t_1, t_2) \rightarrow g'(t_1, t_2)$ kutup eksen dönüşümü için Bölüm 3.5'de de tanımlanan fonksiyonlar

$$\begin{cases} h = h(t_1, t_2), & \psi = \psi(t_1) \\ h' = h'(t_1, t_2), & \psi' = \psi'(t_1) \end{cases} \tag{3.135}$$

şeklinde alınabilir.

Bu durumda g ve g' kutup eksenlerinin yoğunlukları için

$$d\psi = d\varphi = \tau = \frac{d\varphi}{dt_1} dt_1 = \dot{\varphi} dt_1, \quad d\psi' = d\varphi' = \tau' = \frac{d\varphi'}{dt_1} dt_1 = \dot{\varphi}' dt_1 \tag{3.136}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$dg = dh \wedge d\psi = -h_{t_2} \dot{\varphi} (dt_1 \wedge dt_2) = -h'_{t_2} \dot{\varphi}' (dt_1 \wedge dt_2) = dh' \wedge d\psi' = dg' \tag{3.137}$$

ilişkisinden

$$h_{t_2} \dot{\varphi} - h_{t_2}{}' \dot{\varphi}' = 0 \tag{3.138}$$

yazılabilir.

Bu durumda, hareketin destek fonksiyonunun tanımı kullanılarak

$$H = \int \left(-h\tau + h'\tau'\right) = \int \left(-h\dot{\varphi} + h'\dot{\varphi}'\right) dt_1 \tag{3.139}$$

yazılır, yani destek fonksiyonu sadece t_1 parametresine bağlıdır.

(3.136) ve (3.81) denklemlerinden koordinat eksenlerinin $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$; $\mathbf{a}_1{}', \mathbf{a}_2{}'$ vektörlerinin sadece t_1 parametresine bağlı olduğu görülür.

Sabit bir $t_1 = t_{10}$ için $\varphi = \varphi_0 = \varphi\left(t_{10}\right)$, $\varphi' = \varphi_0{}' = \varphi'\left(t_{10}\right)$ ve $H = H_0 = H(t_{10})$ sabit fonksiyonlardır. B_{II} hareketinde E ve E' düzlemlerinde, sırasıyla, $\{B = C; \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ ve $\{C'; \mathbf{a}_1{}', \mathbf{a}_2{}'\}$ hareketli koordinat sistemlerini ele alalım. E düzleminde, O başlangıç

noktasından g doğrusuna çizilen dikmenin ayağı C olmak üzere

$$\mathbf{CO} = \mathbf{c} = \mathbf{a}_2(t_1)h(t_1, t_2) \tag{3.140}$$

yazılabilir. $t_1 = t_{10}$ seçilmesi durumunda h fonksiyonu t_2 değişkenine bağlı olacağından

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}_2\left(t_{10}\right)h \tag{3.141}$$

bağıntısından C noktası doğru üzerinde hareketli olacaktır. Benzer şekilde, (3.45) ve (3.139) denklemleri kullanılarak C' noktası için

$$\mathbf{O'C'} = \mathbf{c'} = -\mathbf{a}_1{}'(t_1)H(t_1) + \mathbf{a}_2{}'(t_1)h'(t_1, t_2) \tag{3.142}$$

yazılabilir ve $t_1 = t_{10}$ seçilmesi durumunda h' fonksiyonu da t_2 değişkenine bağlı olacağından

$$\mathbf{c'} = -\mathbf{a}_1{}'(t_{10})H(t_{10}) + \mathbf{a}_2{}'(t_{10})h' \tag{3.143}$$

bağıntısından C' noktası hareketli bir noktadır. $t_1 = t_{10}$ alınması ile B_{II} hareketinden elde edilen tüm 1-parametreli hareketler, (3.140) denklemi ile verilen $\{C; g\}$ doğrusunu (3.142) denklemi ile verilen $\{C'; g'\}$ doğrusuna resmeder. B_{II} hareketinden elde edilen bu B_I hareketi $\varphi = \text{sabit}, \varphi' = \text{sabit}$ olduğundan doğrusal sürüklenme hareketidir.

Tersine: B_{II} hareketi $t_1 = t_{10}$ ile belirlenen bir Kayma-S_I hareketini içeriyorsa, bu durumda E' düzlemindeki $g'(t_{10}, t_2)$ kutup ekseni her zaman Kayma-S_I hareketinin (sürüklenme, ani kayma yönü) doğrultusuna diktir. Bu nedenle, Kayma-S_I hareketinin ani kayma doğrultusu boyunca g' ve böylece φ' açısı sabittir. Böylece $\tau' = 0$ yazılabilir. Şimdi kabul edelim ki, B_{II} hareketinin ters hareketi $B_{II}{}'$ olsun. Bu durumda B_{II} hareketinin Kayma-S_I sürüklenme hareketinin ters hareketi de $B_{II}{}'$ hareketinin S_I' sürüklenme hareketi olacaktır. Bu nedenle, S_I hareketi boyunca φ açısı sabittir ve böylece $\tau = 0$ elde edilir. Böylece Kayma-S_I hareketi boyunca (3.134) eşitliği sağlanır ve B_{II} hareketinin Kayma-S_I sürüklenme hareketi içermesi için (3.134) eşitliğinin sağlanması gereklidir.

4
Lorentz Düzleminde 2-Parametreli Hareket

Bu bölümden itibaren diğer bölümler tezin orjinal kısmını oluşturmaktadır. Bölümün girişinde Lorentz düzleminde 1-parametreli hareketin temel kavramları verilmiştir, [26, 27]. Bölüm içerisinde, Lorentz düzlemi ile ilgili temel bilgi olarak ihtiyaç duyulan tanım, teorem ve eşitlikler için [25, 28–34] çalışmaları kaynak olarak kullanılmıştır. Orijinal kısımda ise amac, W. Blaschke ve H. R. Müller'in [1, 2] kitablarını esas alınarak Lorentz düzlemindeki 2-parametreli hareketleri geometrik olarak incelemektir. Bu bölümde verilen temel kavram, tanım ve teoremler [35] makalesinde yayınlatılmıştır.

$L = \mathbb{L}^2$ ve $L' = \mathbb{L}^2$, sırasıyla, hareketli ve sabit Lorentz düzlemleri ve $\{O;\mathbf{l}_1,\mathbf{l}_2\}$ ve $\left\{O';\mathbf{l_1}',\mathbf{l}'_\mathbf{2}\right\}$, sırasıyla, bu düzlemlerin hareketli ve sabit dik koordinat sistemleri olmak üzere seçilen bir $X=(x,y)\in L$ noktasının bu Lorentz düzlemlerindeki koordinatları,

$$\begin{cases}\mathbf{OX} = x\mathbf{l}_1 + y\mathbf{l}_2,\\ \mathbf{O'X} = x'\mathbf{l}'_1 + y'\mathbf{l}'_2\end{cases}$$

ve $\mathbf{O'O}$ konum vektörünün hareketli ve sabit Lorentz düzlemlerindeki koordinatları,

$$\begin{cases}\mathbf{OO'} = u_1\mathbf{l}_1 + u_2\mathbf{l}_2\\ \mathbf{O'O} = u_1{}'\mathbf{l}'_1 + u_2{}'\mathbf{l}'_2\end{cases}$$

şeklinde olsun, [26].

Lorentz düzleminde bir parametreli $H_I = L/L'$ hareketinin kartezyen denklemleri

$$x'\mathbf{l}_1{}' + y'\mathbf{l}_2{}' = (x_1-u_1)\mathbf{l}_1 + (x_2-u_2)\mathbf{l}_2$$

eşitliğinde

$$\begin{cases}\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_1{}'\cosh\Theta + \mathbf{l}_2{}'\sinh\Theta\\ \mathbf{l}_2 = \mathbf{l}_1{}'\sinh\Theta + \mathbf{l}_2{}'\cosh\Theta\end{cases}$$

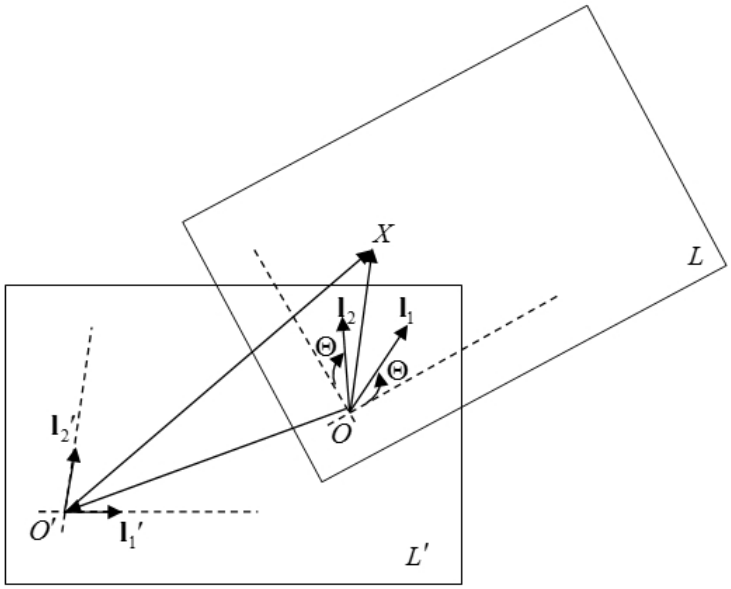
ifadeleri kullanılarak

$$\begin{cases} x' = (x-u_1)\cosh\Theta + (y-u_2)\sinh\Theta \\ y' = (x-u_1)\sinh\Theta + (y-u_2)\cosh\Theta \end{cases}$$

veya

$$\begin{cases} x' = x\cosh\Theta + y\sinh\Theta - (u_1\cosh\Theta + u_2\sinh\Theta) \\ y' = x\sinh\Theta + y\cosh\Theta - (u_1\sinh\Theta + u_2\cosh\Theta) \end{cases} \tag{4.1}$$

şeklindedir, Şekil 4.1, [26].



Şekil 4.1 Lorentz düzleminde hareket

$X \in L$ noktasının ve hareket altında bu noktaya karşılık gelen $X' \in L'$ noktasının konum vektörleri, sırasıyla, $\mathbf{x} = x + jy$ ve $\mathbf{x}' = x' + jy'$ ve $\mathbf{OO}' = \mathbf{u} = u_1 + ju_2$ olmak üzere Lorentz düzleminde 1-parametreli $H_I = L/L'$ hareketinin hiperbolik düzlemdeki ifadesi

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{x} - \mathbf{u})e^{j\Theta} \tag{4.2}$$

denklemi ile tanımlanmıştır. Burada j, $j^2 = 1, j \neq \mp 1$ olmak üzere hiperbolik sayı birimidir, [36, 37]. [1]

Sabit bir X noktasının L' sabit düzlemine göre değişimi (4.2) denkleminden

$$d\mathbf{x}' = \{-d\mathbf{u} + j(\mathbf{x} - \mathbf{u})d\Theta\}\, e^{j\Theta} \tag{4.3}$$

[1] Split-kompleks sayı, perplex sayı veya double sayı olarak da isimlendirilen hiperbolik sayı kümesi $\mathbb{H} = \mathbb{R}[j] = \left\{z = x + jy | x, y \in \mathbb{R},\, j^2 = 1,\, j \neq \pm 1\right\}$ şeklinde tanımlanır.

veya

$$d\mathbf{x}' = -d\mathbf{u}e^{j\Theta} + j\mathbf{x}'d\Theta \tag{4.4}$$

olarak elde edilir. $d\mathbf{x}' = 0$ için (4.3) eşitliği kullanılarak hareketin L hareketli Lorentz düzlemine göre P dönme polü için

$$\mathbf{p} = \mathbf{u} + j\frac{d\mathbf{u}}{d\Theta} \tag{4.5}$$

bulunur. Benzer şekilde, L' sabit Lorentz düzleminin sahip olduğu dönme polü için de (4.4) eşitliği kullanılarak

$$\mathbf{p}' = je^{j\Theta}\frac{d\mathbf{u}}{d\Theta} \tag{4.6}$$

elde edilir, [38].

4.1 Lorentz Düzleminde 2-Parametreli Hareket

Tanım 4.1. Bağımsız iki reel parametre t_1 ve t_2 olmak üzere Lorentz düzleminde (4.1) kartezyen denklemlerinin (4.2) hiperbolik ifadesindeki, $\mathbf{u} = u_1 + ju_2$ hiperbolik büyüklüğü ile Θ dönme açısının

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t_1, t_2), \text{ ve } \Theta = \Theta(t_1, t_2)$$

fonksiyonlarının uygun diferansiyellenebilme şartı ile tanımlanan harekete ***Lorentz düzleminde 2-parametreli hareket*** denir ve H_{II} ile gösterilir. Bu hareket esnasında L hareketli Lorentz düzleminde seçilen bir X noktası L' sabit Lorentz düzlemi üzerinde yüzey parçası çizeceğinden H_{II} hareketine ***Lorentz düzleminde yüzey çizen hareket*** adı da verilir.

Tanım 4.2. Eğer $\frac{d\mathbf{u}}{d\Theta} \neq 0$ ise, H_{II} hareketinin parametrelerden biri Θ açısı olarak seçilebilir. Bu durumda

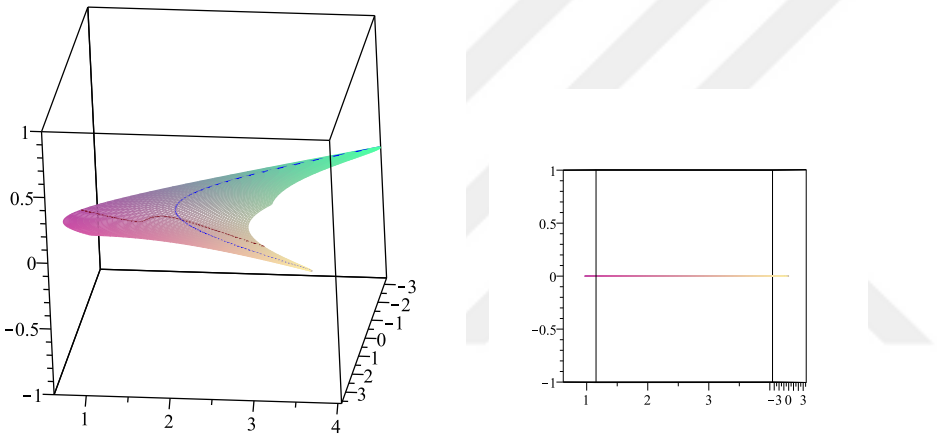
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\Theta, t)$$

fonksiyonunun uygun diferansiyellenebilme şartı ile tanımlanan harekete ise ***Lorentz düzleminde özel 2-parametreli hareket*** adı verilir ve SH_{II} ile gösterilir.

Yorum. H_{II} Lorentzian hareketinin (t_1, t_2) konumundaki H_I hareketleri esnasında L Lorentz düzleminde seçilen bir X noktası L' Lorentz düzleminde H_{II} hareketi ile belirlediği yüzey üzerinde bir eğri çizer. H_{II} Lorentzian hareketinin herhangi bir (t_1, t_2) konumundaki bu H_I hareketlerine birkaç örnek verelim:

- t_1 =sabit ise $\forall t_1 \in \mathbb{R}$ için t_2 parametresine bağlı sonsuz H_I hareketi elde edilebilir.

- t_2 =sabit ise $\forall t_2 \in \mathbb{R}$ için t_1 parametresine bağlı sonsuz H_I hareketi elde edilebilir.
- $t_2 = t_2(t_1)$ fonksiyonu ise t_1 parametresine bağlı H_I hareketi elde edilebilir.
- $t_1 = t_1(t_2)$ fonksiyonu ise t_2 parametresine bağlı H_I hareketi elde edilebilir.
- $t_1 = t_1(t), t_2 = t_2(t)$ şeklinde fonksiyonlar ise t zaman parametresine bağlı H_I hareketi elde edilebilir.
- $t_1 = \Theta$, $t_2 = t$ zaman parametresi ve $t = t(\Theta)$ fonksiyonu ise Θ parametresine bağlı elde edilen H_I hareketine SH_{II} hareketinden elde edilen ***özel 1-parametreli hareket*** denir ve SH_I ile gösterilir.



Şekil 4.2 H_{II} hareketi ve H_{II} hareketinden elde edilen H_I hareketleri

2-parametreli H_{II} hareketi

$$\begin{cases} x' = x\cosh(t_1+t_2) + y\sinh(t_1+t_2) - t_1\cosh(t_1+t_2) - t_2\sinh(t_1+t_2) \\ y' = x\sinh(t_1+t_2) + y\cosh(t_1+t_2) - t_1\sinh(t_1+t_2) - t_2\cosh(t_1+t_2) \end{cases}$$

denklemleri ile verilsin. Bu hareket esnasında L düzleminde seçilen bir $X = (1,2)$ noktası $t_1 \in (-1,1)$ ve $t_2 \in (-1,1)$ için L' düzleminde düzlem parçası çizmektedir, Şekil 4.2. Bu H_{II} hareketinden elde edilen ve Şekil 4.2'de, sırasıyla, kırmızı ve mavi eğriler ile gösterilen H_I hareketlerinin denklemleri aşağıdaki gibi verilsin:

$$\begin{cases} x' = x\cosh 2t_1 + y\sinh 2t_1 - t_1(\cosh 2t_1 + \sinh 2t_1) \\ y' = x\sinh 2t_1 + y\cosh 2t_1 - t_1(\sinh 2t_1 + \cosh 2t_1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x\cosh {t_1}^2 + y\sinh {t_1}^2 - t_1\cosh {t_1}^2 - ({t_1}^2 - t_1)\sinh {t_1}^2 \\ y' = x\sinh {t_1}^2 + y\cosh {t_1}^2 - t_1\sinh {t_1}^2 - ({t_1}^2 - t_1)\cosh {t_1}^2, \end{cases}$$

4.2 Hareketli Koordinat Sistemi

1-parametreli $H_I = L/L'$ hareketlerinde L ve L' düzlemlerinde, sırasıyla, $\{O;\mathbf{l_1},\mathbf{l_2}\}$ ve $\{O';\mathbf{l_1}',\mathbf{l_2}'\}$ koordinat sistemlerinden farklı olacak şekilde $\{A;\mathbf{b_1},\mathbf{b_2}\}$ hareketli koordinat sisteminin belirlediği $\mathscr{A}$ düzlemi ele alınarak, $L/\mathscr{A}$ ve $\mathscr{A}/L'$ hareketleri yardımıyla H_I hareketi tanımlanmaktadır. Bu bölümde ise, L ve L' düzlemlerinin koordinat sistemlerinden farklı olacak şekilde seçilen $\{A;\mathbf{b_1},\mathbf{b_2}\}$ ve $\{A';\mathbf{b_1}',\mathbf{b_2}'\}$ hareketli koordinat sistemlerinin belirlediği, sırasıyla $\mathscr{A}$ ve $\mathscr{A}'$ düzlemleri yardımıyla 2-parametreli $\mathscr{A}/L$ ve $\mathscr{A}'/L'$ hareketleri kullanılarak H_{II} Lorentzian hareketi incelenecektir:

Tanım 4.3. $\mathscr{A}/L$ ve $\mathscr{A}'/L'$ hareketlerinde $\mathbf{l}_1$ ile $\mathbf{b}_1$ arasındaki ve $\mathbf{l_1}'$ ile $\mathbf{b}_1'$ arasındaki açılar, sırasıyla, Φ ve Φ' olsun. Δ ve Δ' büyüklükleri ise, sırasıyla, Φ ve Φ' açılarının değişimi olmak üzere $\Delta = d\Phi$ ve Δ'=dΦ' şeklinde yazılabilir. $\mathbf{AO} = \mathbf{a} = a_1\mathbf{b_1} + a_2\mathbf{b_2}$ ve $\mathbf{A'O'} = \mathbf{a}' = a_1'\mathbf{b}_1' + a_2'\mathbf{b}_2'$ olmak üzere $\mathscr{A}/L$ ve $\mathscr{A}'/L'$ Lorentzian hareketleri için türev denklemleri

$$\begin{cases} d\mathbf{b_1} = \mathbf{b_2}\Delta \\ d\mathbf{b_2} = \mathbf{b_1}\Delta \\ d\mathbf{a} = \mathbf{b_1}\Sigma_1 + \mathbf{b_2}\Sigma_2 \end{cases} \tag{4.7}$$

ve

$$\begin{cases} d\mathbf{b_1}' = \mathbf{b_2}'\Delta' \\ d\mathbf{b_2}' = \mathbf{b_1}'\Delta' \\ d\mathbf{a}' = \mathbf{b_1}'\Sigma_1' + \mathbf{b_2}'\Sigma_2' \end{cases} \tag{4.8}$$

eşitlikleri ile tanımlanır. Burada

$$\begin{cases} \Sigma_1 = \quad da_1 + \Delta a_2,\ \Sigma_2 = \quad da_2 + \Delta a_1 \\ \Sigma_1' = \ da_1' + \Delta' a_2',\ \Sigma_2' = \ da_2' + \Delta' a_1' \end{cases}$$

şeklindedir.

$\mathscr{A}/L$ Lorentzian hareketi için $\{A;\mathbf{b_1},\mathbf{b_2}\}$ hareketli koordinat sisteminde bir $X = (x, y)$ noktasının konum vektörü

$$\mathbf{x} = \mathbf{OX} = \mathbf{OA} + \mathbf{AX}$$

veya

$$\mathbf{x} = -\mathbf{a} + \mathbf{b_1}x + \mathbf{b_2}y \tag{4.9}$$

olmak üzere X noktasının L Lorentz düzlemine göre değişimi

$$d\mathbf{x} = -d\mathbf{a} + \mathbf{b_1}dx + d\mathbf{b_1}x + \mathbf{b_2}dy + d\mathbf{b_2}y$$

şeklinde bulunur. Burada hareketin (4.7) ile verilen türev denklemleri kullanılarak

$$d\mathbf{x} = \mathbf{b_1}(dx - \Sigma_1 + y\Delta) + \mathbf{b_2}(dy - \Sigma_2 + x\Delta)$$

elde edilir.

X noktasının L Lorentz düzleminde sabit olabilmesi için $d\mathbf{x} = 0$ olması gerektiğinden X noktasının sabit olma koşulları

$$\begin{cases} dx = \Sigma_1 - y\Delta \\ dy = \Sigma_2 - x\Delta \end{cases} \tag{4.10}$$

şeklinde elde edilir.

Benzer şekilde, $\mathscr{A}'/L'$ hareketi için $\{A'; \mathbf{b_1}', \mathbf{b_2}'\}$ hareketli koordinat sisteminde bir $X' = (x', y')$ noktasının konum vektörü

$$\mathbf{x}' = \mathbf{O}'\mathbf{X}' = \mathbf{O}'\mathbf{A}' + \mathbf{A}'\mathbf{X}'$$

veya

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{a}' + \mathbf{b_1}'x' + \mathbf{b_2}'y' \tag{4.11}$$

olmak üzere X' noktasının L' Lorentz düzleminde sabit olma koşulları ise

$$\begin{cases} dx' = \Sigma_1' - y'\Delta' \\ dy' = \Sigma_2' - x'\Delta' \end{cases} \tag{4.12}$$

olarak elde edilir.

Burada genel olarak, t_1 ve t_2 parametrelerine bağlı olan H_{II} Lorentzian hareketi; $\mathscr{A}$ Lorentz düzleminin $\{A; \mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}\}$ hareketli koordinat sisteminin L Lorentz düzleminde ve $\mathscr{A}'$ Lorentz düzleminin $\{A'; \mathbf{b_1}', \mathbf{b_2}'\}$ hareketli koordinat sisteminin L' Lorentz düzlemi üzerinde hareketi ile açıklanmaktadır.

Bir tam diferansiyelin dış türevi için

$$d(d\mathbf{a}) = 0$$

veya

$$d(\mathbf{b}_1\Sigma_1 + \mathbf{b}_2\Sigma_2) = d\mathbf{b}_1 \wedge \Sigma_1 + \mathbf{b}_1 d\Sigma_1 + d\mathbf{b}_2 \wedge \Sigma_2 + \mathbf{b}_2 d\Sigma_2 = 0$$

olmak üzere (4.7) ile verilen türev denklemleri kullanılarak

$$\mathbf{b}_1 d\Sigma_1 + \mathbf{b}_2 d\Sigma_2 = -\mathbf{b}_1 \Delta \wedge \Sigma_2 - \mathbf{b}_2 \Delta \wedge \Sigma_1$$

yazılabilir. Yani,

$$\begin{cases} d\Sigma_1 = -\Delta \wedge \Sigma_2 = \Sigma_2 \wedge \Delta \\ d\Sigma_2 = -\Delta \wedge \Sigma_1 = \Sigma_1 \wedge \Delta \end{cases} \tag{4.13}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, L' Lorentz düzleminde de

$$\begin{cases} d\Sigma_1{}' = -\Delta' \wedge \Sigma_2{}' = \Sigma_2{}' \wedge \Delta' \\ d\Sigma_2{}' = -\Delta' \wedge \Sigma_1{}' = \Sigma_1{}' \wedge \Delta' \end{cases} \tag{4.14}$$

bulunur.

Ayrıca $d(d\mathbf{b}_j) = 0$ ve $d(d\mathbf{b_j}') = 0,\ j = 1,2$ olacağından

$$d(d\mathbf{b}_1) = d(\Delta \mathbf{b}_2) = 0$$

için

$$d\mathbf{b}_2 \wedge \Delta + \mathbf{b}_2 d\Delta = \mathbf{b}_1 \Delta \wedge \Delta + \mathbf{b}_2 d\Delta = 0$$

bulunur. Burada $\Delta \wedge \Delta = 0$ olacağından

$$d\Delta = 0 \tag{4.15}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$d\Delta' = 0 \tag{4.16}$$

yazılır ve Δ' de bir tam diferansiyeldir.

Sonuç 4.0.1. *$\mathscr{A}/L$ ve $\mathscr{A}'/L'$ Lorentzian hareketlerinde $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_1', \Sigma_2', \Delta$ ve Δ' Pfaff formları genel olarak t_1 ve t_2 gibi bağımsız iki değişkene bağlı 1-formlardır ve sağlamak zorunda oldukları "integrallenebilme şartları" vardır. Yani, bu Pfaff formları keyfi seçilmemektedir. $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_1', \Sigma_2'$ Pfaff formları* (4.13) *ve* (4.14) *integrallenebilme şartlarını sağlarlar ve Δ, Δ' tam diferansiyeldir.*

Hareketli koordinat sistemi yardımıyla verilen H_{II} Lorentzian hareketinin her (t_1, t_2) konumunda $A = A'$ ve $\mathbf{b}_j = \mathbf{b}_j{}',\ j = 1,2$ alınır. Yani L ve L' Lorentz düzlemlerinde ortak tek bir hareketli koordinat sistemi alınarak, L hareketli Lorentz düzlemi ile L' sabit Lorentz düzlemi arasında bir ilişki kurulmuş olur.

4.3 Hareketin Non-Null Kutup Ekseni

H_I 1-parametreli Lorentzian hareketlerinden biliyoruz ki; hareketin her t anında her iki düzlemde de sabit kalan bir tek nokta vardır ve bu nokta pol noktası olarak isimlendirilmektedir. Bu bölümde, H_{II} 2-parametreli Lorentzian hareketlerinden her konumda elde edilen 1-parametreli H_I hareketlerinin pol noktaları incelenerek bu pol noktalarının pol ekseni adı verilen non-null doğru üzerinde bulunduğu gösterilcektir.

4.3.1 Özel Lorentzian Düzlemsel Hareketin Hiperbolik İfadesi ile Non-Null Kutup Ekseni

Burada SH_{II} Özel Lorentzian hareketinden elde edilen SH_I hareketlerin P dönme polü araştırılacaktır:

Teorem 4.1. *SH_{II} özel hareketinin herhangi bir (Θ, t) konumunda elde edilen bütün SH_I hareketlerinin P dönme polleri L hareketli ve L' sabit Lorentz düzleminlerinde, sırasıyla, g ve g' doğrularını meydana getirir.*

İspat. SH_{II} hareketinden elde edilen SH_I başlangıç noktasının konum vektörü $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\Theta, t)$ olmak üzere buradan diferansiyel alırsak

$$d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \Theta} d\Theta + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \frac{dt}{d\Theta} d\Theta$$

veya

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\Theta} = \mathbf{u}_\Theta + \mathbf{u}_t \frac{dt}{d\Theta} \tag{4.17}$$

yazılabilir. (4.17) eşitliği Lorentzian hareketin hiperbolik ifadesinden elde edilen pol noktalarının (4.5) ve (4.6) eşitliklerinde yerine yazılırsa SH_{II} hareketi için

$$\mathbf{p} = \mathbf{u} + j\mathbf{u}_\Theta + j\mathbf{u}_t \frac{dt}{d\Theta} \tag{4.18}$$

ve

$$\mathbf{p}' = je^{j\Theta}\mathbf{u}_\Theta + je^{j\Theta}\mathbf{u}_t \frac{dt}{d\Theta} \tag{4.19}$$

bulunur.

Belirli herhangi bir (Θ, t) konumu ile Θ ve t paremetrelerinin tespit edildiğini ve sadece $\frac{dt}{d\Theta} = \delta$ değiştiğini kabul edelim. Böylece, (4.18) ve (4.19) eşitleri için, sırasıyla,

$$\mathbf{p} = (\mathbf{u} + j\mathbf{u}_\Theta) + (j\mathbf{u}_t)\delta$$

ve

$$\mathbf{p}' = (je^{j\Theta}\mathbf{u}_\Theta) + (je^{j\Theta}\mathbf{u}_t)\delta$$

elde edilir. $P \in L$ pol noktalarının üzerinde bulunduğu g doğrusu için

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{u} + j\mathbf{u}_\Theta$$

noktasından geçtiği ve doğrultusunun

$$\mathbf{v} = j\mathbf{u}_t$$

olduğu ve benzer şekilde, $P' \in L'$ pol noktalarının g' doğrusu için

$$\mathbf{p'}_0 = je^{j\Theta}\mathbf{u}_\Theta$$

noktasından geçtiği ve doğrultusunun

$$\mathbf{v}' = je^{j\Theta}\mathbf{u}_t = \mathbf{v}e^{j\Theta} \tag{4.20}$$

olduğu elde edilir. ■

Tanım 4.4. SH_{II} özel hareketinin herhangi bir (Θ, t) konumunda elde edilen bütün SH_I hareketlerinin P dönme pollerinin bulunduğu $g \in L$ ve $g' \in L'$ doğrularına hareketin ***kutup eksenleri*** adı verilir.

Yorum. $\langle \mathbf{v}', \mathbf{v}' \rangle_L = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_L = -\langle \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t \rangle_L$ olduğundan

- $\mathbf{u}_t$ spacelike bir vektör ise g ve g' kutup eksenleri birer timelike doğrudur.
- $\mathbf{u}_t$ timelike bir vektör ise g ve g' kutup eksenleri birer spacelike doğrudur.

Teorem 4.2. *SH_{II} özel hareketinin herhangi bir (Θ, t) konumunda elde edilen bütün SH_I hareketlerinin non-null $g \in L$ ve $g' \in L'$ kutup eksenleri hızları değişmeyecek şekilde birbirlerine karşılık gelirler.*

İspat. g ve g' kutup eksenlerinin $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{v}'$ hız vektörlerinin boyları, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{|\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_L|} = \sqrt{\left|\langle j\mathbf{u}_t, j\mathbf{u}_t \rangle_L\right|} = \sqrt{\left|j\,\bar{j}\langle \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t \rangle_L\right|} \\ &= \sqrt{\left|-\langle \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t \rangle_L\right|} = \sqrt{\left|\langle \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_t \rangle_L\right|} = \|\mathbf{u}_t\| \end{aligned}$$

ve

$$\left\|\mathbf{v}'\right\| = \sqrt{|\langle e^{j\Theta}\mathbf{v}, e^{j\Theta}\mathbf{v} \rangle_L|} = \sqrt{|e^{j\Theta}e^{-j\Theta}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_L|} = \sqrt{|\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_L|} = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}_t\|$$

olduğundan

$$\|\mathbf{v}\| = \left\|\mathbf{v}'\right\| = \|\mathbf{u}_t\| \tag{4.21}$$

elde edilir. ■

Bu durumda (4.1) ve (4.2) teoremlerinin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem ispatsız verilebilir:

Teorem 4.3. *SH_{II} özel hareketinin $(\Theta, t) \to (\Theta + d\Theta, t + dt)$ gibi sonsuz küçük dönmelerine ait dönme pollerinin geometrik yeri; L ve L' düzlemlerinde, sırasıyla, Θ, t sabit değişkenleri, $\frac{dt}{d\Theta} = \delta$ değişim oranı ile sadece (Θ, t) konumuna bağlı olan non-null g ve g' kutup eksenleridir. SH_{II} özel hareketi esnasında, spacelike/timelike $g(\theta, t)$ kutup ekseni spacelike/timelike $g'(\Theta, t)$ kutup eksenine dönüşür.*

4.3.2 Hareketli Koordinat Sistemi ile Non-Null Kutup Ekseni

Burada L hareketli Lorentz düzleminde seçilen sabit bir X noktasının L' sabit Lorentz düzlemindeki $\overrightarrow{d_f \mathbf{x}}$ sürüklenme hız vektörü yardımıyla $H_{II} = L/L'$ Lorentzian hareketinden elde edilen H_I hareketlerinin P dönme polü araştırılacaktır:

Hareketli koordinat sistemi yardımıyla, sabit bir X noktasının konum vektörü

$$\mathbf{O'X} = \mathbf{O'A'} + \mathbf{A'X}$$

veya

$$\mathbf{x}' = -\mathbf{a}' + \mathbf{b_1}'x + \mathbf{b_2}'y$$

olmak üzere X noktasının L' sabit düzlemine göre değişimi

$$d\mathbf{x} = -d\mathbf{a}' + \mathbf{b}_1{}'dx + d\mathbf{b}_1{}'x + \mathbf{b}_2{}'dy + d\mathbf{b}_2{}'y$$

veya (4.8) $\mathscr{A}/L$ hareketinin türev denklemlerinin eşitlikleri kullanılarak

$$d\mathbf{x} = \mathbf{b}_1{}'(dx - \Sigma_1{}' + y\Delta') + \mathbf{b}_2{}'(dy - \Sigma_2{}' + x\Delta')$$

elde edilir. X noktası L Lorentz düzleminde sabit olduğundan (4.10) sabit olma koşullarını sağlar ve böylece hareketin X noktasındaki sürüklenme hız vektörü

$$\overrightarrow{d_f \mathbf{x}} = \mathbf{b_1}\left\{(\Sigma_1 - \Sigma_1^{'}) + y(\Delta' - \Delta)\right\} + \mathbf{b}_2\left\{(\Sigma_2 - \Sigma_2^{'}) + x(\Delta' - \Delta)\right\} \tag{4.22}$$

olarak elde edilir. Sürüklenme hız vektörü, bileşenleri t_1 ve t_2 parametrelerine bağlı

1-formlar olan bir vektör olmak üzere (4.22) eşitliğinde

$$\begin{cases} \xi_1 = (\Sigma_1 - \Sigma_1{}') + y(\Delta' - \Delta) \\ \xi_2 = (\Sigma_2 - \Sigma_2{}') + x(\Delta' - \Delta) \end{cases} \tag{4.23}$$

şeklinde seçilirse

$$\overrightarrow{d_f \mathbf{x}} = \mathbf{b_1}\xi_1 + \mathbf{b}_2\xi_2 \tag{4.24}$$

elde edilir.

H_{II} Lorentzian hareketinden elde edilen bir H_I hareketinin P dönme polü için (4.22) eşitliğinde $\overrightarrow{d_f \mathbf{x}} = 0$ olacağından

$$\begin{cases} x = p_1 = \dfrac{\Sigma_2{}' - \Sigma_2}{\Delta' - \Delta} \\ y = p_2 = \dfrac{\Sigma_1{}' - \Sigma_1}{\Delta' - \Delta} \end{cases} \tag{4.25}$$

elde edilir.

$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_1^{'}, \Sigma_2^{'}, \Delta$ ve Δ' Pfaff formları iki bağımsız t_1 ve t_2 değişkenlerine bağlı olduğundan dönme polünün koordinatları (4.25) eşitliklerinden genel olarak

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{K_1(t_1,t_2)dt_1 + L_1(t_1,t_2)dt_2}{M(t_1,t_2)dt_1 + N(t_1,t_2)dt_2}, \\ p_2 = \dfrac{K_2(t_1,t_2)dt_1 + L_2(t_1,t_2)dt_2}{M(t_1,t_2)dt_1 + N(t_1,t_2)dt_2} \end{cases}$$

yazılabilir. H_{II} Lorentzian hareketinden elde edilen bir H_I hareketi için t_1 ve t_2 tespit ve $\frac{dt_2}{dt_1} = \delta$ değişken kabul edildiğinden bu eşitlikler, sırasıyla,

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{K_1 + L_1\delta}{M + N\delta} = A + B\dfrac{1}{\delta}, \\ p_2 = \dfrac{K_2 + L_2\delta}{M + N\delta} = C + D\dfrac{1}{\delta} \end{cases}$$

şeklinde düzenlenebilir. Böylece P pol noktası koordinatları için

$$P = (p_1, p_2) = (A, C) + \frac{1}{\delta}(B, D)$$

bulunur. Yani, (A, C) doğru üzerinde herhangi bir nokta ve (B, D) doğrultman vektörü için P polünün L ve L' Lorentz düzlemlerinde birer non-null doğrunun, yani non-null kutup eksenlerinin üzerinde bulunduğu görülür, (Teorem 4.1).

Yorum. Bu kutup ekseni için

- (B,D) spacelike bir vektör ise g ve g' kutup eksenleri birer spacelike doğrudur.
- (B,D) timelike bir vektör ise g ve g' kutup eksenleri birer timelike doğrudur.

4.4 Non-Null Kutup Eksen Dönüşümünün Yoğunluk Değişmezliği

Burada genel olarak $H_{II} = L/L'$ Lorentzian hareketi esnasında $g \in L$ ve $g' \in L'$ kutup eksenlerinin yoğunluğunun değişmediği gösterilecektir:

4.4.1 Özel Lorentzian Hareketinde Non-Null Kutup Eksen Dönüşümünün Yoğunluk Değişmezliği

Teorem 4.4. *$SH_{II} = L/L'$ özel Lorentzian hareketinde, non-null $g \in L$ kutup ekseninin yoğunluğu non-null $g' \in L'$ kutup ekseninin yoğunluğuna eşittir.*

İspat. SH_{II} özel Lorentzian hareketinden elde edilen SH_I hareketlerinin P ve P' pol noktalarının (4.5) ve (4.6) eşitliklerinden $d\mathbf{p}, d\mathbf{p}'$ değişimleri için

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\Theta} = \frac{d\mathbf{u}}{d\Theta} + j\frac{d^2\mathbf{u}}{d\Theta^2} \tag{4.26}$$

ve

$$\frac{d\mathbf{p}'}{d\Theta} = e^{j\Theta}\left(\frac{d\mathbf{u}}{d\Theta} + j\frac{d^2\mathbf{u}}{d\Theta^2}\right) = e^{j\Theta}\frac{d\mathbf{p}}{d\Theta} \tag{4.27}$$

elde edilir. Ayrıca, $\mathbf{u} = (\Theta, t)$ ve $t = t(\Theta)$ olmak üzere

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\Theta} = \mathbf{u}_\Theta + \mathbf{u}_t\frac{dt}{d\Theta}$$

ve

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\Theta^2} = \mathbf{u}_{\Theta\Theta} + 2\mathbf{u}_{\Theta t}\frac{dt}{d\Theta} + \mathbf{u}_{tt}\left(\frac{dt}{d\Theta}\right)^2 + \mathbf{u}_t\frac{d^2t}{d\Theta^2}$$

eşitlikleri (4.26) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{p}}{d\Theta} &= \left(\mathbf{u}_\Theta + \mathbf{u}_t\frac{dt}{d\Theta}\right) + j\left(\mathbf{u}_{\Theta\Theta} + 2\mathbf{u}_{\Theta t}\frac{dt}{d\Theta} + \mathbf{u}_{tt}\left(\frac{dt}{d\Theta}\right)^2 + \mathbf{u}_t\frac{d^2t}{d\Theta^2}\right)\\ &= \mathbf{u}_t\left(\frac{\mathbf{u}_\Theta}{\mathbf{u}_t} + \frac{dt}{d\Theta}\right) + j\mathbf{u}_t\left(\frac{\mathbf{u}_{\Theta\Theta}}{\mathbf{u}_t} + 2\frac{\mathbf{u}_{\Theta t}}{\mathbf{u}_t}\frac{dt}{d\Theta} + \frac{\mathbf{u}_{tt}}{\mathbf{u}_t}\left(\frac{dt}{d\Theta}\right)^2 + \frac{d^2t}{d\Theta^2}\right)\end{aligned}$$

ve herhangi bir r sabiti için

$$\frac{\mathbf{u}_\theta}{\mathbf{u}_t} + \frac{dt}{d\Theta} = r\sinh\alpha$$

ve

$$\frac{\mathbf{u}_{\Theta\Theta}}{\mathbf{u}_t}+2\frac{\mathbf{u}_{\Theta t}}{\mathbf{u}_t}\frac{dt}{d\Theta}+\frac{\mathbf{u}_{tt}}{\mathbf{u}_t}\left(\frac{dt}{d\Theta}\right)^2+\frac{d^2t}{d\Theta^2}=r\cosh\alpha$$

şeklinde seçilirse genel olarak

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\Theta}=j\mathbf{u}_t r e^{j\alpha}$$

elde edilir. $\mathbf{v}=j\mathbf{u}_t$ olduğundan

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\Theta}=\mathbf{v}\ r\ e^{j\alpha} \tag{4.28}$$

ve (4.28), (4.20) eşitliklerinden

$$\frac{d\mathbf{p}'}{d\Theta}=\mathbf{v}\,\mathrm{e}^{j\Theta}r\ e^{j\alpha}=\mathbf{v}'\ r\ e^{j\alpha} \tag{4.29}$$

bulunur.

SH_{II} özel Lorentzian hareketinden elde edilen SH_I hareketlerinin P ve P' pol noktaları 1-parametreli hareket esnasında (P) ve (P') pol yörüngelerini çizerler. Bu durumda $d\mathbf{p}$ ve $d\mathbf{p}'$ vektörel yörünge elementleri ile ilgili olarak

$$s=\int_a^b\left\|\frac{d\mathbf{p}}{d\Theta}\right\|d\Theta=\int_a^b\left\|\mathbf{v}\,r\,\mathrm{e}^{j\alpha}\right\|d\Theta$$

veya

$$\begin{aligned}ds&=\left\|\mathbf{v}r\mathrm{e}^{j\alpha}\right\|d\Theta=\sqrt{\langle\mathbf{v}r\mathrm{e}^{j\alpha},\mathbf{v}r\mathrm{e}^{j\alpha}\rangle}d\Theta=\sqrt{\mathrm{e}^{j\alpha}\mathrm{e}^{-j\alpha}\langle\mathbf{v}r,\mathbf{v}r\rangle}d\Theta\\&=|r|\,\|\mathbf{v}\|\,d\Theta\end{aligned}$$

ve

$$s'=\int_a^b\left\|\frac{d\mathbf{p}'}{d\Theta}\right\|d\Theta=\int_a^b\left\|\mathbf{v}'r\,\mathrm{e}^{j\alpha}\right\|d\Theta$$

veya

$$\begin{aligned}ds'&=\left\|\mathbf{v}'\,r\,\mathrm{e}^{j\alpha}\right\|d\Theta=\sqrt{\langle\mathbf{v}'\,r\,\mathrm{e}^{j\alpha},\mathbf{v}'r\,\mathrm{e}^{j\alpha}\rangle}d\Theta=\sqrt{\mathrm{e}^{j\alpha}\mathrm{e}^{-j\alpha}\langle\mathbf{v}'\,r\,,\mathbf{v}'\,r\,\rangle}d\Theta=|r|\,\|\mathbf{v}'\|\,d\Theta\\&=|r|\,\|\mathbf{v}\|\,d\Theta\end{aligned}$$

olduğundan ds ve ds' yay uzunluklarının eşit ve $e^{j\alpha}$'nın geometrik yorumundan da $g\in L$ ve $g'\in L'$ kutup eksenleri ile yaptıkları açının aynı olduğu bulunur.

SH_{II} özel Lorentzian hareketi bir konumunda $g\in L$ non-null kutup eksenine ve farklı bir konumda ise $g_1\in L$ non-null kutup eksenine sahip olsun. Hareketin sonsuz yakın iki konumunu düşünecek olursak g ve g_1 kutup eksenleri birbirleriyle çakışacak kadar yakındır. Hareketin kutup ekseninin timelike veya spacelike olması durumu ayrı ayrı

incelenmelidir.

i. $g \in L$ timelike:
Bu durumda $g \in L$ timelike kutup ekseninin Hesse formu

$$x_1 \cosh\Psi - x_2 \sinh\Psi = p \tag{4.30}$$

şeklindedir. g kutup ekseninin F dikme ayağı ile ilgili hareketin P pol noktası arasındaki uzaklı fonksiyonu k olsun.

Buradan, Şekil 4.3'e göre

$$\|\mathbf{F_1P_1}\| = \left\|\mathbf{F_1'P_1'}\right\|$$

yazılabilir. O merkezli p yarıçaplı timelike çemberde $d\Psi$ açısının gördüğü yay uzunluğu

$$\left\|\mathbf{FF_1'}\right\| = pd\Psi$$

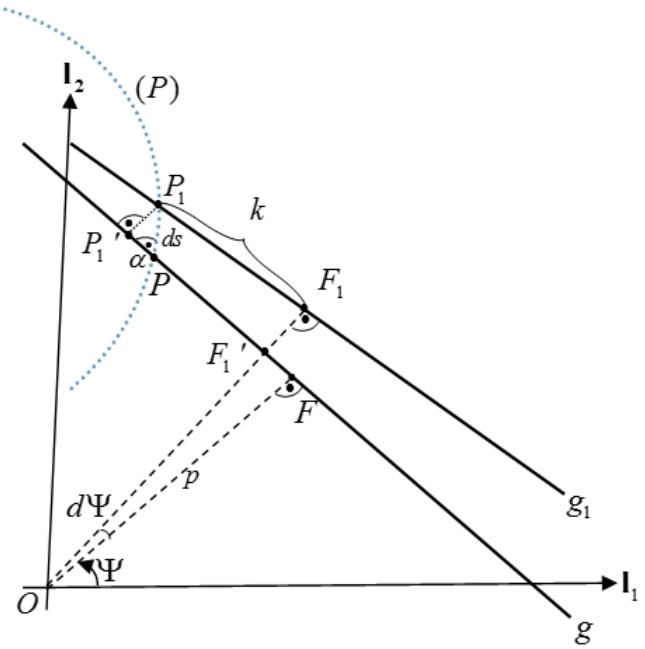
ve $P_1PP_1{}'$ dik üçgeninden

$$\left\|\mathbf{PP_1'}\right\| = |ds\cosh\alpha|$$

olmak üzere dikme ayakları ile pol noktaları arasındaki değişim için

$$dk = ds\cosh\alpha - pd\Psi \tag{4.31}$$

elde edilir.



Şekil 4.3 L hareketli düzleminde non-null kutup ekseni ve pol eğrisi

Benzer şekilde, $g' \in L'$ ve ${g_1}' \in L'$ kutup eksenleri için de

$$dk' = ds' \cosh\alpha' - p' d\Psi' \tag{4.32}$$

bulunur.

SH_{II} özel Lorentzian hareketinden elde edilen SH_I hareketleri için bir $[t_1, t_2]$ aralığında $ds = ds'$ ve $\alpha = \alpha'$ olduğundan (4.31) ve (4.32) denklemlerinin farkı alınırsa

$$dk - dk' = p' d\Psi - p d\Psi$$

elde edilir. Buradan eşitliğin her iki tarafından diferansiyel alınarak

$$d\left(dk - dk'\right) = d\left(p' d\Psi - p d\Psi\right)$$

veya

$$d^2k - d^2k' = dp' \wedge d\Psi' - dp \wedge d\Psi$$

olmak üzere

$$dp' \wedge d\Psi' = dp \wedge d\Psi$$

elde edilir.

ii. $g \in L$ spacelike:
Benzer şekilde, kutup ekseninin spacelike olması durumu içinde $dp' \wedge d\Psi' = dp \wedge d\Psi$ olduğu gösterilebilir.

Sonuç olarak, SH_{II} özel Lorentzian hareketi altında non-null kutup eksen yoğunluğu için

$$dg = dp \wedge d\Psi = dp' \wedge d\Psi' = dg' \tag{4.33}$$

yazılır. Yani, L ve L' Lorentz düzlemleri SH_{II} hareketi esnasında yoğunluğu değiştirmeyen kutup eksen dönüşümü ile birbirlerine dönüşürler. ■

4.4.2 Hareketli Koordinat Sistemi ile Non-Null Kutup Eksen Dönüşümünün Yoğunluk Değişmezliği

Burada hareketli koordinat sistemi ile H_{II} Lorentzian hareketinin non-null kutup eksenlerinin yoğunluğunun değişmediği gösterilecektir. Genelliği bozmayacağından $\{A; \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ hareketli sistemi non-null kutup eksenleri üzerinde olacak şekilde seçilecektir. Hareketin kutup ekseninin timelike veya spacelike olması durumu ayrı ayrı incelenmelidir.

i. $g \in L$ timelike:
$\{A; \mathbf{b_2}\}$ ekseni g timelike kutup ekseni üzerinde seçilmesi ile $P = p_1\mathbf{b}_1 + p_2\mathbf{b}_2$ pol noktası için (4.25) eşitliklerinden $p_1 = 0$ olacağından

$$\Sigma_2{}' = \Sigma_2 = \Sigma \tag{4.34}$$

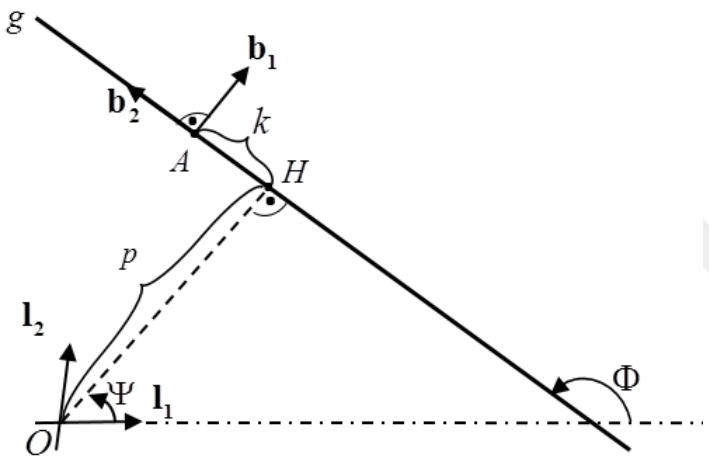
elde edilir ve eşitliğin her iki tarafının diferansiyeli alınırsa

$$d\Sigma_2{}' = d\Sigma_2 \tag{4.35}$$

olduğundan (4.13) ve (4.14) integrallenebilme şartlarından

$$\Sigma_1{}' \wedge \Delta' = \Sigma_1 \wedge \Delta \tag{4.36}$$

elde edilir.



Şekil 4.4 $g \in L$ timelike kutup ekseni ve hareketli koordinat sistemi

Hareketli koordinat sistemi ile Şekil 4.4'e göre

$$\mathbf{a} = \mathbf{AO} = \mathbf{AH} + \mathbf{HO}$$

veya

$$\mathbf{a} = -\mathbf{b}_1 p - \mathbf{b}_2 k \tag{4.37}$$

yazılır. Son eşitlikten diferansiyel alınıp (4.7) türev denklemleri kullanılırsa

$$d\mathbf{a} = -\mathbf{b}_1 dp - \mathbf{b}_2 dk - d\mathbf{b}_1 p - d\mathbf{b}_2 k = -\mathbf{b}_1 (dp + k\Delta) - \mathbf{b}_2 (dk + p\Delta) \tag{4.38}$$

bulunur ve türev denklemlerinden genel olarak $d\mathbf{a} = \Sigma_1 \mathbf{b}_1 + \Sigma_2 \mathbf{b}_2$ olduğundan

$$\begin{cases} \Sigma_1 = -(dp + k\Delta) \\ \Sigma_2 = -(dk + p\Delta) \end{cases} \tag{4.39}$$

elde edilir.

$\Phi = \Psi + a$, $a =$ sabit olduğundan

$$d\Psi = d\Phi = \Delta \tag{4.40}$$

elde edilir. Burada Δ, $\mathbf{l}_1$ ile $\mathbf{b_1}$ arasındaki açının değişimidir.

Ayrıca $g \in L$ timelike kutup ekseninin yoğunluğu $dg = dp \wedge d\Psi$ denklemi ile verildiğinden (4.39) ve (4.40) eşitlikleri kullanılarak

$$dg = (k\Delta - \Sigma_1) \wedge \Delta$$

yazılır ve alterne çarpımın özelliklerinden $\Delta \wedge \Delta = 0$ olduğundan

$$dg = -\Sigma_1 \wedge \Delta \tag{4.41}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, $g' \in L'$ timelike kutup ekseninin yoğunluğu için

$$dg' = -\Sigma_1{}' \wedge \Delta' \tag{4.42}$$

bulunur. (4.41) ve (4.42) bağıntıları (4.36) eşitliği ile karşılaştırılırsa

$$dg = dg' \tag{4.43}$$

elde edilir.

Teorem 4.5. *H_{II} Lorentzian hareketinin $g \in L$ timelike kutup ekseninin yoğunluğu bu eksene karşılık gelen $g' \in L'$ timelike kutup ekseninin yoğunluğuna eşittir.*

ii. $g \in L$ spacelike:
$\{A; \mathbf{b}_1\}$ ekseni g spacelike kutup ekseni üzerinde seçilmesi ile $P = p_1 \mathbf{b}_1 + p_2 \mathbf{b}_2$ pol noktası için (4.25) eşitliklerinden $p_2 = 0$ olacağından

$$\Sigma_1 = \Sigma_1{}' = \Sigma \tag{4.44}$$

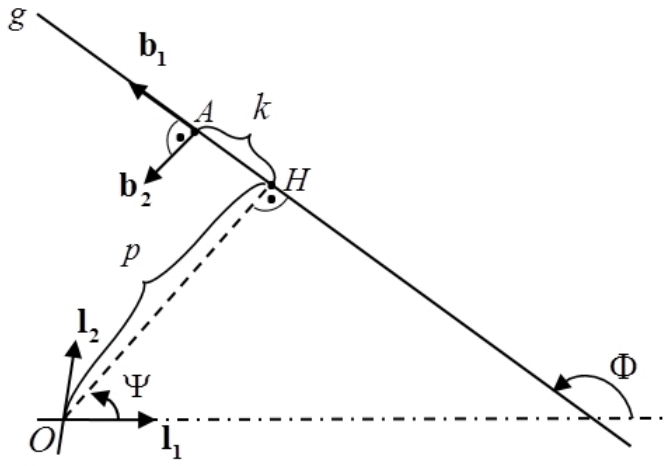
elde edilir ve her iki tarafın diferansiyeli alınırsa

$$d\Sigma_1{}' = d\Sigma_1 \tag{4.45}$$

olduğundan (4.13) ve (4.14) integrallenebilme şartlarından

$$\Sigma_2{}' \wedge \Delta = \Sigma_2 \wedge \Delta \tag{4.46}$$

elde edilir.



Şekil 4.5 $g \in L$ spacelike kutup ekseni ve hareketli koordinat sistemi

Şekil 4.5'e göre

$$\mathbf{a} = \mathbf{AO} = \mathbf{AH} + \mathbf{HO}$$

veya

$$\mathbf{a} = -\mathbf{b}_1 k + \mathbf{b}_2 p \tag{4.47}$$

yazılır. Son eşitliğin diferansiyeli alınarak (4.7) eşitlikleri kullanılırsa

$$d\mathbf{a} = \mathbf{b}_1\Sigma_1 + \mathbf{b}_2\Sigma_2 = \mathbf{b}_1(-dk + p\Delta) + \mathbf{b}_2(dp - k\Delta) \tag{4.48}$$

bulunur ve buradan

$$\begin{cases} \Sigma_1 = -dk + p\Delta \\ \Sigma_2 = \ dp - k\Delta \end{cases} \tag{4.49}$$

elde edilir.

Burada Δ, $\mathbf{l}_1$ ile $\mathbf{b_1}$ arasındaki açının değişimi kabul edildiğinden $\Delta = d\Phi$ alınmıştır. $\Phi = \Psi + a,\ a =$ sabit olduğundan

$$\Delta = d\Psi \tag{4.50}$$

yazılabilir. Spacelike kutup ekseninin yoğunluğu $dg = dp \wedge d\Psi$ denklemi ile

verildiğinden (4.49) ve (4.50) eşitlikleri kullanılarak

$$dg = \Sigma_2 \wedge \Delta \tag{4.51}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, L' Lorentz düzleminde g' spacelike kutup ekseninin yoğunluğu $dg' = dp' \wedge d\Psi'$ olmak üzere benzer işlemler ile

$$dg' = \Sigma_2{}' \wedge \Delta' \tag{4.52}$$

bulunur.

(4.51) ve (4.52) bağıntıları (4.46) eşitliği ile karşılaştırılırsa

$$dg = dg' \tag{4.53}$$

elde edilir.

Teorem 4.6. *H_{II} Lorentzian hareketinin her konumunda $g \in L$ spacelike kutup ekseninin yoğunluğu bu eksene karşılık gelen $g' \in L'$ spacelike kutup ekseninin yoğunluğuna eşittir.*

Sonuç olarak, Teorem 4.5 ve Teorem 4.6 kullanılarak aşağıdaki teorem ispatsız verilebilir:

Teorem 4.7. *H_{II} Lorentzian hareketinin her konumunda $g \in L$ non-null kutup ekseninin yoğunluğu bu eksene karşılık gelen $g' \in L'$ non-null kutup ekseninin yoğunluğuna eşittir.*

4.5 Hareketin Eğri Elementi Çizen Noktaları

Genel olarak $H_{II} = L/L'$ hareketi altında $X \in L$ noktası L' düzleminde yüzey parçası çizer ve X' noktasının yoğunluğu sıfırdan farklıdır. Bu bölümde belirli (t_1, t_2) konumunda L' sabit düzleminde nokta yoğunluğu sıfır olan noktalar araştırılacaktır. Bu noktaların hareket esnasında bir yüzey elementi de eğri elementi çizdiği yani aslında 2-parametreli hareket değilde 1-parametreli hareket yaptığı gösterilecektir.

X noktasının L' sabit düzlemindeki nokta yoğunluğu hareketli koordinat sistemi yardımıyla (4.23) eşitlikleri kullanılarak

$$\xi_1 \wedge \xi_2 = \left[(\Sigma_1 - \Sigma_1^{'}) + y(\Delta' - \Delta)\right] \wedge \left[(\Sigma_2 - \Sigma_2^{'}) + x(\Delta' - \Delta)\right]$$

olmak üzere alterne çarpımın özelliği kullanılarak

$$\xi_1 \wedge \xi_2 = x(\Sigma_1 - \Sigma_1^{'}) \wedge (\Delta' - \Delta) + y(\Delta' - \Delta) \wedge (\Sigma_2 - \Sigma_2^{'}) + (\Sigma_1 - \Sigma_1^{'}) \wedge (\Sigma_2 - \Sigma_2^{'}) \quad (4.54)$$

elde edilir.

Sonuç 4.7.1. *Pol noktalarının* (4.25) *eşitlikleri kullanılarak*

$$\left(\Sigma_2^{'} - \Sigma_2\right) = p_1\left(\Delta' - \Delta\right), \quad \left(\Sigma_1^{'} - \Sigma_1\right) = p_2\left(\Delta' - \Delta\right)$$

yazılabilir ve bu eşitlikler (4.54) *denkleminde yerine yazılırsa* $\xi_1 \wedge \xi_2 = 0$ *elde edilir. Yani,* H_{II} *Lorentzian hareketinin pol noktalarının nokta yoğunluğunun sıfırdır.*

Teorem 4.8. $H_{II} = L/L'$ *Lorentzian hareketinde* L *hareketli düzleminin* (t_1, t_2) *konumunda yüzey elementi değil, bir eğri elementi çizen noktaların geometrik yeri non-null kutup eksenleridir.*

İspat. L' sabit düzleminde nokta yoğunluğu sıfır olan X noktaları için $\xi_1 \wedge \xi_2 = 0$ yani

$$x(\Sigma_1 - \Sigma_1^{'}) \wedge (\Delta' - \Delta) + y(\Delta' - \Delta) \wedge (\Sigma_2 - \Sigma_2^{'}) + (\Sigma_1 - \Sigma_1^{'}) \wedge (\Sigma_2 - \Sigma_2^{'}) = 0 \quad (4.55)$$

olmalıdır. (4.55) eşitliğinin sağlanabilmesi için aşağıdaki 2 durumdan biri sağlanmalıdır.

i. $(\Sigma_1 - \Sigma_1^{'}), (\Sigma_2 - \Sigma_2^{'}), (\Delta' - \Delta)$ Pfaff formları lineer bağımlı ise alterne çarpımın özelliğinden $\xi_1 \wedge \xi_2 = 0$ elde edilir. Bu durumda (4.25) eşitliklerine göre

$$p_1 = \frac{\Sigma_2{}' - \Sigma_2}{\Delta' - \Delta} = \text{sabit}, \qquad p_2 = \frac{\Sigma_1{}' - \Sigma_1}{\Delta' - \Delta} = \text{sabit},$$

yazılabileceğinden aynı $P = (p_1, p_2) =$ sabit polü H_{II} Lorentzian hareketinin (t_1, t_2) konumlu bütün H_I hareketlerine aittir. Yani, hareketin kutup ekseni mevcut değildir.

ii. $(\Delta' - \Delta) = 0$ ise $\mathscr{A}/L$ hareketinin $Q = (q_1, q_2)$ pol noktalarının

$$q_1 = x_1 = \frac{\Sigma_2}{\Delta}, \quad q_2 = x_2 = \frac{\Sigma_1}{\Delta}$$

ve $\mathscr{A}/L'$ hareketinin $Q' = (q_1', q_2')$ pol noktalarının

$$q_1{}' = x_1{}' = \frac{\Sigma_2{}'}{\Delta}, \quad q_2{}' = x_2{}' = \frac{\Sigma_1{}'}{\Delta}$$

denklemleri göz önüne alınırsa

$$\Sigma_1{}' - \Sigma_1 = \Delta\left(x_2{}' - x_2\right) \text{ ve } \Sigma_2{}' - \Sigma_2 = \Delta\left(x_1{}' - x_1\right)$$

yazılabileceğinden $\xi_1 \wedge \xi_2 = 0$ elde edilir. Bu durumda ise hareket sadece ötelemeden oluşur ve (4.25) eşitliklerinden genel olarak sonsuz uzak pol noktası bulunur.

Bu iki durum gösteriyor ki (4.55) eşitliği H_{II} Lorentzian hareketinin her (t_1, t_2) konumu için kutup eksenleri ile ilişkilidir.

Şimdi genelliği bozmayacağından hareketli koordinat sistemini özel olarak $\{A; \mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}\}$ *ekseni g non-null kutup ekseni üzerinde olacak şekilde seçerek nokta yoğunluğunun sıfır olma durumu incelenecektir:*

i. $g \in L$ timelike
$\{A; \mathbf{b_2}\}$ ekseni timelike kutup ekseni üzerinde seçilmesi ile (4.25) eşitliklerinde $p_1 = 0$ olacağından $\Sigma_2^{'} = \Sigma_2 = \Sigma$ yazılabilir. Bu eşitlik sürüklenme hız vektörünün (4.22) denkleminde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{d_f \mathbf{x}} = \mathbf{b_1}\left\{(\Sigma_1 - \Sigma_1^{'}) + y(\Delta' - \Delta)\right\} + \mathbf{b}_2\left\{x(\Delta' - \Delta)\right\}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} \xi_1 = (\Sigma_1 - \Sigma_1^{'}) + y(\Delta' - \Delta) \\ \xi_2 = x(\Delta' - \Delta) \end{cases}$$

olmak üzere X noktasının L' sabit düzlemindeki nokta yoğunluğu için

$$d_f x = \xi_1 \wedge \xi_2 = x(\Sigma_1 - \Sigma_1^{'}) \wedge (\Delta' - \Delta)$$

bulunur.

Sonuç 4.8.1. *H_{II} hareketinden elde edilen tüm H_I hareketlerinin pol noktalarının nokta yoğunluğu sıfırdır. Çünkü,*

$$(\Sigma_1 - \Sigma_1^{'}) \wedge (\Delta' - \Delta) \neq 0$$

ise $d_f x$ yüzey elementi yalnız $x = 0$ olan X noktaları için sıfırdır.

Eğer

$$(\Sigma_1 - \Sigma_1^{'}) \wedge (\Delta' - \Delta) = 0$$

ise aşağıdaki iki durum ortaya çıkar:

– $(\Sigma_1 - \Sigma_1^{'})$ ve $(\Delta' - \Delta)$ formları lineer bağımlı ise (4.25) eşitliklerine göre aynı

$$P = (0, p_2) = \text{sabit}$$

polü H_{II} Lorentzian hareketinin (t_1, t_2) konumlu bütün H_I hareketlerine aittir. Yani, hareketin kutup ekseni mevcut değildir.

– $(\Delta' - \Delta) = 0$ ise hareket sadece ötelemeden oluşur ve (4.25) eşitliklerine göre genel olarak sonsuz uzak pol noktası bulunur.

ii. $g \in L$ spacelike
$\{A; \mathbf{b}_1\}$ ekseni spacelike kutup ekseni üzerinde seçilmesi ile (4.25) eşitliklerinde $p_2 = 0$ olacağından $\Sigma_1^{'} = \Sigma_1 = \Sigma$ yazılabilir. Bu eşitlik sürüklenme hız vektörünün (4.22) denkleminde yerine yazılırsa

$$\overrightarrow{d_f \mathbf{x}} = \mathbf{b_1} \left\{ y(\Delta' - \Delta) \right\} + \mathbf{b}_2 \left\{ (\Sigma_2 - \Sigma_2^{'}) + x(\Delta' - \Delta) \right\}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{cases} \xi_1 = y\ (\Delta' - \Delta) \\ \xi_2 = (\Sigma_2 - \Sigma_2^{'}) + x(\Delta' - \Delta) \end{cases}$$

olmak üzere X noktasının L' sabit düzlemindeki nokta yoğunluğu için

$$d_f x = \xi_1 \wedge \xi_2 = y\ (\Delta' - \Delta) \wedge (\Sigma_2 - \Sigma_2^{'})$$

bulunur.

Sonuç 4.8.2. *H_{II} hareketinden elde edilen tüm H_I hareketlerinin pol noktalarının nokta yoğunluğu sıfırdır. Çünkü,*

$$(\Delta' - \Delta) \wedge (\Sigma_2 - \Sigma_2^{'}) \neq 0$$

ise $d_f x$ yüzey elementi yalnız $y = 0$ olan X noktaları için sıfırdır.

Eğer

$$(\Delta' - \Delta) \wedge (\Sigma_2 - \Sigma_2^{'}) = 0$$

ise aşağıdaki iki durum ortaya çıkar:

– $(\Sigma_2 - \Sigma_2^{'})$ ve $(\Delta' - \Delta)$ Pfaff formları lineer bağımlı ise (4.25) eşitliklerine göre aynı $P = (p_1, 0) = \text{sabit}$ polü H_{II} Lorentzian hareketinin (t_1, t_2) konumlu bütün H_I hareketlerine aittir. Yani, hareketin kutup ekseni mevcut değildir.

– $(\Delta' - \Delta) = 0$ ise, hareket sadece ötelemeden oluşur ve (4.25) eşitliklerine göre genel olarak sonsuz uzak pol noktası bulunur.

■

H_{II} Lorentzian hareketinden elde edilen bütün H_I hareketlerinde nokta yoğunluğu "0" olduğundan H_{II} hareketi esnasında H_I ile hareket eden noktalar L düzleminde sadece kutup ekseni üzerinde bulunurlar. Kutup ekseni üzerindeki noktalar dışındaki noktalar ise H_{II} hareketi ile hareket ederler. Nokta yoğunluğu "0" olan noktalar 1-parametreli hareketlerdeki gibi hareket ederler.

4.6 Kutup Eksen Yoğunluğu Sıfır Olan Hareketler

Bir $H_{II} = L/L'$ Lorentzian hareketinde genel olarak non-null $g \in L$ ve $g' \in L'$ kutup eksenlerinin $dg = dg'$ yoğunluklarının daima sıfırdan farklı olduğunu kabul edilir. Burada non-null g ve g' kutup eksenlerinin yoğunluklarının sıfır olması durumunda H_{II} Lorentzian hareketi incelenecektir.

Teorem 4.9. *H_{II} Lorentzian hareketi esnasında non-null kutup eksenlerinin yoğunluğu sıfır ise hareket $W \in L$ spacelike/timelike eğrisinin daima her konumda $W' \in L'$ spacelike/timelike zarf eğrisine değmesi ile meydana gelmektedir.*

İspat. Kabul edelim ki, $g \in L$ ve $g' \in L'$ non-null kutup eksenlerinin ortak yoğunluğu sıfır, yani $dg = dg' = 0$ olsun. O halde, $dg = dp \wedge d\Psi = 0$ olduğundan dp ile $d\Psi$ ve $dg' = dp' \wedge d\Psi' = 0$ olduğundan dp' ile $d\Psi'$ 1-formları lineer bağımlıdır. Dolayısıyla

$$F(\Psi, p)\, dp + G(\Psi, p)\, d\Psi = 0$$

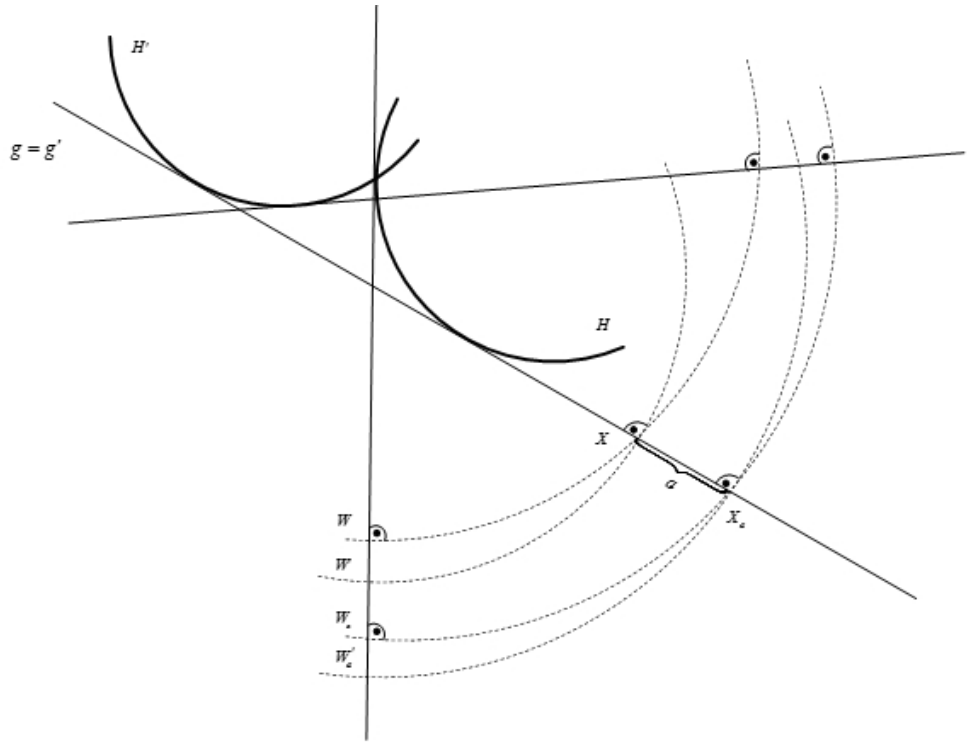
yazılabileceğinden p , Ψ açısının ve p' , Ψ' açısının bu diferansiyel denklemi sağlayan birer fonksiyonları olarak, sırasıyla,

$$p = p(\Psi), \quad p' = p'\left(\Psi'\right)$$

şeklinde seçilebilir.

$p(\Psi)$ ve $p'(\Psi')$ fonksiyonları ile, sırasıyla, $g \in L$ ve $g' \in L'$ timelike/spacelike doğrularının birer 1-parametreli ailesi elde edilir. Yani, $p(\Psi)$ fonksiyonu her Ψ açısı için L Lorentz düzleminde bir doğru belirtir. Bu doğruların non-null zarflarını, sırasıyla, H ve H' ile gösterelim. Böylece H zarf eğrisi, $p(\Psi)$ ailesindeki her doğruya teğettir. Dolayısıyla, $p(\Psi)$ timelike/ spacelike doğru ailesi ise zarf eğrisi de timelike/spacelike bir eğridir. L hareketli Lorentz düzlemindeki $p(\Psi)$ timelike/spacelike doğru ailesine ortogonal bir eğri de W olsun. W eğrisinin teğeti ile H zarfının teğeti dik olacağından, W eğrisine H eğrisinin ***evolütü*** denir. Bu durumda,

doğru ailesi timelike/spacelike ise W eğrisi de spacelike/timelike bir eğri olacaktır. W non-null eğrisinin g non-null kutup ekseni ile kesim noktası X olsun, Şekil 4.6.



Şekil 4.6 $g \in L$ ve $g' \in L'$ non-null kutup eksenlerinin zarf eğrileri ve evolütleri

Buradan, H_{II} Lorentzian hareketinden 1-parametreli herhangi bir H_I hareketini seçelim. Bu H_I hareketine ait P pol noktası, g non-null kutup ekseni üzerinde bulunur. Aynı zamanda H_I hareketinde L Lorentz düzlemine ait non-null W eğrisi, L' Lorentz düzleminde kendisiyle aynı tipten bir W' non-null zarfına sahiptir. P pol noktasından W eğrisine çizilen normal, W ve W' eğrilerinin ani değme noktasından geçeceğinden, bu nokta X noktası olur.

Şimdi de L' sabit Lorentz düzlemini ele alalım. Biran $g = g'$ olduğundan g' timelike/spacelike kutup ekseni W' spacelike/timelike zarf eğrisini dik keser. Çünkü W ve W' spacelike/timelike eğrilerinin teğetleri ortaktır ve g timelike/spacelike kutup ekseni W spacelike/timelike zarf eğrisini dik kesmektedir. Böylelikle W' spacelike/timelike eğrisi de L' Lorentz düzleminde g' timelike/spacelike kutup eksen ailesine ortogonal bir eğridir. W' spacelike/timelike eğrisinin teğeti ile H' timelike/spacelike eğrisinin teğeti dik olacağından, W' spacelike/timelike zarfı H' timelike/spacelike eğrisinin bir evolütüdür. Bu durumda W' spacelike/timelike zarf eğrisi H_{II} Lorentzian hareketinden elde edilen H_I hareketine bağlı değildir. Çünkü H_{II} hareketinden ilk seçilen 1-parametreli H_I hareketinden farklı olacak şekilde seçeceğimiz 1-parametreli hareketin pol noktası da aynı an için yine aynı $g = g'$ timelike/spacelike kutup ekseni üzerinde olacaktır. Bu durumda yine aynı zarf ve

evolüt eğrilerinden bahsedilebilir. ■

Şimdi tersine, önceden verilmiş $p(\Psi) \in L$, $p'(\Psi') \in L'$ fonksiyonları ile tanımlanan hareketin 2-parametreli olduğu ve bu hareketin her konumunda elde edilen kutup eksen yoğunluğunun sıfır olduğu gösterilecektir.

$p(\Psi) \in L$ ve $p'(\Psi') \in L'$ fonksiyonları ile elde edilen 1−parametreli birer timelike/spacelike doğru aileleri genel olarak $H \in L$ ve $H' \in L'$ timelike/spacelike zarflarına sahip olmak üzere bu eğrilerin herhangi iki $W \in L$ ve $W' \in L'$ spacelike/timelike evolüt eğrisi, yani bu iki doğru ailesinin herhangi iki ortogonal yörüngesi olsun. W spacelike/timelike eğrisinin bulunduğu L Lorentz düzlemi, W spacelike/timelike eğrisi daima L' Lorentz düzleminin W' spacelike/timelike eğrisine değecek şekilde hareket ettirilsin. Bu durumda W ve W' spacelike/timelike eğrilerinin noktaları birbirine tekabül etmeyip, sadece her iki eğrinin değme noktası W ve W' eğrilerinin ortak birer noktasıdır. Bu şartlar altında elde edilen hareket parametreler Ψ ve Ψ' olmak üzere 2−parametrelidir.

$p = p(\Psi)$ ve $p' = p'(\Psi')$ olduğundan dolayı diferansiyelleri için

$$dp = \dot{p}d\Psi \quad ve \quad dp' = \dot{p}'d\Psi'$$

yazılabilir. Yani, dp ve $d\Psi$ ile dp' ve $d\Psi'$ 1-formları lineer bağımlıdır. Bu durumda bu non-null doğru ailelerinin ortak yoğunlukları için

$$dg = dp \wedge d\Psi = 0 \quad ve \quad dg' = dp' \wedge d\Psi' = 0$$

elde edilir.

Tanım 4.5. Bu şekilde tanımlanan H_{II} Lorentzian hareketi için ***sıfır yoğunluklu önceden verilen*** $g \in L \to g' \in L'$ ***non-null kutup eksen dönüşümüne sahiptir*** denir.

Ayrıca W, W' spacelike/timelike eğrileri yerine H, H' timelike/spacelike zarf eğrilerinin W ve W' den aynı a kadar uzaklığında olan $W_a, W_a^{'}$ gibi farklı spacelike/timelike evolütleri alınırsa da, yine aynı H_{II} Lorentzian hareketi elde edilir. Çünkü hareket tanımlanırken bu uzaklık kullanılmamıştır, yani uzaklığın bir önemi yoktur.

Aynı zamanda $H \in L$ timelike/spacelike zarfının bir $W \in L$ spacelike/timelike evolüt eğrisi $H' \in L'$ timelike/spacelike zarfının sonsuz tane farklı $W' \in L'$ spacelike/timelike evolüt eğrisi ile birlikte her defa $H_{II} = L/L'$ Lorentzian hareketi belirttiği için, H_{II} hareketinin 1-parametreli bir ailesi $p = p(\Psi)$ ya da $p' = p'(\Psi')$ fonksiyonlarına aittir.

Böylece aşağıdaki teorem ispatsız olarak verilebilir:

Teorem 4.10. *L ve L' Lorentz düzlemlerinde* 1*-parametreli iki timelike/spacelike doğru ailesi önceden verilmiş ise, bu ailelere $H_{II} = L/L'$ Lorentzian hareketinin 1-parametreli bir ailesi aittir. Bu H_{II} Lorentzian hareketleri L hareketli Lorentz düzleminin timelike/spacelike doğru ailesinin spacelike/timelike ortogonal yörüngelerinin L' sabit Lorentz düzleminin timelike/spacelike doğru ailesinin spacelike/timelike ortogonal yörüngelerine değmesiyle karakterize edilir.*

Ayrıca H_{II} Lorentzian hareketi şu şekilde de açıklanabilir:

Teorem 4.11. *Non-null kutup ekseninin ortak yoğunluğu sıfır olan bir H_{II} Lorentzian hareketi birbirinden bağımsız,* 1*-parametreli iki harekete parçalanabilir. Bu durumda hareketin $g = g'$ timelike/spacelike kutup ekseni bir taraftan L hareketli Lorentz düzlemindeki H timelike/spacelike zarfı, diğer taraftan L' sabit Lorentz düzlemindeki H' timelike/spacelike zarfı üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.*

İspat. Non-null kutup ekseninin ortak yoğunluğu sıfır olan bir H_{II} hareketi esnasında $H \in L$ timelike/spacelike eğrisi $g = g'$ timelike/spacelike kutup ekseni üzerinde kaymaksızın yuvarlanır. Çünkü, H non-null eğrisinin $g = g'$ non-null kutup ekseni üzerinde aldığı yol ile H eğrisinin yay uzunluğu eşittir ve H eğrisi ile $g = g'$ kutup ekseninin her andaki hızları aynıdır. Benzer şekilde, $H' \in L'$ timelike/spacelike eğrisi $g = g'$ timelike/spacelike kutup ekseni üzerinde kaymaksızın yuvarlanır. Bu şekilde birbirinden bağımsız iki yuvarlanma hareketi görülür. H_{II} Lorentzian hareketinin böyle iki harekete parçalanabilmesinden dolayı "***parçalanabilen***" H_{II} hareketi tanımlanmış olur. ■

4.7 Belirlenmiş $g = g'$ Non-Null Kutup Ekseninin Tanımladığı Hareket

Bölüm 4.4'den biliniyor ki: $H_{II} = L/L'$ Lorentzian hareketi ile non-null $g \in L$ ve $g' \in L'$ kutup eksenleri ve bu eksenlerin bağlı oldukları L ve L' Lorentz düzlemleri $g \in L \to g' \in L'$ yoğunlukları değiştirmeyen dönüşüm ile birbirlerine dönüşürler. Şimdi tersine, L ve L' Lorentz düzlemleri arasında yoğunluğu değiştirmeyen $g \to g'$ doğru dönüşümü ile H_{II} hareketi araştırılacaktır.

$g \in L$ ve $g' \in L'$ non-null kutup eksenleri ile L hareketli Lorentz düzleminin L' sabit Lorentz düzlemine göre 2-parametreli L/L' hareketi Bölüm 4.2'de verilen hareketli koordinat sistemi ile açıklanabilir. Yani, L düzleminin L' düzlemine göre hareketi, her

konumda $\{A=C;\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2\}$ ve $\left\{C';\mathbf{b}_1{}',\mathbf{b}_2{}'\right\}$ koordinat sistemleri için $C=C'$, $\mathbf{b}_j=\mathbf{b}_j{}'$, $j=1,2$ olmasıyla elde edilir.

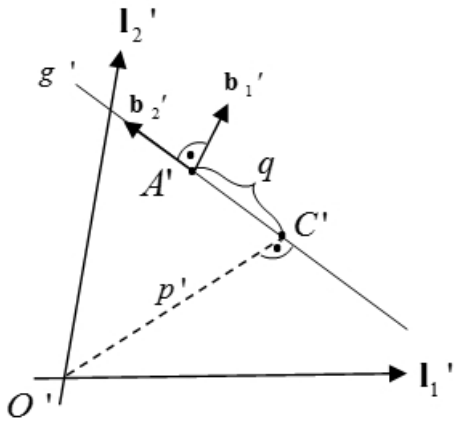
Teorem 4.12. *$g\in L\to g'\in L'$ non-null doğru dönüşümü ile: L hareketli Lorentz düzleminin L' sabit Lorentz düzlemine göre (veya tersi) 2−parametreli hareketlerinin 1−parametreli bir ailesi belirtilir. Ortak non-null $(g=g')$ eksen dönüşümlü iki hareket birbirine özdeştir.*

İspat. L ve L' Lorentz düzlemleri arasında yoğunluğu değiştirmeyen $g\to g'$ doğru dönüşümü olduğunu kabul edelim. Bu kabul altında hareketli koordinat sistemi ile H_{II} hareketinin nasıl olduğu incelenirken hareketin kutup ekseninin timelike veya spacelike olması durumu ayrı ayrı incelenmelidir.

i. $g\in L$ timelike:
L ve L' Lorentz düzlemlerinde, sırasıyla, hareketli $\{A;\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2\}$ ve $\left\{A';\mathbf{b}_1{}',\mathbf{b}_2{}'\right\}$ koordinat sistemlerini ele alalım. $\{A;\mathbf{b}_2\}$ ekseni $g\in L$ timelike kutup ekseni üzerinde ve benzer şekilde $\left\{A';\mathbf{b}_2{}'\right\}$ ekseni $g'\in L'$ timelike kutup ekseni üzerinde olacak şekilde seçilsin. Bu durumda Bölüm 4.2'de tanımlanan $\mathscr{A}/L$ ve $\mathscr{A}'/L'$ hareketlerinin (4.7), (4.8) türev denklemleri ile (4.13), (4.14) integrallenebilme şartları sağlanır. Böylece, yoğunluk değişmediğinden $dg=dg'$ yazılabilir ve (4.36) bağıntısı veya

$$d\Sigma_2=d\Sigma_2{}' \tag{4.56}$$

elde edilir.



Şekil 4.7 $g'\in L'$ timelike kutup ekseni ve hareketli koordinat sistemi

$g'\in L'$ timelike doğrusu boyunca $\left\{A';\mathbf{b}_1{}',\mathbf{b}_2{}'\right\}$ koordinat sisteminin hareket etmesi ile bir C' noktasına geldiğini kabul edersek ve bu noktada $\left\{C';\mathbf{b}_1{}',\mathbf{b}_2{}'\right\}$

koordinat sistemini ele alırsak Şekil 4.7'ye göre

$$\mathbf{c}' = \mathbf{C}'\mathbf{O}' = \mathbf{C}'\mathbf{A}' + \mathbf{A}'\mathbf{O}'$$

veya

$$\mathbf{c}' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}_2{}'q \tag{4.57}$$

vektörel eşitlikleri yazılabilir.

$C' \in L'$ noktasının değişimi genel olarak

$$d\mathbf{c}' = \mathbf{b}_1 w_1' + \mathbf{b}_2{}' w_2' \tag{4.58}$$

şeklinde yazılabilir. (4.57) eşitliğinden C' noktasının değişimi

$$d\mathbf{c}' = d\mathbf{a}' + \mathbf{b}_2{}' dq + d\mathbf{b}_2{}' q \tag{4.59}$$

olmak üzere (4.8) türev denklemleri kullanılırsa

$$d\mathbf{c}' = \mathbf{b}_1{}'(\Sigma_1{}' + q\Delta') + \mathbf{b}_2{}'(\Sigma_2{}' + dq) \tag{4.60}$$

şeklinde elde edilir. (4.58) ve (4.60) eşitliklerinden

$$\mathbf{b}_1{}' w_1' + \mathbf{b}_2{}' w_2' = \mathbf{b}_1{}'(\Sigma_1{}' + q\Delta') + \mathbf{b}_2'(\Sigma_2{}' + dq)$$

veya

$$\begin{cases} w_1' = \Sigma_1{}' + q\Delta' \\ w_2' = \Sigma_2{}' + dq \end{cases} \tag{4.61}$$

olduğu görülür.

H_{II} Lorentzian hareketinde $g = \{A; \mathbf{b}_2\}$ ve $g' = \left\{C', \mathbf{b}_2{}'\right\}$ kutup eksenleri için (4.34) eşitliğine göre

$$\Sigma_2 = w_2'$$

olmak üzere (4.61) denkleminden

$$dq = \Sigma_2 - \Sigma_2{}' \tag{4.62}$$

yazılır. İntegrallenebilme şartları sağlandığından (4.62) eşitliğinden diferansiyel alırsak

$$d(dq) = d\Sigma_2 - d\Sigma_2{}'$$

veya (4.56) eşitliğinden dolayı

$$d(dq) = 0 \tag{4.63}$$

elde edilir. Yani, dq tam diferansiyeldir q doğru parçası bulunabilir. (4.62) denkleminden

$$q = \int (\Sigma_2 - \Sigma_2{}') \tag{4.64}$$

yazılabilir. Σ_2 ve $\Sigma_2{}'$ iki değişkenli Pfaff formlar olduğundan farkları genel olarak

$$\Sigma_2 - \Sigma_2{}' = V_3(t_1, t_2)dt_1 + V_4(t_1, t_2)dt_2$$

olmak üzere dq tam diferansiyeli

$$dq = V_3(t_1, t_2)dt_1 + V_4(t_1, t_2)dt_2$$

veya

$$\frac{\partial q}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial q}{\partial t_2}dt_2 = V_3(t_1, t_2)dt_1 + V_4(t_1, t_2)dt_2$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{\partial q(t_1, t_2)}{\partial t_1} = V_3(t_1, t_2) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial q(t_1, t_2)}{\partial t_2} = V_4(t_1, t_2)$$

yazılabilir. İlk eşitlikte t_2 sabit tutulup t_1 değişkenine göre integral alınırsa $c(t_2)$ integral sabiti olmak üzere

$$q = \int V(t_1, t_2)dt_1 + c(t_2)$$

bulunur. Böylece q doğru parçasının (kayma rotasının) belirlenmesi daima keyfi bir parametre ile mümkündür.

ii. $g \in L$ spacelike:
L ve L' Lorentz düzlemlerinde, sırasıyla, hareketli $\{A; \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ ve $\{A'; \mathbf{b}_1{}', \mathbf{b}_2{}'\}$ koordinat sistemlerini ele alalım. $\{A; \mathbf{b}_1\}$ ekseni g spacelike kutup ekseni üzerinde ve $\{A'; \mathbf{b}_1{}'\}$ ekseni g' spacelike kutup ekseni üzerinde seçilsin. Bu durumda Bölüm 4.2'de tanımlanan $\mathscr{A}/L$ ve $\mathscr{A}'/L'$ hareketlerinin (4.7) ve (4.8) türev denklemleri ile (4.13) ve (4.14) integrallenebilme şartları sağlanır ve kutup eksen dönüşümünün yoğunluğu değişmediğinden $dg = dg'$ yazılır ve (4.46) bağıntısı veya

$$d\Sigma_1 = d\Sigma_1{}' \tag{4.65}$$

elde edilir.

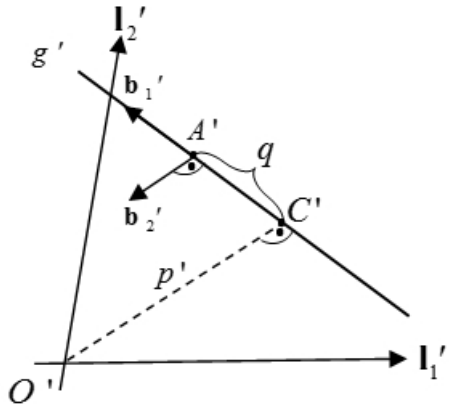
$g' \in L'$ spacelike doğrusu boyunca $\{A'; \mathbf{b}_1', \mathbf{b}_2'\}$ koordinat sisteminin hareket etmesiyle bir C' noktasına geldiğini kabul edersek ve bu noktada yeni $\{C'; \mathbf{b}_1', \mathbf{b}_2'\}$ koordinat sistemini ele alırsak Şekil 4.8'e göre

$$\mathbf{c}' = \mathbf{C}'\mathbf{O}'' = \mathbf{C}'\mathbf{A}' + \mathbf{A}'\mathbf{O}'$$

veya

$$\mathbf{c}' = \mathbf{a}' + \mathbf{b}_1' q \tag{4.66}$$

vektörel eşitlikleri elde edilir.



Şekil 4.8 $g' \in L'$ spacelike kutup ekseni ve hareketli koordinat sistemi

$C' \in L'$ noktasının değişimi genel olarak

$$d\mathbf{c}' = \mathbf{b}_1' w_1' + \mathbf{b}_2' w_2' \tag{4.67}$$

ile verilebilir. Ayrıca (4.66) eşitliğinden C' noktasının değişimi

$$d\mathbf{c}' = d\mathbf{a}' + \mathbf{b}_1' dq + d\mathbf{b}_2' q \tag{4.68}$$

olmak üzere bu eşitlikte (4.8) türev denklemleri kullanılırsa

$$d\mathbf{c}' = \mathbf{b}_1'(\Sigma_1' + dq) + \mathbf{b}_2(\Sigma_2' + q\Delta') \tag{4.69}$$

elde edilir. (4.67) ve (4.69) eşitliklerinden

$$\mathbf{b}_1' w_1' + \mathbf{b}_2' w_2' = \mathbf{b}_1'(\Sigma_1' + dq) + \mathbf{b}_2'(\Sigma_2' + q\Delta')$$

veya

$$\begin{cases} w_1' = \Sigma_1' + dq \\ w_2' = \Sigma_2' + q\Delta' \end{cases} \tag{4.70}$$

elde edilir.

H_{II} Lorentzian hareketinde $g = \{A; \mathbf{b}_1\}$ ve $g' = \left\{C'; \mathbf{b}_1{}'\right\}$ eksenleri için (4.44) eşitliğine göre

$$w_1^{'} = \Sigma_1{}'$$

olmak üzere (4.70) bağıntısından

$$dq = \Sigma_1 - \Sigma_1{}' \tag{4.71}$$

elde edilir. İntegrallenebilme şartları sağlandığından (4.70) denkleminden diferansiyel alırsak

$$d(dq) = d\Sigma_1 - d\Sigma_1{}'$$

veya (4.65) eşitliğinden dolayı

$$d(dq) = 0 \tag{4.72}$$

sonucu elde edilir. Yani, dq tam diferansiyeldir ve q doğru parçası bulunabilir. (4.71) denkleminden

$$q = \int (\Sigma_1 - \Sigma_1{}') \tag{4.73}$$

yazılabilir. Σ_1 ve $\Sigma_1{}'$ iki değişkenli Pfaff formlar olduğundan ikisinin farkı genel olarak

$$\Sigma_1 - \Sigma_1{}' = U_3(t_1, t_2)dt_1 + U_4(t_1, t_2)dt_2$$

olmak üzere dq tam diferansiyeli

$$dq = U_3(t_1, t_2)dt_1 + U_4(t_1, t_2)dt_2$$

veya

$$\frac{\partial q}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial q}{\partial t_2}dt_2 = U_3(t_1, t_2)dt_1 + U_4(t_1, t_2)dt_2$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{\partial q(t_1, t_2)}{\partial t_1} = U_3(t_1, t_2), \quad \text{ve} \quad \frac{\partial q(t_1, t_2)}{\partial t_2} = U_4(t_1, t_2)$$

yazılabilir. İlk eşitlikte t_2 sabit tutulup t_1 değişkenine göre integral alınırsa $c(t_2)$ integral sabiti olmak üzere

$$q = \int U(t_1, t_2)dt_1 + c(t_2)$$

elde edilir. Böylece, q doğru parçasının (kayma rotasının) belirlenmesi daima

keyfi bir parametre ile mümkündür.

Sonuç olarak, L ve L' Lorentz düzlemlerinin yoğunluğu değiştirmeyen sonsuz (her konum için farklı bir kutup ekseni mevcut olacağından) $g \in L \rightarrow g' \in L'$ non-null eksenlerin yoğunluğu değiştirmeyen doğru dönüşümü, özdeş 2—parametreli hareketlerdir. Bu özdeş hareketler ortak non-null ($g = g'$) eksen dönüşümlüdür. ■

4.8 Hareketin Destek Fonksiyonu

Bu bölümde, non-null kutup eksenlerinde seçilen hareketli sistemi yardımıyla $H_{II} = L/L'$ Lorentzian hareketinin q kayma rotasının özel durumu ele alınarak **H** *destek fonksiyonu tanımlanacaktır.*

O başlangıç noktasından $g \in L$ timelike/spacelike kutup eksenine çizilen dikmenin doğruyu kestiği nokta $A = C$ olsun. Benzer şekilde, O' başlangıç noktasından $g' \in L'$ timelike/spacelike kutup eksenine çizilen dikmenin doğruyu kestiği nokta A' olsun, Şekil 4.9/Şekil 4.10.

i. $g \in L$ timelike:
Şekil 4.4'e göre $k = 0$ olduğundan (4.37) denklemi

$$\mathbf{a} = \mathbf{AO} = -\mathbf{b}_1 p \tag{4.74}$$

olmak üzere (4.39) eşitlikleri için

$$\begin{cases} \Sigma_1 = -dp \\ \Sigma_2 = -p\Delta \end{cases} \tag{4.75}$$

ve benzer şekilde, L' sabit Lorentz düzlemi için de

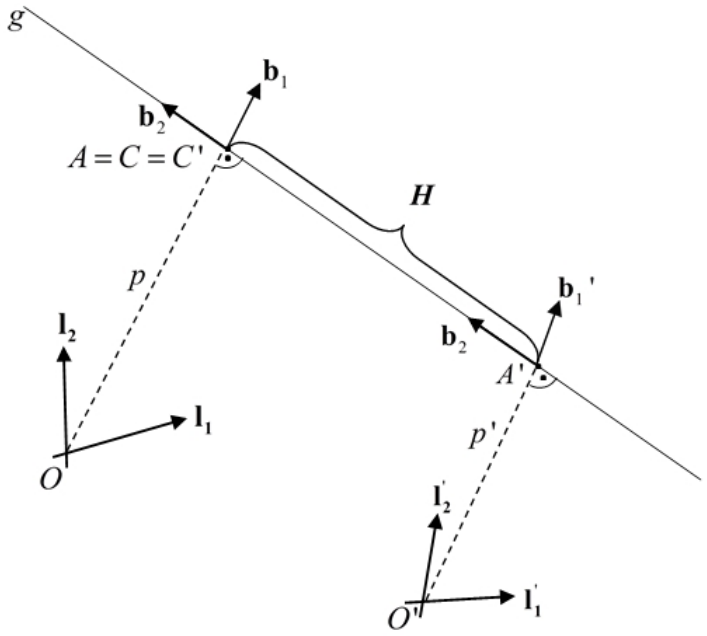
$$\begin{cases} \Sigma_1{}' = -dp' \\ \Sigma_2{}' = -p'\Delta' \end{cases} \tag{4.76}$$

elde edilir.

$\{A'; \mathbf{b}_1{}', \mathbf{b}_2{}'\}$ hareketli koordinat sistemi $\{C'; \mathbf{b}_1{}', \mathbf{b}_2{}'\}$ koordinat sistemine kaydırılarak Bölüm 4.7 i. durumda anlatılan q kayma rotasının özel bir durumu elde edilir.

$|\mathbf{AA}'| = \mathbf{H}$ olmak üzere (4.64) eşitliğinde (4.75) ve (4.76) eşitlikleri kullanılırsa

$$\mathbf{H} = \int (-p\Delta + p'\Delta') = \int (-pd\Phi + p'd\Phi') \tag{4.77}$$



Şekil 4.9 g timelike kutup ekseni için hareketin destek fonksiyonu

elde edilir.

ii. $g \in L$ spacelike:
Şekil 4.5'e göre $k = 0$ olduğundan (4.47) denklemi

$$\mathbf{a} = \mathbf{AO} = \mathbf{b_2}p \tag{4.78}$$

olmak üzere (4.49) eşitlikleri için

$$\begin{cases} \Sigma_1 = p\Delta \\ \Sigma_2 = \ dp \end{cases} \tag{4.79}$$

ve buna bağlı olarak L' sabit Lorentz düzlemi için de

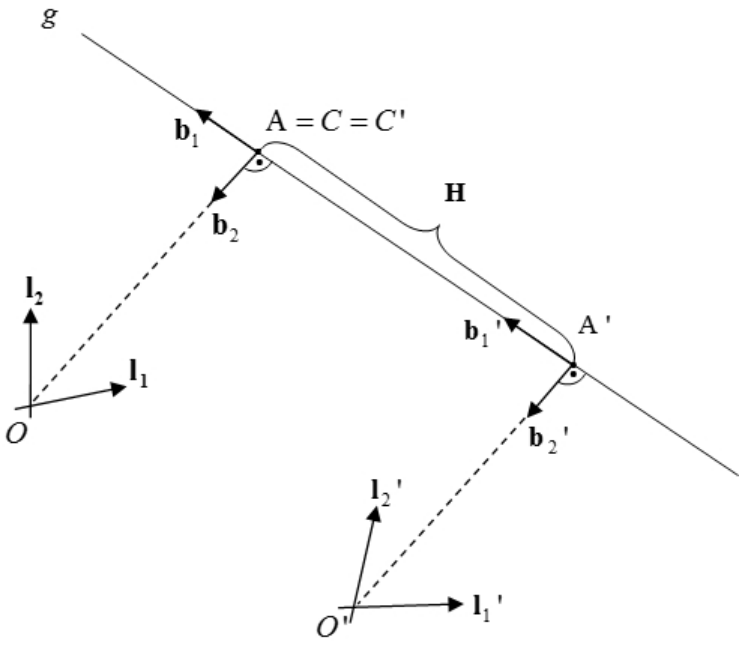
$$\begin{cases} \Sigma_1{}' = p'\Delta' \\ \Sigma_2{}' = \ dp' \end{cases} \tag{4.80}$$

elde edilir. $\{A'; \mathbf{b}_1{}', \mathbf{b}_2{}'\}$ koordinat sistemi $\{C'; \mathbf{b}_1{}', \mathbf{b}_2{}'\}$ koordinat sistemine kaydırılarak Bölüm 4.7 ii. durumda anlatılan q kayma rotasının özel bir durumu elde edilir.

$|\mathbf{AA}'| = \mathbf{H}$ olmak üzere (4.73) eşitliğinde (4.79) ve (4.80) eşitlikleri kullanılırsa

$$\mathbf{H} = \int (p\Delta - p'\Delta') = \int (pd\Phi - p'd\Phi') \tag{4.81}$$

elde edilir.



Şekil 4.10 g spacelike kutup ekseni için hareketin destek fonksiyonu

Tanım 4.6. (4.77) ve (4.81) eşitlikleri ile verilen $\mathbf{H}(\Phi,\Phi')$ fonksiyonu $H_{II} = L/L'$ Lorentzian hareketinin, sırasıyla, timelike/spacelike kutup eksenleri için ***destek fonksiyonu*** olarak adlandırılır.

Kabul edelim ki,

$$\Delta \wedge \Delta' \neq 0 \tag{4.82}$$

olsun. Bu durumda $\Delta = d\Phi$ ve $\Delta' = d\Phi'$ lineer bağımsızdır ve harekete bir sınırlama getirilmiştir. Böylece, t_1 ve t_2 bağımsız değişkenleri yerine Φ ve Φ' açıları alınabilir. Yani, kutup eksen dönüşümü artık $p(\Phi,\Phi')$ ve $p'(\Phi,\Phi')$ fonksiyonları ile tanımlanabilir. Artık L hareketli Lorentz düzlemindeki tek parametreli doğru ailesinin $p(\Phi,\Phi')$ destek fonksiyonu, $\Phi' =$ sabit alınmasıyla ve benzer şekilde, L' sabit Lorentz düzlemindeki $p'(\Phi,\Phi')$ destek fonksiyonu da $\Phi =$ sabit alınmasıyla belirlenecektir.

g timelike/spacelike kutup eksenleri için, sırasıyla, (4.77) ve (4.81) denklemleri ile verilen $\mathbf{H}$ destek fonksiyonunun Φ ve Φ' değişkenlerine göre diferansiyeli alınırsa, sırasıyla,

$$d\mathbf{H} = -pd\Phi + p'd\Phi' = \mathbf{H}_{\Phi}d\Phi + \mathbf{H}_{\Phi'}d\Phi' \tag{4.83}$$

$$d\mathbf{H} = pd\Phi - p'd\Phi' = \mathbf{H}_{\Phi}d\Phi + \mathbf{H}_{\Phi'}d\Phi' \tag{4.84}$$

olmak üzere

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{\Phi} = -p \\ \mathbf{H}_{\Phi'} = p' \end{cases} \tag{4.85}$$

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{\Phi} = p \\ \mathbf{H}_{\Phi'} = -p' \end{cases} \tag{4.86}$$

bulunur. Yani, kutup eksenlerinin p ve p' fonksiyonları, hareketin destek fonksiyonu yardımıyla ifade edilebilir.

Şimdi H_{II} Lorentzian hareketinin $\mathbf{H}(\Phi, \Phi')$ destek fonksiyonu ile ilk olarak Bölüm 4.7'de verilen hareketli koordinat sistemlerinin $\mathbf{c}$ ve $\mathbf{c}'$ konum vektörleri, türevleri araştırılacak ve sonrasında $\mathbf{v} = v_1\mathbf{l_1} + v_2\mathbf{l_2} \in L$ ve $\mathbf{v}' = {v_1}'{\mathbf{l}_1}' + {v_2}'{\mathbf{l}_2}' \in L'$ vektörlerinin, sırasıyla, Φ_0 ve ${\Phi_0}'$ açısı kadar döndürülmesi durumunda g non-null ile elde edilen $\mathbf{H}$ destek fonksiyonunun nasıl değiştiği incelenecektir.

i. $g \in L$ timelike:
Şekil 4.9'a göre $\mathbf{AO} = \mathbf{CO} = \mathbf{c}$ konum vektörü

$$\mathbf{c} = -\mathbf{b}_1 p \tag{4.87}$$

olmak üzere $\mathbf{c}$ vektörünün L hareketli Lorentz düzlemine göre diferansiyeli

$$d\mathbf{c} = -\mathbf{b}_1 dp - d\mathbf{b}_1 p$$

veya (4.85) ve (4.7) eşitlikleri yardımıyla

$$d\mathbf{c} = \mathbf{b_1} d\mathbf{H}_{\Phi} + \mathbf{b}_2 \mathbf{H}_{\Phi} \Delta \tag{4.88}$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde, $\mathbf{c}' = \mathbf{C}'\mathbf{O}'$ konum vektörü için

$$\mathbf{c}' = \mathbf{C}'\mathbf{A}' + \mathbf{A}'\mathbf{O}'$$

veya

$$\mathbf{c}' = -{\mathbf{b}_1}' p' - {\mathbf{b}_2}' \mathbf{H} \tag{4.89}$$

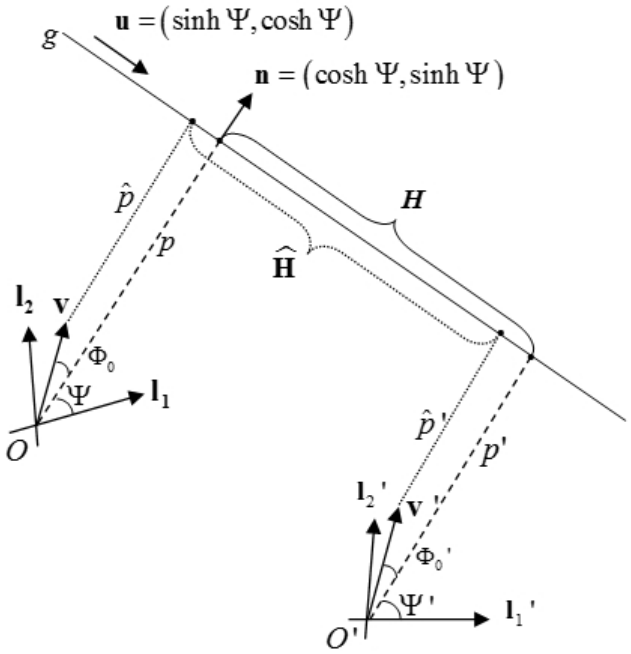
olmak üzere

$$d\mathbf{c}' = -{\mathbf{b}_1}' dp' - d{\mathbf{b}_1}' p' - {\mathbf{b}_2}' d\mathbf{H} - d{\mathbf{b}_2}' \mathbf{H}$$

bulunur. Burada (4.83), (4.85) ve (4.8) eşitlikleri kullanılarak

$$d\mathbf{c}' = -{\mathbf{b}_1}' (\mathbf{H}\Delta' + d\mathbf{H}_{\Phi'}) + {\mathbf{b}_2}' \left(-\mathbf{H}_{\Phi'}\Delta' - d\mathbf{H}\right) \tag{4.90}$$

elde edilir.



Şekil 4.11 g timelike kutup ekseni için vektörlerin dönmesi ile destek fonksiyonun değişimi

$\mathbf{v}$ ve $\mathbf{v}'$ vektörleri ile $\mathbf{H}$ destek fonksiyonunun ne kadar yer değiştirdiğini bulmak için $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{v}'$ vektörlerinin timelike kutup ekseni üzerindeki izdüşümlerini hesap edelim, Şekil 4.11:

$\mathbf{v}$ vektörünün g timelike doğrusu üzerine dik izdüşüm vektörünün boyu

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle (v_1, v_2), (\sinh \Psi, \cosh \Psi) \rangle = v_1 \sinh \Psi - v_2 \cosh \Psi \tag{4.91}$$

ve benzer şekilde $\mathbf{v}'$ vektörünün g' timelike doğrusuna dik izdüşüm vektörünün boyu

$$\langle \mathbf{v}', \mathbf{u}' \rangle = \langle (v_1', v_2'), (\sinh \Psi', \cosh \Psi') \rangle = v_1' \sinh \Psi' - v_2' \cosh \Psi' \tag{4.92}$$

olmak üzere $\widehat{\mathbf{H}}$ destek fonksiyonu için Şekil 4.11'e ve (4.91), (4.92) eşitliklerine göre

$$\widehat{\mathbf{H}} = \mathbf{H} + (v_1 \sinh \Psi - v_2 \cosh \Psi) - (v_1' \sinh \Psi' - v_2' \cosh \Psi') \tag{4.93}$$

elde edilir. (4.93) diferansiyel alınırsa $d\widehat{\mathbf{H}}$ değişimi

$$d\widehat{\mathbf{H}} = d\mathbf{H} + v_1 \cosh \Psi \, d\Psi - v_2 \sinh \Psi \, d\Psi - v_1' \cosh \Psi' d\Psi' + v_2' \sinh \Psi' d\Psi' \tag{4.94}$$

olmak üzere (4.83) ve (4.40) eşitliklerinden

$$d\widehat{\mathbf{H}} = -(p - v_1 \cosh\Psi + v_2 \sinh\Psi)\, d\Phi + \left(p' - v_1^{'} \cosh\Psi' + v_2^{'} \sinh\Psi'\right) d\Phi'$$

bulunur. $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ noktasının g timelike kutup eksenine uzaklığı $\widehat{p}$

$$\widehat{p} = p - v_1 \cosh\Psi + v_2 \sinh\Psi \tag{4.95}$$

ve $\mathbf{v}' = (v_1{}', v_2{}')$ noktasının g' timelike kutup eksenine uzaklığı $\widehat{p}'$

$$\widehat{p}' = p' - v_1^{'} \cosh\Psi' + v_2^{'} \sinh\Psi' \tag{4.96}$$

olmak üzere

$$d\widehat{\mathbf{H}} = -\widehat{p} d\Phi + \widehat{p}' d\Phi' \tag{4.97}$$

veya

$$\widehat{\mathbf{H}} = \int (-\widehat{p} d\Phi + \widehat{p}' d\Phi') \tag{4.98}$$

elde edilir.

Böylece hareketli ve sabit sistemlerdeki dönme,sırasıyla,

$$\widehat{\Phi} = \Psi + \Phi_0 \quad \text{ve} \quad \widehat{\Phi}' = \Psi' + \Phi_0{}' \tag{4.99}$$

açıları kadardır.

L ve L' Lorentz düzlemlerinde vektörlerin döndürülmesi ile (veya yeni başlanğıç noktaları için) H_{II} Lorentzian hareketinin g timelike doğrusu için elde edilen $\mathbf{H}$ destek fonksiyonu yeniden belirlenmiştir.

ii. $g \in L$ spacelike:
Şekil 4.10'a göre

$$\mathbf{BO} = \mathbf{CO} = \mathbf{c} = \mathbf{b}_2 p \tag{4.100}$$

olmak üzere $\mathbf{c}$ vektörünün L hareketli Lorentz düzlemine göre diferansiyeli

$$d\mathbf{c} = \mathbf{b}_2 dp + d\mathbf{b}_2 p$$

veya (4.86) ve (4.7) eşitlikleri yardımıyla

$$d\mathbf{c} = \mathbf{b}_1(\mathbf{H}_\Phi \Delta) + \mathbf{b}_2 d\mathbf{H}_\Phi \tag{4.101}$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde, $\mathbf{c}' = \mathbf{C}'\mathbf{O}'$ konum vektörü için

$$\mathbf{c}' = \mathbf{C}'\mathbf{A}' + \mathbf{A}'\mathbf{O}'$$

veya

$$\mathbf{c}' = -\mathbf{b}_1'\mathbf{H} + \mathbf{b}_2' p' \tag{4.102}$$

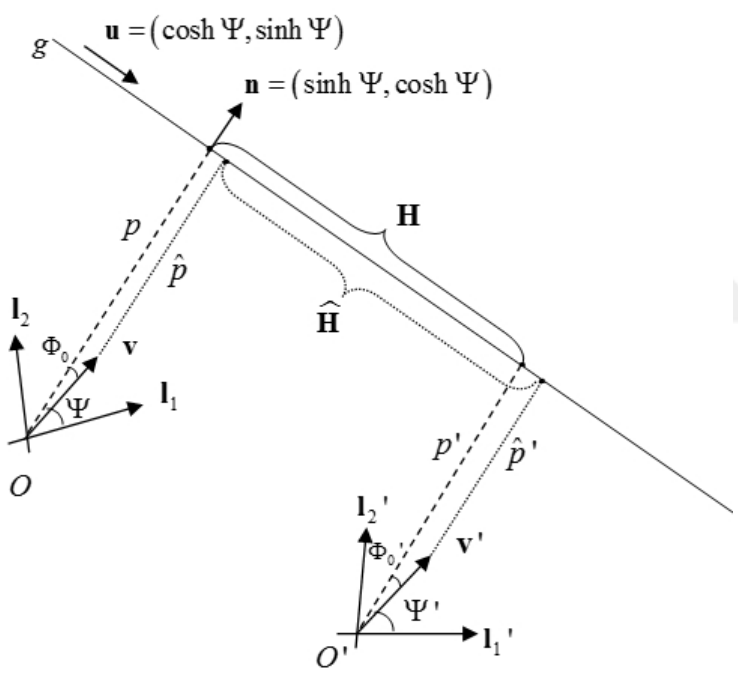
olmak üzere

$$d\mathbf{c}' = -\mathbf{b}_1' d\mathbf{H} - d\mathbf{b}_1'\mathbf{H} + \mathbf{b}_2' dp' + d\mathbf{b}_2' p'$$

bulunur. Burada (4.84), (4.86) ve (4.8) eşitlikleri kullanılarak

$$d\mathbf{c}' = -\mathbf{b}_1'\left(d\mathbf{H} + \mathbf{H}_{\Phi'}\Delta'\right) - \mathbf{b}_2'(\mathbf{H}\Delta' + d\mathbf{H}_{\Phi'}) \tag{4.103}$$

elde edilir.



Şekil 4.12 g spacelike kutup ekseni için vektörlerin dönmesi ile destek fonksiyonun değişimi

$\mathbf{v}$ ve $\mathbf{v}'$ vektörleri ile $\mathbf{H}$ destek fonksiyonunun ne kadar yer değiştirdiğini bulmak için $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{v}'$ vektörlerinin spacelike kutup ekseni üzerindeki izdüşümlerini hesap edelim, Şekil 4.12:

$\mathbf{v}$ vektörünün g spacelike doğrusu üzerine dik izdüşüm vektörünün boyu

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle (v_1, v_2), (\cosh\Psi, \sinh\Psi) \rangle = v_1 \cosh\Psi - v_2 \sinh\Psi \tag{4.104}$$

ve benzer şekilde $\mathbf{v}'$ vektörünün spacelike doğrusuna izdüşüm vektörünün boyu

$$\left\langle \mathbf{v}', \mathbf{u}' \right\rangle = \left\langle \left(v_1', v_2'\right), \left(\cosh\Psi', \sinh\Psi'\right) \right\rangle = v_1' \cosh\Psi' - v_2' \sinh\Psi' \tag{4.105}$$

olmak üzere $\widehat{\mathbf{H}}$ yer destek fonksiyonu için Şekil 4.12 ve (4.104), (4.105) eşitliklerine göre

$$\widehat{\mathbf{H}} = \mathbf{H} - (v_1 \cosh\Psi - v_2 \sinh\Psi) + \left(v_1' \cosh\Psi' - v_2' \sinh\Psi'\right) \tag{4.106}$$

yazılabilir. (4.106) eşitliğinden diferansiyel alırsak $d\widehat{\mathbf{H}}$ değişimi için

$$d\widehat{\mathbf{H}} = d\mathbf{H} - v_1 \sinh\Psi \; d\Psi + v_2 \cosh\Psi \; d\Psi + v_1' \sinh\Psi' d\Psi' - v_2' \cosh\Psi' d\Psi' \tag{4.107}$$

olmak üzere (4.84) ve (4.50) eşitliklerinden

$$d\widehat{\mathbf{H}} = (p - v_1 \sinh\Psi + v_2 \cosh\Psi)\, d\Phi - \left(p' - v_1' \sinh\Psi' + v_2' \cosh\Psi'\right) d\Phi'$$

elde edilir. $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ noktasının g spacelike kutup eksenine uzaklığı $\widehat{p}$

$$\widehat{p} = p - v_1 \sinh\Psi + v_2 \cosh\Psi \tag{4.108}$$

ve $\mathbf{v}' = (v_1', v_2')$ noktasının g' spacelike kutup eksenine uzaklığı $\widehat{p}'$

$$\widehat{p}' = p' - v_1' \sinh\Psi' + v_2' \cosh\Psi' \tag{4.109}$$

olmak üzere

$$d\widehat{\mathbf{H}} = \widehat{p} d\Phi - \widehat{p}' d\Phi' \tag{4.110}$$

veya

$$\widehat{\mathbf{H}} = \int (\widehat{p} d\Phi - \widehat{p}' d\Phi') \tag{4.111}$$

yazılabilir.

Böylece hareketli ve sabit sistemlerdeki dönme, sırasıyla,

$$\widehat{\Phi} = \Psi - \Phi_0 \quad \text{ve} \quad \widehat{\Phi}' = \Psi' - \Phi_0{}' \tag{4.112}$$

açıları kadardır.

L ve L' Lorentz düzlemlerinde vektörlerin döndürülmesi ile (veya yeni başlanğıç noktaları için) H_{II} Lorentzian hareketinin g spacelike doğrusu için elde edilen $\mathbf{H}$ destek fonksiyonu yeniden belirlenmiştir.

5
Lorentz Düzleminde Nokta ve Non-Null Doğru Kümelerinin Yoğunlukları

Bu orijinal bölümde amaç, 2-parametreli hareketten bağımsız bir şekilde, Lorentz düzleminde nokta ve non-null doğru kümelerinin yoğunlukları ile ilgili yeni ilişkilerin verilmesidir. Bu bölümde verilen teorem ve sonuçlar [39] makalesinde verilmiştir.

5.1 İki Nokta Kümesinin Yoğunlukları Arasındaki İlişki

Teorem 5.1. *Lorentz düzleminde iki farklı nokta kümesi $X = (x_1, y_1)$ ve $Y = (x_2, y_2)$ olmak üzere bu noktaların non-null destek fonksiyonu, yani bu noktalardan geçen non-null doğru kümesi, $l(p, \Psi)$ ve X ile Y noktaları arasındaki uzaklık fonksiyonu λ olsun. Bu durumda, Y nokta kümesinin yoğunluğu*

$$dY = dX + \lambda d\Psi \wedge d\lambda + \langle \mathbf{n}, \mathbf{d}X \rangle_L \wedge d\lambda + \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{d}X \rangle_L \wedge d\Psi \tag{5.1}$$

şeklindedir. Burada X noktalarının relatif hız vektörü $\mathbf{d}X = (dx, dy)$, $l(p, \Psi)$ doğru kümesinin doğrultman ve normal vektörleri ise, sırasıyla, $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{n}$ ile gösterilmiştir.

İspat. Burada amaç, Y kümesinin nokta yoğunluğunu X kümesinin nokta yoğunluğu yardımıyla ifade etmektir. Bu yoğunluk l doğrusunun timelike veya spacelike olması durumuna göre ayrı ayrı incelenirse:

i. Kabul edelim ki, $l = l_t$ timelike doğru kümesi olsun. $\mathbf{u} = (\sinh\Psi, \cosh\Psi)$, $l_t(p, \Psi)$ timelike doğrusunun doğrultman vektörü olmak üzere; Y noktalarının koordinatları için,

$$(x_2, y_2) = (x_1 + \lambda \sinh\Psi, y_1 + \lambda \cosh\Psi), \tag{5.2}$$

yazılabilir. X noktalarının relatif hız vektörü $\mathbf{d}X = (dx, dy)$ ve $l_t(p, \Psi)$ doğrusunun normal vektörü $\mathbf{n} = (\cosh\Psi, \sinh\Psi)$ olmak üzere (5.2)

koordinatları kullanılarak $dY = dx_2 \wedge dy_2$ yoğunluğu

$$dY = dX + \lambda d\Psi \wedge d\lambda + \langle \mathbf{n}, \mathbf{d}X \rangle_L \wedge d\lambda + \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{d}X \rangle_L \wedge d\Psi, \tag{5.3}$$

olarak bulunur.

ii. Kabul edelim ki, $l = l_s$ spacelike doğru kümesi olsun. Benzer düşünceyle, X noktalarının relatif hız vektörü $\mathbf{d}X = (dx, dy)$ olmak üzere Y nokta kümesinin yoğunluğu için

$$dY = dX + \lambda d\Psi \wedge d\lambda + \langle \mathbf{n}, \mathbf{d}X \rangle_L \wedge d\lambda + \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{d}X \rangle_L \wedge d\Psi, \tag{5.4}$$

elde edilir. Burada l_s spacelike doğrusunun normal ve doğrulman vektörleri, sırasıyla, $\mathbf{n} = (\sinh\Psi, \cosh\Psi)$ ve $\mathbf{u} = (\cosh\Psi, \sinh\Psi)$ şeklindedir.

■

Sonuç 5.1.1. *Lorentz düzleminde iki farklı nokta kümesi $X = (x_1, y_1)$ ve $Y = (x_2, y_2)$ olmak üzere bu noktaların non-null destek fonksiyonu, yani bu noktalardan geçen non-null doğru kümesi, $l(p, \Psi)$ ve X ile Y noktaları arasındaki sabit uzaklık fonksiyonu λ olsun. Bu durumda, Y nokta kümesinin yoğunluğu*

$$dY = dX + \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{d}X \rangle_L \wedge d\Psi$$

şeklindedir. Burada X noktalarının relatif hız vektörü $\mathbf{d}X = (dx, dy)$ ve $\mathbf{u}$ ise $l(p, \Psi)$ doğru kümesinin doğrultman vektörüdür.

5.2 Doğrudaş Üç Nokta Kümesinin Yoğunlukları Arasındaki İlişki

Teorem 5.2. *L Lorentz düzleminde doğrudaş üç farklı nokta kümesi $X = (x_1, y_1)$, $Y = (x_2, y_2)$ ve $Q = (x_3, y_3)$ olmak üzere Q nokta kümesinin yoğunluğu için aşağıdaki özdeş eşitlikler mevcuttur.*

i. $dQ = \lambda(2\lambda - 1)\, dX + (\lambda - 1)(2\lambda - 1)\, dY + 4\lambda(1 - \lambda)\, dM$

ii. $dQ = \lambda dX + (1 - \lambda)\, dY - \lambda(1 - \lambda)\, dXY$

Burada Q noktasının $\{\mathbf{O}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$ sistemine göre barisantrik koordinatları $(\lambda, 1 - \lambda)$, $\overline{XY}$ doğru parçasının orta noktalarının kümesi M ve X ile Y noktalarının karışık nokta yoğunluğu ise dXY şeklindedir.

İspat. $\{\mathbf{O},\mathbf{X},\mathbf{Y}\}$ noktalarına göre barisantrik koordinat sistemi kullanılarak,

$$\mathbf{Q} = \lambda\mathbf{X} + (1-\lambda)\mathbf{Y}$$

yazılabileceğinden Q noktalarının yoğunluğu için,

$$dQ = \lambda^2 dX + (1-\lambda)^2 dY + \lambda(1-\lambda)(dx_1 \wedge dy_2 + dx_2 \wedge dy_1) \tag{5.5}$$

elde edilir. Burada (5.5) için aşağıdaki eşitliklerden bahsedilebilir:

i. Kabul edelim ki, $\overline{XY}$ doğru parçalarının orta noktalarının kümesi M olsun. Bu durumda M noktalarının yoğunluğu için

$$dM = d\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \wedge d\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

yazılabileceğinden

$$4dM - dX - dY = dx_1 \wedge dy_2 + dx_2 \wedge dy_1 \tag{5.6}$$

eşitliği mevcuttur. (5.6) eşitliği Q noktasının (5.5) yoğunluğunda yerine yazılırsa

$$dQ = \lambda(2\lambda-1)dX + (\lambda-1)(2\lambda-1)dY + 4\lambda(1-\lambda)dM$$

elde edilir.

ii. Kabul edelim ki, X ile Y noktalarının karışık nokta yoğunluğu dXY

$$-dx_1 \wedge dy_2 - dx_2 \wedge dy_1 + dX + dY = (dx_2 - dx_1) \wedge (dy_2 - dy_1) = dXY \tag{5.7}$$

eşitliği ile tanımlansın. Bu durumda, (5.7) eşitliği Q noktasının (5.5) yoğunluğunda yerine yazılırsa

$$dQ = \lambda dX + (1-\lambda)dY - \lambda(1-\lambda)dXY$$

elde edilir. ■

5.3 Doğrudaş Olmayan Üç Nokta Kümesinin Yoğunlukları Arasındaki İlişki

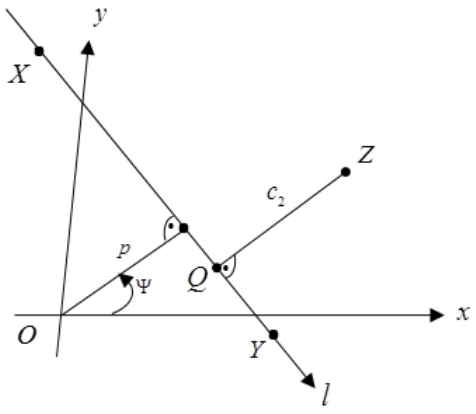
Teorem 5.3. *L Lorentz düzleminde doğrudaş farklı nokta kümeleri $X = (x_1, y_1)$, $Y = (x_2, y_2)$, $Q = (x_3, y_3)$, doğrudaş olmayan farklı nokta kümeleri $X = (x_1, y_1)$,*

$Y = (x_2, y_2)$, $Z = (z_1, z_2)$ ve Q ile Z arasındaki sabit uzaklık c_2 olsun. X ve Y nokta kümelerinin non-null destek fonksiyonu $l(p,\Psi)$ olmak üzere Z nokta kümesinin yoğunluğu

$$dZ = \lambda dX + (1-\lambda)\, dY - \lambda(1-\lambda)\, dXY + c_2 dl \tag{5.8}$$

şeklindedir. Burada Q noktasının $\{\mathbf{O}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$ sistemine göre barisantrik koordinatları $(\lambda, 1-\lambda)$ ve X ile Y noktalarının karışık nokta yoğunluğu ise dXY şeklindedir.

İspat. Bu teoremin amacı, Z nokta kümesinin yoğunluğunu X ve Y nokta kümelerinin yoğunlukları yardımıyla ifade edebilmektir, Şekil 5.1.



Şekil 5.1 Doğrudaş olmayan nokta Kümeleri

i. Kabul edelim ki, X ve Y nokta kümelerinin üzerinde bulunduğu destek fonksiyonu $l = l_t(p,\Psi)$ timelike olsun. Bu durumda $\{\mathbf{O}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$ barisantrik koordinat sistemi kullanılarak

$$\begin{aligned}\mathbf{Z} &= \lambda\mathbf{X} + (1-\lambda)\,\mathbf{Y} + c_2\mathbf{QZ},\\ &= (\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2 + c_2\cosh\Psi, \lambda y_1 + (1-\lambda)\, y_2 + c_2\sinh\Psi)\end{aligned}$$

vektörel eşitlikleri yazılabileceğinden Z nokta kümesinin yoğunluğu

$$dZ = \lambda dX + (1-\lambda)\, dY - \lambda(1-\lambda)\, dXY + c_2 dl_t$$

olarak elde edilir.

ii. Benzer düşünce ile X ve Y nokta kümelerinin $l = l_s(p,\Psi)$ destek fonksiyonunun spacelike olması durumunda ise Z nokta kümesinin yoğunluğu

$$dZ = \lambda dX + (1-\lambda)\, dY - \lambda(1-\lambda)\, dXY + c_2 dl_s$$

şeklindedir. ■

5.4 Kesişen İki Doğru Kümesinin Yoğunlukları Arasındaki İlişki

L Lorentz düzleminde $i = 1,2$ için $l_i(p_i,\Psi_i)$ X noktasında kesişen iki non-null doğru kümesi olmak üzere bu doğruların x ekseni ile yaptıkları açılar, sırasıyla, Φ_1, Φ_2 olsun. Burada, l_1 doğrusunun yoğunluğu l_2 doğrusunun yoğunluğu yardımıyla ifade edilecektir. Doğru çiftlerinin, timelike veya spacelike olma durumları ayrı ayrı incelenirse:

i. **Doğru çiftleri timelike ise**
Kabul edelim ki, $i = 1,2$ için $l_{t_i}(p_i,\Psi_i)$ doğru kümeleri $X = (x,y)$ noktasında kesişen timelike doğru kümeleri olsun. Timelike l_{t_1} doğru kümesinin yoğunluğu tanımdan

$$dl_{t_1} = (dx\cosh\Psi_1 - dy\sinh\Psi_1)\wedge d\Psi_1$$

olduğundan $\Phi_1 - \Phi_2 = \Psi_1 - \Psi_2 = \omega$ olmak üzere

$$\begin{aligned} dl_{t_1} &= (dx\cosh(\Psi_2+\omega) - dy\sinh(\Psi_2+\omega))\wedge d(\Psi_2+\omega) \\ &= \cosh\omega\,[(dx\cosh\Psi_2 - dy\sinh\Psi_2)\wedge d(\Psi_2+\omega)] \\ &\quad + \sinh\omega\,[(dx\sinh\Psi_2 - dy\cosh\Psi_2)\wedge d(\Psi_2+\omega)] \end{aligned} \tag{5.9}$$

yazılabilir.

Kabul edelim ki, X noktasında l_{t_2} doğru kümesine ortogonal spacelike doğru kümesi de ${l_{t_2}}^{\perp}$ olsun. Bu doğru kümesinin Hesse formu için genel olarak

$$x\sinh\Phi_2 - y\cosh\Phi_2 = p_3$$

yazılabilir. Bu durumda (5.9) yoğunluğu için X nokta kümesinin relatif hız vektörü $\mathbf{d}X = (dx,dy)$, l_{t_2} timelike doğrusunun doğrultman ve normal vektörleri, sırasıyla, $\mathbf{u}_2 = (\sinh\Psi_2,\cosh\Psi_2)$ ve $\mathbf{n}_2 = (\cosh\Psi_2,\sinh\Psi_2)$ olmak üzere

$$dl_{t_1} = \cosh\omega\left[\langle\mathbf{n}_2,\mathbf{d}X\rangle_L\wedge d\omega + dl_{t_2}\right] + \sinh\omega\left[\langle\mathbf{u}_2,\mathbf{d}X\rangle_L\wedge d\omega + {dl_{t_2}}^{\perp}\right]$$

elde edilir.

ii. **Doğru çiftleri spacelike ise**
Kabul edelim ki, $i = 1,2$ için $l_{s_i}(p_i,\Psi_i)$, $X = (x,y)$ noktasında kesişen spacelike doğru kümeleri ve X noktasında l_{s_2} doğru kümesine ortogonal timelike doğru kümesi de ${l_{s_2}}^{\perp}$ olsun. Benzer düşünceyle, X nokta kümesinin relatif hız vektörü $\mathbf{d}X = (dx,dy)$, l_{s_2} spacelike doğrusunun normal ve doğrultman vektörleri, sırasıyla, $\mathbf{n}_2 = (\sinh\Psi_2,\cosh\Psi_2)$ ve $\mathbf{u}_2 = (\cosh\Psi_2,\sinh\Psi_2)$ olmak üzere d_{ls_1}

doğru kümesinin yoğunluğu

$$dl_{s_1} = \cosh\omega\left[\langle \mathbf{n}_2, \mathbf{d}X\rangle_L \wedge d\omega + dl_{s_2}\right] + \sinh\omega\left[\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{d}X\rangle_L \wedge d\omega + dl_{s_2}{}^{\perp}\right]$$

şeklinde elde edilir.

iii. **Doğru çiftlerinden biri timelike diğeri spacelike ise**
Kabul edelim ki, $l_t(p_1, \Psi_1)$ timelike ve $l_s(p_2, \Psi_2)$ spacelike doğru kümeleri $X = (x, y)$ noktasında kesişsin ve X noktasında l_s spacelike doğru kümesine ortogonal timelike doğru kümesi de $l_s{}^{\perp}$ olsun. Bu durumda X nokta kümesinin relatif hız vektörü $\mathbf{d}X = (dx, dy)$, l_{s_2} spacelike doğrusunun normal ve doğrultman vektörleri, sırasıyla, $\mathbf{n}_2 = (\sinh\Psi_2, \cosh\Psi_2)$ ve $\mathbf{u}_2 = (\cosh\Psi_2, \sinh\Psi_2)$ olmak üzere l_t doğru kümesinin yoğunluğu

$$dl_t = \cosh\omega\left[\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{d}X\rangle_L \wedge d\omega + dl_s{}^{\perp}\right] + \sinh\omega\left[\langle \mathbf{n}_2, \mathbf{d}X\rangle_L \wedge d\omega + dl_s\right]$$

olarak bulunur.

6
Lorentz Düzleminde 2-Parametreli Hareket Altında Nokta ve Doğru Kümelerinin Yoğunlukları

Bu orijinal bölümde amaç, Lorentz düzleminde 2-parametreli $H_{II} = L/L'$ hareketi altında $X \in L$ nokta kümesinin $X' \in L'$ görüntüsünün yoğunluğunu, non-null $l \in L$ doğru kümesinin non-null $l' \in L'$ görüntüsünün yoğunluğunu vererek doğrudaş veya doğrudaş olmayan nokta kümelerinin yoğunluklarının ilişkilerini ve keşisen non-null doğru kümelerinin yoğunlukları arasındaki ilişkiyi vermektir. Yani, Bölüm 5'te verilen ilişkilerin hareket altındaki karşılıklarını elde etmektir. Bu bölümde verilen teorem ve sonuçlar [39] makalesinde verilmiştir.

6.1 Hareket Altında Nokta Kümesinin Yoğunluğu

Burada, Lorentz düzleminde 2-parametreli H_{II} hareketi altında $X' \in L'$ nokta kümesinin yoğunluğu $X \in L$ nokta kümesinin yoğunluğu yardımıyla verilecektir.

Teorem 6.1. *Lorentz düzleminde 2-parametreli H_{II} hareketi altında $X = (x, y) \in L$ nokta kümesinin $X' = (x', y') \in L'$ görüntüsünün yoğunluğu*

$$dX' = dX + dO' + \left[\left\langle X', \mathbf{d}X\right\rangle_L - \left\langle X, \mathbf{d}O'\right\rangle_L\right] \wedge d\Theta - \det\left(\mathbf{d}X, \mathbf{d}O'\right) \tag{6.1}$$

şeklindedir. Burada $\mathbf{d}X = (dx, dy)$ ve $\mathbf{d}O' = (du_1, du_2)$, sırasıyla, X ve O' nokta kümelerinin relatif hız vektörleri ve Θ ise hareketin dönme açısıdır.

İspat. $X' = (x', y') \in L'$ nokta kümesinin yoğunluğu için tanımdan

$$dX' = dx' \wedge dy' \tag{6.2}$$

yazılabileceğinden (4.1) eşitliklerinden diferansiyel alınıp (6.2) yoğunluğunda yerine

yazılırsa

$$\begin{aligned} dX' = dX &+ (x-u_1)[dx\wedge d\Theta + d\Theta\wedge du_1] - (y-u_2)[dy\wedge d\Theta + d\Theta\wedge du_2] \\ &+ (du_1\wedge du_2) - (dx\wedge du_2 + du_1\wedge dy) \end{aligned} \tag{6.3}$$

elde edilir.

O' noktasının nokta yoğunluğu

$$dO' = (du_1 + u_2 d\Theta)\wedge(du_2 + u_1 d\Theta) = du_1\wedge du_2 + u_1 du_1\wedge d\Theta - u_2 du_2\wedge d\Theta \tag{6.4}$$

olmak üzere (6.4) eşitliği kullanılarak X' kümesinin yoğunluğu için

$$dX' = dX + dO' + \left[\left\langle X', \mathbf{d}X\right\rangle_L - \left\langle X, \mathbf{d}O'\right\rangle_L\right]\wedge d\Theta - \det\left(\mathbf{d}X, \mathbf{d}O'\right)$$

elde edilir. Burada $\det(\mathbf{d}X, \mathbf{d}O') = dx\wedge du_2 - dy\wedge du_1$ olarak hesaplanmıştır. ■

Sonuç 6.1.1. *Lorentz düzleminde 2-parametreli H_{II} hareketi esnasında, $P \in L$ pol nokta kümelerinin dP yoğunluğu $P' \in L'$ nokta kümelerinin dP' yoğunluğuna eşittir ve bu ortak yoğunluk sıfırdır,*

$$dP = dP' = 0.$$

6.2 Hareket Altında İki Nokta Kümesinin Yoğunlukları Arasındaki İlişki

Burada (5.1) *eşitliğinin L' Lorentz düzleminde 2-parametreli H_{II} hareketi altında karşılığını verilecektir.*

Teorem 6.2. *L Lorentz düzleminde farklı iki nokta kümesi $X = (x_1, y_1)$, $Y = (x_2, y_2)$ ve bu X, Y noktaların non-null destek fonksiyonu $l(p, \Psi)$ olmak üzere $H_{II} = L/L'$ hareketi altındaki görüntüleri, sırasıyla, $X' = (x_1', y_1')$, $Y' = (x_2', y_2')$ ve $l'(p', \Psi')$ olsun. X ile Y noktaları arasındaki uzaklık fonksiyonu λ, X noktasının mutlak hız vektörü $\mathbf{d}X' = (dx', dy')$ ve non-null l' doğru kümesinin doğrultman ve normal vektörleri, sırasıyla, $\mathbf{u}'$ ve $\mathbf{n}'$ olmak üzere Y' nokta kümesinin yoğunluğu*

$$dY' = dX' + \lambda d\lambda\wedge d\Psi' + \left\langle \mathbf{n}', \mathbf{d}X'\right\rangle_L \wedge d\lambda + \lambda\left\langle \mathbf{u}', \mathbf{d}X'\right\rangle_L \wedge d\Psi' \tag{6.5}$$

şeklindedir.

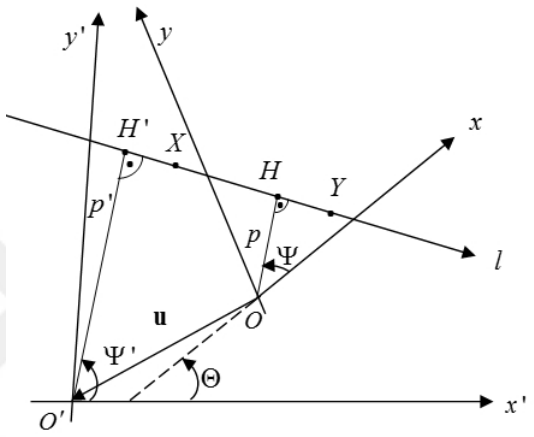
İspat. Bu teoremin amacı, $Y' \in L'$ nokta kümesinin yoğunluğunu $X' \in L'$ nokta kümesinin yoğunluğu yardımıyla ifade etmektir. Hareket altında iki nokta arasındaki uzaklık değişmediğinden, X ve Y noktaları arasındaki uzaklık X' ve Y' noktaları

arasındaki uzaklığa yani λ fonksiyonuna eşittir. l doğrusunun timelike veya spacelike olması durumu ayrı ayrı incelenirse:

i. Kabul edelim ki, X,Y noktalarından geçen $l = l_t(p,\Psi)$ doğrusu timelike olsun. Böylece H_{II} hareketi altında l_t doğrusunun görüntüsü de timelike olur. (5.3) eşitliğinden benzer mantıkla, $Y' \in L'$ nokta kümesinin yoğunluğu için

$$dY' = dX' + \lambda d\lambda \wedge d\Psi' + \left\langle \mathbf{n}', \mathbf{d}X' \right\rangle_L \wedge d\lambda + \lambda \left\langle \mathbf{u}', \mathbf{d}X' \right\rangle_L \wedge d\Psi'$$

elde edilir.



Şekil 6.1 Hareket altında X ve Y noktaları ve non-null l doğrusu

ii. Kabul edelim ki, X,Y noktalarından geçen $l = l_s(p,\Psi)$ doğrusu spacelike olsun. Böylece H_{II} hareketi altında l_s doğrusunun görüntüsü de spacelike olur. Benzer şekilde, (5.4) eşitliğinden $Y' \in L'$ nokta kümesinin yoğunluğu için

$$dY' = dX' + \lambda d\lambda \wedge d\Psi' + \left\langle \mathbf{n}', \mathbf{d}X' \right\rangle_L \wedge d\lambda + \lambda \left\langle \mathbf{u}', \mathbf{d}X' \right\rangle_L \wedge d\Psi'$$

elde edilir.

■

Sonuç 6.2.1. *L Lorentz düzleminde farklı iki nokta kümesi $X = (x_1, y_1)$, $Y = (x_2, y_2)$ ve bu X, Y noktalarının non-null destek fonksiyonu $l(p,\Psi)$ olmak üzere $H_{II} = L/L'$ hareketi altındaki görüntüleri, sırasıyla, $X' = (x_1', y_1')$, $Y' = (x_2', y_2')$ ve $l'(p',\Psi')$ olsun. X ile Y noktaları arasındaki sabit uzaklık λ, X noktasının mutlak hız vektörü $\mathbf{d}X' = (dx', dy')$ ve non-null l' doğru kümesinin normal vektörü $\mathbf{n}'$ olmak üzere Y' nokta kümesinin yoğunluğu*

$$dY' = dX' + \lambda \left\langle \mathbf{u}', \mathbf{d}X' \right\rangle_L \wedge d\Psi' \tag{6.6}$$

şeklindedir.

6.3 Hareket Altında Doğrudaş Üç Nokta Kümesinin Yoğunlukları Arasındaki İlişki

Burada Bölüm 5.2'nin H_{II} hareketi altındaki karşılığı verilecektir.

Teorem 6.3. *L Lorentz düzleminde doğrudaş üç farklı nokta kümesi $X = (x_1, y_1)$, $Y = (x_2, y_2)$ ve $Q = (x_3, y_3)$ olmak üzere bu noktaların H_{II} hareketi altındaki görüntüleri sırasıyla, $X' = (x_1', y_1')$, $Y' = (x_2', y_2')$ ve $Q' = (x_3', y_3')$ olsun. Bu durumda, Q' nokta kümesinin yoğunluğu için aşağıdaki özdeş eşitlikler mevcuttur.*

i. $dQ' = \lambda(2\lambda-1)\,dX' + (\lambda-1)(2\lambda-1)\,dY' + 4\lambda(1-\lambda)\,dM'$

ii. $dQ' = \lambda dX' + (1-\lambda)\,dY' - \lambda(1-\lambda)\,dX'Y'$

Burada Q' noktasının $\{\mathbf{O}', \mathbf{X}', \mathbf{Y}'\}$ sistemine göre barisantrik koordinatları $(\lambda, 1-\lambda)$, $\overline{X'Y'}$ doğru parçasının orta noktalarının kümesi M' ve X' ile Y' noktalarının karışık nokta yoğunluğu ise $dX'Y'$ ile verilmiştir.

İspat. $\{\mathbf{O}', \mathbf{X}', \mathbf{Y}'\}$ noktalarına göre barisantrik koordinat sistemi kullanılarak,

$$\mathbf{Q}' = \lambda\mathbf{X}' + (1-\lambda)\,\mathbf{Y}'$$

yazılabileceğinden Q' nokta kümesinin yoğunluğu için

$$dQ' = \lambda^2 dX' + (1-\lambda)^2 dY' + \lambda(1-\lambda)(dx_1 \wedge dy_2 + dx_2 \wedge dy_1) \tag{6.7}$$

olarak elde edilir. (6.7) için aşağıdaki eşitliklerden bahsedilebilir:

i. Kabul edelim ki, $\overline{X'Y'}$ doğru parçalarının orta noktalarının kümesi M' olsun. Bu durumda M' nokta kümesinin yoğunluğu için

$$dM' = d\left(\frac{x_1' + x_2'}{2}\right) \wedge d\left(\frac{y_1' + y_2'}{2}\right)$$

yazılabileceğinden

$$4dM' - dX' - dY' = dx_1' \wedge dy_2' + dx_2' \wedge dy_1' \tag{6.8}$$

ilişkisi elde edilir. (6.8) eşitliği Q' noktasının (6.7) yoğunluğunda yerine yazılırsa

$$dQ' = \lambda(2\lambda-1)\,dX' + (\lambda-1)(2\lambda-1)\,dY' + 4\lambda(1-\lambda)\,dM'$$

elde edilir.

ii. Kabul edelim ki, X' ile Y' noktalarının karışık nokta yoğunluğu $dX'Y'$

$$-dx_1' \wedge dy_2' - dx_2' \wedge dy_1' + dX' + dY' = \left(dx_2' - dx_1'\right) \wedge \left(dy_2' - dy_1'\right) = dX'Y'. \tag{6.9}$$

eşitliği ile tanımlansın. Bu durumda, (6.9) eşitliği Q' noktasının (6.7) yoğunluğunda yerine yazılırsa

$$dQ' = \lambda dX' + (1-\lambda)\, dY' - \lambda(1-\lambda)\, dX'Y'$$

elde edilir. ■

6.4 Hareket Altında Doğrudaş Olmayan Nokta Kümelerinin Yoğunlukları Arasındaki İlişki

Burada Bölüm 5.3'ün H_{II} hareketi altındaki karşılığı verilecektir.

Teorem 6.4. *L Lorentz düzleminde doğrudaş farklı nokta kümeleri $X = (x_1, y_1)$, $Y = (x_2, y_2)$, $Q = (x_3, y_3)$, doğrudaş olmayan farklı nokta kümeleri $X = (x_1, y_1)$, $Y = (x_2, y_2)$, $Z = (z_1, z_2)$, X ve Y nokta kümelerinin non-null destek fonksiyonu $l(p, \Psi)$ ve Q ile Z arasındaki sabit uzaklık c_2 olsun. H_{II} hareketi altında bu noktaların görüntüleri, sırasıyla, $X' = (x_1', y_1')$, $Y' = (x_2', y_2')$, $Q' = (x_3', y_3')$, $Z' = (z_1', z_2')$ ve $l(p, \Psi)$ doğru kümesinin görüntüsü de $l'(p', \Psi')$ olmak üzere Z' nokta kümesinin yoğunluğu*

$$dZ' = \lambda dX' + (1-\lambda)\, dY' - \lambda(1-\lambda)\, dX'Y' + c_2 dl' \tag{6.10}$$

şeklindedir. Burada Q' noktasının $\{\mathbf{O}', \mathbf{X}', \mathbf{Y}'\}$ sistemine göre barisantrik koordinatları $(\lambda, 1-\lambda)$ ve X' ile Y' noktalarının karışık nokta yoğunluğu ise $dX'Y'$ şeklindedir.

İspat. Bu teoremin amacı, Z' nokta kümesinin yoğunluğunu X' ve Y' nokta kümelerinin yoğunlukları yardımıyla ifade edebilmektir.

i. Kabul edelim ki, X ve Y nokta kümelerinin üzerinde bulunduğu destek fonksiyonu $l = l_t(p, \Psi)$ timelike olsun. Bu durumda X' ve Y' nokta kümelerinin üzerinde bulunduğu $l_t'(p', \Psi')$ destek fonksiyonu da timelike olur. $\{\mathbf{O}', \mathbf{X}', \mathbf{Y}'\}$ barisantrik koordinat sistemi kullanılarak

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}' &= \lambda \mathbf{X}' + (1-\lambda)\, \mathbf{Y} + c_2 \mathbf{Q}'\mathbf{Z}', \\ &= (\lambda x_1' + (1-\lambda)\, x_2' + c_2 \cosh\Psi, \lambda y_1' + (1-\lambda)\, y_2' + c_2 \sinh\Psi)\end{aligned}$$

vektörel eşitlikleri yazılabileceğinden Z' nokta kümesinin yoğunluğu

$$dZ' = \lambda dX' + (1-\lambda)\, dY' - \lambda(1-\lambda)\, dX'Y' + c_2 dl'_t$$

olarak elde edilir.

ii. Benzer düşünce ile X ve Y nokta kümelerinin $l_s(p,\Psi)$ destek fonksiyonunun spacelike, yani X' ve Y' nokta kümelerinin $l'_s(p',\Psi')$ destek fonksiyonunun spacelike, olması durumunda ise Z' nokta kümesinin yoğunluğu

$$dZ' = \lambda dX' + (1-\lambda)\, dY' - \lambda(1-\lambda)\, dX'Y' + c_2 dl'_s$$

şeklindedir.

Burada $dX'Y'$ (5.7) ile tanımlanan X', Y' noktalarının karışık yoğunluğudur. ■

6.5 Hareket Altında Non-Null Doğru Kümesinin Yoğunluğu

Burada, H_{II} hareketi altında $l' \in L'$ non-null doğru kümesinin yoğunluğu $l \in L$ non-null doğru kümesinin yoğunluğu yardımıyla verilecektir.

Teorem 6.5. *Lorentz düzleminde 2-parametreli H_{II} hareketi altında $l(p,\Psi) \in L$ non-null doğru kümesinin $l'(p',\Psi') \in L'$ non-null görüntüsünün yoğunluğu*

$$dl' = dl + dp \wedge d\Theta - \left\langle \mathbf{n}, \mathbf{d}'O' \right\rangle_L \wedge d\Psi - \left\langle \mathbf{n}, \mathbf{d}O' \right\rangle_L \wedge d\Theta \tag{6.11}$$

şeklindedir. Burada O' noktasının relatif ve mutlak hız vektörleri, sırasıyla, $\mathbf{d}O' = (du_1, du_2)$ ve $\mathbf{d}'O' = (du_1 + u_2 d\Theta, du_2 + u_1 d\Theta)$, Θ hareketin dönme açısı ve $\mathbf{n}$ ise $l(p,\Psi)$ doğru kümesinin normal vektörüdür.

İspat. $l'(p',\Psi') \in L'$ doğru kümesinin yoğunluğu için tanımdan

$$dl' = dp' \wedge d\Psi' \tag{6.12}$$

yazılabilir. l doğru kümesinin timelike ve spacelike olması durumu ayrı ayrı incelenirse:

$l = l_t$ timelike ve $l = l_s$ spacelike doğrularının, H_{II} hareketi altındaki görüntüleri, sırasıyla,

$$\begin{cases} x'\cosh\Psi' - y'\sinh\Psi' = p', \\ x'\sinh\Psi' - y'\cosh\Psi' = p' \end{cases}$$

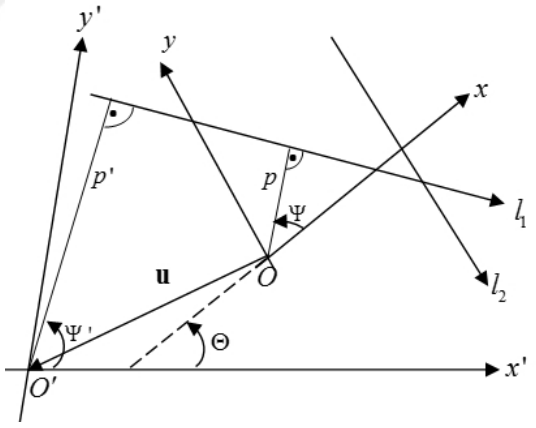
timelike ve spacelike doğru kümeleri olsun. Bu durumda $l_t'(p',\Psi')$ timelike doğrusu için $\Theta+\Psi=\Psi'$, $p'=p-u_1\cosh\Psi+u_2\sinh\Psi$ ve $l_s'(p',\Psi')$ spacelike doğrusu için $\Theta+\Psi=\Psi'$ ve $p'=p-u_1\sinh\Psi+u_2\cosh\Psi$ elde edilir, [40]. Bu eşitlikler (6.12) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$dl'=dl+dp\wedge d\Theta-\left\langle \mathbf{n},\mathbf{d}'O'\right\rangle_L\wedge d\Psi-\left\langle \mathbf{n},\mathbf{d}O'\right\rangle_L\wedge d\Theta$$

ifadesi elde edilir. ■

6.6 Hareket Altında Kesişen Non-Null Doğru Çiftlerinin Yoğunlukları Arasındaki ilişki

L Lorentz düzleminde $i=1,2$ için $l_i(p_i,\Psi_i)$, $X=(x,y)$ noktasında kesişen iki non-null doğru kümesi olmak üzere bu doğruların x ekseni ile yaptıkları açılar sırasıyla, Φ_1,Φ_2 olsun. $l_i(p_i,\Psi_i)$ doğru kümelerinin H_{II} hareketi altındaki görüntüleri $l_i{}'(p_i',\Psi_i')$ olmak üzere bu doğrular da X noktasının hareket altındaki görüntüsü olan $X'=(x',y')$ noktasında kesişir, Şekil 6.2. Burada, l_1' doğrusunun yoğunluğu l_2' doğrusunun yoğunluğu yardımıyla ifade edilecektir. Doğru çiftlerinin, timelike veya spacelike olma durumları ayrı ayrı incelenirse:



Şekil 6.2 Hareket altında doğru kümeleri

i. **Doğru çiftleri timelike ise**
Kabul edelim ki, X noktasında kesişen timelike doğru aileleri $l_i=l_{t_i}(p_i,\Psi_i)$ olmak üzere bu doğruların hareket altındaki görüntüleri de $l_i'=l_{t_i}{}'(p_i',\Psi_i')$ olsun. Bu durumda, $l_{t_1}{}'$ timelike doğru kümesinin yoğunluğu

$$dl_{t_1}{}'=\left(dx'\cosh\Psi_1{}'-dy'\sinh\Psi_1{}'\right)\wedge d\Psi_1{}' \tag{6.13}$$

şeklindedir. Açılar arasında $\Phi_1' - \Phi_2' = \Psi_1{}' - \Psi_2{}' = \Phi_1 - \Phi_2 = \Psi_1 - \Psi_2 = \omega$ ilişkisi geçerli olduğundan $\Psi_1{}' = \Psi_2{}' + \omega$ yazılabilir.

Kabul edelim ki, X noktasında $l_{t_2}{}'$ doğru kümesine ortogonal spacelike doğru kümesi de $(l'_{t_2})^{\perp}$ olsun. Bu durumda (6.13) yoğunluğu için X nokta kümesinin mutlak hız vektörü $\mathbf{d}X' = (dx', dy')$, $l_{t_2}{}'(p_2', \Psi_2')$ timelike doğrusunun doğrultman ve normal vektörleri, sırasıyla, $\mathbf{u}_2' = (\sinh\Psi_2{}', \cosh\Psi_2{}')$ ve $\mathbf{n}_2' = (\cosh\Psi_2{}', \sinh\Psi_2{}')$ olmak üzere

$$dl_{t_1}{}' = \cosh\omega\left[\left\langle \mathbf{n}_2{}', \mathbf{d}X'\right\rangle_L \wedge d\omega + dl_{t_2}{}'\right] + \sinh\omega\left[\left\langle \mathbf{u}_2{}', \mathbf{d}X'\right\rangle_L \wedge d\omega + d(l_{t_2}{}')^{\perp}\right]$$

elde edilir.

ii. **Doğru çiftleri spacelike ise**
Kabul edelim ki, X noktasında kesişen spacelike doğru kümeleri $l_i = l_{s_i}(p_i, \Psi_i)$ olmak üzere bu doğruların hareket altındaki görüntüleri de $l_i' = l_{s_i}{}'(p_i', \Psi_i')$ ve X noktasında $l_{s_2}{}'$ doğru kümesine ortogonal timelike doğru kümesi de $(l'_{s_2})^{\perp}$ olsun. Açılar arasında $\Phi_1' - \Phi_2' = \Psi_1{}' - \Psi_2{}' = \Phi_1 - \Phi_2 = \Psi_1 - \Psi_2 = \omega$ ilişkisi yazılabilir. Bu durumda $dl_{s_1}{}'$ yoğunluğu için X nokta kümesinin mutlak hız vektörü $\mathbf{d}X' = (dx', dy')$, $l_{s_2}{}'(p_2', \Psi_2')$ spacelike doğrusunun doğrultman ve normal vektörleri, sırasıyla, $\mathbf{u}_2' = (\cosh\Psi_2{}', \sinh\Psi_2{}')$ ve $\mathbf{n}_2' = (\sinh\Psi_2{}', \cosh\Psi_2{}')$ olmak üzere

$$dl_{s_1}{}' = \cosh\omega\left[\left\langle \mathbf{n}_2{}', \mathbf{d}X'\right\rangle_L \wedge d\omega + dl_{s_2}{}'\right] + \sinh\omega\left[\left\langle \mathbf{u}_2{}', \mathbf{d}X'\right\rangle_L \wedge d\omega + d(l_{s_2}{}')^{\perp}\right]$$

şeklinde elde edilir.

iii. **Doğru çiftlerinden biri timelike diğeri spacelike ise**
Kabul edelim ki, $l_t(p_1, \Psi_1)$ timelike ve $l_s(p_2, \Psi_2)$ spacelike doğru kümeleri X noktasında kesişsin ve X noktasında l_s spacelike doğru ailesine ortogonal bir timelike doğru ailesi de $l_s{}^{\perp}$ olsun. Hareket altında bu doğru kümelerinin resimleri, sırasıyla, $l_t'(p_1', \Psi_1')$, $l_s'(p_2', \Psi_2')$ ve $(l_s')^{\perp}$ ile verilsin.

Bu durumda X nokta kümesinin mutlak hız vektörü $\mathbf{d}X' = (dx', dy')$, l'_{s_2} spacelike doğrusunun normal ve doğrultman vektörleri, sırasıyla, $\mathbf{n}_2' = (\sinh\Psi_2{}', \cosh\Psi_2{}')$ ve $\mathbf{u}_2{}' = (\cosh\Psi_2{}', \sinh\Psi_2{}')$ olmak üzere l_t' doğru kümesinin yoğunluğu

$$dl_t{}' = \cosh\omega\left[\left\langle \mathbf{u}_2{}', \mathbf{d}X'\right\rangle_L \wedge d\omega + d(l_s{}')^{\perp}\right] + \sinh\omega\left[\left\langle \mathbf{n}_2{}', \mathbf{d}X'\right\rangle_L \wedge d\omega + dl_s{}'\right]$$

olarak bulunur.

6.7 Hareket Altında Non-Null Doğru Çiftlerinin Yoğunluğu

L Lorentz düzleminde $X=(x,y)$ noktasında kesişen iki non-null doğru kümesi $i=1,2$ için $l_i(p_i,\Psi_i)$ olmak üzere x ekseniyle, sırasıyla, Φ_1,Φ_2 açılarını yapsın, Şekil 6.2. Burada, bu doğruların $H_{II}=L/L'$ altındaki görüntüleri, sırasıyla, $l_i{}'(p_i',\Psi_i')$ olmak üzere $dl_1{}'\wedge dl_2{}'$ ile $dl_1\wedge dl_2$ arasındaki ilişki verilecektir. Doğruların timelike ve spacelike olma durumuna göre ayrı ayrı incelenirse:

i. **Doğru çiftleri timelike ise**
Kabul edelim ki, X noktasında kesişen doğru kümeleri $l_i(p_i,\Psi_i)=l_{t_i}(p_i,\Psi_i)$ timelike olsun. Bu durumda Bölüm 2.2.2 (2.17) eşitliği kullanılarak

$$dl_{t_1}{}'\wedge dl_{t_2}{}'=\left|\sinh\left(\Phi_1{}'-\Phi_2{}'\right)\right|dX'\wedge d\Phi_1{}'\wedge d\Phi_2{}'$$

yazılabilir. $\Phi_1'-\Phi_2'=\Psi_1{}'-\Psi_2{}'=\omega$ olmak üzere $d\Phi_1'-d\Phi_2'=d\omega$ yazılabileceğinden (6.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned}dl_{t_1}{}'\wedge dl_{t_2}{}' &= dl_{t_1}\wedge dl_{t_2}+|\sinh\omega|\left(dX+dO'-\det(\mathbf{d}X,\mathbf{d}O')\right)\wedge d\omega\wedge d\Theta\\ &+|\sinh\omega|\left(dO'+[\langle X',\mathbf{d}X\rangle_L-\langle X,\mathbf{d}O'\rangle_L]\wedge d\Theta-\det(\mathbf{d}X,\mathbf{d}O')\right)\wedge d\Phi_1\wedge d\Phi_2\end{aligned}$$

elde edilir.

ii. **Doğru çiftleri spacelike ise**
Kabul edelim ki, X noktasında kesişen doğru kümeleri $l_i(p_i,\Psi_i)=l_{s_i}(p_i,\Psi_i)$ timelike olsun. Buradan yukarıdaki gibi benzer düşünce ile,

$$\begin{aligned}dl_{t_1}{}'\wedge dl_{t_2}{}' &= dl_{t_1}\wedge dl_{t_2}+|\sinh\omega|\left(dX+dO'-\det(\mathbf{d}X,\mathbf{d}O')\right)\wedge d\omega\wedge d\Theta\\ &+|\sinh\omega|\left(dO'+[\langle X',\mathbf{d}X\rangle_L-\langle X,\mathbf{d}O'\rangle_L]\wedge d\Theta-\det(\mathbf{d}X,\mathbf{d}O')\right)\wedge d\Phi_1\wedge d\Phi_2\end{aligned}$$

elde edilir.

iii. **Doğru çiftlerinden biri timelike diğeri spacelike ise**
Kabul edelim ki, $l_t(p_1,\Psi_1)$ timelike ve $l_s(p_2,\Psi_2)$ spacelike X noktasında kesişen doğru kümeleri olsun. Bu durumda benzer şekilde,

$$\begin{aligned}dl_t{}'\wedge dl_s{}' &= dl_t\wedge dl_s+\cosh\omega\left(dX+dO'-\det(\mathbf{d}X,\mathbf{d}O')\right)\wedge d\omega\wedge d\Theta\\ &+\cosh\omega\left(dO'+[\langle X',\mathbf{d}X\rangle_L-\langle X,\mathbf{d}O'\rangle_L]\wedge d\Theta-\det(\mathbf{d}X,\mathbf{d}O')\right)\wedge d\Phi_1\wedge d\Phi_2\end{aligned}$$

yazılabilir.

Burada $\Psi_1=\Psi+\omega$, X nokta kümesinin mutlak hız vektörü $\mathbf{d}X=(dx,dy)$, hareketin dönme açısı Θ ve $\mathbf{d}O'=(du_1,du_2)$ ise O' noktasının relatif hız vektörüdür.

6.8 Hareket Altında Nokta Çiftlerinin Yoğunluğu

Burada, L Lorentz düzleminde X, Y nokta çiftlerinin H_{II} hareketi altındaki X', Y' görüntülerinin yoğunluğunun X, Y nokta çiftlerinin yoğunluğu ile ilişkisi verilecektir.

Teorem 6.6. *L Lorentz düzleminde farklı iki nokta kümesi $X = (x_1, y_1)$, $Y = (x_2, y_2)$ olmak üzere bu noktaların non-null destek fonsiyonu $l(p, \Psi)$ olsun. H_{II} hareketi altında bu noktaların görüntüleri, sırasıyla, $X' = (x_1', y_1')$, $Y' = (x_2', y_2')$ olmak üzere X', Y' noktalarının $l'(p', \Psi')$ non-null destek fonksiyonu da $l(p, \Psi)$ doğru kümesinin hareket altındaki görüntüsüdür. $dX' \wedge dY'$ ile $dX \wedge dY$ arasındaki ilişki*

$$\begin{aligned} dX' \wedge dY' = dX \wedge dY - |\lambda|\, dl' \wedge d\lambda \wedge dq + \\ + |\lambda| \left[dp \wedge d\Theta - \langle \mathbf{n}, \mathbf{d}'O' \rangle_L \wedge d\Psi - \langle \mathbf{n}, \mathbf{d}O' \rangle_L \wedge d\Theta \right] \wedge d\lambda_1 \wedge d\lambda_2 \end{aligned} \tag{6.14}$$

şeklindedir. Burada O ve O' başlangıç noktalarından doğruya indirilen dikme ayakları arasındaki uzaklık fonksiyonu q; O başlangıç noktasından doğruya inilen H dikme ayağı ile X, Y noktaları arasındaki uzaklık fonksiyonları, sırasıyla, λ_1, λ_2 olmak üzere $\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$; O' noktasının relatif hız vektörü $\mathbf{d}O' = (du_1, du_2)$; O' noktasının mutlak hız vektörü $\mathbf{d}'O' = (du_1 + u_2 d\Theta, du_2 + u_1 d\Theta)$, hareketin dönme açısı Θ ve $\mathbf{n}$ ise l doğrusunun normal vektörüdür.

İspat. $X' = (x_1', y_1')$, $Y' = (x_2', y_2') \in L'$ olmak üzere X', Y' nokta çiftinin yoğunluğu $l'(p', \Psi') \in L'$ non-null doğrusunun timelike veya spacelike olması durumunda, sırasıyla, (2.9) ve (2.10) eşitlikleri kullanılarak

$$dX' \wedge dY' = \left| {\lambda_1}' - {\lambda_2}' \right| dl' \wedge d{\lambda_1}' \wedge d{\lambda_2}' \tag{6.15}$$

şeklinde yazılır. Burada O ve O' orijinden doğruya indirilen dikme ayak ayaklarının arasındaki uzaklık fonksiyonu q olmak üzere $\lambda_1' = \lambda_1 + q$ ve ${}_2' = \lambda_2 + q$ şeklindedir. (6.15) eşitliğinde dl' yoğunluğunun (6.11) eşitliği kullanılırsa (6.14) eşitliğinin sağlandığı kolaylıkla görülebilir. ■

7
Sonuç ve Öneriler

Tezin orijinal kısmının başlangıçı olan 4. bölümde Lorentz düzleminde 2-parametreli hareket [9, 12] çalışmalarından **farklı bir bakış açısıyla**: hareketli koordinat sistemi, non-null kutup ekseni, kutup eksen dönüşümünün yoğunluk değişmezliği, eğri elementi çizen noktaları, kutup eksen yoğunluğunun sıfır olması durumu ve destek fonksiyonu kavramları verilerek, yani W. Blaschke ve H. R. Müller'in [1] çalışması esas alınarak **kutup eksen yoğunluğunun değişmezliği yardımıyla geometrik** olarak incelenerek literatüre kazandırılmıştır ve bu bölümde verilen tanım, teorem, kavram ve sonuçlar [35] nolu makalede yayınlatılmıştır.

5. bölümünde, Lorentz düzleminde nokta ve non-null doğru kümelerinin yoğunlukları ile ilgili yeni özel durumlar incelenmiştir. 6. bölümde, Lorentz düzleminde 2-parametreli hareket altında nokta ve non-null doğru kümelerinin yoğunlukları tanımlanarak ve hareket altında nokta ve non-null doğru kümelerinin yoğunlukları ile ilgili yeni özel durumlar verilmiştir. Tezin orijinal bölümlerinden olan 5. ve 6. bölümlerde verilen bu teorem ve sonuçlar [39] nolu makalede verilmiştir.

Ayrıca W. Blaschke ve H. R. Müller'in [1] Almanca kitabında olup H. R. Müller'in [2] kitabında olmayan başlıklar ortak bir notasyon ve anlatım tarzı ile Türkçe literatüre kazandırılmıştır.

Bunlara ek olarak, orjinal kısımlardan faydalanarak **tez dışı** bir çalışma olarak Lorentz düzleminde 2-parametreli hareketler için kanonik izafe sistemi, karşıt hareket, sınır çizgisi, büküm noktası, büküm polü ve 2-parametreli hareketten elde edilen özel Kayma-H_I, Oskülatör-H_I, Geodezik-H_I hareketleri incelenecektir.

Referanslar

[1] W. Blaschke and H. R. Müller, "Ebene kinematik," *Verlag Von R. Oldenbourg, München*, 1956.

[2] H. R. Müller, "Kinematik dersleri," *Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara*, 1963.

[3] E. S. Şuhubi, "Rijit cisimler dinamiği," *İstanbul Teknik Üniversitesi, Fatih Yayınevi*, 1981.

[4] F. Özer, "İki-parametreli hareketlerin kinematik analizi," *Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Elazığ*, 1992.

[5] M. Kale, "2-parametreli hareketlerin lorentz uzayında karşılıkları," *Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Çanakkale*, 2000.

[6] F. Yeşiltaş, "2-parametreli düzlemsel hareketler," *Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul*, 2011.

[7] O. Bottema and B. Roth, "Theoretical kinematics," *vol. 24 of North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York*, 1979.

[8] M. M. Stanisic and G. R. Pennock, "The canonical inverse velocity and acceleration solutions of a planar two link open chain," *International Journal of Robotics Research*, vol. 5, no. 2, pp. 82–90, 1986.

[9] M. K. Karacan, "İki parametreli hareketlerin kinematik uygulamaları," *Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara*, 2004.

[10] M. K. Karacan and Y. Yaylı, "General two parameter motion," *Algebras, Groups and Geometries*, vol. 22, no. 1, pp. 137–144, 2005.

[11] M. K. Karacan and Y. Yaylı, "Special two parameter motion," *Mathematical and Computational Applications*, vol. 10, no. 1, pp. 27–34, 2005.

[12] M. K. Karacan and Y. Yaylı, "Special two parameter motion in lorentzian plane," *Thai Journal of Mathematics*, vol. 2, no. 2, pp. 239–246, 2004.

[13] M. K. Karacan and Y. Yaylı, "On the ınstantaneous screw axes of two parameter motion," *Facta Universitatis Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics*, vol. 6, no. 1, pp. 81–88, 2007.

[14] M. K. Karacan and L. Kula, "On the ınstantaneous screw axes of two parameter motion in lorentzian space," *Scientia Magna*, vol. 5, no. 1, pp. 64–71, 2009.

[15] M. Çelik, "İki parametreli homotetik hareketler ve uygulamaları," *Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya*, 2013.

[16] D. Ünal, M. Çelik, and M. A. Güngör, "On the two parameter motions in the complex plane," *U.P.B. Sci. Bull., Series A*, vol. 77, no. 2, pp. 185–194, 2015.

[17] D. Ünal, M. Çelik, and M. A. Güngör, "On the two parameter homothetic motions in the complex plane," *TWMS J. Pure Appl. Math*, vol. 4, no. 2, pp. 204–214, 2013.

[18] M. Çelik and M. A. Güngör, "Two parameter hyperbolic motions," *2st International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, Sarajevo*, 26–29 August 2013.

[19] M. Çelik, D. Ünal, and M. A. Güngör, "On the two-parameter lorentzian homothetic motions," *Advances in Difference Equations*, vol. 42, pp. 1–20, 2014.

[20] M. Çelik and M. A. Güngör, "Hiperbolik düzlemde iki parametreli homotetik hareketler üzerine bir çalışma," *Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, Beykent Üniversitesi*, vol. 7, no. 2, pp. 1–20, 2014.

[21] M. Çelik and M. A. Güngör, "Two parameter motions on the galilean plane," *3rd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, Vienna-Australia*, pp. 399–411, 25-28 August 2014.

[22] W. Blaschke, "Vorlesungen uber ıntegralgeometrie ı, ıı," *Chelsea Publishing Company, Newyork*, 1949.

[23] G. S. Birman, "Crofton's and poincare's formulas in the lorentzian plane," *Geometriae Dedicate*, vol. 15, no. 4, pp. 399–411, 1984.

[24] L. A. Santaló, "Integral geometry and geometric probability, 2nd edition," *Cambridge University Press, Cambridge, New York*, 2004.

[25] G. S. Birman and K. Nomizu, "Trigonometry in lorentzian geometry," *Physics Essays*, vol. 91, no. 9, pp. 543–549, 1984.

[26] A. A. Ergin, "On the one-parameter lorentzian motion," *Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara Series A*, vol. 40, pp. 59–66, 1991.

[27] A. A. Ergin, "Three lorentzian planes moving with respect to one another and pole points," *Commun. Fac. Sci.Univ.Ank. Series A*, vol. 41, pp. 79–84, 1992.

[28] P. Lounesto, "Clifford algebras and spinors," *Cambridge University Press, London Mathematical Society Lecture Note Series*, 2001.

[29] C. Ranzan, "The lorentz transformations applied to aether-space," *Physics Essays*, vol. 23, no. 3, p. 520, 2010.

[30] S. Sternberg, "Semi reimann geometry and general relativity," 2003. [Online]. Available: `http://www.math.harvard.edu/~shlomo/docs/semi_riemannian_geometry.pdf`.

[31] E. Nešović and M. Petrovic Torgasev, "Some trigonometric relations in the lorentzian plane," *Kragujevac J. Math.*, vol. 25, pp. 219–225, 2003.

[32] E. Nešović, "Hyperbolic angle function in the lorentzian plane," *Kragujevac J. Math.*, vol. 28, pp. 139–144, 2005.

[33] J. G. Ratcliffe, "Foundation of hyperbolic manifolds," *Springer, Second Edition*, 2006.

[34] S. Birman, "Support functions and ınteqral formulas in the lorentzian plane," *Journal of Geometry*, vol. 72, pp. 11–17, 2001.

[35] G. Y. Şentürk and S. Yüce, "A geometric aspect of the two-parameter planar lorentzian motions," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2018, Article ID=7021310, 11 pages, 2018.

[36] G. Sobczyk, "The hyperbolic number plane," *The College Mathematics Journal*, vol. 26, no. 4, pp. 268–280, 1995.

[37] A. E. Motter and M. A. F. Rosa, "Hyperbolic calculus," *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol. 8, no. 1, pp. 109–28, 1998.

[38] S. Yüce and N. Kuruoğlu, "One-parameter plane hyperbolic motions," *Advances in Applied Clifford Algebras*, vol. 18, no. 2, pp. 279–285, 2008.

[39] G. Y. Şentürk and S. Yüce, "On densities of sets of points and non-null lines under the two-parameter planar lorentzian motions," *hakem incelemesinde*, 2019.

[40] S. Yüce and N. Kuruoğlu, "Cauchy formulas for enveloping curves in the lorenzian plane and lorentzian kinematics," *Results in Mathematics*, vol. 54, pp. 199–206, 2009.

Tezden Üretilmiş Yayınlar

İletişim Bilgileri: ysacli@yildiz.edu.tr, yelizsacli@gmail.com

Makale

1. G. Y. Şentürk, S. Yüce, "A geometric aspect of the two-parameter planar Lorentzian motions", Mathematical Problems In Engineering, Volume 2018, Article ID 7021310, 11 pages.

Proje

1. YTÜ-BAP (Yıldız Teknik Üniversitesi, Bilimsel Araştırma Projeleri), FDK-2018-3320, Düzlemsel 2-Parametreli Hareketler, Doktora, Araştırmacı.